Série 1 2017-2018

Faculté d'Electronique er d'Informatique
Département d'Informatique
MASTER 1 : MIV | Série N°=1 | USTHB : 03/18

EXERCICE 1 : Soit la matrice $A \in M_4(R)$ suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $v={}^t(1, \ -1, \ -1, \ 1)$ est-il un vecteur propre de la matrice A ?.

EXERCICE 2 : Soient X une matrice de données de type (n, p) et Y sa matrice de dispersion.

1) Donner l'expression de Y.
2) Parmi les expressions matricielles suivantes, mentionner celles qui ne sont pas correctes : 1) ${}^tX.Y$, 2) ${}^tXD_pY$, 3) $D_p(X+{}^tX)$, 4) XD_p , 5) D_pX.
   Où D_p représente la matrice des poids des données de la matrice X .
3) Calculer le centre de gravité de la matrice Y .

EXERCICE 3 : Soit la matrice des de corrélation associée à 6 variables :

Variales	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6
X^1	1	-0.007	0.576	0.858	0.212	0.816
X^2	-0.007	1	0.221	-0.152	-0.110	-0.144
X^3	0.576	0.221	1	0.488	0.025	0.441
X^4	0.858	-0.152	0.488	1	0.262	0.930
X^5	0.212	-0.110	0.025	0.262	1	0.342
X^6	0.816	-0.144	0.441	0.930	0.342	1

1) Quelles sont les propriétés de cette matrice.
2) En examinant la matrice de corrélation, déterminer les relations les plus significatives.
3) Peut-on représenter (schématiser) ces relations. Si oui, donner ce schéma.

EXERCICE 4 : On considère la matrice de données X de type (7, 2) suivante:

$$X={}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le centre de gravité du nuage donné.
2) Déterminer la matrice centrée X_0.
3) Déterminer la matrice C des variances-covariances. En déduire l'inertie de ce nuage autour du centre de gravité.
4) Déterminer les valeurs propres de C ainsi que les axes principaux associés à ces valeurs propres.

EXERCICE 5 : On reprend les hypothèses de l'exercice 4.

1) Calculer les valeurs propres de la matrice ${}^tX_0.X$.
2) Calculer les valeurs propres de la matrice $X.{}^tX_0$.
3) Déterminer la droite de régression de X^2 prédite par X^1.
4) Représenter graphiquement le résultat précédent. .

Faculté d'Electronique er d'Informatique
Département d'Informatique
MASTER 1 : MIV Série N°=1 USTHB : 02/17

EXERCICE 1 :

1) Soit la matrice $A \in M_4(R)$ suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $v = {}^t(1, \ -1, \ -1, \ 1)$ est-il un vecteur propre de la matrice A ?.

2) Soit B une matrice réelle définie par : $B = A + {}^tA$. Où A est une matrice carrée réelle.

La matrice B possède-t-elle une base de vecteurs propres orthogonaux ?.

3) Soit A une matrice carrée d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & d \\ c & d & a \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs de a, b *et* c pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.

EXERCICE 2 : Soit A une matrice réelle symétrique définie positive.

1) Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.
2) Montrer que la matrice inverse de A est aussi symétrique définie positive.
3) Soient M une matrice symétrique définie positive et A une matrice symétrique. Montrer que les vecteurs propres de la matrice AM forment une base orthogonale.

EXERCICE 3 : Soient X une matrice de données de type (n, p) et Y sa matrice de dispersion.

1) Parmi les expressions matricielles suivantes, mentionner celles qui ne sont pas correctes : 1) ${}^tX.Y$,
   2) ${}^tXD_pY$,
   3) $D_p(X + {}^tX)$,
   4) XD_p ,
   5) D_pX.

   Où D_p représente la matrice des poids des données de la matrice X .
2) Donner l'expression de Y .
3) Calculer le centre de gravité de la matrice centrée : Y .

EXERCICE 4 : Soit la matrice des données suivante :

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}
10 & 10 & 10 & 8 & 8.04 & 9.14 & 7.46 & 6.58\\
8 & 8 & 8 & 8 & 6.95 & 8.14 & 6.77 & 5.76\\
13 & 13 & 13 & 8 & 7.58 & 8.14 & 12.74 & 7.71\\
9 & 9 & 9 & 8 & 8.81 & 8.77 & 7.11 & 8.84\\
11 & 11 & 11 & 8 & 8.33 & 9.26 & 7.81 & 8.47\\
14 & 14 & 14 & 8 & 9.96 & 8.10 & 8.84 & 7.04\\
6 & 6 & 6 & 8 & 7.24 & 6.13 & 6.08 & 5.25\\
4 & 4 & 4 & 19 & 4.26 & 3.10 & 5.39 & 12.50\\
12 & 12 & 12 & 8 & 10.84 & 9.13 & 8.15 & 5.56\\
7 & 7 & 7 & 8 & 4.82 & 7.26 & 6.42 & 7.91\\
5 & 5 & 5 & 8 & 5.68 & 4.74 & 5.73 & 6.89
\end{pmatrix}\\
\begin{array}{cccccccc} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 & x^8\end{array}\end{array}$$

1) Calculer la moyenne empirique et la variance des 8 variables de la matrice donnée. Prenez 6 chiffres décimaux.
2) Calculer les coefficients de corrélation des couples (x^1,x^5), (x^2,x^6), (x^3,x^7), (x^4,x^8). Que remarquez-vous ?.
3) Représenter graphiquement les individus dans l'espace $\Re^2$ des couples des variables : (x^1,x^5), (x^2,x^6), (x^3,x^7), (x^4,x^8). Interpréter les graphes obtenus.

EXERCICE 5 : On considère la matrice de données X de type (7, 2) suivante:

$$X={}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3 & 2 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

1) Calculer le centre de gravité du nuage donné.
2) Déterminer la matrice centrée X_0.
3) Déterminer la matrice C des variances-covariances. En déduire l'inertie de ce nuage autour du centre de gravité.
4) Déterminer les valeurs propres de C ainsi que les axes principaux associés à ces valeurs propres.

EXERCICE 6 : On reprend les hypothèses de l'exercice 5.

1) Calculer les valeurs propres de la matrice ${}^tX_0.X$.
2) Calculer les valeurs propres de la matrice $X.{}^tX_0$.
3) Déterminer la droite de régression de X^2 prédite par X^1.
4) Représenter graphiquement le résultat précédent. .

Solutions :

Exo 1 (Les deux séries) :

Analyse de données

Serie 1

Exercice 1 :

1. Soit la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de A ?

2. Soit B une matrice réelle définie par :

$B = A + {}^tA$ ou A une matrice réelle carrée

La matrice B possède-elle une base de vecteurs propres orthogonaux ?

3. Soit une matrice carrée d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & d \\ c & d & a \end{pmatrix}$$

Determinez les valeurs de a, b, d, c pour lesquel la matrice A est diagonalisée.

Solution :

Rappel : A une matrice d'ordre n, λ valeur propre de A ssi $\exists \vec{v} \neq O_n$ teq $A\vec{v} = \lambda \vec{v} \iff \lambda$ est racine du polynome caracteristique $P_A(x) = \det(A - x\,Id)$

determinant : Ex :

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5 \times 1 - 2 \times 1 = 3$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1) + 1(-5) + 2(-2) = -10$$

det

$$\det(A - x\,Id) = \begin{pmatrix} 1-x & -1 & 2 \\ 3 & 1-x & 1 \\ 5 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V est un vecteur propre associé a $\lambda = 2$

2) $B = A + {}^tA$

Theoreme :

Toute matrice symetrique réelle M de taille n admet une base orthogonale, de plus, il existe une matrice orthogonale U telque $U^{-1} M U = U^t M U$ soit diagonale (Autrement dit M est diagonalisable) $(U^{-1} = {}^tU)$

$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = B$

B est symetrique donc admet une base orthogonale.

3) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & d \\ c & d & a \end{pmatrix}$

A étant symetrique $(A^t = A)$ alors diagonalisable $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Exo 2 2017-2018 (Exo 3 2016-2017) :

Exo 3

Rappel :

Matrice de dispersion = Matrice centré.

Matrice centré : $A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$ on calcule la moyenne de chaque colonne $\bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$

$$C \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 & x_2 - \bar{x}_2 & \cdots & x_p - \bar{x}_p \\ \vdots - \bar{x}_1 & - \bar{x}_2 & & \vdots \\ \vdots - \bar{x}_1 & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

D_p de type (n,n)

Y " " (n,p)

X " " (n,p)

1) ${}^tX.Y \longrightarrow$ Possible .

$(p,n)\,(n,p)$

2) ${}^tX . D_p . Y \longrightarrow$ Possible .

$(p,n)\,(n,n)\,(n,p)$

$(p,n)\,(n,p)$

3) $D_p . (\underline{X + {}^tX}) \longrightarrow$ Pas Possible .

somme impossible

$(n,p) \neq (p,n)$

4) $X . D_p \longrightarrow$ Pas possible

$(n,p)\,(n,n)$

5) $D_p . X \longrightarrow$ Possible .

$(n,n)\,(n,p)$

2) Expression de Y :

$$Y = \begin{pmatrix} x_1^1 - \overline{x}_1 & \cdots & x_1^j - \overline{x}_j & \cdots & x_1^p - \overline{x}_p \\ x_2^1 - \overline{x}_1 & & x_2^j - \overline{x}_j & & x_2^p - \overline{x}_p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^1 - \overline{x}_1 & & x_n^j - \overline{x}_j & & x_n^p - \overline{x}_p \end{pmatrix}.$$

3) Calculer le centre de gravité :

$g = (\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots, \overline{Y}_p)$

Exo 2 2016-2017 :

Solution :

A est S.D.P (Symetrique Définie Positive)

1. $^tA = A$

2. D.P $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\langle AV, V\rangle}_{\text{produit scalaire}} > 0 \quad \forall\ v \neq 0_n$

$= {}^t v\, A v > 0$

1) λ valeur propre de A ssi

$\exists\ \vec{v} \neq 0_n$ teq $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

si v est vecteur propre associé à λ $\vec{v} \neq 0_n$

$\Rightarrow \langle Av, v\rangle > 0 \Rightarrow {}^t v A v > 0$

$\Rightarrow {}^t v \lambda v > 0 \Rightarrow \lambda\, {}^t v v > 0$

$\Rightarrow \lambda \|v\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$

2) $^t(A^{-1}) = A^{-1}$ à montrer

$A^{-1}) =$

$^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = Id$

$^t(A^{-1}) A = Id$. (On multiplie à droite par A^{-1})

$^t(A^{-1}) = A^{-1}$

Il faut montrer que A^{-1} est définie positive.

$\forall\ \vec{v} \neq 0_n$

$\langle A^{-1}v, v\rangle > 0$

On prend. $\langle AU, U\rangle > 0 \quad \forall\ \vec{u} \neq 0_n$ (car A est definie Positive)

$\boxed{U = A^{-1}V}$ car $\vec{v} \neq \vec{0}$ et A^{-1} est inversible.

$\forall V, \exists\ A(U) = \vec{v}$ $(AU = AA^{-1}v)$

$U \neq 0_n$

$^t(A^{-1}v) A (A^{-1}v) > 0 \Leftrightarrow {}^tv\, {}^t(A^{-1}) A A^{-1} v \Leftrightarrow {}^tv A^{-1} V > 0$

$\Leftrightarrow \langle A^{-1}V, V\rangle > 0$, A^{-1} Définie Positive .

(4).

3) M symetrique definie positive
A symetrique .

AM si V_1, V_2 deux vecteurs propres de la matrice .
AM alors $\langle V_1, V_2 \rangle = 0$

$$AMV_1 = \lambda_1 V_1 \quad \text{--- } ①$$
$$AMV_2 = \lambda_2 V_2 \quad \text{--- } ②$$

① à gauche par $^tV_2 M$

$$^tV_2 M A M V_1 = \lambda_1 \, ^tV_2 M V_1$$

② à gauche par $^tV_1 M$

$$^tV_1 M A M V_2 = \lambda_2 \, ^tV_1 M V_2$$

$$\langle AMV_1 , MV_2 \rangle$$
$$\langle MV_2 , AMV_1 \rangle = \, ^t(AMV_1) MV_2 = \, ^tV_1 MA . MV_2$$

$$\lambda_1 \, ^tV_2 M V_1 = \lambda_2 \, ^tV_1 M V_2 .$$
$$\lambda_1 \langle V_1, V_2 \rangle_M = \lambda_2 \langle V_1, V_2 \rangle_M \iff (\lambda_1 - \lambda_2) \langle V_2, V_1 \rangle_M = 0$$
$$\iff (V_2, V_1)_M = 0$$

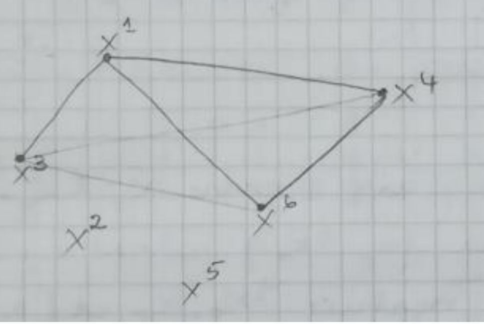
Exo 3 2017-2018 :

Exercice 3

1- • R est symetrique et de dim = nbre de variables.
• R possede des 1 sur la diagonale
• Les valeurs reflètent les liaisons entre les variables.
• Les valeurs en valeur absolues sont ≤ 1.

2- Les relations les plus significatives sont :

$(x^4, x^6) = 0,930$
$(x^1, x^4) = 0,858$
$(x^1, x^6) = 0,816$
$(x^1, x^3) = 0,576$
$(x^3, x^4) = 0,488$
$(x^3, x^6) = 0,441$



Exo 4 2016-2017:

Exercice 4 :

1) les moyennes :

$$\overline{X^1} = \sum_{i=1}^{11} \frac{X_i}{11} = 9$$

$\overline{X_2} = 9$, $\overline{X_3} = 9$, $\overline{X_4} = 9$, $\overline{X_5} = 7{,}500909$

$\overline{X_6} = 7{,}446363$, $\overline{X_7} = 7{,}5$, $\overline{X_8} = 7{,}500909$.

Les variances :

$$V_1 = \sum_{i=1}^{11} \frac{(x_i^1 - \overline{X^1})^2}{11} = 10$$

$V_2 = 10$, $V_3 = 10$, $V_4 = 10$, $V_5 = 3{,}70111$ — —

$V_7 = 3{,}749145$

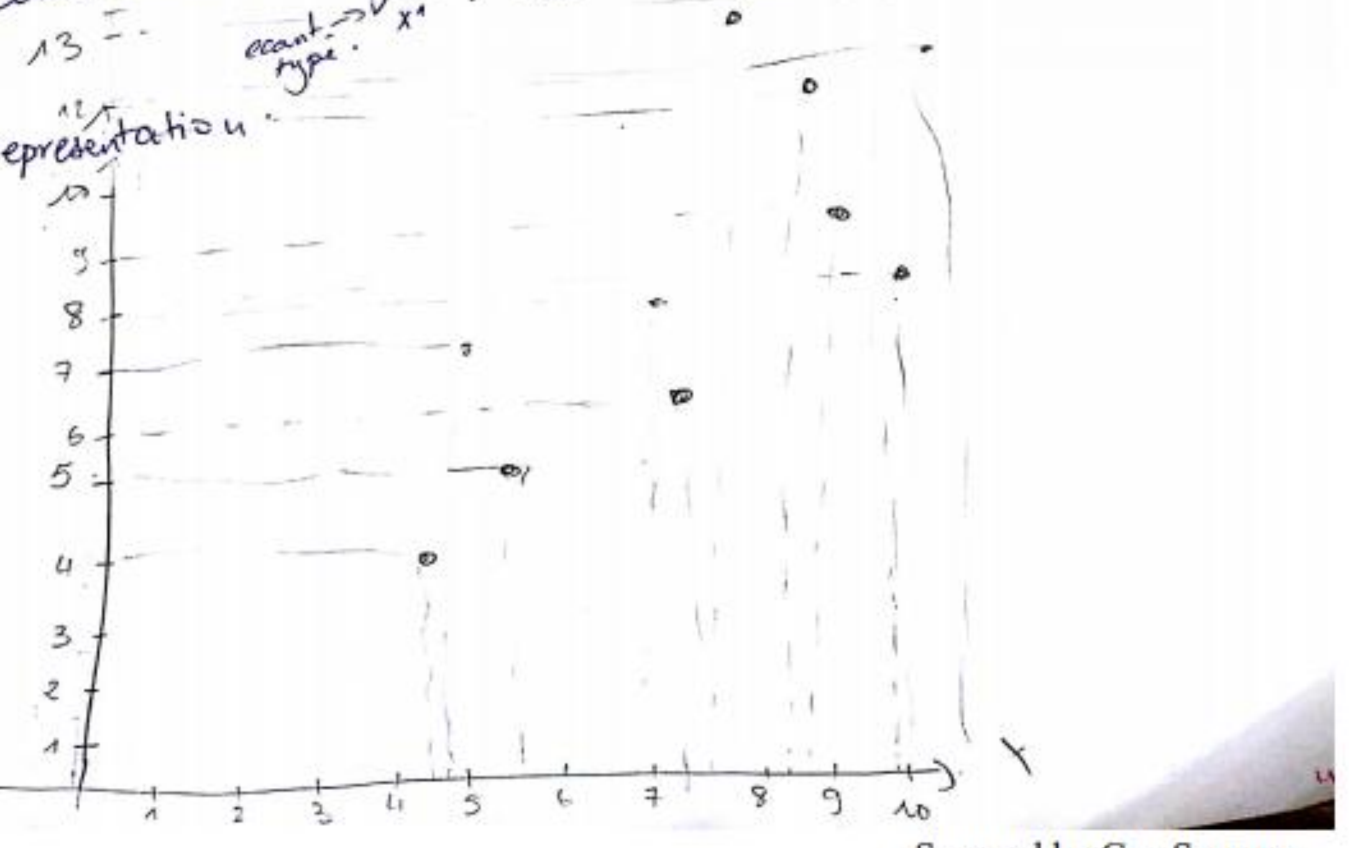
2) $$\boxed{Cov(x^j, x^\ell) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^j - \bar{x}^j)(x_i^\ell - \bar{x}^\ell)\right)}$$

$Cov(x^1, x^5) = 5{,}000826$

$$\text{Correlation} = \frac{Cov(x^1, x^5)}{\sigma_{x^1} \cdot \sigma_{x^2}} = \frac{5{,}000826}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{3{,}7011}} = 0{,}82200$$

$\sigma_{x^1} \to$ écart-type.

3) Représentation :



Exo 4 2017-2018 (Exo 5 2016 - 2017) :

Exercice 5 :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow Y_1 \\ \leftarrow Y_2 \end{matrix}$$

1- Calcul du centre de gravité :

$$g = (\bar{Y}_1, \bar{Y}_2) = (2,3)$$

2- Matrice centrée :

$$X_0 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3- Matrice Variance - Covariances :

$$C = \frac{1}{7} {}^tX_0 X_0$$

$${}^tX_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{7} & 8/7 \\ 8/7 & 12/7 \end{pmatrix}$$

* L'inertie de ce nuage : La somme des variances

$$I = \frac{24}{7}.$$

4- les valeurs propres de C

$$\det [C - (x \cdot I)]$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{12}{7} - x & 8/7 \\ 8/7 & 12/7 - x \end{pmatrix} = \left(\frac{12}{7} - x\right)^2 - \frac{64}{49} = \left(\frac{12}{7}\right)^2 + x^2 - \frac{24}{7}x - \frac{64}{49}$$

$$= \frac{144}{49} - \frac{64}{49} + x^2 - \frac{24}{7}x = \frac{80}{49} + x^2 - \frac{24}{7}x$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{12}{7} - \frac{8}{7} = \frac{4}{7} \\ x_2 = \frac{12}{7} + \frac{8}{7} = \frac{20}{7} \end{cases}$$

G

Vecteur propre associé :

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{7} & 8/7 \\ 8/7 & 12/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{20}{7} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 12/7\, x - \frac{8}{7} y = \frac{20}{7} x \\ 8/7\, x - \frac{12}{7} y = \frac{20}{7} y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 8y = 0 \\ 8x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow x(1, -1)$$

Exo 5 2017-2018 (Exo 6 2016 - 2017) :

Exercice 5

1- Val propres de ${}^t X_0 . X_0$

or $C = \frac{1}{7} {}^t X_0 . X_0$ alors ${}^t X_0 . X_0 = 7 . C$

comme C admet $\frac{4}{7}$ et $\frac{20}{7}$ comme valeurs propres alors

les valeurs propres de ${}^t X_0 . X_0$ sont $7\left(\frac{4}{7}\right) = 4$ et $7\left(\frac{20}{7}\right) = 20$.

2- Val propres de $X_0 . {}^t X_0$

$$X_0 . {}^t X_0 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

${}^t X_0 . X_0$ est de type $(2,2)$, par contre $X_0 . {}^t X_0$ est de type $(7,7)$. Cette matrice $(X_0 . {}^t X_0)$ admet n valeurs propres égales à celles de la matrice ${}^t X_0 . X_0$ et $(m-n)$ val propres nulles. Donc les val propres de $X_0 . {}^t X_0$ sont 4, 20 et 0 avec ordre de multiplicité $= 5$.

3- La droite de régression est donnée par :

(Δ) : $y = ax + b$ où $a = \dfrac{Cov(X^1, X^2)}{Var(X^1)}$

D'après la matrice C, on a : $a = \frac{8}{7} \times \frac{7}{12} = \frac{2}{3}$

comme la droite passe par le centre de gravité $g(2,3)$ donc $b = 3 - \frac{2}{3}(2) = \frac{5}{3}$

D'où (Δ) : $y = \frac{2}{3} x + \frac{5}{3}$.