Faculté d'Electronique er d'Informatique
Département d'Informatique
MASTER 1 : MIV

Test (ANAD)

USTHB : 05/17

X_0 matrice centré

$V = \frac{1}{n}\,{}^tX_0X_0$ VarCov

$Z = \frac{X_0}{\sigma}$ centré réduite

$R = \frac{1}{n}\,{}^tZZ$ corrélation

EXERCICE 1: 1) Donner la définition de l'inertie.

2) Comment peut-on la calculer ?.

3) Que signifie une inertie nulle ?.

EXERCICE 2:

I) On considère la matrice de données X de type (4, 3) :

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x^1 & x^2 & x^3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Déterminer la matrice des variances-covariances V. $\frac{1}{n}\,{}^tX_0X_0$

2) Déterminer la matrice des corrélations R.

3) Donner les propriétés de cette matrice. Symetrique, carrée, élément diagonal = 1 et définit positive

4) Préciser le meilleur sous espace principal ajustant le nuage des points qui explique au moins 80% de l'inertie totale. λ_i ; u_i

5) Déterminer les nouvelles variables définies par les facteurs principaux. Composant principale $C_i = Z \cdot u_i$

6) Que représente le cosinus carré de l'angle formé par chaque individu et sa projection ?. (Donner son expression et expliquer).

7) Calculer les contributions des individus X_3 *et* X_4 à l'inertie du premier axe. Commenter les résultats obtenus. $Ctr(X_i) = \frac{(C_i^k)^2}{n\lambda_k}$

II) Considérant maintenant le nuage des variables.

1) Donner les coordonnées des variables sur le sous espace factoriel. Qu'expriment ces coordonnées. $\varphi_k = \sqrt{\lambda_k}\cdot u_k$ $\quad \varphi_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$

	C_1	C_2
X_1	a_1	a_2
X_2	b_1	b_2

2) Expliquer comment peut-on évaluer graphiquement si une variable est bien représentée sur un plan factoriel.

6 elle va la contribution des individus.

EXERCICE 3: Soit la matrice des contingences suivante

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3 points

1) Donner la matrice profils-lignes ainsi que celle des colonnes.

Corrigé du TD 2 — 11-05-16

EXO 1 : Soit
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1/ On a $g = (1, 1, 1)$ et les écarts-types sont
$$\begin{cases} \sigma(X^1) = \left[\frac{1}{4}(2)\right]^{1/2} = 1/\sqrt{2} \\ \sigma(X^2) = [1/4(4)] = 1. \\ \sigma(X^3) = [1/4(4)]^{1/2} = 1. \end{cases}$$

où
$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où
$$V = \frac{1}{4} {}^tY Y = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2/ La matrice V représente la matrice d'inertie

3/ " " de corrélation $R = \frac{1}{4} {}^tZ Z$

où
$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4/ La matrice R est symétrique, définie positive et $tr(R) = n = \sum_i \lambda_i$

5/
$$P_R(\lambda) = \det(R - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 1/2(1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)\left(1-\lambda-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\lambda+1/\sqrt{2}\right).$$

$$P_R(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.29 \\ \lambda_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 1.7 \end{cases}$$

6/ i) Soit v_1 tq : $Rv_1 = \lambda_1 v_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y = x \\ \frac{\sqrt{2}}{2} x + y = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; z \in \mathbb{R}.$

D'où le premier axe principal $F_1 = \langle u_1 \rangle$ où $u_1 = {}^t(0, 0, 1)$.

ii) Soit v_3 tq : $Rv_3 = \lambda_3 v_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{2}/2\, y = 1.7x \\ \sqrt{2}/2\, x + y = 1.7y \\ z = 1.7z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}.$

D'où le 2ème axe principal $F_2 = \langle u_3 \rangle$ où $u_3 = {}^t(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

Le meilleur sous-espace ajustant le nuage des pts avec au moins 80% de l'inertie contenue est l'espace engendré par F_1 et F_3

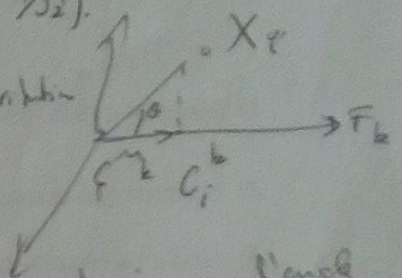
les inerties expliquées par chaque axe sont données par

$\tau_1 \simeq 0,33$, $\tau_2 \simeq 0,096$ et $\tau_3 \simeq 0.5666 \Rightarrow \tau_3+\tau_1 \simeq 89.99\%$.

2/ Les nouvelles variables définies par les facteurs principaux sont les coordonnées des individus sur les axes principaux:

$$\begin{cases} \hat{C} = Z \cdot u_1 = {}^t(-1, -1, +1, 1), \\ \text{et} \\ C^2 = Z \cdot u_3 = {}^t(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1+1/\sqrt{2}, -1-1/\sqrt{2}). \end{cases}$$

3/ on a : $\cos^2\theta = \dfrac{(C_i^k)^2}{\|X_i\|^2}$, il représente la contribution



si l'angle θ est proche de 0, $\Rightarrow$ l'individu est bien représenté, et $\cos\theta$ est proche de 1. Ds le cas contraire, l'angle est proche de 90° i.e le cos est proche de 0.

4/ Les contributions des individus X_3 et X_4 à l'inertie du 1er axe sont:

$$\begin{cases} ctr(3) = \dfrac{C_3^1}{4(1.7)}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \simeq \\ ctr(4) = \dfrac{1}{4(1.7)}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{cases} \quad \text{où } ctr(i) = \frac{(C_i^1)^2}{4\cdot\lambda_3}$$

II/ 1/ on a : $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k$ i.e $\varphi_k = \sqrt{\lambda_k}\, u_k$; $k = 1, 2$

les φ_k^j expriment les corrélations entre les variables principales et initiales.

$$\begin{cases} \varphi_1 = \sqrt{\lambda_3}\cdot u_3 = \sqrt{1.7}\cdot u_3 \\ \varphi_2 = \sqrt{\lambda_1}\, u_1 = u_1 \end{cases}$$

2/ une variable est bien représentée sur un plan factoriel avec sa projection près du périmètre du cercle unité centré à l'origine

EXO 2 :

$$F = \begin{array}{|ccc|c} 1/12 & 0 & 0 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 1/12 & 0 & 1/6 & 1/4 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ \hline 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{array}$$