USTHB
Faculté d'Electronique et d'Informatique
Département d'Informatique
Master 1 Informatique Visuelle
Intelligence Artificielle — Année Universitaire 2020-2021

TD 1
Les Logiques classiques

Exercice 3:

Montrez que pour toute formule p(**f** $\supset$ P) est un théorème.

Solution :

Pour toute formule p, (**f** $\supset$ P) est un théorème. En effet, posons :

X[1] : (a $\supset$ (b $\supset$ a)) : axiome (A1)

X[2] : (**f** $\supset$ ((p $\supset$ **f**) $\supset$ **f**)) **:** X[2] appartient à R1([X1]). On l'obtient en remplaçant toutes les occurrences du symbole non logique a par la formule **f** et les occurrences du symbole non logique b par la formule (p$\supset$ **f**)

X[3] : (((a$\supset$ **f**) $\supset$ **f**) $\supset$a) : axiome (A3)

X[4] : (((p$\supset$ **f**) $\supset$ **f**) $\supset$p): X[4] appartient à R1(X[3]). On l'obtient en remplaçant toutes les occurrences du symbole non logique a par la formule p.

X[5] : (**f** $\supset$ P) : X[5] est l'unique formule de R3(X[2], X[4]).

La séquence (X[1], X[2],…, X[5]) est la preuve recherchée.

(R3) : R3 est une règle d'inférence dérivée qui correspond à la transitivité de l'implication :

Si X a la forme (p $\supset$ q)

et Y a la forme (q$\supset$ r)

alors R3(X,Y) est l'ensemble contenant l'unique formule (p $\supset$ r).

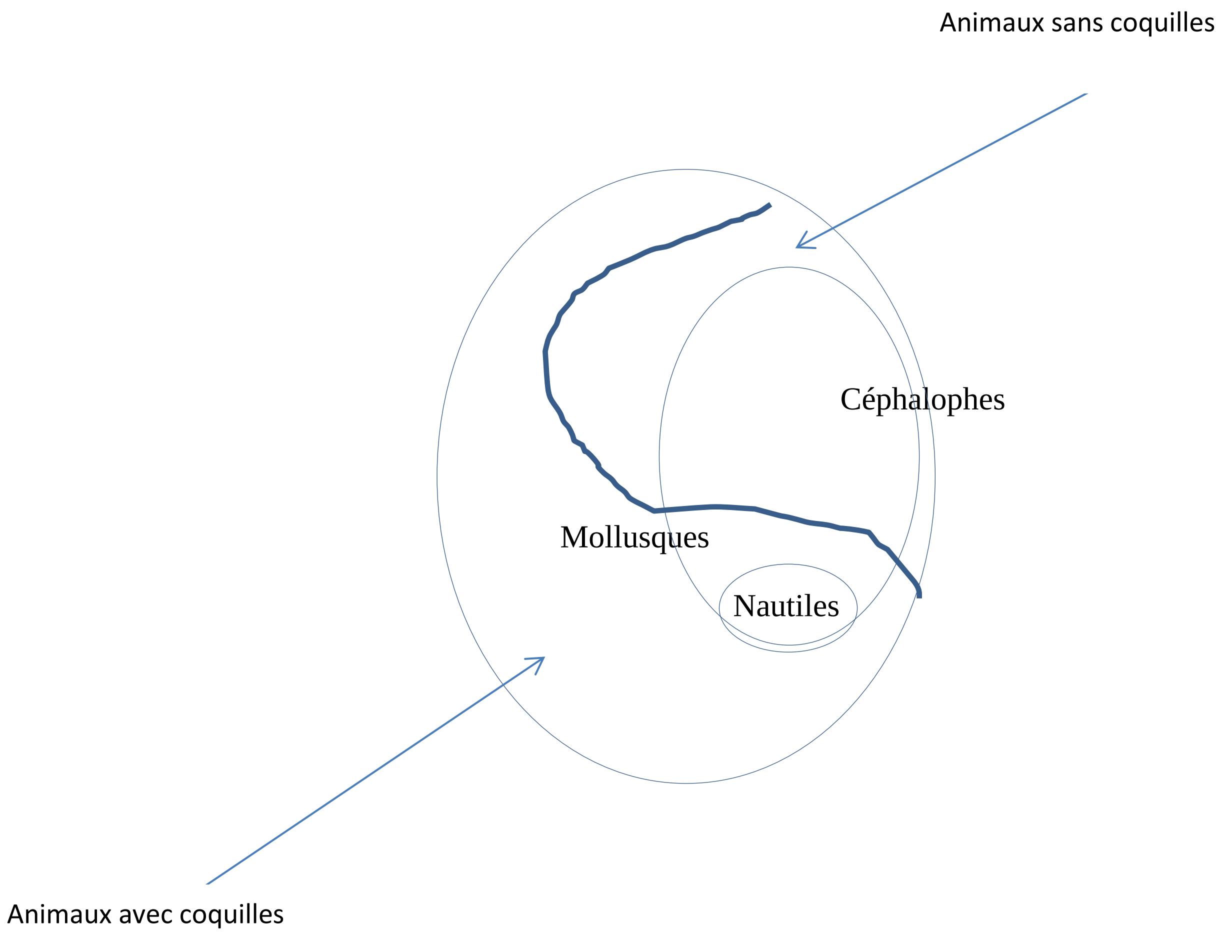
Exercice 4 :

Soient les connaissances zoologiques suivantes:

1- Les nautiles sont des céphalopodes,
2- Les céphalopodes sont des mollusques,
3- Les mollusques ont généralement une coquille,
4- Les céphalopodes n'en ont généralement pas,
5- Les nautiles en ont une,
6- **a** est un nautile,
7- **b** est un céphalopode,
8- **c** est un mollusque.

Exprimez l'énoncé sur les connaissances zoologiques des céphalopodes en logique propositionnelle et en logique du premier ordre. Que concluez- vous?

Solution :



A- <u>Modélisation en utilisant la logique propositionnelle</u>

Soient Na, Nb, Nc, Céa, Céb, Céc, Ma, Mb, Mc, Coa, Cob, Coc 12 symboles non logiques que nous interprétons par :

- a (respectivement b, c) est un nautile,
- a (respectivement b, c) est céphalopode,
- a (respectivement b, c) est un mollusque
- a (respectivement b, c) a une coquille.

1ère traduction :
le terme «généralement» est ignoré

1- (Na⊃ CEa) ; (Nb⊃ CEb) ; (Nc⊃ CEc);
2- (CEa⊃ Ma); (CEa⊃ Ma) ; (CEa⊃ Ma);
5- (Na⊃ COa); (Nb⊃ COb); (Nc⊃ COc);
6- Na ;
7- CEb ;
8- Mc

Si on ajoute les connaissances dans lesquelles figure le mot ‘’généralement’’ sans prendre en compte la nuance introduite par ce mot, il vient :

3- (Ma⊃ COa); (Mb⊃ COb) ; (Mc⊃ COc);
4- (CEa⊃ ¬COa) ; (CEb⊃ ¬COb) ; (CEc⊃ ¬COc);

Par deux applications du modus ponens sur Céb, (Céb ⊃ Mb) puis (Mb ⊃ Cob) on peut conclure **Cob** et
Par Céb et (Céb ⊃ ¬Cob) on peut conclure **¬ Cob** .
On obtient un <u>système incohérent.</u>

2ème traduction :

Pour éviter cette incohérence, la seul solution est de modifier la traduction de ‘’généralement’’ : on exclut explicitement les exceptions connues, et on traduit :
‘’ Les céphalopodes qui ne sont pas des nautiles n’ont pas de coquille’’
‘’Les mollusques qui ne sont pas des céphalopodes non nautiles en ont une’’:

((Céa ∧ ¬ Na) ⊃ ¬ Coa);
((Céb ∧ ¬ Nb) ⊃ ¬ Cob);
((Céc ∧ ¬ Nc) ⊃ ¬ Coc);
((Ma ∧ ¬(Céa ∧ ¬ Na)) ⊃ Coa);
((Mb ∧ ¬(Céb ∧ ¬ Nb)) ⊃ Cob);
((Mc ∧ ¬(Céc ∧ ¬ Nc)) ⊃ Coc).

Ce système est cohérent puisqu’il admet des modèles : Na, Céa, Céb, Ma, Mb, Mc, **Coa ont la valeur vrai**; **Nb et Cob ont la même valeur**;
Si Céc est faux alors Nc est faux et Coc vrai.

On constate que parmi les conclusions attendues (a et c portent une coquille, b n’en porte pas).
Seule la première est démontrable. En effet, Coa est vrai dans tous les modèles : le théorème de complétude assure alors que Coa est démontrable -,

et comme il existe des modèles où Coc est faux, Coc n'est pas démontrable (s'il l'était, d'après le théorème de correction, Coc serait vrai dans tous les modèles);

Même chose pour $\neg$ Coc

Conclusion 1 :

La première traduction est inutilisable, puisque d'un système incohérent, on peut tirer n'importe quelle conclusion;

La deuxième, plus satisfaisante, est cependant peu utile puisqu'elle ne permet pas d'obtenir toutes les conclusions souhaitées

B- Modélisation en Logique des prédicats :

1- $(\forall x)\ (N(x) \supset CE(x))$;
2- $(\forall x)\ ((CE(x) \supset M(x))$;
3- $(\forall x)((M(x) \wedge\neg(CE(x) \wedge\neg Nt(x))\ CO(x)))$;
4- $(\forall x)\ ((CE(x) \wedge\neg N(x) \supset \neg CO(x)))$;
5- $(\forall x)((N(x) \supset CO(x)))$;
6- N(a);
7- CE(b);
8- M(c);

Comme précédemment, on peut conclure CO(a), mais il existe des modèles satisfaisant toutes ces formules et CO(b). Il suffit de supposer que b est un nautile; de même pour $\neg$CO(c).

Conclusion 2 : Les conséquences attendues ne sont toujours pas dérivables. Le problème vient de ce que l'on n'a pas de connaissance complète sur b et c : on ne sait pas, par exemple, si b est ou non un nautile.

Exercice 5 :

Soit les connaissances suivantes :

a- Tout livre a au moins un auteur et si quelqu'un a écrit un livre, c'est un auteur.
b- « Les misérables» est un livre écrit par Victor Hugo.

Est-ce que nous pouvons avoir une réponse à la question « Victor Hugo est-il un auteur ? ».

Solution :

1- Modélisation :

a- $(\forall X)$ (livre(X) $\supset$ $(\exists Y)$ (auteur(Y)$\wedge$ a-écrit(Y,X) $\wedge$ $(\forall Z)$ (a-écrit(Z,X) $\supset$(auteur(Z))))

b- Livre(les Misérables) $\wedge$ a-écrit(Victor Hugo, les Misérables)

b-1 Livre(les Misérables)

b-2 a-écrit(Victor Hugo, les Misérables)

2- Preuve pour Auteur(Victor Hugo) :

X[1] : $(\forall X)$ (Livre(X) $\supset$ $(\exists Y)$ (auteur(Y)$\wedge$ a-écrit(Y,X) $\wedge$ $(\forall Z)$ (a-écrit(Z,X) $\supset$(Auteur(Z)))) : connaissance (a)

X[2] : $(\forall X)$((Livre(X) $\supset$ $(\exists Y)$ (Auteur(Y)$\wedge$ a-écrit(Y,X) $\wedge$ $(\forall Z)$ (a-écrit(Z,X) $\supset$(Auteur(Z)))) $\supset$ (Livre(les Misérables) $\supset$ $(\exists Y)$ (Auteur(Y)$\wedge$ a-écrit(Y, les Misérables) $\wedge$ $(\forall Z)$ (a-écrit(Z, les Misérables) $\supset$(Auteur(Z))))) : Axiome obtenu à partir de (A5) en substituant X par les Misérables.

X[3] : (Livre(Misérables) $\supset$ $(\exists Y)$ (Auteur(Y)$\wedge$ a-écrit(Y, les Misérables) $\wedge$ $(\forall Z)$ (a-écrit(Z, les Misérables) $\supset$(auteur(Z)))) : R2(X[1],X[2])

X[4] : Livre(les Misérables) : connaissance (b-1)
X[5] : $(\exists Y)$ (Auteur(Y)$\wedge$ a-écrit(Y, les Misérables) $\wedge$ $(\forall Z)$ (a-écrit(Z, les Misérables) $\supset$(Auteur(Z)))) : R2(X[4],X[3])
X[6] : $(\forall Z)$ (a-écrit(Z, les Misérables) $\supset$(Auteur(Z))) : R5(X[5])
X[7] : $(\forall Z)$ ((a-écrit(Z, les Misérables) $\supset$(Auteur(Z))) $\supset$(a-écrit(Victor Hugo, les Misérables) $\supset$(Auteur(Victor Hugo)))) : Axiome obtenu à partir de (A5) en substituant Z par Victor Hugo.
X[8] : (a-écrit(Victor Hugo, les Misérables) $\supset$(Auteur(Victor Hugo))) : R2(X[6],X[7])
X[9] : a-écrit(Victor Hugo, les Misérables) : Connaissances (b-2)
X[10] : Auteur(Victor Hugo) : R2(X[9],X[8])
Preuve :{X[1], X[2], X[3], X[4], X[5], X[6], X[7 X[81], X[9], X[10]}

R5 est une règle d'inférence dérivée qui stipule si a $\wedge$ b est un théorème alors a est un théorème.

Exercice 6 :
Soient les énoncés suivants :

a. Toutes les voitures ont exactement un propriétaire,
b. Certains étudiants ont une voiture,
c. Certains étudiants n'ont pas de voiture,

et un langage possédant 2 prédicats unaires : **voiture**, **étudiant** et deux prédicats binaires : **égale** et **possède**.
1- Formulez le problème en logique des prédicats.

a- $(\forall X)$ (voiture(X) $\supset$ $(\exists Y)$ (possède(Y,X) $\wedge$$(\forall Z)$ (possède(Z,X) $\supset$(égale(Z,Y))))
b- $(\exists X)$ (étudiant(X) $\wedge$ $(\exists Y)$ (voiture(Y) $\wedge$ (possède(X,Y)))
c- $(\exists X)$ (étudiant(X) $\wedge$ $(\forall Y)$ (voiture(Y) $\supset$ $\neg$(possède(X,Y)))

2- Soit l'interprétation suivante :

- Le domaine est constitué de 2 éléments *A* et *B* : Domaine D={A,B},
- *voiture* s'interprète par une fonction qui ne répond *vrai* que pour *A*,
- *étudiant* par une fonction qui répond toujours *vrai,*
- *possède* par une fonction qui ne répond *vrai* que pour le couple *<B,A>*.

Cette interprétation satisfait-elle les 3 formules proposées.

1- Evaluation de (a) :
$(\forall X)$ (voiture(X) $\supset$ $(\exists Y)$ (possède(Y,X) $\wedge$$(\forall Z)$ (possède(Z,X) $\supset$(égale(Z,Y))))
Il faut calculer les valeurs de vérité de la formule (a) lorsque X=A et X=B:

a-1 X=A
(voiture(A) $\supset$ $(\exists Y)$ (possède(Y,A) $\wedge$$(\forall Z)$ (possède(Z,A) $\supset$(égale(Z,Y))))
- Or voiture(A) est vraie donc, il faut vérifier :
$(\exists Y)$ (possède(Y,A) $\wedge$$(\forall Z)$ (possède(Z,A) $\supset$(égale(Z,Y)))
- Pour Y=B, cette formule devient :
(possède(B,A) $\wedge$$(\forall Z)$ (possède(Z,A) $\supset$(égale(Z,B)))
- Or (possède(B,A) est vraie donc il faut vérifier :
$(\forall Z)$ (possède(Z,A) $\supset$(égale(Z,B))) ce qui revient à vérifier :
a-1-1 Pour Z=A
(possède(A,A) $\supset$(égale(A,B)))

Or possède(A,A) est faux

d'où (possède(A,A) $\supset$(égale(A,B))) est vraie

a-1-2 Pour Z=B

(possède(B,A) $\supset$(égale(B,B)) est vraie

a-2 X=B

(voiture(B) $\supset$ ($\exists$Y) (possède(Y,B) $\wedge$($\forall$Z) (possède(Z,B) $\supset$(égale(Z,Y))))

Or voiture(B) est faux d'où la formule (a-2) est vraie

Ainsi, la formule (a) est vraie

2- Evaluation de (b):

($\exists$X) (étudiant(X) $\wedge$ ($\exists$Y) (voiture(Y) $\wedge$ (possède(X,Y)))

Il suffit que le parcours de X sur le domaine D={A,B} permette de vérifier au moins une fois la formule :

-Si X=B alors la formule devient :

(étudiant(B) $\wedge$ ($\exists$Y) (voiture(Y) $\wedge$ (possède(B,Y)))

Comme étudiant(B) est vraie, il faudra vérifier la formule :

($\exists$Y) (voiture(Y) $\wedge$ (possède(B,Y)) : Pour cela, il suffit que le parcours de Y sur le domaine

D={A,B} permette de vérifier au moins une fois la formule (voiture(Y) $\wedge$ (possède(B,Y))

Si Y=A alors la formule (voiture(A) $\wedge$ (possède(B,A)) est vraie

D'où la formule (b) est vraie

3- Evaluation de (c) :

($\exists$X) (étudiant(X) $\wedge$ ($\forall$Y) (voiture(Y) $\supset$ $\neg$(possède(X,Y)))

- Si X=A, il vient :

(étudiant(A) $\wedge$ ($\forall$Y) (voiture(Y) $\supset$ $\neg$(possède(A,Y)))

Or étudiant(A) est vraie, il faudra vérifier la formule :

($\forall$Y) (voiture(Y) $\supset$ $\neg$(possède(A,Y))

Le parcours de Y sur le domaine D={A,B}revient à vérifier :

c-1 : Pour Y=A

(voiture(A) $\supset$ $\neg$(possède(A,A)) vraie car possède(A,A) est fausse

c-2 : Pour Y=B

(voiture(B) $\supset$ $\neg$(possède(A,B)) est vraie car voiture(B) est fausse

D'où la formule (c) est vraie

Il en résulte que l'interprétation satisfait les 3 formules a, b et c.