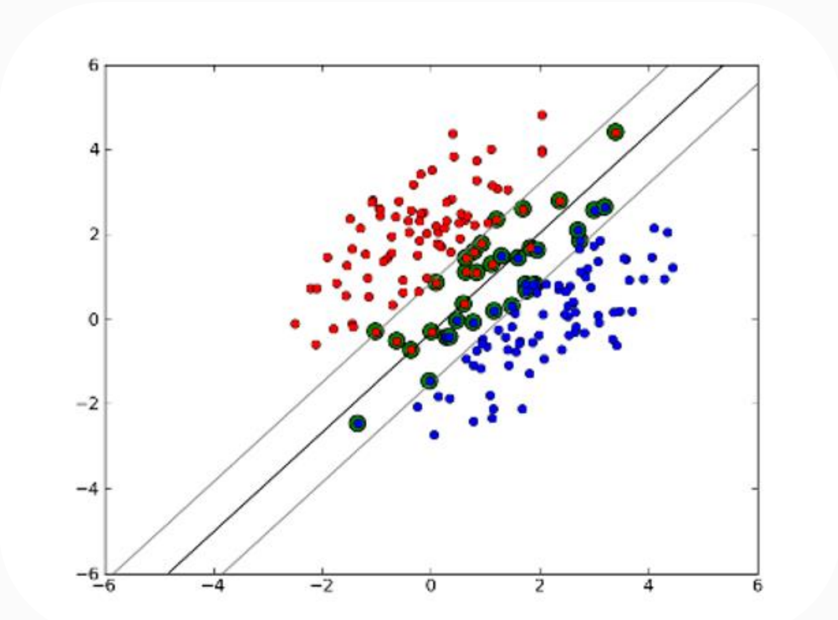
Метод опорных векторов в линейно-неразделимом случае

Skillbox

Елена Кантонистова

Линейно-неразделимая выборка

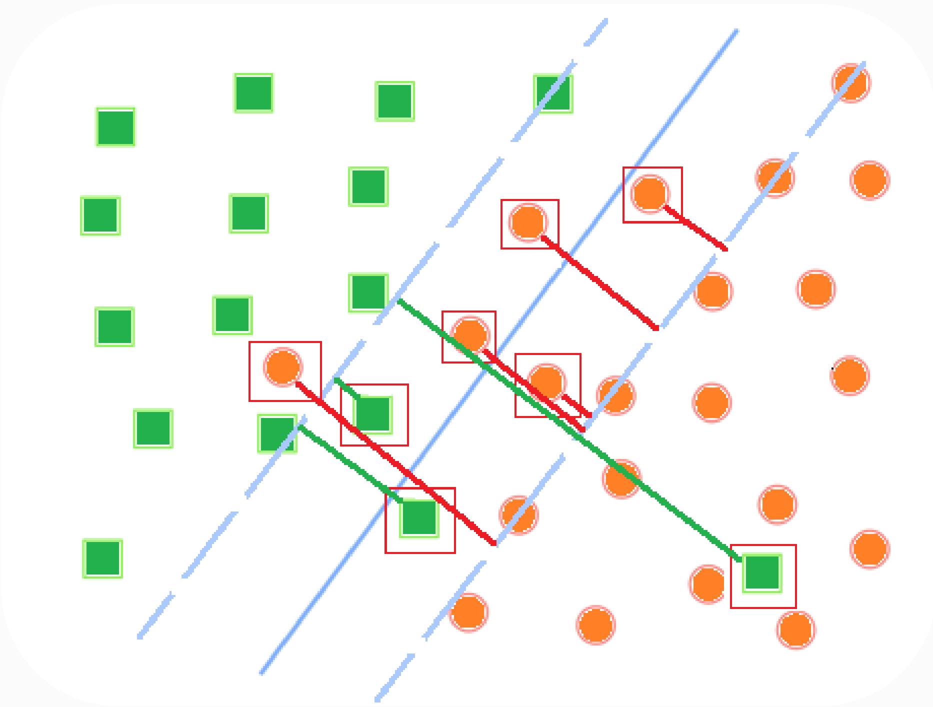
- Не можем безошибочно решить задачу линейным классификатором, поэтому будут объекты, попадающие внутрь разделяющей полосы и/или вне полосы, но не в свой класс



Изображение: [Линейно-неразделимая выборка]

Штрафы

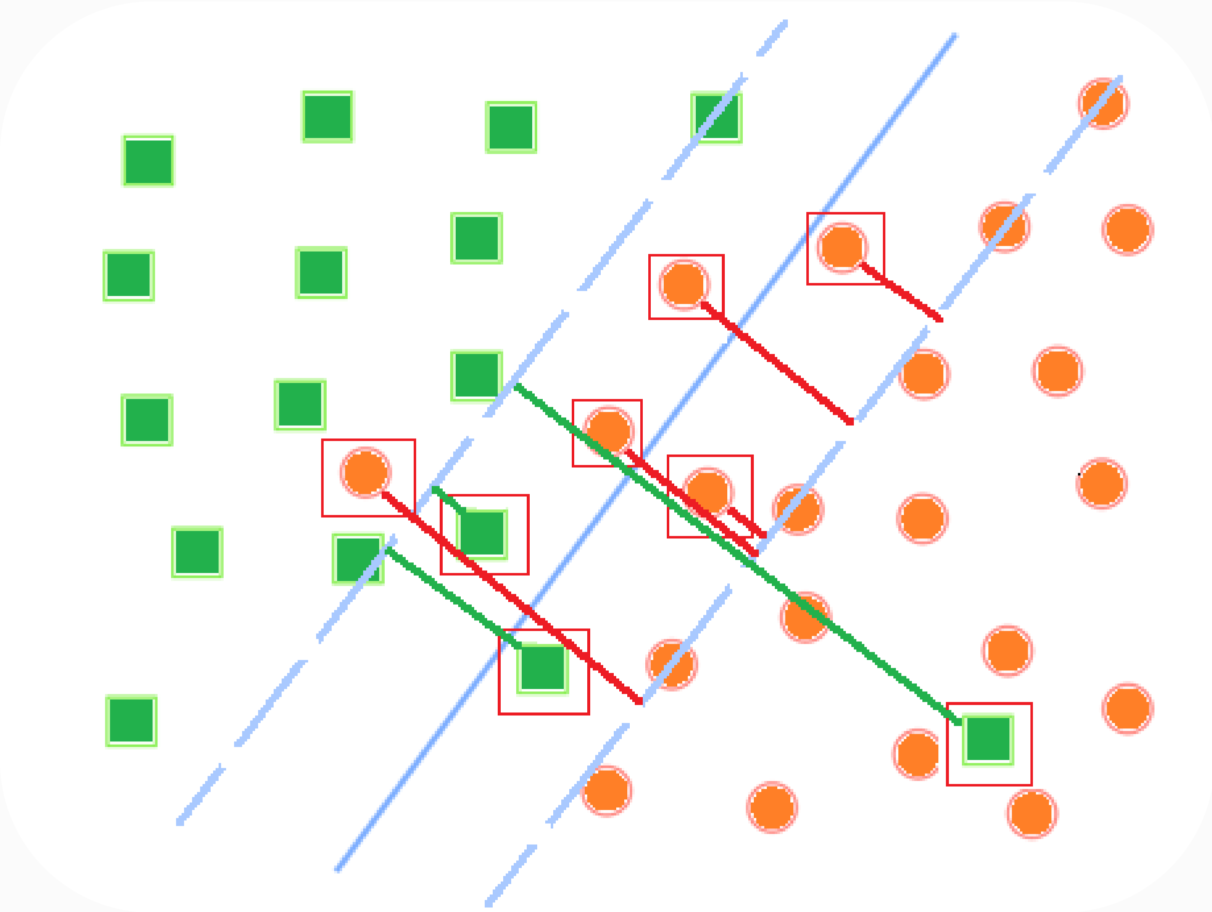
- Вы штрафуете объекты, попадающие внутрь разделяющей полосы или вне её, но не в свой класс
- Чем дальше находится объект от границы полосы в сторону не своего класса, тем больше штраф



Все объекты, которые мы штрафуем, называются опорными векторами.

Штрафы

- Цель метода опорных векторов — получить наиболее уверенный в предсказаниях классификатор, поэтому необходимо минимизировать сумму штрафов на объектах



Метод опорных векторов

- Максимизируем ширину разделяющей полосы

$$\frac{||w||^2}{2} \to \min_w$$

- Минимизируем сумму штрафов на объектах

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \to \min_{\xi_1,\dots,\xi_n}$$

где ξi - штраф на i-м объекте (он равен 0 для объектов, которые не штрафуем).

Метод опорных векторов

- Максимизируем ширину разделяющей полосы

$$\frac{||w||^2}{2} \to \min_{w}$$

- Минимизируем сумму штрафов на объектах

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \to \min_{\xi_1,\dots,\xi_n}$$

Объединим эти задачи в одну

$$\frac{||w||^2}{2} + C\sum_{i=1}^{n} \xi_i \to \min_{w,\xi_1,\dots,\xi_n}$$

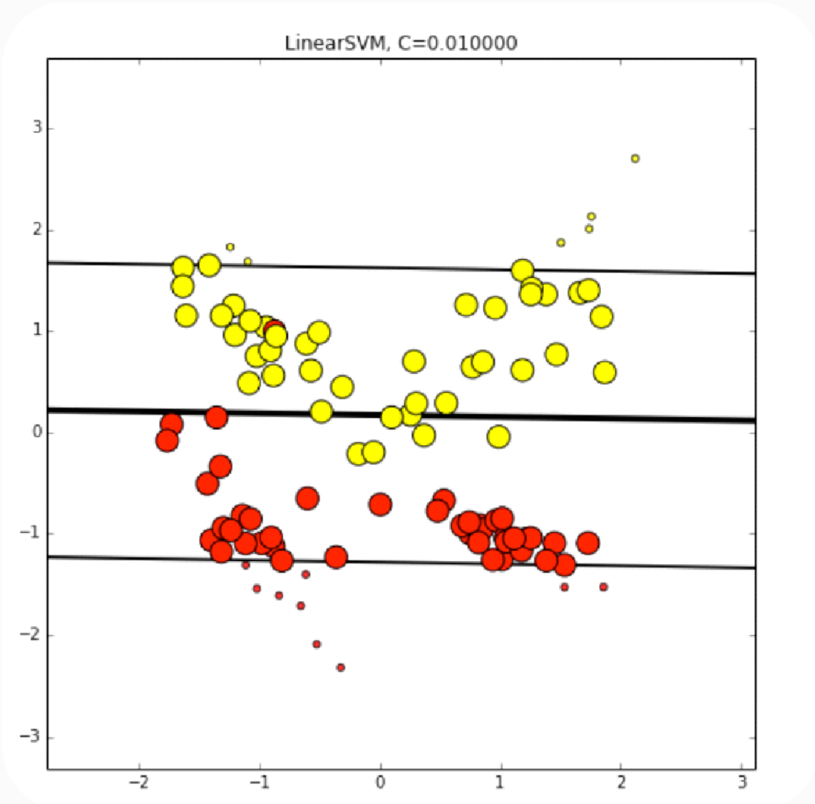
C – гиперпараметр, регулирующий силу штрафов.

Влияние C

- Задача метода опорных векторов:

$$\frac{||w||^2}{2} + C\sum_{i=1}^{n} \xi_i \to \min_{w,\xi_1,\dots,\xi_n},$$

C — гиперпараметр, регулирующий силу штрафов

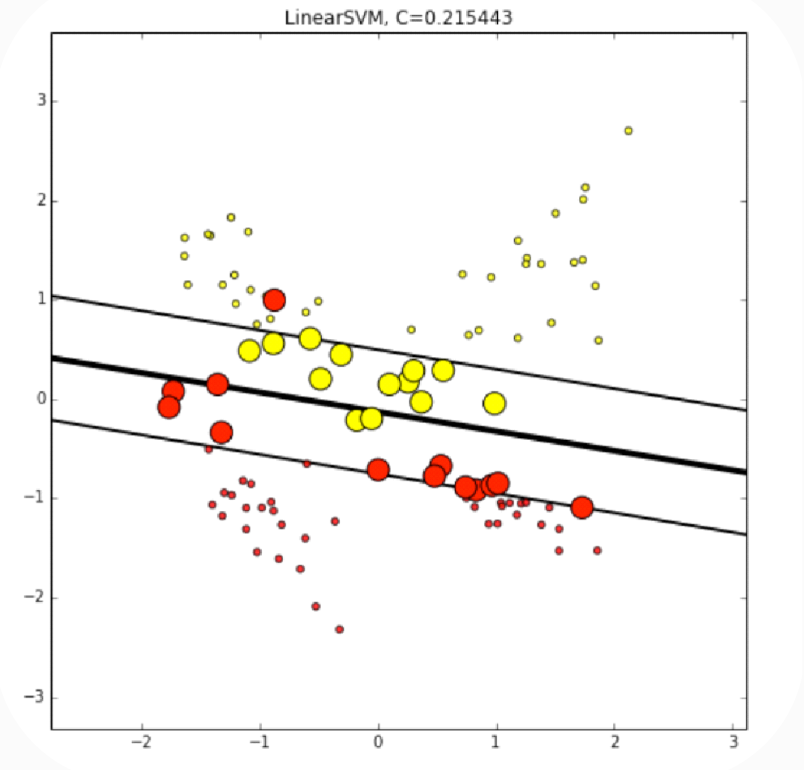


Влияние C

- Задача метода опорных векторов:

$$\frac{||w||^2}{2} + C\sum_{i=1}^{n}\xi_i \to \min_{w,\xi_1,\dots,\xi_n} \quad ,$$

C — гиперпараметр, регулирующий силу штрафов

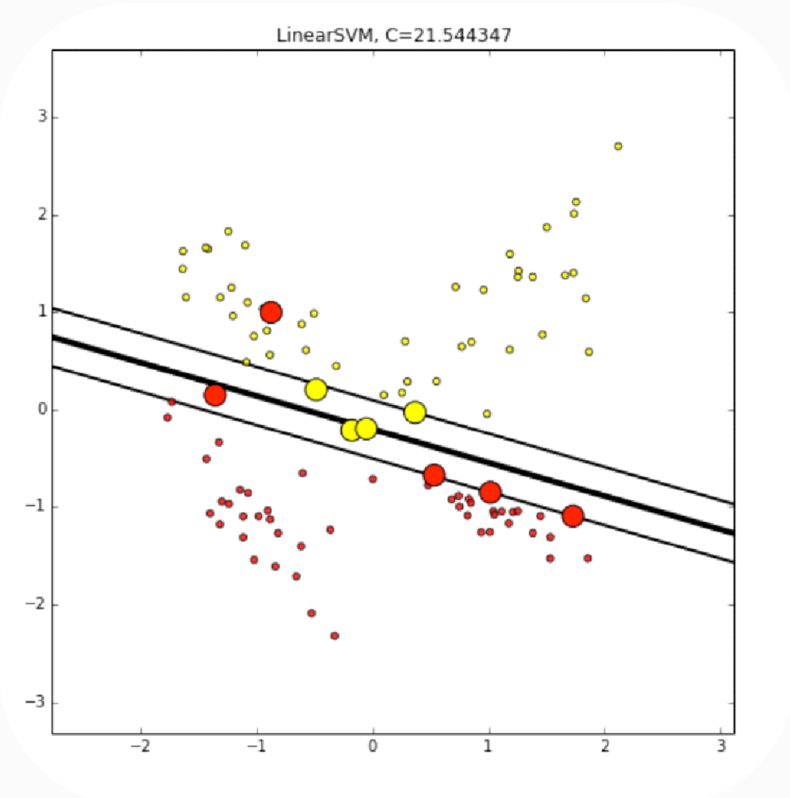


Влияние C

- Задача метода опорных векторов:

$$\frac{||w||^2}{2} + C\sum_{i=1}^{n}\xi_i \to \min_{w,\xi_1,\dots,\xi_n} \quad ,$$

C — гиперпараметр, регулирующий силу штрафов



Другой вид функции потерь

- Задача метода опорных векторов

$$\frac{||w||^2}{2} + C\sum_{i=1}^{n}\xi_i \to \min_{w,\xi_1,\ldots,\xi_n}$$

  C — гиперпараметр, регулирующий силу штрафов

- Задачу можно переписать в виде

$$\frac{1}{2C}||w||^2 + \sum_{i=1}^{n}\max(0,1 - M_i) \to \min_{w}$$

Другой вид функции потерь

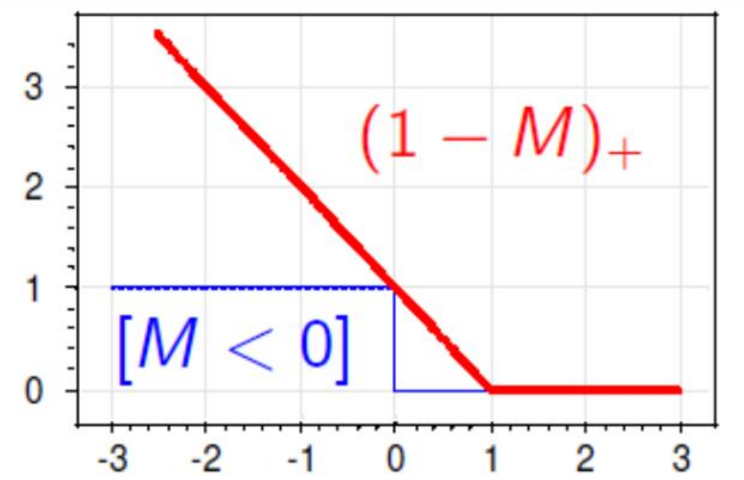
- Задачу можно переписать в виде

$$\frac{1}{2C}||w||^2 + \sum_{i=1}^{n} \max(0, 1 - M_i) \rightarrow \min_w$$

Эту формулу можно интерпретировать как минимизацию функции потерь

$$L(M) = \max(0, 1 - M) = (1 - M)_+$$

с добавлением L2-регуляризации!



Резюме

- При обучении метода необходимо максимизировать ширину разделяющей полосы и одновременно минимизировать сумму штрафов на объектах
- Задача оптимизации:

$$\frac{1}{2C}\left||w|\right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \max(0{,}1 - M_i) \to \min_{w}$$

- Именно в такой постановке метод реализован в Python. Для достижения оптимального качества рекомендуется подбор гиперпараметра C