Faculté Electronique et Informatique **MIV 1**
2021/2022
Département Informatique **Module** TAI

TD N° 3

Exercice 1 :
Les algorithmes de détection de points d'intérêt appelés aussi détecteurs, sont utilisés pour détecter des zones d'intérêt dans une image. Cette détection permettra par la suite de réaliser plusieurs applications d'analyse d'images : comparer des images entre elles, classifier les différentes images, appareiller deux ou plusieurs images pour la construction d'une mosaïque, les suivre dans une séquence vidéo, etc.
Pour ce premier exercice, nous nous intéressons à un algorithme pionnier de détection de points d'intérêt, soit le détecteur de Moravec.

Soit l'image binaire suivante :

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
2	0	1	**1**	1	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0

Et soit l'algorithme de Moravec suivant :

Algorithme de Moravec
Entrée/ image I, seuil S, taille de fenêtre F, déplacement U;
Sortie/ image avec points I' ;
I'=zéros (taille(I)) ; // initialiser I' à des zéros avec taille(I')=taille(I)
Pour chaque pixel (x,y) de I faire
    Pour chaque déplacement (u,v) de U faire
        V(u,v)=0 ;
        Pour chaque déplacement (a,b) de F faire
            $V(u,v)= V(u,v) + (I(x+u+a,y+v+b)- I(x+a,y+b))^2$
        Fait ;
    Fait ;
    C(x,y)=min(V) ;
    Si C(x,y) ≥ S alors I'(x,y)=1 ;
Fait ;

Nous prenons les paramètres suivants :

S= 2 ; F= 3 ; U= { (1,0),(1,1),(0,1),(-1,1),(-1,0),(-1,-1),(0,-1),(1,-1) }

En utilisant la représentation mathématique, l'algorithme de Moravec comme décrit dans la littérature [1] peut être écrit comme suit :

1. Pour chaque pixel (x, y) de l'image, calculer la variation d'intensité à partir d'un décalage (u, v) comme suit :

$$V_{u,v}(x,y) = \sum_{\forall a,b \text{ dans } F} (I(x + u + a,\ y + v + b) - I(x + a, y + b))^2$$

où les décalages (u,v) considérés sont : (1,0),(1,1),(0,1),(-1,1),(-1,0),(-1,-1) ,(0,-1),(1,-1)

2 Construire la carte de points d'intérêt en calculant la mesure de coins C(x, y) pour chaque pixel :

C(x,y)=min($V_{u,v}(x,y)$)

Réaliser un seuillage de la carte de points d'intérêt en définissant tous les C(x, y) en dessous d'un seuil T à zéro.

Effectuer une suppression non maximale pour trouver des maxima locaux. Tous les points non nuls restant dans la carte des points d'intérêt sont des points d'intérêt effectifs.

1- En utilisant l'algorithme de Moravec, déterminer si le pixel à la position (x,y)=(2,2) est un point d'intérêt.

Exercice 2 (rappel sur les valeurs propres et les vecteurs propres)

Soit la matrice suivante :
$A = [-\ 1\,2\,0\,0\,3\,4\,0\,0\,7\,]$

1. Calculer les trois valeurs propres de A.
2. Calculer les trois vecteurs propres de A.
3. Reprendre les mêmes questions avec la matrice B !

$B = [-\ 1\,2\,2\,2\,2\ \ -\ 1\,1\ \ -\ 2\,1]$

Exercice 3 :

Similairement au détecteur Moravec, le détecteur de Harris cherche à trouver les pixels d'intérêt dans une image. Pour ce faire, un décalage (u,v) comme vu dans Moravec est fait, puis le changement d'intensité par rapport à ce décalage est calculé.

1- Expliquer le détecteur de Harris,
2- Proposer l'algorithme de Harris pour la détection de points d'intérêt,

Solution exercice 1 :

L'image originale est :

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
2	0	1	1	1	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0

La fenêtre (a,b) :

	b= -1	b=0	b=1
a=-1	-1,-1	-1,0	-1,1
a=0	0,-1	0,0	0,1
a=1	1,-1	1,0	1,1

Le déplacement (u,v)

u,v	u,v	u,v	u,v	u,v	u,v	u,v	u,v
1,0	1,1	0,1	-1,1	-1,0	-1,-1	0,-1	1,-1

Le pixel en question est (x,y)=(2,2)

Pour le premier déplacement (u,v)= (1,0)

$$V_{u,v}(x, y) = \sum_{\forall a,b \ dans\ F} (I(x + u + a,\ y + v + b) - I(x + a, y + b))^2$$

$$V_{1,0}(2, 2) = \sum_{a=-1}^{1} \sum_{b=-1}^{1} (I(2 + 1 + a, 2 + 0 + b) - I(2 + a, 2 + b))^2$$

$$V_{1,0}(2, 2) = (I(3 - 1, 2 - 1) - I(2 - 1, 2 - 1))^2 + (I(3 - 1, 2 + 0) - I(2 - 1, 2 + 0))^2 + (I(3$$

$$V_{1,0}(2, 2) = (I(2, 1) - I(1, 1))^2 + (I(2, 2) - I(1, 2))^2 + (I(2, 3) - I(1, 3))^2 + (I(3, 1) - I(2, 1))^2 + ($$

$$V_{1,0}(2, 2) = (1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 0)^2 + ($$

$$V_{1,0}(2, 2) = 3$$

Remarquons que pour (u ;v)=(1,0) nous calculons la différence d'un pixel avec le pixel au-dessus de lui sur la fenêtre F délimitée par (a,b).

Remarquons aussi que lorsque u ≠ 0 et v=0 nous calculons la différence en lignes, lorsque u=0 et v≠ 0 nous calculons la différence en colonnes, et lorsque u ≠ 0 et v ≠ 0 nous calculons la différence en diagonale.

En répétant la même m éthode pour tous les déplacement dans U nous aruons la variation d'intensité pour chaque déplacement est

	u,v	u,v	u,v	u,v	u,v	u,v	u,v	u,v
U	1,0	1,1	0,1	-1,1	-1,0	-1,-1	0,-1	1,-1
V	3	4	2	6	6	6	2	4

C=min(V) = 2

Le seuil S = 2

C≤ S ⇒ le point (x,y)=(2,2) est un point d'intérêt.

<u>Solution exercice 2</u> :

Rappelons le calcul des valeurs propres d'une matrice dans ce qui suit.

Un vecteur propre x d'une matrice A est un vecteur spécial ayant les propriétés suivantes :

$Ax = \lambda x$

Où λ est appelé la valeur propre de A. Afin de trouver les valeurs propres de A, il est impératif de résoudre l'équation :

$\det det\ (A - \lambda I) = 0$

Pour trouver les vecteurs propres, il suffit de résoudre le système d'équation linéaire suivant :

$(A - \lambda I)x = 0$

1/ valeurs propres de A

$A = [-\ 1\ 2\ 0\ 0\ 3\ 4\ 0\ 0\ 7\ ]$

$\det det\ (A - \lambda I) = 0$

$det([-\ 1\ 2\ 0\ 0\ 3\ 4\ 0\ 0\ 7\ ] - \lambda[1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ] = 0$

$det([-\ 1 - \lambda\ 2\ 0\ 0\ 3 - \lambda\ 4\ 0\ 0\ 7 - \lambda\ ])=0$

Rappelons que le déterminant d'une matrice cubique est calculé comme suit :

$\det det\left(\left[a^1\ b^{-1}\ c^1\ d\ e\ f\ g\ h\ i\right]\right) = a \det det\ (e\ f\ h\ i\ ) - b \det det\ (d\ f\ g\ i\ ) + c \det det\ (d\ e\ g\ h\ )$

$= a(ei - fh) - b(di - gf) + c(dh - ge)$

Revenons à l'équation :

$(-\ 1 - \lambda)(\ (3 - \lambda)(7 - \lambda) - (0\ .\ 4)) - 2(0\ (\ 7 - \lambda) - (0\ .\ 4)) + 0(0 - 0\ .\ 3 - \lambda)$
=0

$(-\ 1 - \lambda)(3 - \lambda)(7 - \lambda) = 0$

$\lambda = -\ 1 \quad \lambda = 3 \quad \lambda = 7$

2/ vecteurs propres de A

Résoudre le système d'équation linéaire :

$(A - \lambda I)x = 0$

Pour $\lambda = -1$

$([-1\ 2\ 0\ 0\ 3\ 4\ 0\ 0\ 7] - (-1)[1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1])\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

$[0\ 2\ 0\ 0\ 4\ 4\ 0\ 0\ 8]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

En divisant la première ligne par 2, la deuxième par 4 et la troisième par 8 nous aurons :
$[0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

De la première ligne nous avons : $x_2 = 0$,

De la deuxième ligne nous avons $x_3 = x_2$ donc $x_3 = 0$

De tout le système linéaire, x_1 n'existe pas, donc quelque soit $\forall\ x_1$, le système sera satisfait.

L'ensemble des vecteurs propres seront alors tout vecteur satisfaisant l'équation précédente.

$E_{\lambda=-1} = \left\{\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = t\,[1\ 0\ 0]\right\}$ t $\in R$

Pour $\lambda = 3$

$([-1\ 2\ 0\ 0\ 3\ 4\ 0\ 0\ 7] - 3[1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1])\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

$[-4\ 2\ 0\ 0\ 0\ 4\ 0\ 0\ 4]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

En divisant la première ligne par 2, la deuxième par 4 et la troisième par 4 nous aurons :
$[-2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

De la première ligne nous avons : $x_1 = \frac{1}{2} x_2$,

De la deuxième ligne et troisième lignes nous avons $x_3 = 0$

Mettons $x_2 = t$, les équations linéaires deviennent :

$x_1 = \frac{1}{2}t\ ,\ x_2 = t\ , x_3 = 0\ ,$

L'ensemble des vecteurs propres seront alors tout vecteur satisfaisant l'équation précédente.

$$E_{\lambda=3} = \left\{ \left[x_1\ x_2\ x_3 \right] = t \left[\frac{1}{2}\ 1\ 0 \right] \right\} \text{ t} \in R$$

Pour $\lambda = 7$

$$([-\ 1\ 2\ 0\ 0\ 3\ 4\ 0\ 0\ 7\ ] - 7[1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ]) \left[x_1\ x_2\ x_3 \right] = [0\ 0\ 0\ ]$$

$$[-\ 8\ 2\ 0\ 0\ \ -\ 4\ 4\ 0\ 0\ 0\ ] \left[x_1\ x_2\ x_3 \right] = [0\ 0\ 0\ ]$$

En divisant la première ligne par 2 et la deuxième par 4 nous aurons :

$$[-\ 4\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ ] \left[x_1\ x_2\ x_3 \right] = [0\ 0\ 0\ ]$$

De la première ligne nous avons : $x_1 = \frac{1}{4} x_2$,

De la deuxième ligne nous avons $x_2 = x_3$

Mettons $x_3 = t$ les équations linéaires deviennent :

$x_1 = \frac{1}{4} t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$,

L'ensemble des vecteurs propres seront alors tout vecteur satisfaisant l'équation précédente.

$$E_{\lambda=7} = \left\{ \left[x_1\ x_2\ x_3 \right] = t \left[\frac{1}{4}\ 1\ 1 \right] \right\} \text{ t} \in R$$

2/ valeurs et vecteurs propres de B

$$B = [-\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 2\ 1\ ]$$

$$\det det\ (B\ - \lambda I) = 0$$

$$det([-\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 2\ 1\ ] - \lambda[1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ] = 0$$

Équation 5

$det([-\ 1 - \lambda\ 2\ 2\ 2\ 2 - \lambda\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 2\ 1 - \lambda\ ])$=0

$(-\ 1 - \lambda)((2 - \lambda)(1 - \lambda) - (-\ 2)(-\ 1)) - 2(2(1 - \lambda) - (-\ 1)(1) + 2(2)(-\ 2) - (1)(2 - \lambda)$ =0

$(\lambda - 3)(-\ \lambda^2 - \lambda + 6)$ = 0

$\lambda - 3 = 0$ ou $- \lambda^2 - \lambda + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(6) = 25$

$\lambda = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{-2}$

$\lambda = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{-2}$

Les valeurs propres de B sont :

$\lambda = 3 , \lambda = 2 , \lambda = -3$

Les vecteurs propres :

Pour $\lambda = 3$

$(A - \lambda I)x = 0$

$([-1\ 2\ 2\ 2\ 2\ -1\ 1\ -2\ 1] - 3[1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1])\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

$[-4\ 2\ 2\ 2\ -1\ -1\ 1\ -2\ -2]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

Pour trouver les vecteurs propres, nous devons d'abord passer par la forme échelonnée :

Ligne 3 = ligne 1+ 4 (ligne 3)

Ligne 2 = ligne 1 - 2 (ligne 2)

$[-4\ 2\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ -6\ -6]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

Diviser ligne 1 par 2 et ligne 3 par -6 nous obtenons :

$[-2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

$-2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_3 = 0$ car $x_2 = -x_3$

Mettons $x_3 = t$

L'ensemble des vecteurs est alors :

$E_{\lambda=7} = \left\{\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = t\,[0\ -1\ 1]\right\}\ t \in R$

Pour $\lambda = 2$

$([-1\ 2\ 2\ 2\ 2\ -1\ 1\ -2\ 1] - 2[1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1])\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

$[-3\ 2\ 2\ 2\ 0\ -1\ 1\ -2\ -1]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0]$

Pour trouver les vecteurs propres, nous devons d'abord passer par la forme échelonnée :

Ligne 2 = ligne 2-2 (ligne 3)
Ligne 3 = ligne 1 +3 (ligne 3)

$[-\ 4\ 2\ 2\ 0\ 4\ 1\ 0\ \ -\ 4\ \ -\ 1\,]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0\,]$

Ligne 3 = ligne 3+ligne 2
$[-\ 4\ 2\ 2\ 0\ 4\ 1\ 0\ 0\ 0\,]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0\,]$

$-\ 4\,x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 =- \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{8}x_3$ car $x_2 =- \frac{1}{4}x_3$

Mettons $x_3 = t$

L'ensemble des vecteurs est alors :
$E_{\lambda=7} = \left\{\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = t\left[\frac{3}{8}\ \ -\frac{1}{4}\ 1\right]\right\}\ t\in R$

Pour λ =− 3
$([-\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 2\ 1\,] + 3[1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\,])\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0\,]$

$[2\ 2\ 2\ 2\ 5\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 2\ 4\,]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0\,]$

Pour trouver les vecteurs propres, nous devons d'abord passer par la forme échelonnée :
Ligne 2 = ligne 2-ligne 1
Ligne 3 = ligne 1 - 2 (ligne 3)

$[2\ 2\ 2\ 0\ 3\ \ -\ 3\ 0\ 6\ \ -\ 6\,]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0\,]$

Ligne 3 = ligne 3-2ligne 2
Ligne 2 = ligne 2 / 3
Ligne 1 = ligne 1 / 2
$[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\,]\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = [0\ 0\ 0\,]$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 =- x_2 - x_3 =- 2x_3$ car $x_2 = x_3$

Mettons $x_3 = t$

L'ensemble des vecteurs est alors :
$E_{\lambda=7} = \left\{\left[x_1\ x_2\ x_3\right] = t\,[-\ 2\ 1\ 1\,]\right\}\ t\in R$

<u>**Solution exercice 3**</u> :
1/ explication de la méthode :
Le détecteur de Harris passe par plusieurs étapes. L'idée de base est le calcul de l'erreur, ou changement d'intensité E sur la fenêtre tel que :

$$E(u,v) = \sum_{x,y} w(x,y)[I(x+u,y+v) - I(x,y)]^2$$

Où :
$w(x, y)$ est une fonction de la fenêtre (généralement un filtre gaussien avec σ grand),
$I(x + u, y + v)$ est l'intensité décalée,
$I(x, y)$ est l'intensité de l'image,

Cette mesure est aussi appelée l'autocorrélation de l'image.
A la première équation nous appliquons un développement de Taylor. Rappelons que le développement de Taylor permet de représenter (approximer) une fonction f à un point donné a en fonction de ses dérivés :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \ldots$$

Une image est une fonction discrète à deux variables. Nous considérons donc que a dans la deuxième équation est (x,y), il faudra donc dériver partiellement I en fonction de x et de y pour l'approximation en utilisant le développement de Taylor. L'approximation du terme : $I(x + u, y + v)$ donnera donc :

$$I(x + u, y + v) = I(x, y) + \frac{I_x}{1!}((x + u) - x) + \frac{I_y}{1!}((y + v) - y)$$

L'équation 1 devient :

$$E(u, v) = \sum_{x,y} w(x, y)\left[I(x, y) + uI_x + vI_y - I(x, y)\right]^2$$

$$= \sum_{x,y} w(x, y)\left[I(x, y) + uI_x + vI_y - I(x, y)\right]^2$$

$$= \sum_{x,y} w(x, y)\left[uI_x + vI_y\right]^2$$

$$= \sum_{x,y} w(x, y)\left[(u\ v)\begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix}\right]^2 = \sum_{x,y} w(x, y)(u\ v)\begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_x & I_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

u, v ne dépendent pas de (x, y) nous pouvons donc les sortir de la somme :

$$= (u\ v)\left[\sum_{x,y} w(x, y)\begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_x & I_y \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$E(u, v) = (u\ v)\ M\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ tel que $M = \sum_{x,y} w(x, y)\begin{pmatrix} I_x I_x & I_x I_y \\ I_y I_x & I_y I_y \end{pmatrix}$

E représente l'équation d'une éclipse ; M est la matrice de covariance. Soit les valeurs propres de la matrice M étant : $\lambda_1\ et\ \lambda_2$. Rappelons que les valeurs propres définissent une matrice donnée de manière unique même en appliquant des transformations à cette matrice. Il existe trois cas :
Cas 1 : $\lambda_1\ et\ \lambda_2$ sont petits auquel cas, E est presque constant dans toutes les directions, la région est uniforme,
Cas 2 : $\lambda_1\ et\ \lambda_2$ sont grands, E augmente dans toutes les directions, auquel cas, le point est un coin (corner),
Cas 3 : $\lambda_1 \gg \lambda_2$ ou $\lambda_2 \gg \lambda_1$ auquel cas, le point est un contour,

La mesure utilisée pour déterminer si un point est un coin ou non (cornerness measure), est basée sur les valeurs propres de M.

$R = \det det\, M - \alpha\,(trace\, M)^2$ $\quad\quad$ $R = \lambda_1\lambda_2 - \alpha(\lambda_1 + \lambda_2)^2$ $(\alpha = 0.06)$

Les cas précédents deviennent :
Cas 1 |R| petit, la région est uniforme,

Cas 2 R>0 le point est un coin,

Cas 3 R<0 le point est un contour,

D'autres modifications de la méthode d'Harris ont été proposées. La plus part changeant la valeur de R :

Amélioration de Triggs : $R = \lambda_1 - \alpha\,\lambda_2$

Amélioration de Szeliski (moyenne harmonique) : $R = \frac{det(M)}{trace(M)} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$

> **Algorithme de Harris**
> Entrée/ image I, seuil S, σ;
> Sortie/ image avec points I' ;
> Calculer I_x // calculer la dérivée de I par rapport à x
> Calculer I_y // calculer la dérivée de I par rapport à y
> Calculer les quatre images $(I_x)^2$ $(I_y)^2$ (I_xI_y) (I_yI_x)
> Pour chaque image, convoluer avec un filtre gaussien σ grand
> Calculer R // R est la mesure Cornerness utilisant une des 4 méthodes
> Appliquer seuillage sur R avec S

Amélioration de Shi-Tomasi : $R = \lambda_1$

2/ Algorithme de Harris

Bibliographie

[1] D. Nilanjan, N. Pradipti, B. Nilanjana, D. Debolina et C. Subhabrata, «A Comparative Study between Moravec and Harris Corner Detection of Noisy,» *Int. J. Engineering Research and Application,* vol. 02, 2012.