수학 요점정리

해당 요점정리는 인쇄가 가능한 파일의 형태로도 제공하고 있습니다. 여기서 다운로드 할 수 있습니다.

1학기 2회고사 범위로 이동하기

실수와 그 계산

뜻과 표현

제곱근: 제곱의 반대

a의 제곱근: 제곱해서 a가 되는 수, 어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, 즉 $x^2 = a$일때의 x

- $a > 0$ 이면 양의 제곱근과 음의 제곱근으로 2개, 이 둘은 절댓값은 서로 같고 부호는 반대
- $a = 0$ 이면 제곱근은 0 하나
- $a < 0$ 이면 제곱해서 음수가 되는 수는 없으므로 생각하지 않음

$\sqrt{a} \Rightarrow$ 제곱근 a 또는 루트 a
a 의 양의 제곱근 $= \sqrt{a}$
a 의 음의 제곱근 $= -\sqrt{a}$
이 둘을 한번에 $\pm\sqrt{a}$라고 쓰기도 한다.

성질$(a \geq 0)$

- a의 제곱근은 $a \rightarrow \sqrt{a}, \ -\sqrt{a}$
  $\sqrt{a}, \ -\sqrt{a}$의 제곱은 각각$\sqrt{a}, \ -\sqrt{a} \rightarrow (\sqrt{a})^2 = a, \ (-\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

대소 관계

1. $a < b$이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$
2. $\sqrt{a} < \sqrt{b}$이면 $a < b$

> 제곱근이 양수일때는 근호 안의 숫자가 클수록 크고, 음수일때는 근호 안의 숫자가 작을수록 크다.

무리수와 실수

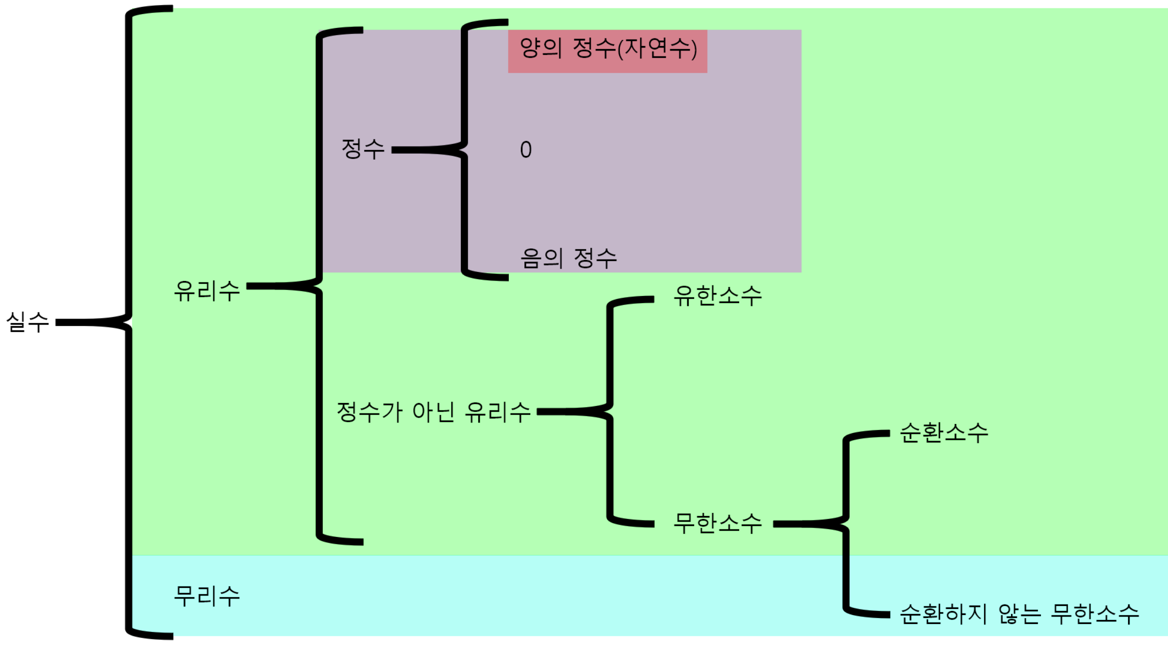
무리수

- 유리수가 아닌 수
- $\frac{m}{n}$(단, m, n은 정수, $n \neq 0$)의 꼴로 나타낼 수 없는 수
- 순환소수가 아닌 무한소수

실수

유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 한다.

수 체계



> 유리수이면서 무리수인 수는 존재하지 않는다.

제곱근표

제곱근표는 제곱근의 값을 구해서 표로 만들어 놓은것.

가로줄은 처음 두 자리수에, 세로줄은 마지막 자리수에 해당한다.

가로줄에는 0 ~ 9까지, 세로줄에는 1.0 ~ 99까지의 수가 있다.

제곱근표 예시

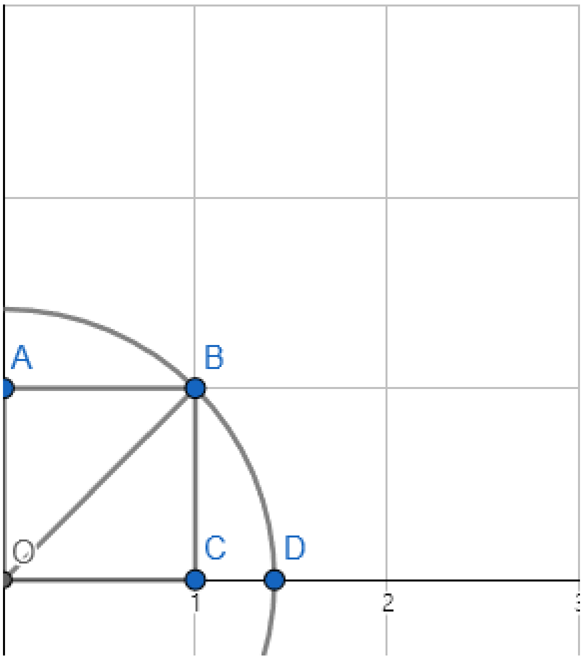
수	0	1	2	3
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153

예를 들어, $\sqrt{1.32}$의 값을 구하고자 한다면, 처음 두 자리수인 1.3에 해당하는 행을, 마지막 자리수인 2에 해당하는 열을 찾고, 그 행과 열이 만나는 곳의 수를 찾는다.

위 방식대로 찾으면 $\sqrt{1.32} = 1.149$ 이다.

무리수를 수직선 위에 표시

다음과 같이 직각삼각형에서 피타고라스의 정리를 이용하면 무리수를 수직선위에 표시할 수 있다.



$\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{BC}^2$

$\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$\overline{OB} = \sqrt{2}$

$\overline{OB}$와 $\overline{OD}$는 한 호의 반지름이므로 길이가 같다.

$\overline{OD} = \sqrt{2}$

$D(\sqrt{2})$

실수의 대소관계

수직선

- 실수는 수직선 위의 한 점에 대응한다.
- 서로 다른 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 있다.
- 실수에 대응하는 점들로 수직선을 완전히 메울 수 있다.
- 유리수만이나 무리수만으로 수직선을 완전히 메울 수 없다.

대소 관계

두 실수 a, b에 대해

- $a - b > 0$이면 $a > b$
- $a - b = 0$이면 $a = b$
- $a - b < 0$ 이면 $a < b$

제곱근의 곱셈과 나눗셈

제곱근의 곱셈

$a > 0, b > 0$일때,

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}$
- $m\sqrt{a} \times n\sqrt{b} = mn\sqrt{ab}$

제곱근의 나눗셈

$a > 0,\ b > 0$일때,

- $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
- $m\sqrt{a} \div n\sqrt{b} = \frac{m}{n}\sqrt{\frac{a}{b}}$

분모의 유리화

분모에 무리수가 있을 때, 분자와 분모에 같은 수를 곱해서 분모를 유리수로 만드는 것.

- 분모에 제곱근만 있을 때: 분모의 수를 분자와 분모에 곱해준다. (예: $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$)
- 분모에 제곱근과 정수의 곱이 있을 때: 분모의 수 중 제곱근 부분을 분자와 분모에 곱해준다. (예: $\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3 \times 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$)
- 분모에 무리수의 합과 차가 있을 때: 분모의 수에서 부호만 반대인 수를 분자와 분모에 곱한다. (합차공식 이용)
    - (예1: $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2 \times (\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5}) \times (\sqrt{3}-\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{3}+\sqrt{5}$)
    - (예2: $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2 \times (\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5}) \times (\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{3}-\sqrt{5}$)

제곱근의 덧셈과 뺄셈

근호 안의 수가 같은 수를 동류항처럼 취급하여 계산한다.

- $m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}$
- $m\sqrt{a} - n\sqrt{a} = (m-n)\sqrt{a}$

제곱근의 분배법칙

> 분배법칙: $a(b+c) = ab + ac$

제곱근에도 위와 같은 분배법칙이 성립한다.

$\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7}) = \sqrt{3} \times \sqrt{5} + \sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{15} + \sqrt{21}$

무리수의 정수부분과 소수부분

$1 < \sqrt{2} < 2$이므로, $\sqrt{2}$의 정수부분은 1, 소수부분은 $\sqrt{2}-1$이다.

> (무리수) = (정수 부분) + (소수 부분), (소수 부분) = (무리수) - (정수 부분)

다항식의 곱셈과 인수분해

인수분해의 뜻

인수분해: 어떤 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱과 거듭제곱으로 나타내는 것

인수: 인수분해를 했을 때의 각각의 다항식

- 인수분해: (하나의 다항식) → (식의 곱), 전개의 반대 과정
  (예: $x^2 + 5x + 4 \rightarrow (x + 4)(x + 1)$)
- 전개: (식의 곱) → (하나의 다항식), 인수분해의 반대 과정
  (예: $(x + 4)(x + 1) \rightarrow x^2 + 5x + 4$)

인수

인수를 모두 구하는 방법:

1. 모든 식의 인수: 1
2. 인수분해가 된 상태에서 괄호로 묶인 것과 괄호 밖의 문자와 숫자
3. 2의 것들을 서로 곱한것
4. 3의 것들을 서로 곱한것
   ...

예: $x^2 + 5x + 4 \rightarrow (x + 4)(x + 1)$ 에서 인수를 구하는 방법:

1. 모든 식의 인수: 1
2. 하나의 곱으로 이루어진 인수: $(x + 4)$, $(x + 1)$
3. 두 개의 곱으로 이루어진 인수: $(x + 4)(x + 1)$

총 4개.

인수의 개수: 소인수분해와 비슷한 방법으로 구하기, 각 인수들의 (지수 + 1)들의 곱

예: $x^2 + 5x + 4 \rightarrow (x + 4)(x + 1)$ 에서 인수의 개수를 구하는 방법:

$(x + 1)$의 지수: 1

$(x + 4)$의 지수: 1

$(x + 1)(x + 4)$의 인수의 개수: $(1 + 1)(1 + 1) = 4$개

공통인수를 이용한 인수분해

공통인수: 모든 항에 공통으로 들어있는 인수

공통인수를 이용한 인수분해: 분배법칙을 이용하여 공통인수를 묶어내어 인수분해 하기.

$ma + mb = m(a + b)$

인수분해 공식

완전제곱식

완전제곱식: 다항식의 제곱으로 된 식 또는 다항식의 제곱에 상수가 곱해진 식

$a^2 \pm 2ab + b^2$의 인수분해

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

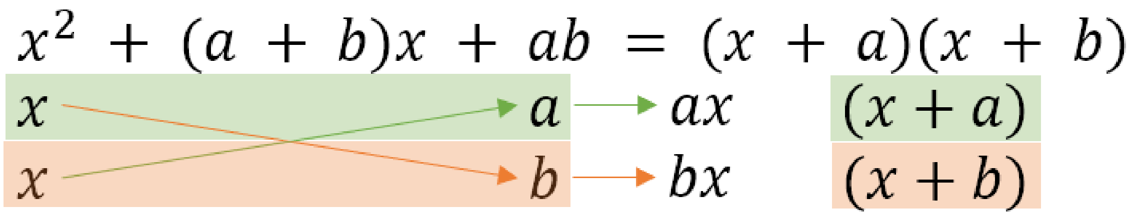
합차공식

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(제곱) - (제곱)의 꼴일 때 이용한다.

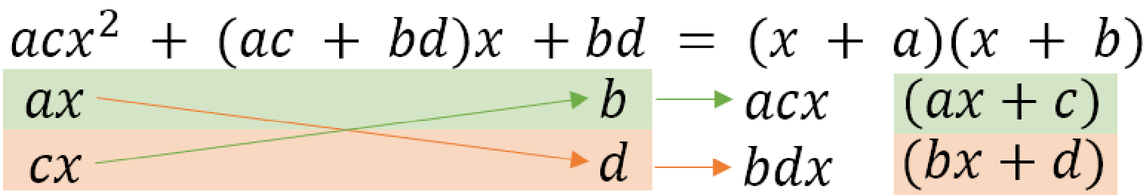
이차항의 계수가 1

1. 먼저 이차식을 쓴다.
2. 이차항의 아래에 문자를 세로로 두 번 쓴다. 곱해서 상수항이 나오는 두 수도 세로로 상수항 아래에 쓴다.
3. 이차항과 상수항 아래의 숫자와 문자를 X자 방향으로 곱한다.
4. 곱한 결과를 더해서 일차항이 나오는지 확인한다.
5. 만약 곱해서 더한 결과가 일차항과 같다면 같은 줄에 있는 항들을 괄호로 묶는다.
   곱해서 더한 결과가 일차항과 다르다면 2번으로 돌아가 곱해서 상수항이 나오는 다른 수를 적고 다시 반복한다.
6. 괄호로 묶은 두 식을 정리해서 써주면 인수분해가 끝난다.



이차항의 계수가 1이 아닐 때

1. 먼저 이차식을 쓴다.
2. 이차항의 아래에 문자를 세로로 두 번 쓰는데, **곱해서 이차항의 계수가 나오는 두 수도 반드시 적어준다.** 곱해서 상수항이 나오는 두 수도 세로로 상수항 아래에 쓴다.
3. 이차항과 상수항 아래의 숫자와 문자를 X자 방향으로 곱한다.
4. 곱한 결과를 더해서 일차항이 나오는지 확인한다.
5. 만약 곱해서 더한 결과가 일차항과 같다면 같은 줄에 있는 항들을 괄호로 묶는다.
   곱해서 더한 결과가 일차항과 다르다면 2번으로 돌아가 곱해서 상수항이 나오는 두 수를 적고, **곱해서 이차항의 계수가 나오는 두 수도 적어** 다시 반복한다.
6. 괄호로 묶은 두 식을 정리해서 써주면 인수분해가 끝난다.



인수분해의 활용

수의 계산

위의 인수분해 공식을 사용해서 식을 간단히 정리한 후 계산한다.

예시1 - 공통인수를 활용한 인수분해

$25 \times 32 + 25 \times 28$ 의 값을 구하여라.

풀이

$25 \times 32 + 25 \times 28$ 의 경우 직접 값을 구해서 덧셈을 하면 구할 수는 있겠지만, 인수분해를 이용하면 더 쉽고 빠르게 값을 구할 수 있다.

위 식에서는 두 항에 24라는 공통인수가 있으므로, 이 공통인수를 인수분해 해서 구하자.

$25 \times 32 + 25 \times 28$
$= 25(32 + 28)$
$= 25 \times 60$
$= 1500$

예시2 - 합차공식를 활용한 인수분해

$2020^2 - 2019^2$의 값을 구하여라.

풀이

$2020^2 - 2019^2$의 경우에도 직접 값을 구해서 덧셈을 하면 구할 수는 있겠지만, 인수분해 공식을 이용하면 더 쉽고 빠르게 값을 구할 수 있다.

위 식에서는 $A^2 - B^2$의 꼴이므로 $(A + B)(A - B)$로 변형하여 구해보자.

$2020^2 - 2019^2$
$= (2020 + 2019)(2020 - 2019)$
$= 4039 \times 1$
$= 4039$

식의 값

식을 간단하게 정리한 후 문자의 값을 대입한다.

식을 간단하게 정리하기 어려우거나 문자의 값을 바로 대입해도 계산하기 까다로울 경우, 문자의 값을 적절히 변형하여 계산한다.

예시 1

$x = 17$일때 $x^2 + 34x + 273$의 값을 구하여라.

풀이

x에 17을 바로 대입해도 되겠지만, 주어진 식을 먼저 인수분해 하면 더 쉽게 식의 값을 구할 수 있다.

$x^2 + 34x + 273$
$= (x + 21)(x + 13)$

이제, $= (x + 21)(x + 13)$ 에 $x = 17$을 대입해보자.

$(17 + 21)(17 + 13)$
$= 38 \times 30$
$= 1140$

예시 2

$x = 5 + \sqrt{7}$일때, $x^2 - 10x + 30$의 값을 구하여라.

풀이

우선 $x^2 - 10x + 30$ 이 식은 인수분해가 안된다. 또한 x의 값을 바로 대입하는것 또한 까다로우므로 이럴 때는 x의 값을 적절히 변형하여 구해야 한다.

$x = 5 + \sqrt{7}$ 이므로, $x - 5 = \sqrt{7}$이 성립한다.
양변을 제곱하면
$x^2 - 10x + 25 = 7$, 양변에 5를 더하면
$x^2 - 10x + 30 = 12$

이차방정식의 뜻과 이차방정식의 근

이차방정식의 뜻

뜻: 최고차항의 차수가 2인 **방정식**

이차방정식은 일반적으로 아래와 같은 모양이며, 아래와 같이 나타낼 수 있어야 한다.

$ax^2 + bx + c = 0$ (단, $a,\ b,\ c$는 상수, $a \neq 0$)

위의 형태를 이차방정식의 **일반형**이라고 한다.

이차방정식의 근

$ax^2 + bx + c = 0$이 참이 되도록 하는 x의 값

이차방정식 풀이와 활용

인수분해를 활용한 이차방정식의 풀이

$AB = 0$성질(?)을 이용한다.

$AB = 0$이 성립하려면 $A = 0$이어도 되고, $B = 0$이어도 된다. 아니면 $A = 0,\ B = 0$처럼 둘다 0이어도 된다.

이것을 $A = 0$ **또는** $B = 0$이라고 한다.
이차방정식을 일반형의 형태로 만들고, 인수분해 하면 $AB = 0$의 꼴로 바뀌는데, $A = 0$일 때의 미지수의 값, $B = 0$일 때의 미지수의 값이 이차방정식의 근이 된다.

예시

$x^2 + x - 12 = 0$의 근을 구하여라.

풀이

$x^2 + x - 12$는 $(x-3)(x+4)$로 인수분해가 가능하다.

위 성질에 따라 $x - 3 = 0$또는 $x + 4 = 0$이 되어야 한다.

따라서, $x = 3$또는 $x = -4$가 되어야 하고, 이차방정식의 근은 $x = 3$또는 $x = -4$ 이다.

이차방정식의 중근의 뜻

위 [인수분해를 활용한 이차방정식의 풀이]에서 A와 B가 같아 $A^2 = 0$과 같은 완전제곱식의 형태가 되면 $A = 0$이 중복되어, 중복된 근을 갖게 되는데, 이 근을 **이차방정식의 중근**이라고 한다.

이차방정식이 중근을 가질 조건

이차항의 계수가 1일 때

$(x+a)^2$를 전개하면 $x^2 + 2ax + a^2$이다. 여기서 일차항과 상수항의 관계를 찾을 수 있는데, $(\frac{2a}{2})^2 = a$가 성립함을 알 수 있다.

즉, 이차항의 계수가 1인 완전제곱식에서는 **일차항의 계수를 2로 나눈 값을 제곱했을때 상수항과 같다**는 성질이 있다.

예시 1

$x^2 + ax + 36 = 0$이 중근을 가질 때 a의 값과 그 근은? (단, $a < 0$)

풀이

일차항의 계수의 절반이 상수항과 같아야 하므로, 아래와 같이 풀 수 있다.

$(\frac{a}{2})^2 = 36$
$\frac{a}{2} = \pm 6$
$a = \pm 12$
$\therefore a = 12(\because a > 0)$

이차항의 계수가 1일 때

양변을 이차항의 계수로 나눈 후 위 방법을 이용한다.

예시 1

$3x^2 - bx + 27 = 0$이 중근을 가질 때 b의 값과 그 근은? (단, $b > 0$)

풀이

먼저 양변을 이차항의 계수인 3으로 나눠주자.

$x^2 - \frac{b}{3}x + 9 = 0$

일차항의 계수의 절반이 상수항과 같아야 한다는 성질을 이용하자.

$(\frac{b}{3} \times \frac{1}{2})^2 = 9$
$(\frac{b}{6})^2 = 9$
$\frac{b}{6} = \pm 3$
$b = \pm 18$
$\therefore b = 18(\because b > 0)$