Chapitre III le comportement prudent et les Jeux à somme nulle

1. Comportement prudent

1.1 Introduction : un autre aspect, non capturé de l'équilibre de Nash , est le notion du risque. En effet considérant le jeu suivant :

1/2	L	R
T	(3,1)	(2,2)
M	(0,8)	(0,-1)
B	(-100,2)	(3,3)

il est facile de voir que (B, R) est le seul équilibre de Nash avec le paiement (3,3). Cependant cet équilibre n'est pas une solution réalisable car la notion de risque et de sécurité n'est pas présente dans le raisonnement sous –jacent à l'équilibre de Nash. C'est pour cette raison une règle qui prends en considération le risque a été introduite :

le joueur i est prudent (pessimiste) s'il croit qu'en utilisant la stratégie $s_{\ i}$, les autres joueurs vont prendre le vecteur de stratégies s_{-i} qui lui est le plus défavorable donc tel que :

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \min_{t_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i\,, t_{-i})$$

dans ce cas s'il est rationnel, il va jouer la stratégie s_i^* qui va maximiser son paiement étant donnée sa croyance c'est-à-dire vérifiant :

$$u_i(\ s_i^*,\ s_{-i}^*) = \max_{s_i \in S_i} \min_{t_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, t_{-i}) = \underline{v_i}$$

Donc si le joueur i joue la stratégie s_i^*, alors il est sûr qu'au pire des cas d'obtenir un paiement $\underline{v_i}$.

1.2 Définition s_i^* ainsi définie est appelée la stratégie maxmin ou la stratégie prudente. $\underline{v_i}$ est appelée la valeur maxmin du joueur i. un vecteur de stratégies ou tous les joueurs utilisent une stratégie maxmin est appelé : un vecteur de stratégies maxmin.

Pour trouver la stratégie maxmin du joueur 1 dans l'exemple précédent, on rajoute une colonne dans laquelle on inscrit dans chaque ligne l, le paiement minimal du joueur 1 quand il joue cette stratégie

1/2	L	R	min
T	(3,1)	(2,2)	2
M	(0,8)	(0,-1)	0
B	(-100,2)	(3,3)	-100

Donc il joue la stratégie T, donc $\underline{v_1} = 2$

De même pour le joueur 2

1/2	L	R
T	(3,1)	(2,2)
M	(0,8)	(0,-1)
B	(-100,2)	(3,3)
Min	1	-1

Donc il joue la stratégie L et $\underline{v_2} = 1$.

Par définition des stratégies maxmin, on déduit que le vecteur des paiements $u = (u_i)_{i \in N}$ associé à un vecteur de stratégies maxmin satisfait toujours : pour chaque joueur i $u_i \geq \underline{v_i}$. En fait cette inégalité peut être stricte comme dans l'exemple le vecteur maxmin étant (T,L) de paiement (3,1) où $3 > \underline{v_1} = 2$.

On peut aussi remarquer que le vecteur de paiement associé à un vecteur de stratégies maxmin n'est pas toujours bien défini car un joueur peut avoir plusieurs stratégies maxmin exemple :

1/2	L	R
T	(3,1)	(0,4)
B	(2,3)	(1,1)

Dans ce jeu le paiement maxmin peut égal à (2,3) ou bien (1,1).

L'équilibre de Nash et le maxmin sont deux concepts basés sur deux idées différentes : l'un capture la stabilité et l'autre la sécurité. Typiquement ces deux concepts donnent des prédictions différentes. Cependant il y'a des jeux pour les quels ces deux concepts coïncident par exemple le dilemme du prisonnier. Au fait ça s'explique mathématiquement ainsi :

Proposition 1 : Une stratégie faiblement dominante est aussi une stratégie maxmin.

Corollaire1 : dans un jeu ou chaque joueur a une stratégie faiblement dominante, le vecteur des stratégies dominantes est un équilibre de Nash, et aussi un vecteur de stratégies maxmin.

Corollaire2 :dans un jeu ou chaque joueur a une stratégie strictement dominante, le vecteur des stratégies strictement dominante est l'équilibre de Nash et aussi le vecteur des stratégies maxmin.

2. Jeux à somme nulle

2.1 Modèle

Formellement, un jeu à somme nulle est un triplet $\Omega = \{A, B, f\}$ où :

- A est un ensemble non vide appelé ensemble d'actions(ou de stratégies) du joueur J1.
- B est un ensemble non vide d'actions du joueur J2.
- $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée qu'on appelle fonction de paiement ou bien d'utilité ou encore de gain. Le joueur J1 cherche à maximiser et le joueur J2 à minimiser.

Ceci modélise l'interaction stratégique suivante : J1 et J2 choisissent simultanément (sans savoir ce que fait l'autre) $a \in A$ et $b \in B$ respectivement. les actions sont aussi révélées et le paiement est f (a,b). Ce paiement modélise le contentement de J1et le mécontentement de J2.

Remarque : Dans le cas particulier où A ou B est un singleton il s'agira d'un problème de minimisation ou bien de maximisation respectivement.

Si A et B sont des ensembles finis on parle de jeu fini (ou jeux matriciel), qu'on représente sous forme de matrice. Le joueur J1 choisit une ligne et le joueur J2 une colonne, et le paiement correspondant est dans l'intersection de cette ligne et cette colonne

De manière générale on peut représenter un jeu sous forme normale par une matrice :

II.1.2 Représentation d'un jeu sous forme normale

Si on représente les n stratégies du joueur X en ligne et les m stratégies du joueur Y en colonne, la simple lecture de la matrice n×m ayant comme entrées les valeurs de la fonction paiement nous permettra une représentation très intéressante du jeu :

Exemple II.1.2

	y_1	y_2	y_3
x_1	**-2**	**+1**	**-1**
x_2	**-2**	**-4**	**+1**
x_3	**-3**	**+2**	**-4**

On lira alors que si le joueur si X choisit la stratégie x_1 et le joueur Y la stratégie y_1 alors le joueur Y doit payer -2 à X c'est-à-dire X doit payer 2 à Y.
Avec la notion de paiement il est logique X choisit une stratégie qui maximise f(x,y) et Y doit en choisir celle qui la minimise.
Donc dans cet exemple le joueur X va choisir la stratégie x_1 qui est la plus optimale car parmi les paiements minimaux proposés par Y il va de soi que X choisit le plus grand car il ne perdre au maximum que 2 et parmi paiements maximaux proposés par X le joueur Y ne pourra que choisir le plus petit autrement dit Y va forcément choisir la stratégie y_1 car il ne perd rien dans ce cas. C'est la méthode du minMax et Maxmin. Si Maxmin= minMax on dit que le jeu admet **une valeur en stratégie pure**. Ici $\underline{v} = -2$.

II.1.3 Valeur en stratégies pures

Définition 1 : le Maxmin en stratégie pure noté $\underline{v}$ est la quantité :

$$\underline{v} = \underset{a \in A}{Max}(\underset{b \in B}{\min} f(a,b))$$

Le Maxmin représente le paiement maximal que le joueur J1 peut assurer quelle que soit l'action de J2.

Interprétation :

$\underline{v}$ est la « valeur » du jeu dans lequel le joueur J1 choisit d'abord son action a, qui est annoncé à J2 qui à son tour choisira son action b en fonction de a.

Définition2 :

Le minMax en stratégie pure est noté $\bar{v}$ est la quantité

$$\bar{v} = \underset{b \in B}{\min}(\underset{a \in A}{Max} f(a,b))$$

Le minMax représente le paiement minimal que le joueur J peut assurer quel que soit l'action de J1.

De même que $\underline{v}$, $\bar{v}$ est la « valeur » du jeu dans lequel le joueur J2 choisit d'abord son action b, qui est annoncée à J1, celui-ci choisissant son action a en fonction de b.

Les interprétations ci-dessus de $\underline{v}$ et $\bar{v}$ laisse penser qu'on devrait avoir $\underline{v} \leq \bar{v}$. En effet :

Proposition

Pour tout jeu, $\underline{v} \leq \overline{v}$.

Démonstration :

Pour tout $a \in A \; et \; b \in B$, on $f(a,b) \leq \underset{a' \in A}{Max} \; f(a',b)$. En fixant a et en prenant le minimum sur b de cette égalité on trouve :

$$\min_{b \in b} \; f(a,b) \leq \min_{b \in B} \underset{a' \in A}{Max} \, f(a,b) = \overline{v}$$

Puisque ceci est vrai pour tout a alors nous avons

$$\underline{v} = \underset{a \in A}{Max} \min_{b \in b} \; f(a,b) \leq \min_{b \in B} \underset{a' \in A}{Max} \, f(a,b) = \overline{v}$$

Définition3 : On dit qu'un jeu admet une valeur v en stratégie pure si et seulement si $\underline{v} = \overline{v}$ =v.

Exemple II.1.3

Soit le jeu à deux joueurs à somme nulle représenté par la matrice de paiement suivante :

$$\begin{array}{cc} & \text{Stratégies du joueur Y} \\ \text{Stratégies du joueur X} & \begin{matrix} \underline{-1} & +1 & +1 & \underline{-1} \\ -2 & -3 & +2 & +2 \\ -2 & +1 & -2 & +1 \\ \underline{-1} & -3 & +4 & +1 \end{matrix} \end{array}$$

Dans ce cas $\overline{v}$ = Maxmin=minMax = $\underline{v}$ =-1, mais on peut se poser la question les points $p_1(x_1, y_1), q(x_1, y_4) \; et \; t(x_4, y_1)$ ayant tous pour image -1 , correspondent ils à des stratégies optimales ?

Pour y répondre on est amenés à la définition du point selle.

Définition4

Un point $s(x^*, y^*)$ est un point selle pour un jeu à deux joueurs et à somme zéro ssi :

$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y)$

A savoir que si X déplace son choix de stratégie de manière unilatérale de x^* à une autre stratégie$x$, alors que Y conserve son choix y^*, le paiement diminue autrement dit X s'auto pénalise et de même pour Y, si X maintient son choix x^* alors que Y va vers une autre stratégie $y \neq y^*$ la fonction f augmente et donc Y sera pénalisé.

Le point $s(x^*, y^*)$ est le meilleur compromis entre les deux parties.

Cela répond à la question posée en fin de l'exemple précèdent les points $q(x_1, y_4)$ $et\ t(x_4, y_1)$ ne vérifient pas la condition du point selle. Le jeu alors de l'exemple admet un seul point selle qui est le point $p_1(x_1, y_1)$.

Théorème 1 :

Si l'ensemble S est l'ensemble de tous les points selle d'un jeu est non vide $S \neq \emptyset$, alors le paiement est le même pour tous ces points selle et ils sont échangeables.

Preuve

D'après la définition du points selle nous avons d'une part :

$f(x_2, y_1) \leq f(x_1, y_1) \leq f(x_1, y_2) \ldots\ldots(1)$ d'autre part nous avons :

$f(x_1, y_2) \leq f(x_2, y_2) \leq f(x_2, y_1) \ldots\ldots(2)$ à partir des deux inéquations on peut déduire alors que

$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

Les points sont échangeables car $\forall\ x \in X\ f(x, y_1) \leq f(x_1, y_1) \Rightarrow f(x_1, y_1) = \max_{x\in X} f(x, y_1) = \min_{y\in Y} f(x_1, y)$

Or d'après les inégalités (1) et (2) précédentes. $f(x_2, y_1)$= $f(x_1, y_1)$=$\max_{x\in X} f(x, y_1)$ et aussi $f(x_2, y_1) = f(x_2, y_2) = \min_{y\in Y} f(x_2, y)$. D'où (x_2, y_1) est un point selle. De même pour(x_1, y_2) .

Remarque :

Etant donné que tous les points selles du jeu ont le même paiement et sont échangeables, on peut alors en conclure qu'il existe un sous ensemble O_X respectivement O_Y que nous appellerons l'ensemble des stratégies optimales du joueur 1 respectivement du joueur 2, tel que $O_X \times O_Y = S$ si le joueur 1 choisit une stratégie de O_X il est sûr d'obtenir un gain au moins égal à la valeur du jeu ; de même pour le joueur 2 s'il choisit une stratégie de O_Y il est sûr de devoir payer plus que la valeur du jeu.

Le joueur 1 tente d'imposer un gain compris entre la valeur et $+\infty$ et le joueur 2 un paiement entre $-\infty$ et la valeur.

Mais on ne peut modéliser un jeu à somme nul de la sorte s'il ne possède pas de points selles

Théorème2 ***Existence de points selles*** (à admettre sans démonstration) : si les ensembles X et Y sont compacts(bornés et fermés) alors $\max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x, y) \Rightarrow S \neq \emptyset\ et\ \ v = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x, y)$.

Réciproquement si $S \neq \emptyset \Rightarrow \max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x, y) = v$

Exemple :

3boites : Noir , rouge, verte.

Joueur 2 repartit 2 pièces entre les trois boites.

Joueur 1 choisit une pièce et gagne le contenu.

Donner la matrice du jeu. Ce jeu possède t'il des points selles ?

III Stratégies prudentes mixtes

Définition .une stratégie mixte σ_1 du joueur 1 est une stratégie prudente ou maxmin si et seulement si $\sigma_1 \in \arg\max_{\sigma_i \in \sum_i} \min_{s_2 \in S_2} f(\sigma_i, s_2)$

Remarque : on peut bien parler de maxmin et min max l'ensembles des stratégies mixtes d'un joueur i est compact.

Théorème 3 (du minimax de VonNeumann 1928) : Tout jeu fini a une valeur en stratégie mixte.

Propriétés

1) Tout jeu fini admet un point selle en stratégies mixtes ;

2) Si (σ_i, σ_{-i}) est un couple de stratégies optimales alors :$f(s_i, \sigma_{-i}) = V, \forall\, s_i \in supp(\sigma_i)$ pour $i = 1{,}2$

Exemple

Soit la matrice de jeu

1/2	b1	b2	b3
a1	0	2	1
a2	1	0	2

Déterminer les stratégies mixtes prudentes de ce jeu.(Solution en TD)

Théorème 3 (du minimax de VonNeumann 1928) : tout jeu fini a une valeur en stratégie mixte.

Théorème 4

Considérons un jeu fini à somme nulle alors un profil $(\sigma *_1, \sigma *_2)$ est un profil d'équilibre de Nash si et seulement si c'est un profil de stratégies prudentes.