

Série 2

Equilibres de Nash en stratégies pures.

Exercice 1

On considère le jeu décrit par la matrice suivante :

1/2	u	v	w
x	(3,0)	(0,2)	(0,3)
Y	(2,0)	(1,1)	(2,0)
z	((0,3)	(0,2)	(3,0)

- 1) Déterminer les correspondances des meilleures réponses de chacun des deux joueurs.
- 2) Ce jeu possède-t-il des équilibres de Nash en stratégie pure ? si c'est le cas les déterminer.

Exercice 2 (Le jeu des marchands de crème glacée)

Imaginons une plage où deux vendeurs de crème glacée, doivent s'installer en début de saison. Ils vendent leur produit à un prix fixé par le fabricant, mais en revanche libre de choisir leur localisation. Les clients sont des touristes venant tous les jours s'installer en plage. Ils se répartissent à distance égale de leurs voisins. Les touristes n'aiment pas se déplacer à cause de l'encombrement de la plage. Dès lors ils choisissent de d'acheter au vendeur le plus proche.

Est-il possible de déterminer un équilibre de Nash en localisation pour les deux vendeurs ? et que sera-t-il ? set il unique ?

Exercice 3

Soit le jeu sous forme stratégique suivante :

1/2	t	u	v
x	(3,2)	(4,0)	(5,1)
y	(1,0)	(7, 3)	(2,5)
z	(2,0)	(8,5)	(1,7)

- 1) Ce jeu comporte-t-il des stratégies strictement /faiblement dominées ? si oui les quelles ?
- 2) Ce jeu comporte-t-il des équilibres de Nash ? si oui les quels ?
- 3) Quels sont les profils qui en dominant d'autres en sens de Pareto ?
- 4) Quel est le niveau de sécurité de chacun des joueurs ?

Exercice 4

Soit le jeu sous forme stratégique suivante

1/2	t	u
a	(x,y)	(2,0)
b	(1,2)	(3,6)

Dire pour chacune des conditions suivantes, quelles sont les valeurs nécessaires pour x et / ou y pour qu'elle soit vérifiée :

- Le profil (a,t) est un équilibre de Nash .
- Le profil (a,t) Pareto-domine les autres.
- La stratégie a domine strictement la stratégie b).
- Le profil (b,u) est obtenu comme résultat d'une élimination itératives des stratégies dominées.

Exercice 5

Deux joueurs décident de se partager un dinar. Le processus de marchandage se déroule de la manière suivante : les joueurs annoncent simultanément la part qu'ils veulent recevoir s_1 et s_2 , $0 \leq s_1, s_2 \leq 1$. Alors les joueurs recevraient les parts qu'ils ont demandées si $s_1 + s_2 \leq 1$, 0 sinon.

- $(0.3, 0.7)$
- $(0.5, 0.5)$
- $(1,1)$
- Tous les trois précédents

Exercice 6 :

On considère N fermiers qui peuvent chacun produire à un cout nul autant de blé qui le désirent. Si le $k^{ème}$ fermier produit q_k , la quantité totale produite est $Q = q_1 + q_2 + \dots + q_N$. Le prix du blé est déterminé alors par e^{-Q} .

- Faire le tableau de variation de la fonction $f(x) = xe^{-x}$ pour $x \geq 0$.
- En utilisant le point précédent, montrer que la stratégie qui consiste à produire une unité de blé est dominante pour chaque fermier. En déduire que le profit correspondant à chaque fermier est e^{-N} .
- Supposons que les fermiers se mettent d'accord pour que chacun produise $\frac{1}{N}$ unité de blé. Toujours en se basant sur le premier point montrer que le produit total est alors maximal. Vérifier alors que le profit de chaque fermier est $\frac{e^{-1}}{N}$. Un tel accord peut il être respecté ?
- Pourquoi ce jeu est-il une généralisation du dilemme du prisonnier ?

Exercice 7 (modèle de Bertrand Duopoly)

Deux firmes produisant un même bien, avec un coût de production égal à $C > 0$ par unité.

Chaque firme impose un prix positif ou nul (p_1 et p_2) respectivement.

Tous les clients achètent de la firme au prix le plus bas si $p_1 \neq p_2$, la moitié des clients achètent de chacune des firmes si les prix sont égaux.

D est la demande totale.

Le profit d'une firme i sera calculé comme suit :

0 si $p_i > p_j$ (aucun n'achète de la firme i)

$$D(p_i - c)/2 \text{ si } p_i = p_j$$

$$D(p_i - c) \text{ si } p_i > p_j \text{ (Tous les clients achètent de la firme i)}$$

Trouver l'équilibre de Nash en stratégie pure est ce :

- a) Toutes les deux proposent le prix 0
- b) La première propose 0 et la deuxième C.
- c) Les deux proposent le prix C.
- d) Ne possède pas d'équilibre de Nash en stratégie pure.