Solution de la série 1

Exercice 1. L'agent préfère la voiture au bus car la différence du trajet est inférieure à 5 min, et la voiture est plus confortable. De même il préfère le bus au métro , mais il préfère le métro à la voiture, car la différence du temps du trajet est supérieur à 5 min d'où la relation est non transitive, donc pas rationnelle.

Exercice 2.Rappelons qu'un ensemble X est dénombrable si on peut définir une fonction bijective $\varphi: N \to X$ où N est l'ensemble des entiers naturels.

On va le faire par récurrence sur le cardinal de l'ensemble X

Si le cardinal de X noté Card x est égal à 1 et $\geq$ une relation de préférence rationnelle définie sur X, on prend alors tout simplement $\mu: X = \{x\} \to \mathbb{R}, u(x) = 0$ et comme qu'il n'existe qu'un seul élément alors $\geq_u$ coïncidera avec la relation de préférence rationnelle$\geq$ de manière triviale.

On suppose que la construction est toujours possible à l'ordre n et le démontre à l'ordre n+1.

Donc on suppose Card$X$=n+1 et soit $\geq$ la relation de préférence rationnelle définie sur X. on pose X=$\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ .Par hypothèse de récurrence on peut définir l'application $\mu: \check{X} \to R$qui coïncide avec la relation $\geq$ définie sur X, où$\check{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Onpeut alors distinguer deux sous-ensembles de $\check{X}$:

$\bar{X} = \{x \in \check{X}: x \geq x_{n+1}\}$ et $\underline{X} = \{x \in \check{X}: x_{n+1} \geq \mathrm{x}\}$, par complétude nous avons $\overline{X} \cup \underline{X} = \check{X}$. Alors il y'a trois cas qui peuvent se présenter :

1$^{\text{er}}$ cas : $\bar{X} = \emptyset$ dans ce cas tous les éléments de $\check{X}$ sont moins préférés àx_{n+1}. Et donc on peut poser $\mu(x_{n+1}) = \max_{i=1,..,n} \mu(x_i) + 1$ et par construction μ ainsi défini coïncidera avec la relation $\geq$.

2$^{\text{ième}}$ cas : $\underline{X} = \emptyset$ dans ce cas tous les éléments $\check{X}$ sont mieux préférés àx_{n+1}, donc de même on peut poser $\mu(x_{n+1}) = \min_{i=1,\dots,n} \mu(x_i) - 1$.

Exercice 3 (jeu de la tirelire) :

1/2	0	100
0	(0,0)	(-25,75)
100	(75,-25)	(50,50)

1) La stratégie 100 domine la stratégie 0 strictement pour chacun des deux joueurs, un équilibre en dominance est le profil (100,100).

Exercice 4

1 \ 2	B_1	B_2	B_3
A_1	(10,10)	(4,9)	(4,11)
A_2	(5,6)	(8,3)	(3,4)
A_3	(4,0)	(8,1)	(5,3)

1 \ 2	B_1	B_3
A_1	(10,10)	(4,11)
A_2	(5,6)	(3,4)
A_3	(4,0)	(5,3)

1 \ 2	B_1	B_3
A_1	(10,10)	(4,11)
A_3	(4,0)	(5,3)

1 \ 2	B_3
A_1	(4,11)
A_3	(5,3)

L'équilibre obtenu par ESSD est (A_3, B_3)

Exercice 5

1 \ 2	G	D
H	(0,0)	(2,2)
B	(10,11)	(-1,0)

1) Il n'existe pas de stratégies dominantes
2) (B ,G) ou (H,D).(Le dernier est plus probable)

Exercice 6

1) Le nombre de stratégies est non-fini donc c'est impossible.
2) d) aucune car :

   1 n'est pas dominante $u_1(1, s_2) = \begin{cases} 1 \; si \; s_2 = 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}$ donc il suffit de prendre un contre exemple : u_1(1,0.25) $<$ u_1(0.5,0.25). (de même pour le joueur 2)

La stratégie 0 n'est pas dominante non plus car c'est clair $u_1(0, s_2) = 0$

La stratégie 0.5 non plus $u_1(0.5, s_2) \ngeq u_1(s_1, s_2)$ contre exemple $u_1(0.5{,}0.3) < (0.7{,}0.3)$.

Donc elle n'est pas dominante.

Montrer que ce jeu ne possède pas de stratégies dominantes.

Exercice 7

1) oui par l'absurde si un joueur possède deux stratégies dominantes $s_i{}', s"_i$ on aura :

$u_i(\, s_i^{'}, s_{-i}) > u_i(s"_i, s_{-i})$ et $u_i(\, s_i^{"}, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$ donc impossible.

2)

1/2	C	T
C	(1,1)	(0,1)
T	(1,0)	(0,0)

Ce jeu ne possède ni de stratégies dominantes ni faiblement ni strictement, on voit que dans ce jeu le fait de regarder horizontalement le problème rend les stratégies équivalentes.

Exercice 8 :Enchères au second prix (Enchères de Vickrey)

1) L'ensemble des stratégies est non fini vu les différents prix que chacun des joueurs est en droit de proposer.
2) Oui le jeu possède une solution en appliquant les notions de dominances : en effet on peut prouver que la stratégie $b_i = v_i$ pour un joueur i est faiblement dominante comme on va le voir en dessous :

Pour le prouver nous allons calculer le gain pour $b_i = v_i, b_i > v_i, et b_i < v_i$et les comparer (bien sûr) comme dans une matrice on compare vis-à-vis du même profil adversaire je les mettrai en bleu et rouge pour que vous puissiez comprendre:

- $b_i = v_i$
  - $y > v_i$ et donc $u_i(v_i, y) = 0$
  - $y < v_i u_i(v_i, y) = v_i - y > 0$
- $b_i < v_i$
  - $y > v_i \Rightarrow y > b_i \Rightarrow u_i(b_i, y) = 0$
  - $y < v_i \Rightarrow \begin{cases} y < b_i < v_i \Rightarrow u_i(b_i, y) = v_i - y > 0 \\ \quad b_i < y < v_i \Rightarrow u_i(b_i, y) = 0 \end{cases}$
- $b_i > v_i$
  - $y > v_i \Rightarrow \begin{cases} \quad y > b_i > v_i \Rightarrow u_i(b_i, y) = 0 \\ b_i > y > v_i \Rightarrow u_i(b_i, y) = v_i - y < 0 \text{ "perte"} \end{cases}$
  - $y < v_i \Rightarrow y < b_i \Rightarrow u_i(b_i, y) = v_i - y > 0$

Donc par comparaison la meilleure stratégie du joueur est de prendre $b_i = v_i$ donc il sera obligé de donner son estime réelle de la valeur de l'objet et en quelque sorte d'être honnête.