

Examen

Exercice 1 : (Le jeu du menteur)

Monsieur X tire une carte dans un jeu et ne la montre pas.

Il peut choisir de donner une pièce ou de demander une pièce à son adversaire monsieur Y .

Ce dernier peut soit accepter de donner la pièce soit de dire "menteur".

A ce stade du jeu, X doit montrer sa carte : si elle est rouge il reçoit 4 pièces de Y , si elle est noire il doit payer 5 pièces à Y .

- 1) Ecrire la matrice de ce jeu. Ce jeu est-il à somme nulle ?
- 2) Les joueurs possèdent-ils des stratégies optimales (Minimax) en stratégies pures ?
- 3) Déterminer les stratégies optimales des joueurs en stratégies mixtes.

Exercice 2

Soit le jeu à deux joueurs suivant

1 / 2	A	B	C	D
a	(3,3)	(1,4)	(6,2)	(1,2)
b	(4,1)	(0,0)	(6,0)	(3,0)
c	(2,9)	(0,9)	(6,8)	(5,6)
d	(2,11)	(0,3)	(5,7)	(10,10)

- 1) Ce jeu est-il résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées ?
- 2) Déterminer les équilibres de Nash (pures et mixtes) de ce jeu.
- 3) Les équilibres de Nash sont-ils pareto-optimaux ? Est-ce toujours le cas ?

Exercice 3 (Répondez à seulement l'une des deux questions au choix)

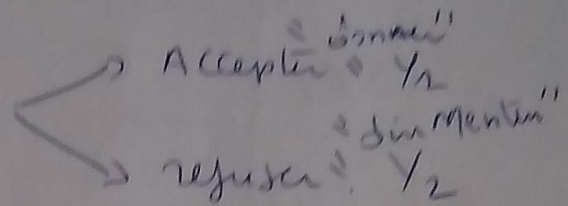
- 1) Montrer que dans un jeu où chaque joueur a une stratégie strictement dominante, le vecteur des stratégies strictement dominantes est l'équilibre de Nash et aussi le vecteur des stratégies Maximin.
- 2) Soit $X, Y, g: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ un jeu à deux joueurs à somme nulle tel que $X = Y = [1,3]$ et $g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$ (paiement du premier joueur), ce jeu admet-il une valeur ? si oui que vaut-elle ?

Consignes de l'examen Th. 885000

Ex 1:

Le jeu du menton.

Monsieur Y a deux stratégies



Monsieur X a 4 stratégies une pour chaque retrait une pour la boule rouge et une pour la boule noire donc

(Donner, Donner), (Demander, Donner),
(Donner, demander), (Demander, demander)

X_2	Y_2	Y_2	
X_2	-1	-1	(Dominée) strict
X_2	0	$\frac{3}{2}$	
X_3	0	-3	(Dominée) strict
X_4	1	$-\frac{1}{2}$	

Exp de calcul si X choisit X_2 (Donner, Donner).

Y_2 choisit "Donner"

$$\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(-1) = -1$$

de même

si Y choisit refuser

$$\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(-1) = -1$$

Ainsi suite - - -

Donc la matrice du jeu est:

02

		q	$1-q$	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	min
p	x_2	0	$\frac{3}{2}$	0
$1-p$	x_4	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	Max	1	$\frac{3}{2}$	

Maxmin = $\underline{v} = 0$

minimax = $\bar{v} = 1$

Pas de Points Sellaes.
En pure!!

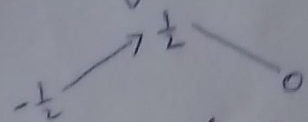
2)

En mixés :

$$\max_{p \in [0,1]} \min \left(f\left(\frac{1}{2}, y_2\right), f\left(\frac{1}{2}, y_4\right) \right)$$

$$\max_{p \in [0,1]} \min \left(p \left((1-p) \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2} p \right) \right)$$

$$\max_{p \in [0,1]} \min \left(1-p, 2p-\frac{1}{2} \right) = \max_{p \in [0,1]} \begin{cases} 2p-\frac{1}{2} & p < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & p = \frac{1}{2} \\ 1-p & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$



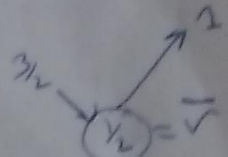
d'où le maximum $\underline{v} = \frac{1}{2}$.

Avec $p = \frac{1}{2}$

$$\min_{q \in [0,1]} \max \left(f(x_2, y_2), f(x_4, y_2) \right)$$

$$\min_{q \in [0,1]} \max \left(\frac{3}{2}(1-q), q - \frac{1}{2}(1-q) \right)$$

$$\min_{q \in [0,1]} \begin{cases} -\frac{3}{2}q + \frac{3}{2} & q < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & q = \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}q - \frac{1}{2} & q > \frac{2}{3} \end{cases} = \frac{1}{2}$$



$q = \frac{2}{3}$

d'où $\underline{v} = \bar{v} = \frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right)$

$$v_2(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), \quad w(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \quad - \textcircled{5}$$

Exo 2

Après Elimination des stratégies strictement dominées.

Le jeu devient

		y	$1-y$
x	a	$(3, 3)$	$(4, 4)$
	b	$(3, 4)$	$(4, 0)$

1) Non

2) Pures

(a, B) et (b, A) $\rightarrow (4, 4)$ $\rightarrow (3, 3)$

$$x \in]0, 1[\text{ et } y \in]0, 1[$$

mixtes

Thm d'indifférence \Rightarrow

$$3y + (1-y) = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$3x + (1-x) = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$(v_2, v_2) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right)$$

3) Oui ils le sont, mais ce n'est pas Bayes.
Le cas des pures le sont

Mais le mixte ne l'est pas

de par $(2, 2)$ et domine par $(3, 3)$.

Non ce n'est pas le cas car ce n'est pas

Dilemme d'information.

Exo3:

(4)

1) Soient un jeu fini à n joueurs si
 s_1^*, \dots, s_n^* sont les stratégies dominantes.

$$\forall i \quad U_i(s_i^*, s_{-i}) > U_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i$$

D'où le profil (s_1^*, \dots, s_n^*) pour

Chaque joueur i vérifie

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) > U_i(s_i, s_{-i}^*)$$

donc c'est un équilibre de Nash

Par définition

(s_1^*, \dots, s_n^*) est aussi un vecteur maximum

Pour chaque joueur car: il faut montrer

s_i^* est une stratégie optimale pour
 chaque joueur

Or: Supposons par l'absurde que
 la stratégie optimale du joueur

est égal à $s_i'' \neq s_i^* \Rightarrow$

$$\exists t_{-i}, \exists t_{-i}'' \quad U_i(s_i'', t_{-i}) > U_i(s_i^*, t_{-i}'') \quad \text{Or} \quad (I)$$

$$U_i(s_i'', t_{-i}) = \min_{t_{-i} \in S_{-i}} U_i(s_i'', t_{-i})$$

$$\text{donc} \quad U_i(s_i'', t_{-i}) \leq U_i(s_i'', t_{-i}'')$$

$$\text{d'après (I)} \Rightarrow U_i(s_i'', t_{-i}'') > U_i(s_i^*, t_{-i}'')$$

Contradiction avec !

S_i^* dominante.

(5)

d'un le profil (s_1^*, \dots, s_n^*) est
un profil maxmin pour tous
les joueurs.

2) $\max_{x \in [1,3]} \min_{y \in [1,3]} g(x,y) = \max_{x \in [1,3]} \min_{y \in [1,3]} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$

Après étude de la fonction

$$f_n(y) = \frac{1}{n} + \frac{1}{y} + ny$$

$n \in [2, 3]$

$$f'_n(y) = \frac{1}{n} - \frac{1}{y^2} + n > 0$$

donc la fonction est

$$\min_{[2,3]} f_n(y) = f_n(2) = \frac{1}{n} + 1 + n$$

$$\max_{n \in [2,3]} \left(\frac{1}{n} + 1 + n \right)$$

$1 - \frac{1}{n^2} > 0$

Max atteint en 3

$$= \frac{1}{3} + 1 + 3$$

$$\underline{v} = \frac{13}{3}$$

De même on calcule

$$\bar{v} = \min_{y \in [1,3]} \max_{x \in [2,3]} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \right)$$

$$\min_{y \in [1,3]} \left(\frac{1}{3} + 3y + \frac{1}{y} \right)$$

Oui il possède un
valeur (3.1) $y \in [1,3] = \frac{13}{3} = \bar{v}$