Faculté d'Electronique er d'Informatique
Département d'Informatique
MASTER 1 : MIV

Examen Final (ANAD)

USTHB : 05/17

EXERCICE 1:

I) On considère la matrice de données X de type (4, 3) :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer la matrice des variances-covariances V.

2) Que représente cette matrice ?.

3) Déterminer la matrice des corrélations R.

4) Déterminer les valeurs propres de R.

5) Interpréter ces valeurs en termes d'inertie.

6) Préciser le meilleur sous espace principal ajustant le nuage des points qui explique au moins 80% de l'inertie totale.

7) Déterminer les nouvelles variables définies par les facteurs principaux.

8) Que représente le cosinus carré de l'angle formé par chaque individu et sa projection ?. (Donner son expression et expliquer).

9) Calculer les contributions des individus X_3 *et* X_4 à l'inertie du premier axe. Commenter les résultats obtenus.

EXERCICE 2: Soit la matrice des contingences suivante

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Donner la matrice des fréquences relatives. Ainsi que les fréquences marginales.

2) Déterminer les matrices des profils lignes et colonnes centrées.

3) Etudier la similarité entre les deux derniers points du nuage profils lignes.

18/20 ~~18~~

Exercice 1

1/ centre de Gravité $g = (1, 1, 1)$

matrice centrée $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1,1

$$V = \frac{1}{4} {}^tY Y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) la matrice V représente les variances - covariances des variables de la matrice X

on sait !! expliquer

3) ~~Z =~~ matrice centrée réduite : les variances sont les valeurs de la diagonale de V

~~on a Var~~

~~Z =~~

$Var(X^1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma(X^1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$Var(X^2) = Var(X^3) = 1 \Rightarrow \sigma(X^2) = \sigma(X^3) = 1$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1/1

$$R = \frac{1}{4}\,{}^tJ\,J = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) les valeurs propres de R :

$$P_R(\lambda) = \det(R - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)^2 - \frac{1}{2}(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - \frac{1}{2}\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 + 1 - 2\lambda - \frac{1}{2}\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2}\right]$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

1/1

$$1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\Delta = 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5) on a

~~Inertie de~~

$I_1 = \frac{\lambda_1}{n} = \frac{1}{3} = 0,33 = 33\%$

$I_2 = \frac{\lambda_2}{n} = \frac{1,70}{3} = 0,569 \simeq 57\%$

$I_3 = \frac{\lambda_3}{n} = \frac{0,29}{3} = 0,96 \simeq 9,6\%$

1,1

6) on a $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{n} = 0,9 \simeq 90\% > 80\%$

le meilleur sous espace principal ajustant le nuage de points qui explique au moins 80% de l'inertie Totale est le sous espace engendré par les deux axes principaux F_1 et F_2 ~~correspondants~~ correspondant aux vecteurs propres u_1 et u_2 associés aux plus grandes valeurs propres qui sont λ_2 et λ_1 avec un taux d'inertie de 90%

calcul des u_i

u_1 associé à λ_2

$R \cdot u_1 = \lambda_2 u_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bouelia N ourdolihe

7) calcul des composantes principales

$$C^1 = ZU_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= {}^t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}, -1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$C^2 = ZU_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2

$$= {}^t(-1, -1, 1, 1)$$

8) il représente la qualité de la ~~projection~~ représentation de l'individu dans ~~l'espace Factoriel~~ le sous espace Factoriel en effet plus la valeur de cos θ est grande (θ l'angle formée par chaque l'individu et sa projection) plus la représentation de l'individu est meilleure car dans ce cas θ tend vers 0 et inversement si θ tend vers 90° la valeur de cos θ sera plus petite et donc la représentation de l'individu sera moins bonne

1.1

expression: pour l'individu J:

$$\cos^2 \theta = \frac{\sum_{i=1}^{q} (C^i_J)^2}{\|X_J\|^2}$$

9) La valeur de la contribution de l'individu i à l'inertie de l'axe j est donnée par

$$ctr(X^i_J) = \frac{{C^i_J}^2}{\lambda_i m}$$

$$ctr(X^4_3) = \frac{(C^4_3)^2}{\lambda_2 m} = \frac{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})4} = \cancel{0,426} \quad 0,426$$

$$ctr(X^4_4) = \frac{(C^4_4)^2}{\lambda_2 m} = \frac{(-1-\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})4} = 0,426$$

On remarque que les individus X_4 et X_3 contribuent fortement à l'inertie du premier axe

Exercice 2

1)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & & F_{i+} \end{array} \\ F = & \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{32} & 0 & 0 & \frac{1}{32} \\ \frac{2}{32} & \frac{2}{32} & 0 & \frac{2}{32} \\ 0 & 0 & \frac{2}{32} & \frac{2}{32} \\ \frac{2}{32} & 0 & \frac{2}{32} & \frac{3}{32} \\ 0 & \frac{2}{32} & \frac{2}{32} & \frac{4}{32} \\ \hline \end{array}\right) \\ F_{+J} & \begin{array}{cccc} \frac{3}{32} & \frac{3}{32} & \frac{6}{32} & 1 \end{array} \end{array}$$

$$(X)_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/4 & 2/4 \end{pmatrix}$$

$$(X)_c = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/6 \\ 1/3 & 0 & 2/6 \\ 0 & 2/3 & 2/6 \end{pmatrix}$$

$$g = \left(\sqrt{\frac{3}{12}}, \sqrt{\frac{3}{12}}, \sqrt{\frac{6}{12}}\right) = \left(\sqrt{f_{.1}}, \sqrt{f_{.2}}, \dots, \sqrt{f_{.q}}\right)$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\cancel{X'_L}$

~~matrice profile ligne cadrée :~~

$$(X'_L)_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_{i.}\sqrt{f_{.j}}} \cancel{\sqrt{f_{.j}}}$$

$\cancel{X'_L} =$

$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$X'_L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformé

matrice profiles ligne centrée :

$$Y_{L_{ij}} = \frac{f_{ij}}{f_{i.}\sqrt{f_{.j}}} - \sqrt{f_{.j}} = (X'_L)_{ij} - \sqrt{f_{.j}}$$