La Logique modale

Motivation

Nous appellerons modalité toute expression susceptible de qualifier un contenu propositionnel, la modalité vide étant le cas particulier que nous avons examiné jusqu'ici, celui où la connaissance se limitait à l'affirmation du contenu.

Historiquement, cette approche vient de la difficulté de rendre compte de la causalité. Si l'on veut représenter ‘’ a est une cause de b’’ en langage propositionnel, la meilleure formule est $(a \supset b)$, mais cette traduction est très mauvaise. En effet, nous savons que $f \supset p$ est un théorème (voir exercice ex falso). Donc la phrase :

‘’Si la lune est un fromage vert est une cause de la mort de Kennedy’’

Se traduit par un théorème.

Langage

Ces difficultés ont conduit à proposer un enrichissement du langage propositionnel par un symbole d' ''implication stricte'', noté $\rightarrow$, distinct de l'implication matérielle, notée $\supset$.

Pour des raisons de simplicité, nous ferons l'exposé de la logique modale propositionnelle.

L'alphabet est :

$\sum = \{\supset, f, \Box\} \cup \{a, b, \ldots\}$.

Formule est l'axiome.

Les réécritures sont :

Formule $\rightarrow$ f / a/ b/…/(formule $\supset$ formule) / $\Box$formule

On ajoute, comme de coutume, des symboles logiques considérés comme abréviations :

À l’ensemble $\{v, \neg, \wedge, \vee, \equiv\}$ venu du calcul propositionnel, nous ajoutons $\{\Diamond, \rightarrow, =\}$ avec les conventions :

$\forall$ x, $\Diamond$ x désigne la formule $\neg \Box \neg x$

$\forall$ x, y, $(x \rightarrow y) \equiv \Box (x \supset y)$

$\forall$ x, y, $x = y \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

$\Box$ est le symbole de la nécessité, $\Diamond$, de la possibilité, $\rightarrow$, de l’implication stricte, et $=$, de l’équivalence stricte.

Systèmes de déduction

Les systèmes de logique modale propositionnelle que nous présenterons comportent tous les axiomes (A1) à (A3) de la logique propositionnelle;

Le système le plus élémentaire, appelé K, possède en outre :

(A6) : $(\square(a \supset b) \supset (\square a \supset \square b))$ (distributivité de la nécessité sur l'implication matérielle)

Les règles d'inférence sont les règles de substitution et de *modus ponens* (R1) et (R2) auxquelles s'ajoute une règle :

(R6) [nécessitation] : si x est une formule, R6(x) est l'ensemble contenant l'unique élément $\square x$

Exemple : il y a équivalence dans K entre nécessité d'une conjonction et conjonction de nécessités

Preuve : supposons d'abord que l'ont ait $\Box(a \wedge b)$;

X[1] : $(a \wedge b \supset a)$

X[2] : $\Box(a \wedge b \supset a)$; R6(x[1])

X[3] : $\Box(a \supset b) \supset (\Box a \supset \Box b))$; axiome (A6)

X[4] : $(\Box(a \wedge b \supset a) \supset (\Box(a \wedge b) \supset \Box a))$; R1(x[3]) avec $a/a \wedge b$, b/a

X[5] : $(\Box(a \wedge b \supset \Box a)$ R2(X[2], x[4])

X[6] : $\Box(a \wedge b)$; hypothèse

X[7] : $\Box(a)$; R2(X[6], x[5]) Par cheminement identique, partant de

$(a \wedge b \supset b)$ on arrive à

X[8] : $\Box(b)$; Or

X[9] : $(y \supset (x \supset x \wedge y))$; (exercice ''$\wedge$ est une conjonction''), d'où :

X[10] : $(\Box b \supset (\Box a \supset \Box a \wedge \Box b))$; R1(X[9] avec $x/\Box a$ et $y/\Box b$

X[11] : $(\Box a \supset \Box a \wedge \Box b))$; R2(x[8],x[10])

X[12] : $\Box a \wedge \Box b$; R2(X[7],x[11])

Réciproquement, supposons que l'on ait $\Box a \wedge \Box b$;

y[1] : $(\Box a \wedge \Box b \supset \Box a)$; R1(x[1])avec $a/\Box a$ et $b/\Box b$

Y[2] : $\Box a \wedge \Box b))$; hypothèse

Y[3] : $\Box a$; R2(y[2], y[1]) ; par un cheminement identique, on arrive à

Y[4] : $\Box b$;

Y[5] : $(b \supset (a \supset a \wedge b))$; R1(x[9]) avec x/a et y/b

Y[6] : $\Box(b \supset (a \supset a \wedge b))$; R6(y[5])

Y[7] : $(\Box(b \supset (a \supset a \wedge b)) \supset (\Box b \supset \Box(a \supset a \wedge b)))$; R1(x[3]) avec a/b et b/ $(a \supset a \wedge b)$

Y[8] : $(\Box b \supset \Box(a \supset a \wedge b))$; R2(y[6], y[7])

Y[9] : $\Box(a \supset a \wedge b))$; R2(y[4],y[8])

Y[10] : $(\Box(a \supset a \wedge b) \supset (\Box a \supset \Box(a \wedge b)))$; R1(X[3]) avec a/a et $b/a \wedge b$

Y[11] : $(\Box a \supset \Box(a \wedge b))$; R2(y[9],y[10])

Y[12] : $\Box(a \wedge b)$; R2(y[3],y[11]) ■

Nous introduisons maintenant 4 autres axiomes possibles :

(A7) **: ($\Box$a $\supset$ a)**

(A8) **: ($\Box$a $\supset$ $\Box\Box$a)**

(A9) **: (**$\Diamond$a $\supset$ $\Box\Diamond$a

(A10) : **($\Box$a** $\supset$ $\Diamond$a)

Qui, toujours associés aux trois règles d'inférence (R1), (R2) et (R6), définissent 2^4 =16 systèmes modaux. Nous nous intéresserons particulièrement à 6 d'entre eux :

K lui-même; le système obtenu en lui ajoutant (A7), appelé système T;

Si on ajoute (A7) et (A8), on obtient le système appelé S4;

Si on ajoute (A7) et (A9), on obtient S5;

Si on n'ajoute qu'(A10), on arrive à D;

Enfin si on les prend tous sauf (A7), on a KD45

Règles de valuation

Tous les systèmes que nous considérons ont les mêmes règles de valuation, due à Kripke.

Un modèle modal est un triplet < W, R, V> où

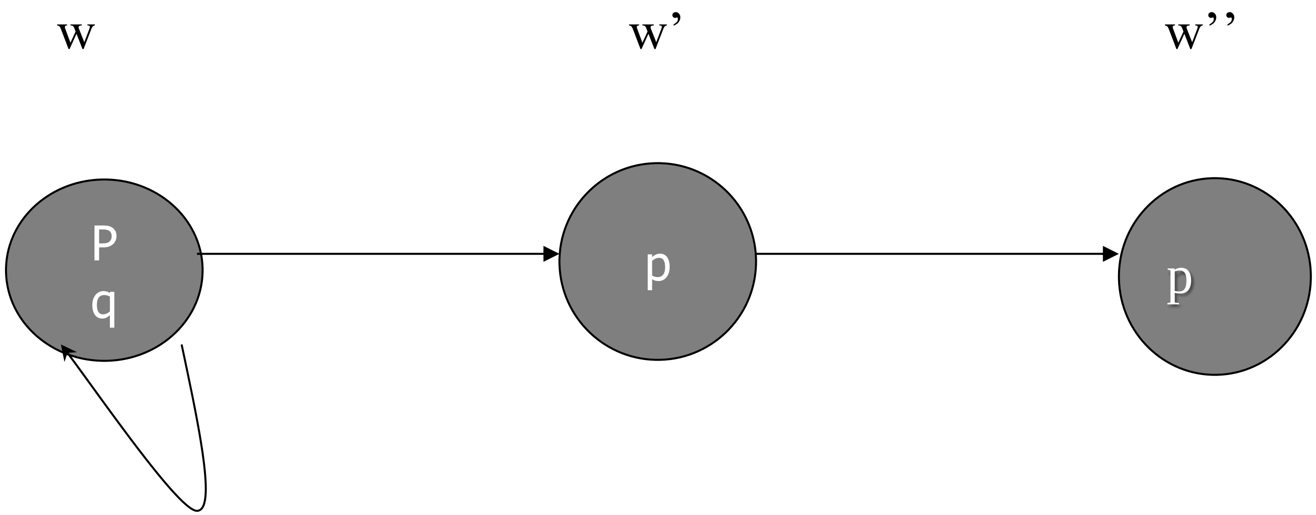
- W est un ensemble (ensemble des mondes possibles),
- R, une relation binaire – dite relation d'accessibilité – sur cet ensemble, et
- v une fonction de l'ensemble des symboles non logiques (a,b,…) dans les sous-ensembles de W.

Au lieu de définir la valeur d'une formule dans un modèle, nous la définirons en un monde du modèle. La règle est la suivante :

- Si la formule est *f*, sa valeur est faux dans tous les mondes du modèle;
- Si la formule est un symbole non logique *a*, sa valeur est vraie en un monde w si et seulement si v(a) contient ce monde w;
- Si elle est de la forme (formule1 ⊃ formule2), la règle est la même que d'habitude, i.e., sa valeur n'est faux en un monde w que si la valeur de formule1 en ce monde est vraie et celle de formule2 en ce monde est faux ;
- Enfin si elle est de la forme □formule, sa valeur en un monde w n'est vraie que si la valeur de formule dans tous les mondes w' tels que wRw' est vraie. En d'autres termes, une formule n'est jugée nécessaire en w que si elle a la valeur vraie dans tous les mondes accessibles depuis w.

Exemple : soit un langage comportant deux symboles non logiques p et q ; considérons le modèle <W, R, v> défini par W = {w, w’, w’’}, R = {<w,w>, <w,w’>, <w’,w’’>}, et la fonction v définie par v(p) ={w,w’}, v(q) = {w}.

Ce modèle peut se représenter par le diagramme :



Dans ce modèle, la formule □p a la valeur vrai en w et en w’’ et la valeur faux en w’.

Pour les mêmes raisons, □q et □¬q sont vrai en w’’, □¬q est vrai en w’ (car le seul monde accessible depuis w’ est w’’ qui vérifie ¬q), ni □q ni □¬q ne sont vrai en w (car w a un accès à un monde où q est vrai)

On peut dériver de ces règles de valuation une méthode de calcul pour les formules exprimées au moyen des abréviations;

- $\neg$p est vrai dans tous les mondes où p est faux;
- p $\wedge$ q n’est vrai que dans tous les mondes où simultanément p et q ont la valeur vrai etc…

La propriété la plus intéressante est :

Une formule n’est jugée possible en w que si elle a la valeur vrai dans au moins un monde accessible depuis w

Preuve : par définition, $\Diamond$p signifie $\neg\Box\neg$p donc $\Diamond$p est vrai en w si et seulement si $\Box\neg$p est faux en w, donc s’il existe un monde accessible depuis w où $\neg$p n’est pas vrai, donc où p est vrai.

Exemple : $\Diamond$p est vrai en w faux en w’ et en w’’;

Une tautologie est une formule auxquelles les règles ci-dessus confèrent la valeur vrai en tout monde de tout modèle.

Cette définition englobe les tautologies de la logique propositionnelle.

Les axiomes du système K forment un système déductif correct et complet vis-à-vis de ces règles de valuation.

Preuve de la correction :

Il suffit de prouver que les axiomes (A1) (A2) (A3) (A6) sont des tautologies, et que les règles (R1), (R2) et (R6) appliquées à des tautologies fournissent des tautologies.

Les trois premiers axiomes sont des tautologies de la logique propositionnelle, donc également de la logique modale d'après la propriétés ci-dessus.

Supposons que (A6) prenne la valeur faux en un monde w. Suivant la règle, cela signifierait que $\Box(a \supset b)$ est vrai en w et $(\Box a \supset \Box b)$ est faux en w; ce qui implique à son tour $\Box a$ est vrai en w et $\Box b$ est faux en w. Ce dernier point implique qu'il existe un monde w' accessible depuis w où b est faux.

Comme $\Box a$ est vrai en w, a est vrai en w', donc $a \supset b$ est faux en w', donc $\Box(a \supset b)$ ne peut être vrai en w : contradiction.

- Les règles (R1) et (R2) ont été prouvées correctes pour la logique propositionnelle : en chaque monde, si elles sont appliquées à des tautologies, elles fournissent des formules ayant la valeur vrai . Donc elles sont également correctes pour la logique modale.

- (R6) [nécessitation] : si x est une formule, R6(x) est l'ensemble contenant l'unique élément □x

(R6) appliquée à une tautologie t fournit la formule □t qui ne prend la valeur vrai en un monde w que si t est vrai dans tous les mondes w' accessibles depuis w. Or t est une tautologie, donc elle a la valeur vrai en tout monde, et en particulier dans ceux accessibles depuis w, donc □t est vrai en w, quel que soit w, ce qui démontre que □t est une tautologie. ■

Remarque

Il est important de distinguer la règle (R6) :

‘’de t dériver □t’’ qui est valide,

et la formule :

(t ⊃ □t), qui ne l’est pas;

dans la situation représentée sur l’exemple précédent, p est vrai en w’ et □p y est faux, donc (p ⊃ □p) y est faux.

La preuve de la complétude est difficile (Chellas 1980)

Les axiomes des autres systèmes ne sont pas corrects vis-à-vis de ces règles. Ils le deviennent si on apporte des restrictions à la définition d’un modèle, et plus précisément à la relation R.

(A7) est une tautologie ssi la relation R est réflexive.

Preuve: Si R est réflexive, pour tout monde w, w fait partie des mondes accessibles depuis lui-même, donc si □a est vrai en w, a y est également vrai, donc **(□a ⊃ a)** est vrai en tout monde de tout modèle où R est réflexive.

Réciproquement, supposons **(□a ⊃ a)** vrai en tout monde de tout modèle, et R non réflexive ; il existe donc un monde w qui n'est pas accessible à partir de lui-même. Considérons la fonction v telle que v(a) = W – {w} ; on a □a vrai en w et a faux en w, donc (□a ⊃ a) est faux : contradiction

(A8) est une tautologie ssi la relation R est transitive.

Preuve : supposons R transitive, et soit w' un monde accessible depuis w ; si □**a** est vrai en w, a est vrai en w'; tous les mondes w'' accessibles depuis w' sont, par transitivité, également accessibles depuis w, donc a y est également vrai ; donc est □**a** vrai en w' ; cette propriété étant vraie en tout monde w' accessible depuis w, □□**a** est vrai en w ; donc □**a**⊃□□**a** est vrai en tout monde de tout modèle où R est transitive.

Réciproquement,

supposons $\Box a \supset \Box\Box a$ vrai en tout monde de tout modèle, et R non transitive; il existe donc trois mondes w, w' et w'' tels que wRw',w'Rw'', $\neg$wRw''. Considérons la fonction v telle que v(a)=W-{w''} ; on a $\Box a$ vrai en w (car w'', le seul monde où a est faux, n'est pas accessible depuis w) et $\Box a$ faux en w' (car w'' est accessible depuis w'), donc $\Box\Box a$ faux en w (car w', où $\Box a$ est faux, est accessible depuis w), donc $\Box a \supset \Box\Box a$ est faux en w : contradiction

(A9) est une tautologie ssi la relation R est euclidienne*.

<u>Preuve</u> : supposons R euclidienne ; si ◊a est vrai en un monde w, il existe un monde w' accessible depuis w où a est vrai ; tous les mondes w'' accessibles depuis w ont, par euclidianité, accès à w' où a est vrai ; donc ◊a est vrai en tous ces mondes ; donc □◊a est vrai en w et **(◊a⊃□◊a)** est vrai en tout monde w de tout modèle où R est euclidienne.

* Une relation binaire R sur un ensemble E est euclidienne ssi pour tout triplet d'éléments e, f, g de E si on a eRf et eRg alors on a aussi fRg

Réciproquement,

supposons $(\Diamond \boldsymbol{a} \supset \Box \Diamond \boldsymbol{a})$ vrai en tout monde de tout modèle, et R non euclidienne ;

il existe donc trois mondes w, w’ et w’’ tels que wRw’, wRw’’ et ¬w’Rw’’. Considérons la fonction v telle que v(*a*) = {w’’} ; on a $\Diamond \boldsymbol{a}$ vrai en w (car w’’ est accessible depuis w et *a* y est vrai) : $\Diamond \boldsymbol{a}$ est faux en w’ (car w’’, le seul monde où *a* soit vrai, est inaccessible depuis w’), donc $\Box \Diamond \boldsymbol{a}$ faux en w (car w’, où $\Diamond \boldsymbol{a}$ est faux, est accessible depuis w), donc $(\Diamond \boldsymbol{a} \supset \Box \Diamond \boldsymbol{a})$ est faux en w : contradiction.

En conséquence,

un modèle de S5 est un modèle où tout monde appartient à une clique (ce terme de la théorie des graphes désigne un sous-graphe où chaque sommet est relié à tous les autres). En effet, S5 vérifie (A7) et (A9), donc dans tout modèle de S5, R est réflexive et euclidienne ; si on a wRw’, comme par réflexivité, on a aussi wRw, on conclut par euclidianité w’Rw ; si de plus, w’Rw’’, l’euclidianité donne wRw’’ et w’’Rw. Donc tout monde connecté à w est accessible depuis w et accède à w, ce qui prouve que le sous-graphe est une clique

Remarque : comme toute relation réflexive et euclidienne est transitive, on retrouve ainsi le fait que les tautologies de S5 incluent celles de S4.

(A10) est une tautologie ssi R est serielle*

<u>Preuve</u> : si □**a** est vrai en un monde w et si R est sérielle, il existe un monde w' accessible depuis w ; a est vrai en w' ; donc ◊**a** est vrai en w ; donc □**a** ⊃ ◊**a** est vrai en tout monde w de tout modèle où R est sérielle.

Une relation binaire R sur un ensemble E est sérielle ssi pour tout élément e de E, il existe au moins un élément f de E tel que eRf

Réciproquement,

supposons $\Box$**a** $\supset$ $\Diamond$**a** vrai en tout monde de tout modèle, et R non sérielle ; il existe donc un monde w d'où nul monde n'est accessible. Par définition, $\Box$**a** y est vrai (car chaque monde accessible depuis w, c-à-d aucun, vérifie a); $\Diamond$**a** est faux en w (car il n'est pas vrai qu'il existe un monde accessible depuis w où a est vrai), donc $\Box$**a** $\supset$ $\Diamond$**a** est faux en w : contradiction. ■

Exercice (restriction sur R) : à quelles conditions sur R les formules suivantes sont-elles des tautologies pour tout choix des formules a et b?

$\mathbf{a \supset \Box\Diamond a}$

$\Box(a \vee b) \supset (\Box a \vee \Box b)$

$\mathbf{\Diamond\Box a \supset \Box\Diamond a}$

$\mathbf{\Box(\Box a \supset b) \vee \Box(\Box b \supset a)}$

Connaissances modales

□ **et** ◊ sont appelés modalités aléthiques.

Existe-t-il des modalités pour le temps?

On sait que le temps a déjà une représentation en physique à l'aide de l'axe des réels.

Cette représentation peut être intéressante dans le cas propositionnel, mais dès qu'on passe au premier ordre il y a déjà une perte de décidabilité. Lorsqu'on est au premier ordre et que l'on rajoute le temps (un argument en plus), la complexité augmente.

Or la représentation du temps est très important en I.A.

Exemples

Planification : déterminer les actions à effectuer (situations désirables)

Diagnostic : déterminer les causes possibles d'une situation

- **Logique modale temporelle**

‘’Napoléon est mort’’ énoncé vrai aujourd’hui mais en 1800 il ne l’était pas. On a affaire ici à quelque chose ressemblant aux énoncés de la logique modale : la vérité de notre énoncé varie selon la date (monde) à laquelle il est émis

Monde possible ⇨ état du monde dans une situation

Relation d’accessibilité ⇨ évolution possible entre deux situations (relation d’ultériorité)

Il y logiquement deux paires de modalités

(**G** /**F**) et (**H**/**P**)

Ga est vrai en w si a l’est dans tous les futurs envisageables à partir de w (l’équivalent du □).

Fa est vrai en w si a l’est dans un futur envisageable à partir de w (l’opérateur dual équivalent à ◊).

Symétriquement, **H**a est vrai si a l'est dans tous les passés envisageables menant à w, i.e., Ssi a est vrai en tout monde w' tel que w'Rw.

On lui adjoint également un opérateur de possibilité, **P** (**P**a est donc vrai s'il existe un monde w' en lequel a est vrai et tel que w'Rw)

A cette définition par modèles correspond un système déductif dont l'axiomatique est calquée, en la dédoublant, sur celle de la logique modale ordinaire. C'est ainsi que l'on a les deux axiomes :

Distribution :

$(\mathbf{G}(a \supset b) \supset (\mathbf{G}a \supset \mathbf{G}b))$ et $(\mathbf{H}(a \supset b) \supset (\mathbf{H}a \supset \mathbf{H}b))$

Transitivité :

$(\mathbf{G}a \supset \mathbf{GG}a)$ et $(\mathbf{H}a \supset \mathbf{HH}a)$

Soit à exprimer que l'écoulement du temps est <u>linéaire</u> dans le futur, i.e., que deux états futurs sont toujours ordonnés l'un par rapport à l'autre :

1. en termes de modèles, ceci revient à dire

$$(\forall w,w',w'')((wRw' \wedge wRw'') \supset (w' = w'' \vee w'Rw'' \vee w''Rw'))$$

2. Sous forme axiomatique, on exprime que tout couple de propositions a et b, si on a **F**a et **F**b, donc si elles sont réalisables dans un futur, ou bien elles le seront simultanément, ou bien l'une sera avant l'autre :

$$((Fa \wedge Fb) \supset (F(a \wedge b) \vee F(a \wedge Fb) \vee F(Fa \wedge b)))$$

Soit à exprimer que le temps est <u>dense</u>, c'est-à-dire que l'on peut toujours intercaler un état temporel entre deux états temporels : ceci se traduit par :

$(\forall w,w')(wRw' \supset (\exists w'')(wRw'' \wedge w''Rw'))$

Ou, d'une façon duale, par l'axiome :

$(Fa \supset FFa)$

Preuve?

Soit enfin à exprimer que le temps est <u>linéaire</u> dans le passé et <u>discret</u>, ce que l'on peut traduire en termes de modèles par la contrainte que tout état w possède un ''passé immédiat'' unique w' tel que qu'aucun état n'existe entre w' et w, ou encore :

$(\forall w)((\exists w')(w'Rw \wedge (\forall w'')(w'Rw'' \supset (w''=w \vee wRw'')))$

Sous forme d'axiome, il vient :

$((a \wedge \mathbf{G}a) \supset \mathbf{PG}a$

Preuve?

- Un autre ‘’étiquetage’’ des propositions concerne ce que l’on appelle les **attitudes propositionnelles :** ‘’je **sais** que p’’, je **veux** que p’’, je **crois** que p’’ etc…

La traduction des verbes telles que ‘’savoir’’, ‘’vouloir’’, ‘’croire’’ par des prédicats est en effet inadéquate :

Leur argument est une proposition et non un terme.

La substitution par un équivalent, règle d’inférence valide en logique ordinaire, ne fonctionne pas.

Exemple : la plupart des français savent que la prise de la bastille à lieu en 1789, mais ne savent pas qu’elle a lieu l’année de la première élection présidentielle américaine. Or si on note S(a,p) le fait que ‘’l’agent a sait que p’’, et si p=q, on ne peut avoir S(a,p) sans avoir S(a,q).

Représenter ‘’savoir’’ comme une modalité S_a permet au contraire de résoudre (partiellement) le problème [Hintika,62].

En effet, l’agent *a* se trouve placé dans un monde *w* d’où il a accès, par une relation R_a, à d’autres mondes w_i. Il est dit ‘’*savoir p*’’ si tous les mondes w_i vérifient la proposition *p* ; l’opérateur modal S_a possède donc, lui aussi, les caractéristiques de l’opérateur de nécessité.

Dans notre exemple, l’interprétation de ‘’l’année de la prise de la bastille’’ coïncide avec celle de ‘’1789’’ dans tous les mondes w_i, mais ne coïncide pas avec celle de ‘’l’année de la première élection présidentielle américaine’’ dans au moins un monde w_i. On peut donc se trouver dans un monde w vérifiant p=q et $S_a p$, mais vérifiant également $\neg S_a q$.

On considère généralement que pour mériter l'appellation d'opérateur épistémique, une modalité Sa doit vérifier les propriétés suivantes :

- ($S_a p \supset p$) [véridicité : savoir une chose implique que cette chose est vraie dans le monde où l'on se trouve ; ceci signifie que le monde w est l'un des w_i, ou en d'autres termes, que la relation R_a est réflexive]
- ($S_a p \supset S_a S_a p$) [principe d'introspection positive : lorsqu'on sait quelque chose, on sait qu'on le sait ; ceci impose à la relation R_a d'être transitive]
- ($\neg S_a p \supset S_a \neg S_a p$) [principe d'introspection négative : lorsqu'on ignore quelque chose, on sait qu'on l'ignore ; ceci impose à la relation Ra d'être euclidienne]

Le système modal obéissant à ces 3 contraintes est le système S5.

Remarque: ces contraintes représentent une notion idéalisée de la notion de savoir, elles n'ont qu'un rapport très hasardeux avec les facultés épistémiques humaines.

- Il est classique d’opposer le savoir, ou la connaissance, avec l’opinion, ou la croyance. Une représentation modale de cette dernière notion, au moyen de modalités parfois appelées doxastiques, requiert l’énoncé de principes. Si $C_a p$ est censé représenter l’agent *a* croit que *p*’’, on adopte généralement pour Ca les principes d’introspections positive et négative et l’on remplace la contrainte de véridicité ($S_a p \supset p$) par la contrainte de cohérence :($C_a p \supset \neg C_{a\neg} p$) [on ne peut croire une chose et son contraire ; ceci impose à la relation *R* d’être sérielle]
- Note : l’indexation par a signifie la relativité à un agent particulier des notions de connaissance et d’opinion. On peut légitimement se demander si l’on peut représenter simultanément le savoir de plusieurs agents?

Halpern et Moses 1985 ont étudié cette question. Il n’est guère difficile de considérer plusieurs relations d’accessibilité R_i entre les mondes, chaque agent considérant différents états de choses comme possibles.

Plus intéressantes sont les notions, introduites par ces auteurs, de connaissance commune et de connaissance implicite d’un groupe d’agents.

Fait partie des **connaissances communes** en un monde w une proposition p connue en ce monde par tous les agents que l'on notera C_p i.e., C_p est vérifiée en w ssi, $\forall i\ S_i p$ est vérifiée en w. On peut également dire que l'on crée une relation d'accessibilité R ''banalisée'' en oubliant de l'indexer par le nom de l'agent : wRw' ssi il existe un i tel que wR_iw'.

Est considérée comme **connaissance implicite** d'un groupe d'agents une proposition p qui n'est peut-être connue d'aucun d'entre eux, mais qui est dérivable de l'union de leurs connaissances, ce que l'on notera I_p . Plus précisément, on crée une relation d'accéssibilité R synthétisant'' les connaissances du groupe : wRw' si $\forall i$, wR_iw'. I est l'opérateur de nécessité induit par cette relation R

Propriété [Halpern&Moses,85] :

si $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \supset q$ est un théorème, alors $S_1 p_1 \wedge \ldots \wedge S_n p_n \supset I_q$

Cette propriété reflète bien le fait que les connaissances implicites d'un groupe sont obtenues en utilisant des éléments de connaissance prélevés chez chacun des agents du groupe.

Comme nous l'avons signalé, ces approches idéalisent les notions qu'elles sont censées modéliser. Un des reproches qui leur est fait le plus couramment est celui d'omniscience : tout agent doit savoir les conséquences de ce qu'il sait.

En effet, dans toute approche pour laquelle S_i est un opérateur de nécessité, si $S_i a$ et $S_i(a \supset b)$, alors $S_i b$ puisque si tous les mondes jugés possibles par l'agent i vérifient a et $a \supset b$, ils vérifient b.

- Les connaissances **déontiques**. Il existe entre l'obligatoire et le permis le même type de dualité qu'entre le nécessaire et le possible.

Est obligatoire ce qui doit être réalisé dans toutes les circonstances concevables.

Est permis ce dont le contradictoire n'est pas obligatoire.

Si donc nous assimilons la modalité <obligation> à l'opérateur □, nous sommes conduits à admettre comme principe (□p⊃◊ p) : ce qui est obligatoire doit être au moins permis. Nous savons que ceci correspond à l'axiome (A10), donc à la sérialité de la relation R, et au système modal D.

Toutefois, certains théorèmes de ce système sont parfois jugées paradoxaux dans leur interprétation déontique :

$(\Diamond p \supset \Diamond(p \vee q))$: ‘’s’il est permis de faire p, alors il est permis de faire p ou de faire q’’, mais le paradoxe vient ici du choix introduit par le ‘’ou’’ : dans l’esprit du lecteur, c’est l’agent auquel on permet de faire p qui a également la faculté de choisir; or la validité du théorème n’octroie pas cette liberté : c’est, si l’on veut, le législateur qui a le choix : il peut affirmer que ‘’p ou q’’ est permis dans le sens où, au cas où q serait interdit, on pourrait toujours se rabattre sur p.