Runge-Kutta-4

May 14, 2019

1. Was wollen wir machen?
   - Lösen einer DGL 1. Ordnung: $\dot{x} = f(x,t)$
   - numerisch, mit Schrittweise h
   - möglichst geringer Fehler
   - angemessener Rechenaufwand
2. Wie wollen wir das Erreichen?
   - Ansatz:
     $$x_{n+1} = x_n + h \cdot \sum_{i=1}^{m} c_i\, k_i, \tag{1}$$
     wo $k_i = f(x_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j, t_n + \alpha_i h)$
   - Aber was ist c_i, α_i, β_{ij}?
   - Dazu Taylorn von Steigung zwischen $(x(t_n), t_n)$ und $(x(t_n+h), t_n+h)$ bis zur Ordnung m
     $\rightarrow$ Fehlerordnung $\mathcal{O}(h^{m+1})$
   - Ansatz Taylorn
     $\rightarrow$ Koeffizientenvergleich (ab 2. Ordnung unbestimmtes Gleichungssystem)
   - Butcher-Tabellen:

     $\Rightarrow$ 1. Ordnung: Eulerverfahren: $x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n, t_n)$
     2. Ordnung: Heunverfahren: $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n,t_n) + f(x_n + h \cdot f(x_n,t_n), f(x_n,t_n))\right]$
     4. Ordnung: Runge-Kutte-4:
     $$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2}$$

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

3. Warum 4. Ordnung?
    - Butcher-Barriere: Für $m \geq 5$ zu großer Rechenaufwand im Verhältnis zur Genauigkeit.