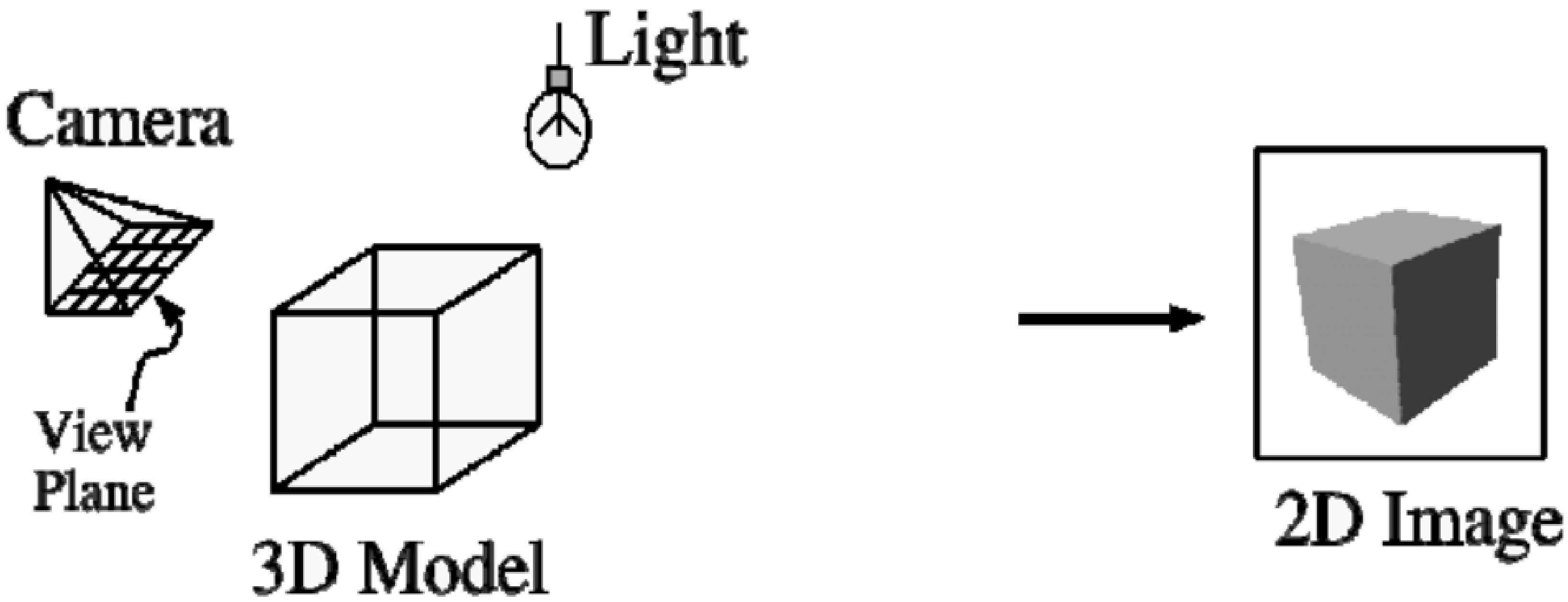
Les transformations géométriques

USTHB - M2 IV

Dr A. DAHMANE

Le système de visualisation



Les transformations géométriques

Un système de visualisation doit définir les paramètres qui permettent une série de transformations afin de pouvoir faire le lien entre les points ayant des coordonnées réelles et ceux du plan de visualisation 2D.

Les transformations sont un outil important pour faire bouger les objets et aussi pour construire une surface de vue 2D.

Les transformations géométriques de base sont la translation, la rotation et le changement d'échelle.

Soit un point $P(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$,

La translation

Elle est appliquée à un objet pour le repositionner d'une coordonné à une autre, selon un chemin droit.

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$
$$z' = z + t_z$$

L'équation de translation en forme matricielle est:

$$P' = P + T$$

Le vecteur de translation T indique la distance de translation.

$$T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

La rotation

Pour générer une rotation 2D, on spécifie un angle θ et une position (x_r,y_r), celle du point de rotation.

Lorsque le point de rotation est l'origine du repère :

$$x' = xcos\theta - ysin\theta$$
$$y' = xsin\theta + ycos\theta$$

L'équation de la rotation en forme matricielle est :

$$P' = R.P$$

où la matrice de rotation est :

$$R = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

La rotation

Une rotation 3D nécessite un axe de rotation en plus de l'angle.

Une rotation sur l'axe Z donne :

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

Lorsque la rotation se fait sur l’axe y , c’est y' qui reste constante et la même chose pour x

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le changement d’échelle (scale)

Cette transformation altère la taille d'un objet. Les valeurs des coordonnées sont multipliées par un facteur d'échelle :

$$x' = x.\, s_x$$
$$y' = y.\, s_y$$
$$z' = z.\, s_z$$

L'équation de cette transformation en forme matricielle :

$$P' = S.\, P$$

où :

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}$$

Les coordonnées homogènes

Les transformations de base s’écrivent comme suit :

$$P' = P + T$$
$$P' = SP$$
$$P' = RP$$

Afin de les utiliser de la même manière et pouvoir les combiner, on utilise les coordonnées homogènes. On augmente la dimension de l'espace afin d'écrire la translation en forme de multiplication de matrices.

Dans un système homogène, un point P(x,y,z) est représenté par P(X,Y,Z,w). Pour chaque facteur possible $w \neq 0$, X=x/w, Y=y/w et Z=z/w.

Les coordonnées homogènes

Le facteur w est fixé à 1, un point est alors représenté par [x,y,z, 1]. La translation peut être traitée comme multiplication de matrices comme les deux autres transformations.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \text{ où } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les coordonnées homogènes

D’où la translation:

$$P' = TP$$

le changement d'échelle :

$$P' = SP$$

où

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les coordonnées homogènes

et la rotation :

$$P' = RP$$

où

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 \\ 0 & sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_y = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_z = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

composition de transformations

composition de translations :

$$T(x_1, y_1, z_1).T(x_2, y_2, z_2) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

composition de rotations :

$$R(\theta_1).R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$$

composition de changement d'échelle :

$$S(x_1, y_1, z_1).S(x_2, y_2, z_2) = S(x_1.x_2, y_1.y_2, z_1.z_2)$$

composition de transformations

Lorsque la représentation des coordonnées est en vecteur colonne, la matrice de transformation composée est obtenue en multipliant les matrices dans l'ordre de droite à gauche. Chaque transformation successive est pré-multipliée par le produit des matrices de transformation précédentes.

$$\boldsymbol{T = T_n * \ldots * T_1}$$

La multiplication de matrices n'est pas commutative :

$$\boldsymbol{T_1 T_2 \neq T_2 T_1}$$

composition de transformations

Exemple 1 :

Appliquer, avec un schéma, une rotation quelconque à un cube dont l'un des sommets se trouve sur l'origine du repère. Appliquer une translation d'une distance t_x selon l'axe des X.

Qu'est ce qu'on obtient en appliquant les transformations dans l'ordre inverse ?

composition de transformations

Exemple 2 :

On désire faire une rotation à un rectangle selon un axe parallèle à l'axe des Z et qui passe par un des sommets du rectangle$(p_x, p_y, 0)$.

Peut-on appliquer seulement la matrice de rotation R_z vue précédemment ?

Donner la matrice de transformation.

Le cisaillement (shear)

C'est une transformation qui donne une distorsion de la forme d'un objet. Elle se fait en déplaçant la valeur de la coordonnées x en fonction de y ou le contraire. Un shear relative à x donne :

$$\mathrm{x}' = \mathrm{x} + sh_x . \mathrm{y} \qquad \mathrm{y}' = \mathrm{y}$$

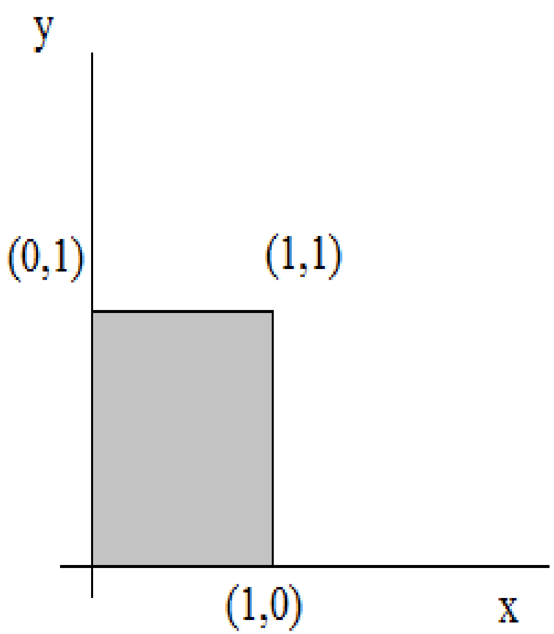
Les matrices de transformation:

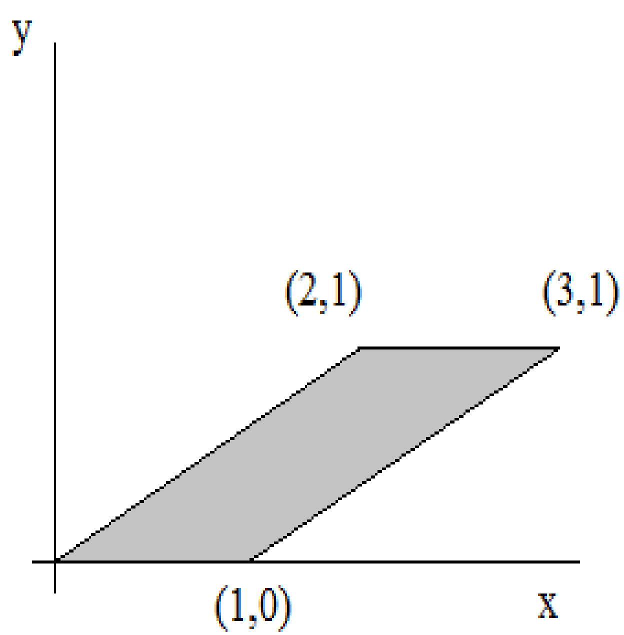
$$shear\ x \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad shear\ y \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le cisaillement (shear)

Exemple:

x’ = x + 2 . y





Le cisaillement (shear)

En 3D, le cisaillement se fait sur deux axes par une valeur proportionnelle à la 3ème coordonnée.

Exemple : Shear de X et Y relativement à Z donne :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Changement de système de coordonnées

Si un 2ème système de coordonnées est défini avec l'origine (x_0, y_0, z_0) et les vecteurs unitaires(u, v, n), la matrice de transformation finale est de la forme :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Changement de système de coordonnées