Master MIV 1ere année
Dept Informatique/ Fei.

Examen de Théorie des Jeux le 21/05/2018

Exercice 1.

Deux joueurs cherchent à se partager un gâteau composé de six parts de même taille numérotées de 1 à 6. La procédure est la suivante le joueur 1 choisit un entier $n \in \{1,2,3,4,5\}$ et partage les parts en deux lots un lot L_1 contenant les part de 1 à n et le lot L_2 de $n+1$ à 6. Le joueur 2 choisit un nombre $b \in \{L_1, L_2\}$ et prend le lot qui contient b et le joueur 1 prend le lot restant.

On suppose que les deux joueurs choisissent leur action simultanément, et le gain est la proportion de gâteau qu'il a obtenue.

1) Ecrire la matrice du jeu et déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures.
2) Y'a-t-il une stratégie raisonnable du joueur 1 ? en déduire un équilibre de Nash mixte du jeu.

Exercice 2. On considère le jeu à somme nulle donné par $X = Y = [\frac{1}{2}; 2]$ $g(x,y) = \frac{1}{x+y} + 2xy$

Quelles sont les stratégies strictement dominées des joueurs 1 et 2 ?

Le jeu admet-il une valeur si c'est oui c'est la quelle ?

Exercice 3.

On considère N fermiers qui peuvent chacun produire à un cout nul autant de blé qui le désirent. Si le $k^{éme}$ fermier produit q_k, la quantité totale produite est $Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_N$. Le prix du blé est déterminé alors par e^{-Q}.

1) Faire le tableau de variation de la fonction $f(x) = xe^{-x}$ $pour\ x \geq 0$.
2) En utilisant le point précédent, montrer que la stratégie qui consiste à produire une unité de blé est dominante pour chaque fermier. En déduire que le profit correspondant à chaque fermier est e^{-N}.
3) Supposons que les fermiers se mettent d'accord pour que chacun produise $\frac{1}{N}$ unité de blé.
   Toujours en se basant sur le premier point montrer que le produit total est alors maximal. Vérifier alors que le profit de chaque fermier est $\frac{e^{-1}}{N}$. Un tel accord peut-il être respecté ?
4) Pourquoi ce jeu est-il une généralisation du dilemme du prisonnier ?

Exo3 :

1) Tableau de variation :

$f(x) = x e^{-x} \qquad x \geq 0$

$f'(x) = (1 \times e^{-x}) + (x \times (-e^{-x}))$

$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$

$f'(x) = (1 - x) e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow (1 - x) e^{-x} = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x =$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

01

06

2) Montrons que la stratégie qui consiste à produire une unité de blé est dominante :

profit du fermier $i = q_i \cdot e^{-Q}$

$= q_i \cdot e^{-\sum_{j=1}^{n} q_j}$

$= q_i \cdot e^{-q_i} \cdot e^{-\sum_{j \neq i} q_j}$

02

Chaque fermier doit maximiser $(q_i \cdot e^{-q_i})$

D'après l'étude de la fonction f on remarque que f atteint son maximum quand $x = 1$

Donc : $q_i = 1 \Rightarrow$ chaque fermier doit produire 1 unité

•) Le profit correspondant à chaque fermier :

profit du fermier $i = q_i \cdot e^{-Q} = q_i \cdot e^{-N}$ tq : $Q = 1 + 1 + \dots + 1$, $Q = N$

$= 1 \cdot e^{-N}$

$= e^{-N}$

01

ملاحظة : كل استعمال خارج عن الامتحانات يعرض صاحبه الى تدابير تأديبية

Pour $q_i = 1/N$: $\varphi = 1/N + 1/N + \dots$

$= \frac{N}{N}$

$= 1$

01

3) Profit total $= \sum_{i=1}^{N} q_i \, e^{-\varphi}$

$= \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}\right) e^{-1}$

$= \frac{N}{N} e^{-1}$

$= e^{-1}$ qui est le maximum que peut atteindre f.

•) Profit de chaque fermier $= q_i \cdot e^{-\varphi}$

$= \frac{1}{N} e^{-1}$

07

$= \frac{e^{-1}}{N}$

•) Un tel accord ne peut pas être respecté car aucun fermier fera confiance aux autres fermiers. et aucun ne vas respecter l'accord

4) Ce jeu est une généralisation du dilème du prisonnier car si chaque joueur fait confiance aux autre toutes les joueurs vont maximiser leur gains.

Mais quand tous trahissent ils vont tous perdre

• Exo 1 :

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
	1 \ 2	1	2	3	4	5	6
a_1	1	(5, 1)	(1, 5)	(1, 5)	(1, 5)	(1, 5)	(1, 5)
a_2	2	(4, 2)	(4, 2)	(2, 4)	(2, 4)	(2, 4)	(2, 4)
a_3	3	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)
a_4	4	(2, 4)	(2, 4)	(2, 4)	(2, 4)	(4, 2)	(4, 2)
a_5	5	(1, 5)	(1, 5)	(1, 5)	(1, 5)	(1, 5)	(5, 1)

$\Rightarrow 1$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

L_1 $\boxed{2}$

L_2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

1. et J_2 choisit 1 : J_2 gagne 1 et J_1 gagne 5
2. quand J_2 choisit 1 : J_1 gagne 5 et J_2 gagne 1

•) Equilibre de Nash en pure :

Pour J_1 : $R_1(b_1) = a_1 \Rightarrow (a_1, b_1)$

$R_1(b_2) = a_2 \Rightarrow (a_2, b_2)$

$R_1(b_3) = a_3 \Rightarrow (a_3, b_3)$

$R_1(b_4) = a_3 \Rightarrow (a_3, b_4)$

$R_1(b_5) = a_4 \Rightarrow (a_4, b_5)$

$R_1(b_6) = a_5 \Rightarrow (a_5, b_6)$

Pour J_2 : $R_2(a_1) = b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \Rightarrow (a_1, b_2)(a_1, b_3)(a_1, b_4)(a_1, b_5)(a_1, b_6)$

$R_2(a_2) = b_3, b_4, b_5, b_6 \Rightarrow (a_2, b_3)(a_2, b_4)(a_2, b_5)(a_2, b_6)$

$R_2(a_3) = b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \Rightarrow (a_3, b_1)(a_3, b_2)(a_3, b_3)(a_3, b_4)(a_3, b_5)(a_3, b_6)$

$R_2(a_4) = b_1, b_2, b_3, b_4 \Rightarrow (a_4, b_1)(a_4, b_2)(a_4, b_3)(a_4, b_4)$

$R_2(a_5) = b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \Rightarrow (a_5, b_1)(a_5, b_2)(a_5, b_3)(a_5, b_4)(a_5, b_5)$

$\Rightarrow EN = \{(a_3, b_3)(a_3, b_4)\cancel{(a_5, b_6)}\}$ 0,5

2) Stratégie raisonnable du Joueur 1 : a_3

Car les deux joueurs gagnent 3 $\Rightarrow$ c'est un equilibre 01

•) Equilibre de Nash mixte : (a_3, σ_2)

Pour a_3 : $\mu_2(a_3, b_1) = \mu_2(a_3, b_2) = \mu_2(a_3, b_3) = \mu_2(a_3, b_4)$

$= \mu_2(a_3, b_5) = \mu_2(a_3, b_6) = 3$

$\Rightarrow$ Donc (a_3, σ_2) est un equilibre de Nash

On a $\begin{cases} 3q_1 = 3q_2 = 3q_3 = 3q_4 = 3q_5 = 3q_6 \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow q_i = 1/6 \quad \forall i \in \{1, \dots, 6\}$ 01

$\Rightarrow EN = \{(a_3, \sigma_2)\}$ tq : $\sigma_2 = (1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$

• Exo 2 :

$X = Y = [1/2 ; 2]$ $g(x,y) = \frac{1}{x+y} + 2xy$

1) Stratégies strictement dominées du joueur 1 :

$g(a,y) < g(x,y) \quad \forall x, y$

$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y)^2} + 2y$

x	$1/2$		2
$\frac{\partial g}{\partial x}$		$+$	
$g(x,y)$	$\frac{2}{2y+1} + y$	$\nearrow$	$\frac{1}{y+2} + 4y$

On a : $g(\frac{1}{2}, y) < g(x,y) \quad \forall y$

$x = \frac{1}{2}$ est une stratégie strictement dominée du Joueur 1.

2) Stratégies strictement dominées du joueur 2 :

$g(x,b) > g(x,y) \quad \forall x, y$

$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2} + 2x$

y	$1/2$		2
$\frac{\partial g}{\partial y}$		$+$	
$g(x,y)$	$\frac{2}{2x+1} + x$	$\nearrow$	$\frac{1}{x+2} + 4x$

On a : $g(x,2) > g(x,y) \quad \forall x$

$y = 2$ est une stratégie strictement dominée du Joueur 2.

- فوج : - Section :

فصيلة : - Option : MIV

رقم التسجيل :

شعبة :

Module : THJ

مقرر :

. Exo 2 : "suite"

3) V deux :

$\underline{v} = \underset{x \in X}{Max}\ \underset{y \in Y}{Min} (g(x,y))$

$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2} + 2x$

y	$1/2$	2
$\frac{\partial g}{\partial y}$	+	
$g(x,y)$	$\frac{2}{2x+1} + x$	$\frac{1}{x+2} + 4x$

$Min = \frac{2}{2x+1} + x$

$f(x) = \frac{2}{2x+1} + x$

$f'(x) = 2\left(\frac{2}{(2x+1)^2}\right) + 1$

$= \frac{4}{(2x+1)^2} + 1 > 0 \quad \forall x \in [1/2, 2]$

x	$1/2$	2
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$3/2$	$12/5$

$\underline{v} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

•) $\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \left(g(x,y) \right)$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y)^2} + 2y$$

x	$1/2$		2
$\frac{\partial g}{\partial x}$		$+$	
$g(x,y)$	$\frac{1}{2y+1} + y$	$\nearrow$	$\frac{1}{y+2} + 4y$

$$\max = \frac{1}{y+2} + 4y$$

$$f(y) = \frac{1}{y+2} + 4y$$

$$f'(y) = \frac{-1}{(y+2)^2} + 4 > 0 \quad \forall y \in [1/2, 2]$$

y	$1/2$		2
$f'(y)$		$+$	
$f(y)$	$\frac{12}{5}$	$\nearrow$	$\frac{33}{4}$

$\bar{v} = \frac{12}{5} = \underline{v} \Rightarrow$ le jeu admet une valeur $v = \frac{12}{5}$

$$g\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right) = \frac{5}{24} + \frac{288}{25}$$