# Série 4

Solutions des exercices

# Solutions

**Exercice 1.**

Le joueur 1 possède une stratégie dominante si et seulement si

$\exists\ a \in [0,1]\ teq\ g(a,y) \geq g(x,y)\ \ \forall\ x \in [0,1], \forall\ y\ \in [0,1] \Rightarrow$
la fonction $\mathrm{g_y(x)}$admet un maximum $sur$ $[0,1]$ ,

On étudie la fonction $\mathrm{g_y(x)}$ donc on calcule $\frac{dg_y}{dx} = 2x - y = 0\ si\ x = \frac{y}{2}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | y/2 | + | 1 |
| -1 | $\searrow$ | $-1 - \frac{y^2}{4}$ | $\nearrow$ | -y |

$\mathrm{x = 1}$ est un maximum car $\mathrm{g(1,y) \geq g(x,y)}$, donc la stratégie $\mathrm{x = 1}$est une stratégie dominante.

# Solutions

- Pour le joueur 2 cela revient à chercher une stratégie b du joueur 2 tel que $g(x,b) \leq g(x,y)$ donc cela revient à étudier la fonction $g_x(y)$ ,

$$\frac{dg_x}{dy} = -x \leq 0 \; donc \; décroissante \; c'est \text{ à } dire \; le \; minimum \; est \; atteint \; en \; 1$$

$\Rightarrow g(x,1) \leq g(x,y)$ donc la stratégie y=1 est dominante pour le joueur 2 donc le profil (1,1) est une issue du jeu d'après le théorème vu en cours c'est aussi un équilibre en stratégies prudentes.

**Exercice 2. ( résolu en cours),**

**Exercice 3.** comme le joueur 1 dispose seulement de deux stratégies donc on essayera de calculer la stratégie prudente du joueur 1 c'est-à-dire :

$$\max_{\sigma_1 \in \boldsymbol{\Sigma}_1} \min_{\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma_1}, \mathbf{b}) = \max_{\boldsymbol{p} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}\}} min(\mathbf{1}-\boldsymbol{p}, \mathbf{2}\boldsymbol{p}, \mathbf{2}-\boldsymbol{p}) = \max_{\boldsymbol{p} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}\}} \min(\mathbf{1}-\boldsymbol{p}, \mathbf{2}\boldsymbol{p})$$

$$= \max_{\boldsymbol{p} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]} \begin{cases} \mathbf{2}\boldsymbol{p} \; \boldsymbol{si} \; \boldsymbol{p} \in \left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right] \\ \mathbf{1}-\boldsymbol{p} \; \boldsymbol{si} \; \boldsymbol{p} \in [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \mathbf{1}] \end{cases} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \; \boldsymbol{atteint \; en}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \; \mathbf{donc} \; \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right) \boldsymbol{est \; la \; stra}\text{é}\boldsymbol{gie \; prudente \; du \; joueur}\mathbf{1}.$$

# Solutions

- On vérifie le support de la stratégie prudente $\sigma_2$ du joueur 2 grâce au fait que le gain dans le support est invariant face à la stratégie $\sigma_1$, c'est-à-dire $f(\sigma_1, b_1) = f(\sigma_1, b_2) = f(\sigma_{1,}, b_3)$
Si on suppose que les trois stratégies du joueur 2 sont dans le support de la stratégie prudente on obtient parés calcul : $f(\sigma_1, b_1) = \frac{2}{3}$ ; $f(\sigma_1, b_2) = \frac{2}{3}$;
$f\left(\sigma_{1,}, b_3\right) = \frac{5}{3}$ donc la straétgie $b_3$ est hors support alors $\sigma_2 = (\mathrm{q}, 1 - \mathrm{q}, 0)$
par invariance au support du joueur 1 on détermine $q$ $f(a_1, \sigma_2) = f(a_2, \sigma_2)$
$\Rightarrow 2(1-q) = q \Rightarrow q = 2/3$ donc la stratégie prudente du joueur 2 est
$\sigma_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

# Solutions

- **Exercice 4.** Ce jeu admet un point selle si et seulement si :

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in y}\max_{x\in X} f(x,y)$$

Car l'ensemble des stratégies $[0,1]\times[0,1]$ est un ensemble compact( borné et fermé) donc on peut appliquer le théorème vu en cours.

On calcule $\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y}(\,1-(x-y)^2)$

On calcule alors la dérivé partiel par rapport $\frac{df_x}{dy} = 2(\mathrm{x}-\mathrm{y})$ d'où la tableau de variation :

| 0 | + | x | - | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $1\text{-}x^2$ | ↗ | 1 | ↘ | $1\text{-}(x-1)^2$ |

$$\min_{y\in Y}(1-(x-y)^2) = \begin{cases} 1-(x-1)^2 \; si \;\; x\in[0,\frac{1}{2}] \\ 1-x^2 \; si \;\; x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $\frac{3}{4}$ | | |
| 0 | ↗ | | ↘ | 0 |

# Solutions

- $\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y}(1-(x-y)^2) = \frac{3}{4}$

on calcule de même $\min_{y\in Y} \max_{x\in X}(1-(x-y)^2)$

On doit étudier alors la fonction $f_y(x)$ $\frac{df_y}{dx} = -2(\mathrm{x}-\mathrm{y})$

| 0 | + | y | - | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $1-y^2$ | | 1 | | $1-(1-y)^2$ |

$\max_{x\in X}(1-(x-y)^2=1 \Rightarrow \min_{y\in Y}\max_{x\in X}(1-(x-y)^2)=1$

Donc le jeu n'admet pas de valeur ni de points selles.

# Solutions

**Exercice 5.**( à remettre le 28/05 par email)

**Exercice 6. 1)** on suppose la stratégie 3 du joueur 2 est dominée par une stratégie mixte combinaison des stratégies pures 1 et 2 alors cela entraine :

$\exists \boldsymbol{p} \in ]\mathbf{0}, \mathbf{1}[\ \boldsymbol{teq}\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_{\mathbf{1}} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{p})\boldsymbol{y}_{\mathbf{2}}$ **et** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_{\mathbf{3}}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{p} + \mathbf{3}(\mathbf{1} - \boldsymbol{p}) \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{p} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{p}) \leq \mathbf{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\mathbf{2}\boldsymbol{p} + \mathbf{3} \leq \mathbf{0}\ (\text{é}\boldsymbol{quation\ impossible}) \\ \boldsymbol{p} + \mathbf{1} \leq \mathbf{4} \end{cases}$$

**2) De même cela implique alors**

$$\begin{cases} -\mathbf{2}\boldsymbol{p} + \mathbf{3} \leq \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{p} + \mathbf{1} \leq \boldsymbol{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{p} \geq \frac{\mathbf{3} - \boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} \\ \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{b} - \mathbf{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{3} - \boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} \leq \mathbf{1} \\ \boldsymbol{b} - \mathbf{1} \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b} - \mathbf{1} \geq \frac{\mathbf{3} - \boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{b} \geq \mathbf{1}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{a} \geq \mathbf{1}\ \boldsymbol{etb} \geq \frac{\mathbf{5} - \boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}$$