Faculté d'Electronique er d'Informatique
Département d'Informatique
MASTER 1 : MIV

USTHB : 05/18

Examen Final (Anad)

EXERCICE 1:

I) On considère la matrice de données X de type (4, 3) :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Donner la matrice des données centrées et réduites.
2) Déterminer la matrice des corrélations R.
3) Diagonaliser la matrice R (déterminer ses valeurs propres).
4) Déterminer les axes principaux associés. Vérifier que ces axes sont perpendiculaires.
5) Déterminer les nouvelles variables définies par les facteurs principaux.
6) Que représente les variances des composantes principales.
7) Représenter graphiquement les coordonnées des individus. Commenter les résultats obtenus.

II) Considérant maintenant le nuage des variables.

1) Donner les coordonnées des variables sur le sous espace factoriel.
2) Représenter graphiquement les coordonnées des nouvelles variables. Commenter les résultats obtenus.

EXERCICE 2: Soit k la matrice des fréquences relatives associé à une matrice des donnés:

$$k = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/12 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

1) Donner les fréquences marginales associées à la matrice donnée.
2) Donner la matrice des profiles lignes normalisées.
3) Evaluer la proximité entre les deux premières lignes.
4) Déterminer la matrices des variances-covariances du nuage ainsi que ses valeurs propres.

Bon Courage

والبحث العلمي ... للعلوم و التكنولوجيا

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

كلية الاليكترونيك و الاعلام الآلي

FACULTE D'ELECTRONIQUE ET D'INFORMATIQUE

التاريخ : ...E :

16,5 / 20

Nom et Prénoms : LADJOUZI Rachid : الاسم و اللقب

N° Inscription : 20140000 7528 : رقم التسجيل

Groupe : : فوج - Section : : فصيلة - Option : : شعبة

Module : : مقرر

Exo ①:

I - La matrice des données centrées réduite

* Le centre de gravité :

$g = (\overline{X^1}, \overline{X^2}, \overline{X^3})$

$\overline{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_m$.

$\begin{cases} \overline{X^1} = 2 \\ \overline{X^2} = 1 \\ \overline{X^3} = 2 \end{cases}$

$g = (2, 1, 2)$

* La matrice centrée Y :

$y^i_j = x^i_j - \overline{X^i}$

$$Y = \begin{pmatrix} x^1_1 - \overline{X^1} & \cdots & x^n_1 - \overline{X^n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ x^1_m - \overline{X^1} & \cdots & x^n_m - \overline{X^n} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ملاحظة : كل استعمال خارج عن الامتحانات يعرض صاحبه الى تدابير تأديبية

* La matrice des données centrées réduites :

$$Z = \frac{Y}{S}$$

$$z^i_j = \frac{y^i_j}{S_i} \quad / \quad S_i = \sqrt{Var(x^i)} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(x^i_j - \overline{x^i})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(y^i_j)^2}$$

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{\frac{1}{4}(4+4+4+4)} = 2 \\ S_2 = \sqrt{\frac{1}{4}(1+1+1+1)} = 1 \\ S_3 = \sqrt{\frac{1}{4}(1+1+1+1)} = 1 \end{cases}$$

1,5

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2- La matrice de corrélations R :

$$R = \frac{1}{m} \cdot {}^tZ \cdot Z$$

$$R = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,1

3 – Les valeurs propre de R :

$$\det(R - ID.\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2\right] - (0)[\dots] + (-1)\left[0 - (-1)(1-\lambda)\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right]$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)$$

1

$$\det(R - \lambda.ID) = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

4 – Les axes principaux associés :

* Le premier axe principal est affecté à la plus grande valeur propre

Donc $\lambda_1 = 2$

$$R.V_1 = \lambda_1 . V_1 \ / \ \vec{V_1} \neq \vec{0} \quad \text{et} \quad V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - z = 2x \\ y = 2y \\ -x + z = 2z \end{cases} \implies \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \implies U_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

* Le deuxième axe principal est représenté par la deuxième plus grande valeur propre, donc $\lambda_2 = 1$

$R \cdot V_2 = \lambda_2 \cdot V_2 \mid \vec{V_2} \neq \vec{0}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - z = x \\ y = y \\ -x + z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* Le troisième axe principale sera donc représenté par $\lambda_3 = 0$

$R \cdot V_3 = \lambda_3 \cdot V_3 \mid \vec{V_3} \neq \vec{0}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1,8

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

التاريخ :

Prénoms : LADJOUZI Rachid الاسم و اللقب :

...scription : 2014000 07528 رقم التسجيل :

: فوج - Section : فصيلة - Option : شعبة :

Module : مقرر :

* Verifier que ces axe sont perpendiculaire :

$- \langle U_1 . U_2 \rangle = {}^tU_1 . U_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$= 0$

$- \langle U_1 . U_3 \rangle = {}^tU_1 . U_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$= \frac{2}{4} + 0 - \frac{2}{4} = 0$

1

$- \langle U_2 . U_3 \rangle = {}^tU_2 . U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$
$= 0$

Ainsi tous ces axe sont perpendiculaires.

5 - Les nouvelles variables définies par les facteur principaux :

$C^i = Z . U_i$

$C^1 = Z . U_1$

$$C^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2

$C^2 = Z . U_2$

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

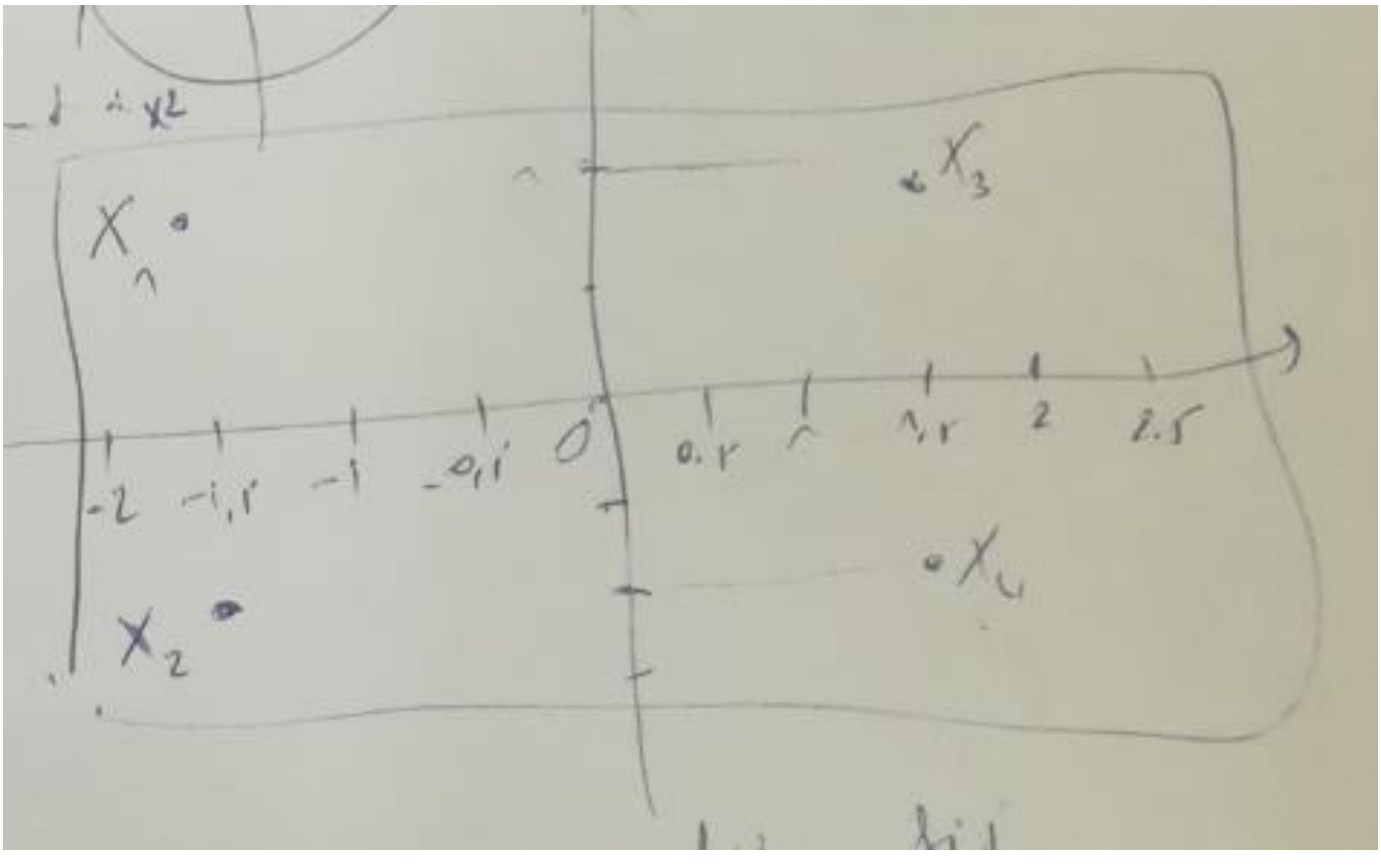
En va gardé que deux axes principaux c^1 et c^2
car l'inertie représenté par les différents vecteur propres sont comme suit

$$\begin{cases} u_1(\lambda_1) \Rightarrow I_1 = \dfrac{\lambda_1}{\sum\lambda} = \dfrac{2}{3} = 66,66\% \\ u_2(\lambda_2) \Rightarrow I_2 = \dfrac{\lambda_2}{\sum\lambda} = \dfrac{1}{3} = 33,33\% \\ u_3(\lambda_3) \Rightarrow I_3 = \dfrac{\lambda_3}{\sum\lambda} = 0 = 0\% \end{cases}$$

Donc $I_1 + I_2 = 100\%$ ce qui fait on garde que deux axes principaux.

6- Les variances des composantes principales représentent la valeur de la valeur propre associé à la composante principale.

7- Représenter graphiquement les coordonnées des individus :



II - 1 - Les coordonnées des variables sur le sous-espace factoriel :

On a $\begin{cases} c^1 = {}^t(-\sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2}) \\ \text{et } c^2 = {}^t(1 \quad -1 \quad 1 \quad -1) \end{cases}$

$\psi = \sqrt{\lambda} \cdot u$

$\psi^1 = \sqrt{\lambda_1} \cdot u_1 = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

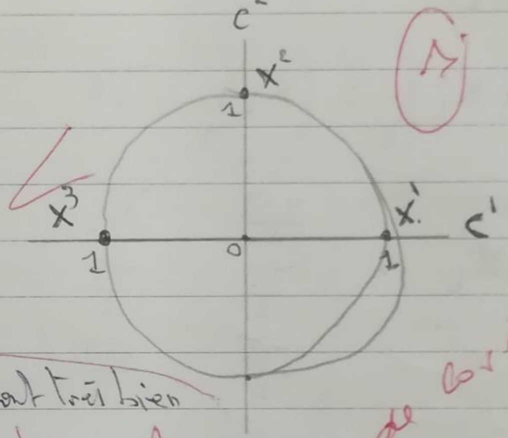
$\psi^2 = \sqrt{\lambda_2} \cdot u_2 = \sqrt{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1

On applique la loi $r(x^i, c^j) = \psi^j_i$

On obtient :

	c^1	c^2
x^1	1	0
x^2	0	1
x^3	-1	0



1

Les nouvelles variables sont très bien représentées. !! !!

Intérieur de cercle de corrélation !!

Exo ②

1 - Les fréquences marginales :

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 1/4 & 1/12 & \frac{1}{3} \\ 1/6 & 1/6 & \frac{1}{3} \\ 1/12 & 1/4 & \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

1

2 - La matrices des profils lignes normalisées.

* La matrice des profils lignes :

$(X_L)^i_j = \frac{f^i_j}{f_{i\cdot}}$

Ils faut dire que

$$X_L = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

* La matrice des profiles-lignes transformée :

$$(X'_L)^i_j = (X_L)^i_j / \sqrt{g_{+j}}$$

$$\forall j \ldots \sqrt{g_{+j}} = \sqrt{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g_{+j}}} = \sqrt{2}$$

1

$\cancel{X'_L}$

$$(X'_L)^i_j = (X_L)^i_j \cdot \sqrt{2}$$

$$X'_L = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

* La matrice des profiles-lignes normalisées : Y

Le centre de gravité g :

$g = (\sqrt{+j} \ldots)$ $j \in 1$ à 2

$g = (\sqrt{+1}, \sqrt{+2})$

0,5

$$g = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$Y^i_j = (X'_{LN})^i_j = (X'_L)^i_j - g_j$$

$$Y = X'_{LN} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

x^1	x^2	x^3
M	F	1

$g = (2, 1, 2)$, $C_i =$ ~~$(\ldots)$~~

$$C^1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

λ_i : 0, 1, 2

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\varphi^i = \sqrt{\lambda_i} \cdot u_i$

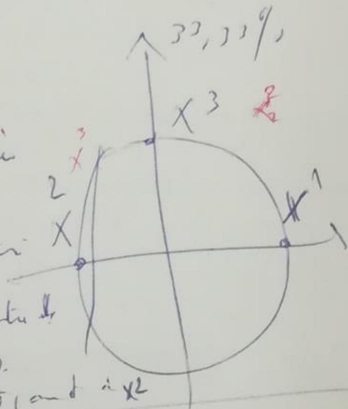
$\varphi^1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\varphi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Var}(C^i) = \lambda_i$

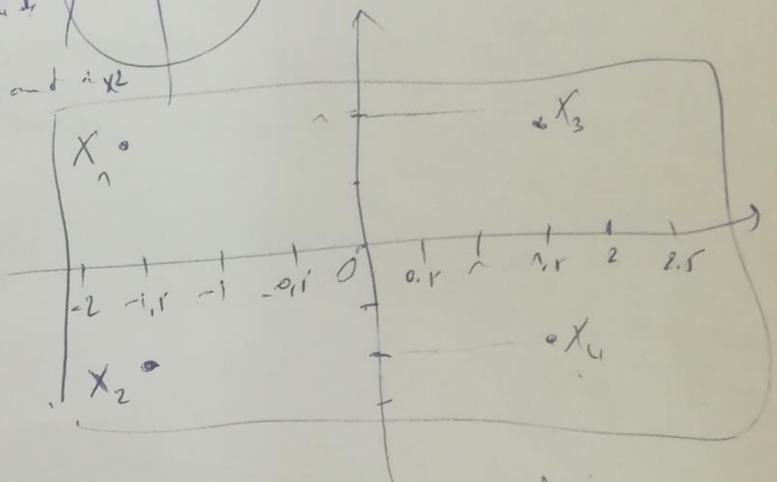
Corrélation = cosinus de l'angle entre deux variables.

Rep des Var



X^2 et X^1 ont une corrélation -1 et ...
X^3 est $\perp$ à X^2 et X^1 i.e. corrél = 0.
L'axe 1 est corrélé (> 0) au X^1 et négat. à X^2

Rep des indiv



Exo 2 :

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$

$\rightarrow N(I) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

$\frac{f_{ij}}{f_{1+}}$ $\frac{f_{ij}}{f_{i+}}$

$$\frac{f_{ij}}{f_{i+} \cdot \sqrt{f_{+j}}} = F_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/4 & 3\sqrt{2}/4 \\ 3\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

$g = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$

$$V = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/12 \\ -1/12 & 1/12 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \frac{1}{6}$$

$$d^2(i, i') = \sum_j \frac{1}{f_{+j}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i+}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'+}} \right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$