FEI/Département Informatique/Master 1 MIV

Module : Théorie des **jeux** ***Le Samedi 28 Mai 2016***

Examen

Exercice 1 : (Le jeu du menteur)

Monsieur X tire une carte dans un jeu et ne la montre pas.

Il peut choisir de donner une pièce ou de demander une pièce à son adversaire monsieur Y.

Ce dernier peut soit accepter de donner la pièce soit de dire ''menteur ''.

A ce stade du jeu, X doit montrer sa carte : si elle est rouge il reçoit 4 pièces de Y ,si elle est noire il doit payer 5 pièces à Y .

1) *Ecrire la matrice de ce jeu. Ce jeu est-il à somme nulle ?*
2) *Les joueurs possède t'ils des stratégies optimales(Minimax) en stratégies pures ?*
3) *Déterminer les stratégies optimales des joueurs en stratégies mixtes.*

Exercice 2

Soit le jeu à deux joueurs suivant

1 /2	A	B	C	D
a	(3,3)	(1,4)	(6,2)	(1,2)
b	(4,1)	(0,0)	(6,0)	(3 ,0)
c	(2,9)	(0,9)	(6,8)	(5,6)
d	(2,11)	(0, 3)	(5,7)	(10,10)

1) *Ce jeu est-il résoluble par élimination itères des stratégies strictement dominées ?*
2) *Déterminer les équilibres de Nash (pures et mixtes) de ce jeu .*
3) *Les équilibres de Nash sont-ils pareto-optimaux ? Est-ce toujours le cas ?*

Exercice 3 (Répondez à seulement l'une des deux questions au choix)

1) *Montrer que dans un jeu où chaque joueur a une stratégie strictement dominante, le vecteur des stratégies strictement dominantes est l'équilibre de Nash et aussi le vecteur des stratégies Maximin*
2) *Soit* $X, Y, g: X \times Y \to R$ *un jeu à deux joueurs à somme nulle tel que* $X = Y = [1,3]$ *et* $g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$ *(paiement du premier joueur), ce jeu admet il une valeur ? si oui que vaut-elle ?*

Corrigé de l'examen Th. jeux (01)

Exo1:

Le jeu du menteur

Monsieur Y a deux stratégies < Accepter "donner" Y_1 ; refuser "dire menteur" Y_2

Monsieur X a 4 stratégies ~~une~~ pour chaque retrait une pour la boule rouge et une pour la boule noire donc

x_1 (Donner, Donner), x_2 (Demander, donner),

x_3 (Donner, demander), x_4 (Demander, Demander)

	Y_1	Y_2	
x_1	-1	-1	(Dominée) stricte
x_2	0	$\frac{3}{2}$	
x_3	0	-3	(Dominée) stri...
x_4	1	$-\frac{1}{2}$	

Exp de calcul si X choisit x_1 (Donner, Donner).

Y_1 choisit "donner"

$$\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(-1) = -1$$

de même

si Y choisit refuser

$$\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(-1) = -1 .$$

Ainsi de suite ...

D'où la matrice du jeu est:

		q	$1-q$	
	$1 \backslash 2$	Y_2	Y_2	min
p	X_2	0	$\frac{3}{2}$	0
$1-p$	X_4	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	Max	1	$\frac{3}{2}$	

Maxmin = $\underline{v} = 0$

minmax = $\bar{v} = 1$

Pas de Points selles En purs !!

2)

En mixtes :

$$\max_{p\in[0,1]} \min\left(f(\sigma_1, Y_2), f(\sigma_1, Y_2)\right)$$

$$\max_{p\in[0,1]} \min\left(\cancel{p}(1-p), (1-p)(-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{2}p \right)$$

$$\max_{p\in[0,1]} \min\left(1-p, 2p-\tfrac{1}{2}\right) = \max_{p\in[0,1]} \begin{cases} 2p-\frac{1}{2} & p<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & p=\frac{1}{2} \\ 1-p & p>\frac{1}{2} \end{cases}$$

$-\frac{1}{2} \nearrow \frac{1}{2} \searrow 0$

d'où le maximum $\underline{v} = \frac{1}{2}$.

Atteint pour $\boxed{p = \frac{1}{2}}$

$$\min_{q\in[0,1]} \max\left(f(X_2, \sigma_2), f(X_4, \sigma_2)\right)$$

$$\min_{q\in[0,1]} \max\left(\tfrac{3}{2}(1-q), q - \tfrac{1}{2}(1-q)\right)$$

$$\left(-\tfrac{3}{2}q + \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}q - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\min_{q\in[0,1]} \begin{cases} -\frac{3}{2}q + \frac{3}{2} & q<\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & q=\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}q - \frac{1}{2} & q>\frac{2}{3} \end{cases} = \frac{1}{2} = \bar{v}$$

$\frac{3}{2} \searrow \frac{1}{2} \nearrow 1$

$\boxed{q = \frac{2}{3}}$

admet $\underline{v} = \bar{v} = \frac{1}{2}$. De même $\sigma_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\sigma_2\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\pi_2\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\pi_1\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. — 0,5

— 3

EXO2

Après Elimination des stratégies strictement dominées

le jeu devient

		y	$1-y$
	1 \ 2	A	B
x	a	(3,3)	(1,4)
$1-x$	b	(4,1)	(0,0)

1) Non

2) Pures (a, B) et (b, A) → (1,4) → (3,3)

$x \in]0,1[$ et $y \in]0,1[$

mixtes : Thm d'indifférence ⇒

$3y + (1-y) = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$3x + (1-x) = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$(\pi_1, \pi_2) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

3) Oui ils le sont, mais ce n'est pas toujours le cas les purs le sont

Mais le mixte ne l'est pas

de paiement (2,2) est dominé par (3,3).

Non ce n'est pas le cas contre exemple

Dilemme du prisonnier

Exo3 (4)

1) Soient un jeu fini à n joueurs si $s_1^*, \dots, s_n^*$ sont les stratégies dominantes.

$$\forall i \quad U_i(s_i^*, s_{-i}) > U_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i$$

D'ou le profil $(s_1^*, \dots s_n^*)$ pour chaque joueur i vérifie

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) > U_i(s_i, s_{-i}^*)$$

donc c'est un equilibre de Nash

Par définition

$(s_1^*, \dots s_n^*)$ est aussi un vecteur maxmin pour chaque joueur car : Je faut montrer s_i^* est une stratégie optimale pour chaque joueur i

Or : Supposons par l'absurde que la stratégie optimale du joueur i est égal à $s''_i \neq s_i^* \Rightarrow$

$$\exists t'_{-i}, \exists t''_{-i} \in S_{-i} \quad U_i(s''_i, t'_{-i}) > U_i(s_i^*, t''_{-i}) \quad \text{(I)}$$

Or

$$U_i(s''_i, t'_{-i}) = \min_{t_{-i} \in S_{-i}} U_i(s''_i, t_{-i})$$

donc

$$U_i(s''_i, t'_{-i}) \leq U_i(s''_i, t''_{-i})$$

$$U_i(s''_i, t''_{-i}) > U_i(s_i^*, t''_{-i})$$

d'après (I) $\Rightarrow$ Contradiction avec (1)

s_i^* dominante (5)

dans le profil $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ est un profil maxmin pour tous les joueurs.

2) $\max_{x \in [1,3]} \min_{y \in [1,3]} g(x,y) = \max_{x \in [1,3]} \min_{y \in [1,3]} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$

Après étude de la fonction

$f_x(y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$

sur $[1, 3]$

$f'_x(y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} + x > 0$

donc croissante c'est

$\min_{[1,3]} f_x(y) = f_x(1) = \frac{1}{x} + 1 + x$

$\max_{x \in [1,3]} \left(\frac{1}{x} + 1 + x \right) \nearrow$

$1 - \frac{1}{x^2} > 0$

Max atteint en 3

$= \frac{1}{3} + 1 + 3$

$\underline{v} = \frac{13}{3}$

De même on calcule

$\overline{v} = \min_{y \in [1,3]} \max_{x \in [1,3]} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \right)$

$\min_{y \in [1,3]} \left(\frac{1}{3} + 3y + \frac{1}{y} \right) = \frac{13}{3} = \underline{v}$

Oui il possède un PNS celle $(3,1)$