FEI/Département Informatique
Master 1 MIV

Examen Théorie des jeux
(Durée :1h30)

le 23/05/2017

Exercice1

Soit le jeu à deux joueurs suivant dans lequel le joueur 1 choisit la ligne et le joueur 2 la colonne :

	1/2	a	b	c	d
		q	1-q		
p	A	(3,3)	(1,4)	(6,2)	(1,2)
1-p	B	(4,1)	(0,0)	(6,0)	(3,0)
	C	(2,9)	(0,9)	(6,8)	(5,6)
	D	(2,11)	(0,3)	(5,7)	(10,10)

a>c
a>d
A>C
A>D

1) Ce jeu est-il résoluble par élimination des stratégies strictement dominées.
2) Déterminer les équilibres de Nash pures et mixtes de ce jeu.
3) Les équilibres de Nash sont-ils Pareto dominant dans ce jeu ? est-il toujours le cas ?

Exercice 2

A) Soit la matrice de jeu

	1/2	b1	b2	b3
		q	1-q	
p	a1	0	2	1
1-p	a2	1	0	2

1) Déterminer les stratégies mixtes prudentes de chaque joueur. En déduire l'équilibre du jeu en stratégie prudentes.
2) L'équilibre obtenu en 1) est-il un équilibre de Nash, justifier votre réponse.

B) Soit $X = Y = [0,1]$ les ensembles des stratégies possibles des joueurs X et Y dans un jeu à somme nulle et dont la fonction d'utilité est définie par : $f(x,y) = 1 - (x-y)^2$. ce jeu admet- il des points selles ?

Exercice3

Deux joueurs choisissent chacun, à l'insu l'un de l'autre, une pièce de monnaie de 10 dinars, 50 dinars ou 100 dinars et se les montrent simultanément.

Si les deux pièces présentées sont de même valeur, le joueur 1 (qui sera le joueur des lignes) gagne la pièce du joueur 2 ; si elles sont différentes, c'est le joueur 2 qui gagne celle du joueur1.

1) Ce jeu est-il un jeu à somme nulle ? Construire la matrice du jeu.
2) Que valent Maxmin et Min max en stratégies pures ?
3) Quel majorant $\bar{v}$ le joueur 2 peut-il imposer à l'espérance de gain du joueur 1 en jouant la stratégie mixte $\sigma_2 = \left(\frac{3}{26}; \frac{11}{26}; \frac{12}{26}\right)$.
4) Montrer que le joueur 1peut s'assurer une espérance de gain $\bar{v}$ en jouant une unique stratégie mixte que l'on déterminera.
5) En déduire la valeur du jeu et les stratégies mixtes optimales pour les deux joueurs.

Exo 1 : (05 points) 01

1) Non Par élimination des stratégies dominées

2)

x_2	a (q)	b ($1-q$)	c	d
A (p)	(3,3)	(1,4)		
B ($1-p$)	(4,1)	(0,0)		

Les (A, b) et (B, a). Purs 01

mixtes Par l'invariance de support on obtient

l'équilibre
$$\begin{cases} 3q+(1-q) = 4q \Rightarrow q = \frac{1}{2} \\ 3p+(1-p) = 4p \Rightarrow p = \frac{1}{2} \end{cases}$$ 01 01

$$\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

3) Non la borne le dilemme du prisonnier 01

Exo 2 (03.5)

	b1 (q)	b2 ($1-q$)	b3
a1 (p)	0	2	2
a2 ($1-p$)	2	0	2

$$\underline{V} = \max_{p\in[0,1]} \min\left(1-p,\ 2p,\ p+2(1-p)\right)$$

$$\underline{V} = \max_{p\in[0,1]} \min\left(1-p,\ 2p,\ 2-p\right)$$

$\underline{v} = \frac{2}{3}$

Onzemam yue . . . çà .

Stratégie b_3 vérifie

vuus $g.(\sigma_1, b_3) = \underline{v}$ et

$b_3 \in$ dugre (σ_2).

$\sigma_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ est S.P du J_2

J_2 :

$$\bar{v} = \min_{q \in [0,1]} \max \left(2(1-q), q\right) = \frac{2}{3}.$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

(σ_1, σ_2)

0,1

0,1

0,8

3) Oui grâce aux théorème de Von Neumann 0,2

1928.

$$\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} f(x,y) = 1$$

$$\underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} f(x,y) = \frac{3}{4}$$

0,3

donc pas de valeur !

b)

$P = (P_{10}, P_{50}, P_{100}) = (r, s, t)$

$\bar{v}$ ssi

$$\begin{cases} 10P^{10} - 50P^{50} - 100P^{100} \geq -\frac{100}{13} \\ -10P^{10} + 50P^{50} - 100P^{100} \geq -\frac{100}{13} \\ -10P^{10} - 50P^{50} + 100P^{100} \geq -\frac{100}{13} \\ P_{10} + P_{50} + P_{100} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10r - 50s - 100t \geq -\frac{100}{13} \\ -10r + 50s - 100t \geq -\frac{100}{13} \\ -10r - 50s + 100t \geq -\frac{100}{13} \\ r + s + t = 1 \end{cases}$$

01

~~Mardi~~ 07 Juin à 13h00

Mardi

↳ 06 Juin à 9h00

$1 \rightarrow 9$

$\sigma_2 = \left(\frac{10}{13}, \frac{2}{13}, \frac{1}{13}\right)$

$-200t \geq -\frac{200}{13}$

01

$t \leq \frac{1}{13}$, $-20r \geq -\frac{200}{13}$

$\bar{v} = v = -\frac{100}{13}$. $r \leq \frac{10}{13}$ $s \leq \frac{2}{13}$ 01

Exo3 (7/8) Oui le jeu est à somme nulle car le gain de l'un est la perte de l'autre

1)

	$\frac{3}{26}$	$\frac{11}{26}$	$\frac{12}{26}$	
$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$	10	50	100	min
10	+10	-10	-100	-100
50	-10	50	-50	-50
100	-100	-100	+100	-100
	10	50	100	

01

2) max min = -10   min max = 10

01

3) $\left(\frac{3}{26}, \frac{11}{26}, \frac{12}{26}\right)$

$\boxed{\sigma_2}$

$$\bar{v} = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} f(\sigma_1, \sigma_2) = \max_{s_1 \in S_1} f(s_1, \sigma_2)$$

car le maximum est atteint dans les stratégies pures

02

$$\bar{v} = \max\left(\frac{3}{26}(10) + \frac{11}{26}(-10) + \frac{12}{26}(-10), \frac{3}{26}(-50) + \frac{11}{26}(50) + \frac{12}{26}(50), \frac{3}{26}(-100) + \frac{11}{26}(-100), + \frac{12}{26}(100)\right)$$

$$\bar{v} = \max\left(-\frac{100}{13}, -\frac{100}{13}, -\frac{100}{13}\right) = -\frac{100}{13}$$