Chapitre 1

1.1 Introduction à la théorie des jeux

La théorie des jeux est née à la frontière des mathématiques et de l'économie avec le livre de John von Neumann et Oskar Morgenstern publié en 1944 et s'intitulant : « Theory of Games and Economic Behavior », cependant elle a trouvé de nombreux domaines d'application notamment en biologie et beaucoup plus récemment en informatique (cryptographie, théorie algorithmique des jeux, vérification de preuves etc…).

On ne peut définir correctement la notion de Théorie des jeux sans passer au préalable par la définition d'interactions stratégiques :

1.1 Interactions stratégique :

Une interaction stratégique est une situation présentant les caractéristiques suivantes :

- ✓ Un certain nombre d'entités (individus, entreprises, gouvernement etc.) prennent des décisions ils se comportent de telle ou de telle manière.
- ✓ L'ensemble de décisions prises (stratégies), ainsi que le hasard, détermine une issue (quelque chose qui se passe).
- ✓ les agents ont des préférences sur les issues possibles.

Un agent doit être rationnel et cherche donc à prendre des décisions qui conduiront aux issues qu'il préfère. Un point fondamental est que l'issue de l'interaction ne dépend seulement de ce que je fais mais aussi de ce que font les autres. on fait alors face à un problème de circularité pour choisir mon comportement j'essaie de deviner ce que vont faire les autres, et les autes font de même.

Définition. La théorie des jeux permet une analyse formelle des problèmes posés par l'interaction stratégique d'un groupe d'agents rationnels poursuivant des buts qui leurs sont propres.

Exemple

Deux personnes marchent dans la rue au milieu du même trottoir mais dans des sens opposés, si bien qu'elles vont se heurter si elles ne dévient pas de leur trajectoire .leur but est de ne pas se heurter. Pour cela chacune doit décider de dévier légèrement vers la droite (sa droite) ou vers la gauche (sa gauche). (le trottoir n'est pas assez large et si l'une reste au milieu elles se heurtent. Si les deux personnes dévient vers leurs gauches respectives ou leurs droites respectives elles ne se heurtent pas donc elles ont atteint leur objectif si l'une dévie vers sa gauche et l'autre vers sa droite elles se heurtent et donc dévier à gauche ou à droite n'est pas en soi une bonne ou mauvaise décision mais elle dépend de ce que décidera l'autre.

Exemples d'application

- ➢ Jeux de sociétés (Echecs, Dames, Bridges…).
- ➢ Dois-je travailler ou faire semblant.

- Enchères et votes.
- Stratégies militaires et économiques.
- Partages des ressources / Marchandages.
- Optimisation du routage réseaux (détection et identification des situations d'équilibres).
- Sécurité réseaux (l'administration et l'intrus deux joueurs à somme nulle).
- Réseaux de communications « réseaux de capteurs ».

« ***La théorie des jeux est donc une boite à outils, en même temps qu'un mode opératoire, une puissante méthodologie*** »

2.1 Théorie des jeux :

Un jeu est un modèle d'interaction stratégique. Le mot 'Jeu' vient du fait que la plus part des jeux de société peuvent être considérés comme étant des interactions stratégiques. La théorie des jeux peut être définie comme l'étude mathématique ou bien formelle de tels modèles d'interactions stratégiques.

Les questions principales sont de plusieurs ordres :

- Comment modéliser mathématiquement des interactions ' réels' ?
- Que peut-on dire de ces modèles ? Quels sont les bons concepts de 'Solutions' et sous quelles hypothèses ces solutions sont-elles de bonnes propriétés (existence, unicité, etc.) ?
- Discussion de la pertinence de ces concepts mathématiques dans la vie réelle ?

Etant donné qu'il s'agit d'un cours de mathématique c'est surtout la deuxième question qui nous intéressera le plus.

3.1 Mise en garde :

La théorie des jeux étudie les modèles d'interactions stratégiques. Comme dans un modèle on simplifie la situation qu'on cherche à étudier pour qu'elle devienne analysable, cette simplification peut être excessive. De plus nous serons toujours amenés à faire des hypothèses sur les agents à savoir qu'ils sont toujours rationnels et qu'ils connaissent les préférences des autres.

Si vous voulez appliquer la théorie des jeux à un modèle donné il faut se demander si votre modélisation du problème est pertinente et si de plus si les hypothèses du concept que vous désirez appliquer sont réunies.

En voici quelques exemples correspondant à ce type de problème :

Un couple qui doit aller au cinéma et décider d'un film à aller voir, sachant qu'ils préfèrent assister à la même séance et non pas les mêmes préférences sur le film peut être considéré comme étant un jeu. Par contre une seule personne veut aller voir un film ce n'est pas un jeu (pas d'interactions) c'est plus un problème d'optimisation.

Si l'on annonce une pénurie d'essence à laquelle vous ne croyez pas, vous serez tout de même obligé de remplir votre cuve, non à cause de la situation mais à cause de la réaction des autres joueurs (Interaction) qui vont la remplir et donc créer par leur comportement une pénurie secondaire.

Quand un piéton pressé traverse la rue, son utilité réussir à traverser vite et en un seul morceau dépend de ces choix mais aussi de ceux des conducteurs donc c'est un problème où la théorie des jeux peut être appliquée.

Dans ce cours nous commencerons d'abord par présenter les jeux dits ' sous forme normale' dans lesquelles les joueurs prennent chacun une seule décision et ce indépendamment des uns des autres

2.1 Représentation Ordinale et Fonctions d'utilité

La théorie de la décision modélise le choix d'un agent face à plusieurs alternatives (stratégies). Par exemple vous avez le choix entre plusieurs livres à acheter dans une librairie et vous disposez d'une bourse pour seulement 3 livres.
Nous verrons dans ce chapitre sous quelles conditions les préférences peuvent être représentées par une fonction à valeurs réelles appelée fonction d'utilité. Parfois on peut aussi avoir le choix entre plusieurs situations ou le résultat peut être aléatoire. Nous établirons aussi le cas probabiliste ou un agent se comporte comme s'il maximisait une fonction d'espérance mathématique.

2.1 Préférences rationnelles

Soit X un ensemble d'alternatives, on définit une relation de préférence faible sur X notée ≥, toute relation binaire sur X vérifiant certaines propriétés :

- $x \geq y$ signifie que l'agent préfère faiblement l'alternative x à y. On écrira que $x \ngeq y$ pour dire que x n'est pas faiblement préférée à y (ce qui n'implique pas que y est faiblement préférée à x).
  A partir d'une relation de préférence on pourra définir deux concepts :
- On dira que $x \approx y \; ssi \; x \geq y \; et \; y \geq x.$
- On dira que $x > y \; ssi \; x \geq y \; et \; y \ngeq x.$
  $x \approx y$ va s'interpréter comme étant l'agent est indifférent entre les alternatives $x \; et \; y.$
  Une relation de préférence faible doit vérifier certains axiomes pour être considérée comme étant **rationnelle** :
- **Complétude** : pour tout couple (x, y) au moins l'une des deux propositions doit être vérifiée $x \geq y \; ou \; bien \; y \geq x$ (deux alternatives sont toujours comparables).
- **Transitivité :** pour tout $x, y \,, z \; si \; x \geq y \; et \; y \geq z \; alors \; x \geq z.$

2.2 Représentation ordinale des fonctions rationnelles

Supposons que pour comparer les alternatives sur X l'agent dispose d'une fonction u à variables réelles telle que $x \geq_u y$ si et seulement $u(x) \geq u(y)$. On pourrait interpréter $u(x)$ comme étant l'utilité de l'agent dans l'alternative x.

Proposition 1

Soit une fonction $u: X \to R$. Alors $\geq_u$ est une relation de préférence rationnelle.
Preuve la loi $\geq$ est une loi d'ordre complet sur le corps réel.
La réciproque est aussi vraie si X est dénombrable.

Théorème 1 supposons que X est un ensemble dénombrable, et soit $\geq$ une relation de préférence faible sur X. Alors il existe une fonction d'utilité u telle $\geq_u$ coïncide avec $\geq$ si cette dernière est rationnelle.
Preuve (Exercice).

Exemple de fonction d'utilité associé à une relation de préférence

Exemple 1

Une personne a le choix entre 3 destinations pour ses vacances : la Havane, New-York et Venise. Elle préfère la Havane aux deux autres qu'elle juge équivalentes. Ses préférences entre les trois destinations peuvent être représentées par n'importe quelle fonction: $\mathrm{u}: \{\mathrm{Havane}, \mathrm{New-York}, \mathrm{Venise}\} \to \mathrm{R}$ vérifiant $\mathrm{u(New-York)} = \mathrm{u(Venise)} < \mathrm{u(Havane)}$ *par exemple* $u(Havane) = 2$ *et* $u(New-York) = u(Venise) = 1$.

2.3 Préférence sur choix incertains

Dans la majorité des situations auxquelles on fait face à un choix l'ensemble des stratégies ou des alternatives qui nous sommes présentées dépend non seulement du choix que nous prenons mais aussi de l'environnement autours de ce choix, par exemple si nous avons à choisir entre le tramway, le train ou le bus universitaire afin d' arriver à l'heure à l'université plusieurs facteurs externes peuvent rendre notre choix bon ou mauvais (grève des trains, tramways ou bus, embouteillage, manque de places etc.) c'est pour cela qu'on introduit dans ce cas la notion de stratégie mixte c'est-à-dire qu'un joueur au lieu de choisir une stratégiex_i *de* X, il choisit une loi de probabilité$\sigma_i(x_i)$. En d'autres termes il tire au sort une stratégie x_i avec une probabilité σ_i.

Définition Soit l'ensemble $X_a = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble des stratégies d'un agent a, une stratégie mixte de l'agent a est une distribution de probabilité $\sigma_a: X_a \to [0,1]$ vérifiant$\sum_{x_i \in X_a} \sigma_i(x_i) = 1$.

Lorsqu'on introduit la notion de préférence aux choix incertains ou bien comme on le verra plus tard les stratégies mixtes, comme les joueurs attribuent des probabilités à leurs stratégies pures, il en de même pour leurs gains qui deviennent aléatoires dans le sens où ils dépendent des probabilités affectées par tous les joueurs à leurs stratégies pures. Le calcul de la fonction d'utilité prendra alors la forme d'une fonction d'espérance.

Exemple 2

Un père dit à son fils : « je vais prendre un nombre de jetons au hasard si le nombre est pair et que tu devines que c'est pair je te donnerai 2 dinars, si le nombre est impair et tu dis pair alors tu me donneras 1 dinar, maintenant si le nombre est impair et que tu dis pair tu me donneras un dinar, enfin si le nombre est impair dans ma main et tu dis impair je te donnerai 1 dinars. »

Quelle stratégie adoptera le fils pour prendre la meilleure décision et de même quelle stratégie adoptera le père pour économiser son argent ?

On ne peut donner une réponse déterministe à cette question, on sera obligé d'attribuer une probabilité p à l'annonce du fils pour pair et donc 1-p pour l'annonce impair et de même pour le père d'attribuer une probabilité q pour prendre un nombre de jetons pair et donc 1-q pour prendre un nombre de jetons impair.

$$u(\text{fils}(\mathrm{p},\mathrm{q})) = \mathrm{p}(2\mathrm{q} + (-1)(1-\mathrm{q})) + (1-\mathrm{p})((1)(1-\mathrm{q}) + \mathrm{q}(-1))$$
$$= \mathrm{p}(3\mathrm{q}-1) + (1-\mathrm{p})(1-2\mathrm{q}) = \mathrm{p}(5\mathrm{q}-2) + (1-2\mathrm{q})$$

$\mathrm{u}(\text{père}(\mathrm{p},\mathrm{q})) = \mathrm{q}((-2)\mathrm{p} + (1-\mathrm{p})(1)) + (1-\mathrm{q})(\mathrm{p} + (1-\mathrm{p})(-1)) = \mathrm{q}(-3\mathrm{p} + 1) + (1-\mathrm{q})(2\mathrm{p}-1) = \mathrm{q}(-5\mathrm{p}+2) + (2\mathrm{p}-1)$

La fonction d'utilité dans ce cas a été déterminée en fonction d'espérance.

Un jeu peut être modélisé sous deux formes différentes :

a) **Forme normale** (appelée aussi Stratégique) qui consiste à modéliser un jeu dans lequel les joueurs jouent une seule fois chacun de manière **simultanée** ou bien indépendante.
b) **Forme extensive** qui consiste à modéliser un jeu dans lequel les joueurs jouent de manière **séquentielle**.

3.1 La forme normale d'un jeu

Les éléments constitutifs d'un jeu G en forme stratégique (normale) sont les suivants :

(1) $N = \{1,2,\ldots,n\}$ ensemble de joueurs, on suppose que les joueurs sont en nombre fini. Un joueur quelconque est désigné par l'indice i.

(2) s_i désigne une stratégie du joueur $i \in N$. Une stratégie décrit de manière précise ce que fait un joueur.

(3) S_i est l'ensemble des stratégies du joueur $i \in N$. Une stratégie décrit de manière précise ce que fait un joueur.

(4) $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \equiv S$ est une issue du jeu, c'est-à-dire une combinaison de stratégies à raison d'une stratégie par joueur. On désigne par S_{-i} les stratégies choisis sauf par le joueur i.

(5) $u_i(s)$ une fonction d'utilité :u_i: $S_i \to R$ du joueur i.

(6) Chaque joueur connait les ensembles de stratégies et les fonctions d'utilités de tous les joueurs y compris les siens.

Dans le cas particulier où le jeu est à deux joueurs la forme normale peut être présentée sous forme de matrice,
Les lignes représentent les actions du joueur1, les colonnes celles du joueur 2 chaque cellule les gains sous forme d'un couple (x_1, x_2) où x_1 le gain du joueur 1 et x_2 celui du joueur2.
NB. Dans un jeu sous forme normale, les deux joueurs sont toujours supposés connaitre la matrice du jeu.

3.1 Considérations de dominances

On peut penser qu'un joueur rationnel ne choisira jamais une stratégie s'il dispose d'une autre stratégie lui assurant un gain supérieur quel que soit le choix des autres joueurs. Si Chaque joueur possède une stratégie dominante alors il va la jouer et le jeu sera fini.

Exemple1. Le dilemme du prisonnier

Un jeu très célèbre : on suppose que deux suspects sont interrogés par la police, pour une action délictueuse. La police ne possède pas de preuves suffisantes pour la condamnation des prévenus. L'aveu donc d'au moins l'un d'eux est indispensable. La police propose à chacun d'eux d'avouer, dans quel cas il sera relâché. S'il n'avoue pas et l'autre le fait il aura une peine de 10 ans, s'ils avouent tous les deux ils auront une peine de 5 ans chacun, enfin si aucun n'avoue ils auront tout de même une peine d'un an chacun pour un délit mineur.
La matrice de gains sous forme normale peut être la suivante :

Suspect 2

	1 2	Avoue	N'avoue pas
Suspect1	Avoue	(-5,-5)	(0,-10)
	N'avoue pas	(-10,0)	(-1,-1)

On remarque que pour les deux joueurs la stratégie qui conduit à une peine moins lourde est « Avoue » indépendamment de ce que décidera l'autre. Donc un équilibre prévisible est (Avoue, Avoue). Cette stratégie est appelée stratégie **strictement dominante**.

Alors c'est quoi une stratégie dominante ?

Définition 1

Dans un jeu en forme stratégique on dit qu'une stratégie s'_i est dominante pour un joueur i si et seulement si $\forall\, s_i \in S_i - \{s'_i\}$ $\quad nous\ avons\ u_i\,(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})\ \forall\, s_{-i}$

Si dans un jeu tous les joueurs dispose d'une stratégie dominante et qu'ils adoptent cette stratégie, le résultat est appelé équilibre en stratégie dominante.(exemple 1 (Avoue, Avoue)). Mais trouver des stratégies dominantes pour chaque joueur n'est pas toujours possible.

Exemple 2

Soit la matrice de jeu suivante :

1 \ 2	G	M	D
H	(4,3)	(5,1)	(6,2)
M	(2,1)	(8,4)	(3,6)
B	(3,0)	(9,6)	(2,8)

On remarque que dans ce jeux il n'existe pas de stratégie strictement dominante pour le joueur 1 ni pour le joueur 2. Mais on pourra déterminer un équilibre par **le processus de dominance successive**

Equilibre Itératif en stratégie strictement dominantes.

Définition 2

Dans un jeu en forme stratégique, on dit qu'une stratégie $\hat{s}_i$ est strictement (fortement) dominée par la stratégie $s'_i \in S_i, \hat{s}_i \neq s'_i$ si on a $u(s'_i, s_{-i}) > u(\hat{s}_i, s_{-i}) \; \forall \; s_{-i}$.

(Si l'inégalité est large c'est-à-dire $u(s'_i, s_{-i}) \geq u(\hat{s}_i, s_{-i}) \; \forall \; s_{-i}$ et $\exists \; s*_{-i}$ tel que $u(s'_i, s*_{-i}) > u(\hat{s}_i, s*_{-i})$ on dira que la stratégie $\hat{s}_i$ est faiblement dominée par la stratégies'_i.

Si on utilise cette définition dans l'exemple précédent nous allons éliminer pour le joueur 2 la stratégie M car elle est fortement dominée par la stratégie D. d'où le tableau réduit suivant :

1 \ 2	G	D
H	(4,3)	(6,2)
M	(2,1)	(3,6)
B	(3,0)	(2,8)

Ensuite on pourra éliminer la stratégie M pour le joueur 1 car dominée par H d'où le tableau

1 \ 2	G	D
H	(4,3)	(6,2)
B	(3,0)	(2,8)

La stratégie dominante pour le joueur 1 est alors H on obtient alors le tableau final

1 \ 2	G	D
H	(4,3)	(6,2)

Et donc le couple (H,G) est un équilibre possible.

Inconvénients de l'équilibre itératif en stratégies strictement dominantes :

1) L'emploi du processus de dominances successives ne conduit pas nécessairement à une solution unique, donc le jeu est résoluble par cette méthode si on obtient un unique profil en éliminant successivement les stratégies strictement dominées.

2) L'ordre d'élimination n'a pas d'importance les stratégies qui subsistent après élimination sont les mêmes quelle que soit la séquence suivie, par contre on peut obtenir des profils différents lorsqu'on choisit des ordres différents d'élimination des stratégies faiblement dominées.

Exemple3

1 \ 2	L	C	R
T	(1,2)	(2,3)	(0,3)
M	(2,2)	(2,1)	(3,2)
B	(2,1)	(0,0)	(1,0)

Ordre d'élimination T,R,B,C donne l'équilibre (M,L) de résultat (2,2).
Ordre d'élimination B,L,C,T donne l'équilibre (M,R) de résultat (3,2).

3) La résolution d'un jeu non coopératif par application successives de la dominance stricte**,** semble donc fournir une solution satisfaisante quand elle conduit à une solution unique. Pourtant la solution à laquelle conduit ce processus ne s'impose pas toujours de manière naturelle. En effet considérons cet exemple :

Exemple4

	G	D
H	(8,10)	(-100,9)
B	(7,6)	(6,5)

Pour le joueur 2, D est strictement dominée par G donc à éliminer de même pour le joueur 1, sachant que le joueur 2 va jouer G il va forcément choisir H mais il peut penser ainsi si toutefois le joueur 2 se trompe ou parce que la différence n'est pas très importante il va jouer D je perdrai gros en jouant H alors je vais plutôt jouer B donc l'équilibre en stratégies dominantes risque de ne pas avoir lieu dans ce cas.

« Exercices pour aller plus loin »

Exercice 1

Soit une élection entre deux candidats. On suppose que les électeurs sont uniformément distribués sur le segment [0,1], et qu'ils votent pour le candidat le plus proche d'eux sur ce segment. On suppose par ailleurs que les candidats n'ont que (m+1) positions possibles avec m pair régulièrement distribuées sur le segment [0,1]. Ce jeu est-il solvable par le processus d'élimination successive des stratégies strictement dominées, et dans ce cas quelle sera la solution ?

Exercice 2 « jugement majoritaire »

N juges doivent attribuer une note à un patineur artistique. Chaque juge i choisit une note $s_i \in \{0,1,\dots,10\}$, et la note finale $x(s_1, s_2, \dots, s_n)$ du patineur dépend des notes de l'ensemble des juge. Chaque juge i choisit donne également un avis $a_i \in \{0,1,\dots,10\}$. Et sa fonction de paiement est définie par
$g_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = -|a_i - x(s_1, s_2, \dots, s_n)|$.

1) On suppose que dans cette question $x(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum_{i=1}^{N} s_i$. Montrer qu'il existe des valeurs de $N, a_1, a_2, \dots, a_N$ pour les quelles aucun joueur n'a de stratégies dominantes.
2) On suppose maintenant que N est impair et que $x(s_1, s_2, \dots, s_n)$ est la médiane des notes s_i. Montrer dans ce cas qu'il existe un équilibre en stratégies dominantes.