Approche computationnelle du calcul de l'équilibre Nash mixte

Le calcul de l'équilibre de Nash dans un jeu sous forme stratégique est l'un des plus importants problèmes de l'algorithmique de la théorie des jeux. Il est essentiellement considéré comme étant un problème combinatoire. Les algorithmes de résolution de jeux ont été étudiés avec l'apparition de la théorie des jeux et ont été exploités dans d'autres situations d'optimisation mathématique comme par exemple le problème de complémentarité linéaire. Dans le cas d'un jeu fini à deux joueurs l'équilibre de Nash mixte est la solution d'un problème de complémentarité linéaire, dont l'algorithme de résolution le plus célèbre est celui de Lemke-Howson(1964).

Nous allons d'abord introduire les notations qui seront utilisés, avant d'énoncer quelques algorithmes pour le calcul de l'équilibre mixte d'un jeu. Les notions de la théorie des graphes et de la programmation linéaire étant supposées connues.

Un jeu fini à deux joueurs va être présenté par deux matrices (Bimatrix game). En effet chacun des deux joueurs possède sa matrice de gain qu'on notera A, B respectivement.

Soit M l'ensemble des m stratégies du joueur 1 et N l'ensemble des n stratégies du joueur2, alors les matrices $A\ et\ B$ sont les matrices de type (m, n) dont les coefficients représentent le gain du joueur 1 et du joueur 2 respectivement. Comme dans l'exemple qui suit :

Exemple 1 : soit le jeu stratégique à deux joueurs suivant

1/2	a	b	c
L	(2 ,4)	(1,0)	(8,5)
G	(-1,0)	(2,1)	(1,4)

Alors $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Les lignes de la matrice A seront notés a_i et les colonnes de la matrice B b_j qui seront en fait les colonnes de la matrice transposé de B.

Afin de pouvoir utiliser les notions de la programmation linéaire, nous serons obligés de redéfinir quelques notions déjà présentées dans les sections précédentes un utilisant les matrices de gain de chacun des joueur.

Définitions 1 :

1) Une stratégie mixte du joueur 1 est la donnée d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^m : Ex = 1$ où m est le nombre de stratégies pures du joueur 1 et E la matrice à une ligne et m colonnes. $E = (1 \dots 1)$.
2) Une stratégie mixte du joueur 2 est la donnée d'un vecteur $y \in \mathbb{R}^n : Fx = 1$ où n est le nombre de stratégies pures du joueur 2 et F la matrice à une ligne et n colonnes. $F = (1 \dots 1)$.

3) Le gain du joueur 1 pour la paire de stratégies mixtes (x, y) est égal à $x^t Ay$ et celui du joueur 2 est égal à $x^t By$. Une meilleure réponse à la stratégie mixte y du joueur 2 est la stratégie mixte x qui maximise $x^t Ay$ et de même une meilleure réponse de la stratégie mixte x du joueur 1 est la stratégie mixte y du joueur 2 qui maximise $x^t By$.
4) L'équilibre de Nash est une paire (x^*, y^*) qui une meilleure réponse de chacun des joueurs.

Une stratégie mixte est meilleure réponse si et seulement si elle fait intervenir avec des probabilités strictement positives les stratégies pures qui sont meilleures réponses (vu dans les sections précédentes). On énonce alors le théorème de Nash(1951) en utilisant les nouvelles notations comme suit :

Théorème 1. (Nash 1951)

La paire de stratégies mixtes (x^*, y^*) est un équilibre de Nash dans le jeu bi-matriciel (A, b) si et seulement si pour toutes les stratégies pures $i \in M \; et \; j \in N$

$$x^*{}_i > 0 \Rightarrow a_i y^* = \max_{k \in M} a_k y^* = u \ldots (1)$$

$$y^*{}_j > 0 \Rightarrow b_j x^* = \max_{k \in M} b_k x^* = v \ldots (2)$$

Ce qui peut aussi être exprimé comme un problème de programmation linéaire comme suit :

Exemple 2 : recherche d'un équilibre de Nash en mixte dans un jeu bi-matriciel $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Soit le jeu bi-matriciel défini par les matrices :$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, et \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ le seul équilibre de Nash en pure est le profil de gain (3,3).

En mixte on pourrait chercher un équilibre du type $((x_1, x_2, 0), (y_1, y_2))$ donc le programme linéaire à résoudre serait du type $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = v \\ 2x_1 + 6x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y_1 + 3y_2 = u \\ 2y_1 + 5y_2 = u \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$

La solution est $(\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right))$.

Un équilibre de Nash (x^*, y^*) est la solution d'un problème (LP) du type :

$$\boldsymbol{Maximiser \; x^T(Ay) \; sujet} \text{ à } \boldsymbol{Ex = e \; x \geq 0}$$

$$\boldsymbol{Maximiser \; x^T(By) \; \; sujet} \text{ à } \boldsymbol{Fy = f \; y \geq 0}$$

Les conditions de la proposition ci-dessous définissent son problème dual ou le problème de linéarité complémentaire (CLP).

Proposition 1

(x^*, y^*) est un équilibre de Nash dans un jeu (A, B) si et seulement si pour u, v adéquats :

$$\boldsymbol{Ex^* = e \text{ où } e = 1}$$

$$\boldsymbol{Fy^* = f \text{ où } f = 1}$$
$$\boldsymbol{E^T U - Ay^* \geq 0}$$
$$\boldsymbol{F^T v - B^T x^* \geq 0}$$
$$\boldsymbol{{x^*}_i, {y^*}_i \geq 0}$$

Pour la résolution de ce problème certains algorithmes ont été développés. Dans la majorité des cas cela concernait les jeux non dégénérés d'où la définition :

Définition 2 : un jeu est dit non dégénéré si il n'y a pas de stratégie mixte de support de taille k qui a plus de k meilleures réponses pures.

Corollaire 1 : dans un jeu bi matriciel non dégénéré, les stratégies mixtes de (x, y) de tout équilibre de Nash ont des supports de tailles égales.

a) Algorithme par énumération de supports.

Entrée un jeu non dégénéré

$for\ k \in \{1,2, \dots, \min(m, n)\}$

$for\ (I, J) deux\ ensembles\ de\ taille\ k\ do$

Résoudre les systèmes $\sum_{i \in I} x_i B_{ij} = v\ \sum_{i \in I} x_i = 1$

$$\sum_{j \in J} A_{ij} y_j = u\ \sum_{J \in J} y_j = 1$$

Vérifier que $0 \leq x_i \leq 1\ et\ 0 \leq y_j \leq 1$ et les conditions (1) et ((2) de maximisation.

end for

end for

SORTIE tous les équilibres de Nash.

Complexité: 4^n .

Algorithme de Lemke-Howson (1964) en termes de graphes (Shapley 1974).

Cette approche se base sur la construction un chemin sur le simplexe de chacun des ensembles de stratégies.

L'étape cruciale dans la construction de ces chemins est l'étiquetage des stratégies. Chaque stratégie mixte s_i est étiquetée par :

Les stratégies pures de i qui ne sont pas dans le support de s_i

Les stratégies pures de j qui sont les meilleures réponses à s_i

Définitions 3

$$X(i) = \{x \in X : x_i = 0\}$$

$$X(j) = \left\{x \in X : B_j x \geq B_k x \; \forall k \in N\right\}$$

$$Y(i) = \{y \in Y : A_i y \geq A_k y \; \forall k \in M\}$$

$$Y(j) = \left\{y \in Y : y_j = 0\right\}$$

L'ensemble des étiquettes de la stratégie mixte *x* (respectivement *y*) est alors $L(x) = \{k \in S_1 \cup S_2 : x \in X(k)\}$ (respectivement $L(y) = \{k \in S_1 \cup S_2 : y \in Y(k)\}$.)

D'où le théorème :

Théorème 2 : une stratégie mixte $(x, y) dans\ X \times Y$ est un équilibre de Nash du jeu bi-matriciel (A, B) si et seulement si $\forall\ k \in S_1 \cup S_2 \;\; x \in X(K) ou\ y \in Y(k) (\ ou\ les\ deux)$.

A partir de cet étiquetage, on définira un graphe pour chaque ensemble de stratégies :

Définitions 4

1) Soit G_1 le graphe :
- Nœuds=$\{x \in X : |\{k : x \in X(k)\}| = m\} \cup \{0_n\}$.
- Arrêtes=$\{(x, x') : xet\ x' diff érent\ par\ une\ étiquette\}$

  De même :

2) G_2 le graphe :
- Nœuds=$\{y \in Y : |\{k : y \in Y(k)\}| = n\} \cup \{0_m\}$.
- Arrêtes=$\{(y, y') : yet\ y' diff érent\ par\ une\ étiquette\}$

3) Enfin $G_1 \times G_2$ le graphe :
- Nœuds=$\{(x, y) : x \in G_1\ et\ y \in G_2\} \cup \{0_n\}$.
- Arrêtes=$\left\{\left((x, y), (x', y')\right) : (x, x') est\ une\ arrête\ de\ G_1\ et\ y = y' ou\ \ (y, y') est\ une\ arrête\ de\ \ G_2 et\ x = x'\right\}$.

4) Soit $k \in S_1 \cup S_2$ et $(x, y) \in G_1 \times G_2$; (x, y) est une paire presque k-complètement étiquetée $\forall\ l \in S_1 \cup S_2 - \{k\}, l\ etiquette\ x\ ou\ y$.

Lemme 1

- Tout équilibre de Nash (x, y) (et le pseudo-équilibre $(0_m, 0_n)$) est dans $G_1 \times G_2$ est adjacent exactement à nœud (x', y') qui est presque k-complètement étiqueté.

- Soit (x, y) une paire k-complètement étiquetée, il y'a exactement deux nœuds adjacents presque k-complètement étiqueté dans $G_1 \times G_2$.

Théorème 3

Soit un jeu non-dégénéré bi-matriciel (A, B) et $k \in S_1 \cup S_2$ alors l'ensemble des nœuds presque k-complètement étiquetés dans $G_1 \times G_2$ consiste en des chemins et des cycles disjoints. Les points terminaux des chemins sont des équilibres de Nash, et le pseudo-équilibre$(0_m, 0_n)$. Le nombre des équilibres de Nash est impair.

D'où l'algorithme de Lemke-Howson (1964) sous sa forme donnée par Shapley(1974) :

b) Algorithme de Shapley :

(a) Se placer au point $(0_m, 0_n)$.

(b) Choisir une étiquette $k \in S_1 \cup S_2$.

(c) Aller au seul point adjacent à $(0_m, 0_n)$ presque k-complètement étiqueté (x_1, y_1). Il existe alors une étiquette l_1 dupliqué.

(d) Aller au seul point adjacent à (x_1, y_1) presque l_1-complètement étiqueté et différent du point de provenance (ici$(0_m, 0_n)$).

(e) Itérer l'étape (d) jusqu'à trouver un point (x_l, y_l) sans étiquette dupliquée ; ce point est un équilibre de Nash.

Remarque3.3.4.1 : cet algorithme ne permet de déterminer qu'un seul équilibre de Nash.

3.1 TP2: calcul de l'équilibre de Nash en mixtes

Résumé

Dans ce TP nous allons développer une petite application qui permet de calculer les équilibres de Nash, profils Pareto dominants et Niveau de sécurité d'une stratégie ainsi que d'un joueur en stratégie pures. Elle permettra aussi de déterminer l'équilibre de Nash mixte dans un jeu à deux joueurs avec plus de 3 stratégies chacun, en implémentant les deux algorithmes vus dans cette dernière section du chapitre à savoir : l'algorithme par énumération de supports et celui de Shapley. En plus de l'élaboration d'un graphe de comparaison sur le temps d'exécution. Cela permettra à l'ensemble des étudiants de comprendre le principe des algorithmes de calcul proposés.

Langage de programmation

Il est préférable de travailler avec le langage Python, mais le C++ est aussi accepté.