Cours 1 : Logique modale

Odile PAPINI

POLYTECH
Université d'Aix-Marseille
odile.papini@univ-amu.fr
http://odile.papini.perso.esil.univmed.fr/sources/MASTER2-RE-OP.html

Plan du cours

Bibliographie 1 I

- Chellas B. F., *Modal logic : an introduction*, Cambridge University Press, 1980.
- Hughes G. E. & Cresswell M. J., *A new introduction to modal logic*, Taylor & Francis 2001.
- Blackburn. P. & de Rijke M. & Venema Y., *Modal logic*, Cambridge University Press 2001.
- Wooldridge., *reasoning about rational agents*, MIT Press, 2000.
- Wooldridge., *An Introduction to multiagents systems*, John Wiley & Sons, (second edition) 2009.

Bibliographie 2 I

Supports de cours logique modale

http ://www.irit.fr/ Andreas.Herzig/CLmai/

http ://www.lipn.univ-paris13.fr/ levy/pdf/CoursLogMod.pdf

http ://www.guillaume.piolle.fr/doc/logique-modale.pdf

Logique modale propositionnelle : introduction

Logique classique

- **logique propositionnelle**
  - sens des formules facile à appréhender
  - complexité calculatoire abordable
  - MAIS sémantique et expressivité limitée
- **logique des prédicats**
  - plus expressive
  - MAIS complexité calculatoire élevée
  - sens des formules parfois difficile à comprendre

Logique modale propositionnelle : introduction

Limites de l'expressivité de la logique propositionnelle

- **logique classique : assertions factuelles binaires**
  - tout énonçé est qualifié de vrai ou de faux : il pleut, $2+2=5$, ...
  - formules complexes valuées en fonction de leurs composants : sémantique extensionnelle
- **logique classique : pas toujours adéquate pour le raisonnement**
  - raisonnement sur l'incertain
  - raisonnement sur les situations évolutives

Logique modale propositionnelle : introduction

Logique modale : extension de la logique propositionnelle

- formalisation d'énonçés non factuels
- raisonnement sur l'incertain et les situations évolutives

logique modale

- introduction de **modalités** pour la compréhension des formules
- expressivité : entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats
- complexité calculatoire maîtrisée

Logique modale propositionnelle : introduction

modalité

- n'importe quoi qui donne du sens
- exprime la sémantique d'un verbe, d'un adjectif, d'un adverbe, $\cdots$ portant sur une formule

exemples de modalités

"l'agent sait que", "l'agent croit que", "l'agent a confiance en le fait que", "il sera dorénavant vrai que", "il est possible que", "il est nécessaire que", "il est évident que", "il est obligatoire que" $\cdots$

représentation et raisonnement à un niveau élevé d'abstraction

- modèle mental d'un agent
- description d'une organisation, $\cdots$

Logique modale propositionnelle : introduction

modalités : exemples

alétiques :	il est possible qu'il pleuve
épistémiques :	l'agent sait qu'il pleut, l'agent croit qu'il pleut
temporelles :	il va pleuvoir, il a plu
déontiques :	il doit pleuvoir
etc$\cdots$	autres modalités ou mélanges de modalités

Logique modale propositionnelle : introduction

Ajout de symboles de modalité : $\Box$ et $\Diamond$
F une formule de la logique propositionnelle

- $\Box F$: F est nécessaire, toujours vrai, connu, obligatoire, $\cdots$
- $\Diamond F$: F est possible, parfois vrai, concevable, permis, $\cdots$

impossibilité de définir une sémantique extensionnelle

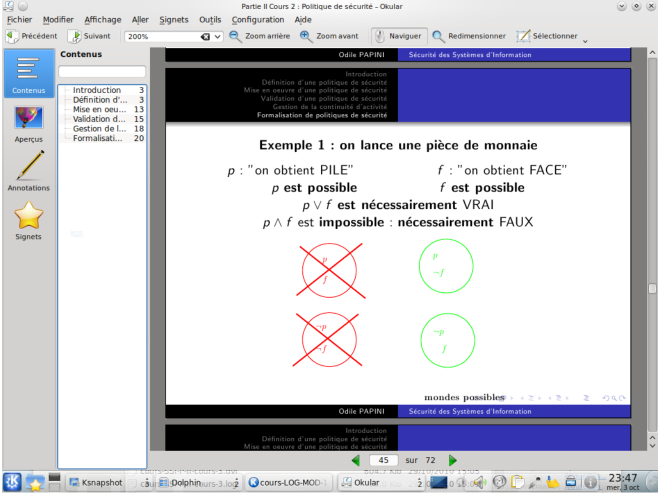
F	$\neg F$	$\Box F$	$\Diamond F$	$\Box\neg F$	$\Diamond\neg F$
1	0	?	1	0	?
0	1	0	?	?	1

sémantique basée sur les mondes possibles

distinguer entre situations (alternatives imaginables)
"mondes possibles"

Logique modale propositionnelle : introduction

sémantique des mondes possibles : exemple



Logique modale propositionnelle : introduction

carré logique Aristote

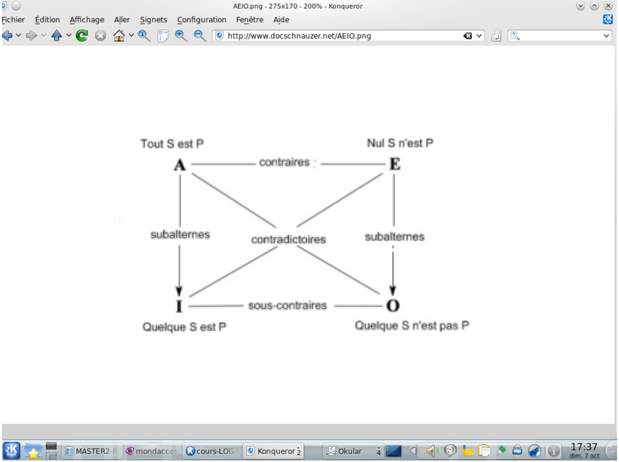


FIGURE: source : Jean-Claude Choul

Logique modale propositionnelle : introduction

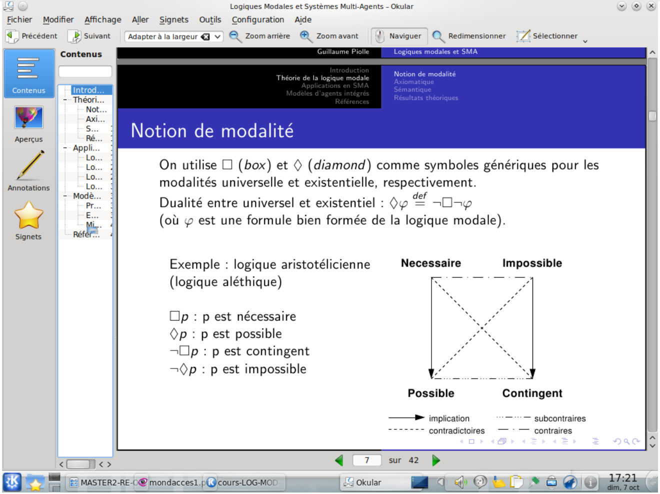


FIGURE: source : cours G. Piolle

Logique modale propositionnelle : introduction

Soit p une proposition : “il pleut”

exemples de formules épistémiques

p	il pleut,
$\neg p$	il ne pleut pas,
$\Box p$	l’agent sait qu’il pleut,
$\Box\neg p$	l’agent sait qu’il ne pleut pas,
$\Diamond p$	l’agent tient pour concevable qu’il pleuve,
$\Diamond\neg p$	l’agent tient pour concevable qu’il ne pleuve pas,
$\Box\Box p$	l’agent sait qu’il sait qu’il pleut,
$\Box\neg\Box p$	l’agent sait qu’il ne sait pas s’il pleut.

Logique modale propositionnelle : introduction

exemple : Le problème des trois conseillers. J. Mc Carthy. 1978

Un roi désirant savoir lequel de ses trois conseillers est le plu sagace peint un point blanc sur le front de chacun d'eux. Le roi leur dit qu'il a peint un point blanc ou un point noir sur le front de chacun et qu'au moins un des points est blanc ; il demande ensuite chaque conseiller de deviner la couleur de son propre point.
Aprés un temps de réflexion le premier répond qu'il ne sait pas.
Entendant cela le second répond qu'il ne sait pas non plus.
Aprés avoir entendu la réponse des deux premiers, le troisième déclare que son point est blanc.

Pourquoi ?

Logique modale propositionnelle : introduction

exemple : Le problème des trois conseillers. J. Mc Carthy. 1978

Formalisation en logique modale multi-agents **S5**

- si un conseiller a un point blanc les autres le savent
- si si un conseiller n'a pas de point blanc les autres le savent
- au moins un conseiller a un point blanc
- les conseillers 1 et 2 ne connaissent pas la couleur de leur point

preuve

Avec ces hypothèses on peut démontrer par une dérivation en logique épistemique S5 multi-agents que le troisième conseiller sait qu'il a un point blanc.

Logique modale propositionnelle

Le langage de logique modale propositionnelle

Vocabulaire

un ensemble infini dénombrable de **propositions**

les constantes : 0 (Faux) et 1 (Vrai)

les connecteurs : $\neg, \quad , \wedge, \quad \vee, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow$

les **modalités** : $\Box, \quad \Diamond$

Logique modale propositionnelle

Définitions

formules bien formées de la logique modale propositionnelle :

- 0 et 1 sont des formules
- une variable propositionnelle est une formule
- si A et B sont des formules alors
  $\neg A, \quad A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \rightarrow B, \quad A \leftrightarrow B$ sont des formules
- si A est une formule alors $\Box A, \quad \Diamond A$ sont des formules
- si A est une formule alors $\Diamond A =_{def} \neg \Box \neg A$

Logique modale propositionnelle

Système formel de la logique modale propositionnelle (système K)

les axiomes

soit A, B, C des formules de la logique modale propositionnelle

A1) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

A2) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

A3) $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A))$

K) $(\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B))$

Logique modale propositionnelle

règles de déduction

modus ponens

$$\frac{\Gamma \vdash A, \;\; \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

nécéssité (règle N)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \Box A}$$

Logique modale propositionnelle

K-dérivation (déduction)

F : une formule modale, Γ : un ensemble de formules modales

une K-**dérivation** de F à partir de Γ est une séquence de formules se terminant par F, dont chaque formule est :

- soit une axiome
- soit un membre de Γ
- soit obtenu par l'application des règles de substitution, de modus ponens ou de nécessité

une K-**preuve** de F est une K-**dérivation** de F à partir de $\emptyset$: $\vdash F$

Logique modale propositionnelle

Quelques théorèmes du système K

K1) $\vdash \Box(P \wedge Q) \rightarrow (\Box P \wedge \Box Q)$

K2) $\vdash (\Box P \wedge \Box Q) \rightarrow \Box(P \wedge Q)$

K3) $\vdash \Box(P \wedge Q) \leftrightarrow (\Box P \wedge \Box Q)$

Logique modale propositionnelle

règles dérivées

$DR1)$ $$\frac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash \Box A \rightarrow \Box B}$$

$DR2)$ $$\frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$$

$DR3)$ $$\frac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond B}$$

$Eq)$ si $A \leftrightarrow B$ remplacer A par B (ou B par A)

Logique modale propositionnelle

règles dérivées plus générales :

régularité pour $\Box$ (règle R)

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash \Box A \rightarrow \Box B}$$

régularité généralisée pour $\Box$

$$\frac{\Gamma \vdash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow B}{\Gamma \vdash (\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box B}$$

régularité pour $\diamond$

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash \diamond A \rightarrow \diamond B}$$

Logique modale propositionnelle

Quelques théorèmes du système K (suite)

K4) $\vdash (\Box P \vee \Box Q) \rightarrow \Box(P \vee Q)$

K5) $\vdash \Box P \leftrightarrow \neg \Diamond \neg P$

K6) $\vdash \Diamond(P \vee Q) \leftrightarrow (\Diamond P \vee \Diamond Q)$

K7) $\vdash \Diamond(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\Box P \rightarrow \Diamond Q)$

K8) $\vdash \Diamond(P \wedge Q) \rightarrow (\Diamond P \wedge \Diamond Q)$

K9) $\vdash \Box(P \vee Q) \rightarrow (\Box P \vee \Diamond Q)$

Logique modale propositionnelle

D'autres axiomes

T) $\Box A \rightarrow A$: tout ce qui est su (cru) est vrai

D) $\Box A \rightarrow \diamond A$: tout ce qui est su (cru) est cohérent

B) $\vdash A \rightarrow \Box \diamond A$: rien n'est vrai sans qu'on ne sache qu'il peut être su (cru)

4) $\Box A \rightarrow \Box \Box A$: si on sait (croit) A alors on sait qu'on sait (croit) A

5) $\diamond A \rightarrow \Box \diamond A$: si on ne sait (croit) pas A alors on sait qu'on ne sait (croit) pas A (croit) A

Logique modale propositionnelle

Système formel K : formé à partir des axiomes, A1, A2, A3, K

Système formel KT : formé à partir des axiomes, A1, A2, A3, K et de l'axiome de la **connaisance T) :** $\Box A \rightarrow A$

Système formel KT4 ou S4 : formé à partir des axiomes, A1, A2, A3, K, T et de
l'axiome **d'introspection positive 4) :** $\Box A \rightarrow \Box \Box A$

Système formel KT45 ou S5 : formé à partir des axiomes, A1, A2, A3, K, T, 4 et de
l'axiome **d'introspection négative 5) :** $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$

Logique modale propositionnelle

Quelques théorèmes du système T

T1) $\vdash P \rightarrow \diamond P$

T2) $\vdash \diamond(P \rightarrow \Box P)$

Logique modale propositionnelle

Quelques théorèmes du système $S4$

S4-1) $\vdash \diamond \diamond P \rightarrow \diamond P$

S4-2) $\vdash \Box P \leftrightarrow \Box\Box P$

S4-3) $\vdash \diamond P \leftrightarrow \diamond \diamond P$

S4-4) $\vdash \diamond \Box \diamond P \rightarrow \diamond P$

S4-5) $\vdash \Box \diamond P \rightarrow \Box \diamond \Box \diamond P$

S4-6) $\vdash \Box \diamond P \leftrightarrow \Box \diamond \Box \diamond P$

S4-7) $\vdash \diamond \Box P \leftrightarrow \diamond \Box \diamond \Box P$

Logique modale propositionnelle

Quelques théorèmes du système $S5$

S5-1) $\vdash \diamond\Box P \rightarrow \Box P$

S5-2) $\vdash \diamond P \leftrightarrow \Box \diamond P$

S5-3) $\vdash \Box P \leftrightarrow \diamond\Box P$

S5-4) $\vdash \Box(P \vee \Box Q) \leftrightarrow (\Box P \vee \Box Q)$

S5-5) $\vdash \Box(P \vee \diamond Q) \leftrightarrow (\Box P \vee \diamond Q)$

S5-6) $\vdash \diamond(P \wedge \diamond Q) \leftrightarrow (\diamond P \wedge \diamond Q)$

S(5-7) $\vdash \diamond(P \wedge \Box Q) \leftrightarrow (\diamond P \wedge \Box Q)$

Logique modale propositionnelle

sémantique de la logique modale propositionnelle

sémantique des “mondes possibles”

une formule modale évaluée dans un “univers” de **mondes possibles**
une **relation d'accessibilité** lie les mondes possibles entre eux

$\Box A$ est vraie dans un monde possible ω si A est vraie dans **tous les mondes possibles** accessibles à partir de ω

$\Diamond A$ est vraie dans un monde possible ω si A est vraie dans **au moins un monde possible** accessible à partir de ω

Exemple 1 : on lance une pièce de monnaie

p : "on obtient PILE" $\quad$ f : "on obtient FACE"

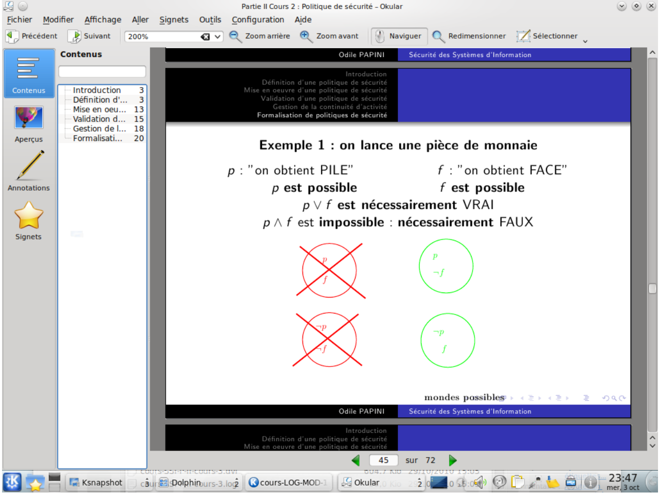
p **est possible** $\quad$ f **est possible**

$p \vee f$ **est nécessairement** VRAI

$p \wedge f$ est **impossible** : **nécessairement** FAUX

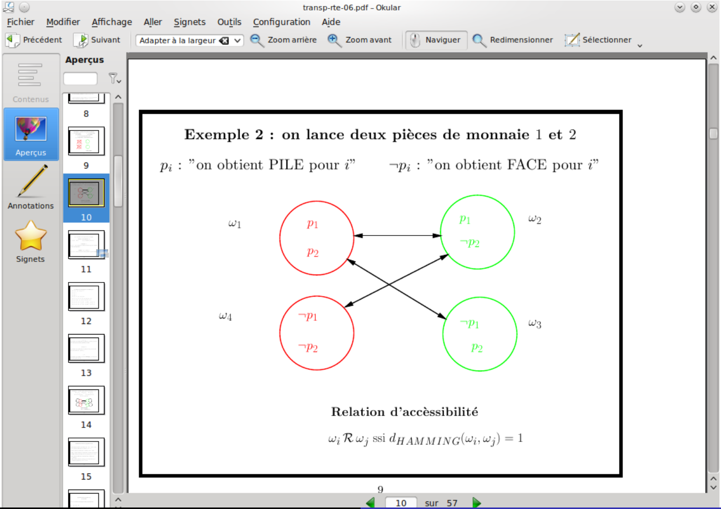
Logique modale propositionnelle :sémantique

sémantique des mondes possibles : exemple



Exemple 2 : on lance deux pièces de monnaie 1 et 2

p_i : "on obtient PILE pour i" $\neg p_i$: "on obtient FACE pour i"



Logique modale propositionnelle

sémantique : définitions

système : paire $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ où $\mathcal{W}$ est l'ensemble des interprétations du langage et $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur $\mathcal{W}$
$\omega,\ \omega' \in \mathcal{W}, \quad \omega\mathcal{R}\omega' \qquad : \quad \omega'$ est accessible à partir de ω

valuation : application v de $\mathcal{W} \times \mathcal{P}$ dans $\{0,\ 1\}$ qui associe une valeur de vérité $v(\omega, p)$ à la variable p dans l'interprétation ω

modèle : triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, v)$ où $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ est un système et v une valuation

notation : $\mathcal{M}, \omega \models F$: F est vraie dans le monde possible ω pour le modèle $\mathcal{M}$

Logique modale propositionnelle

définitions

Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, v)$ un modèle,
la relation de conséquence est définie par :
$\mathcal{M}, \omega \models p$ ssi $v(\omega, p) = 1$
$\mathcal{M}, \omega \models \top$
$\mathcal{M}, \omega \not\models \bot$
$\mathcal{M}, \omega \models \neg A$ ssi $\mathcal{M}, \omega \not\models A$
$\mathcal{M}, \omega \models A \rightarrow B$ ssi $\mathcal{M}, \omega \not\models A$ ou $\mathcal{M}, \omega \models B$
$\mathcal{M}, \omega \models A \wedge B$ ssi $\mathcal{M}, \omega \models A$ et $\mathcal{M}, \omega \models B$
$\mathcal{M}, \omega \models \Box A$ ssi $\mathcal{M}, \omega' \models A$ pour tout ω' tq $\omega \mathcal{R} \omega'$
$\mathcal{M}, \omega \models \diamond A$ ssi $\mathcal{M}, \omega' \models A$ pour au moins un modèle ω' tq $\omega \mathcal{R} \omega'$

Logique modale propositionnelle

une formule A est valide dans un modèle $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, v)$ ssi A est vraie dans tous les mondes possibles du modèle

$$\text{notation} \quad \mathcal{M} \models A$$

une formule A est valide dans un système $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ ssi A est vraie dans tout modèle $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, v)$

$$\text{notation} \quad (\mathcal{W}, \mathcal{R}) \models A$$

une formule A est valide (ou est une **tautologie**), ssi A est vraie dans tout système $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$

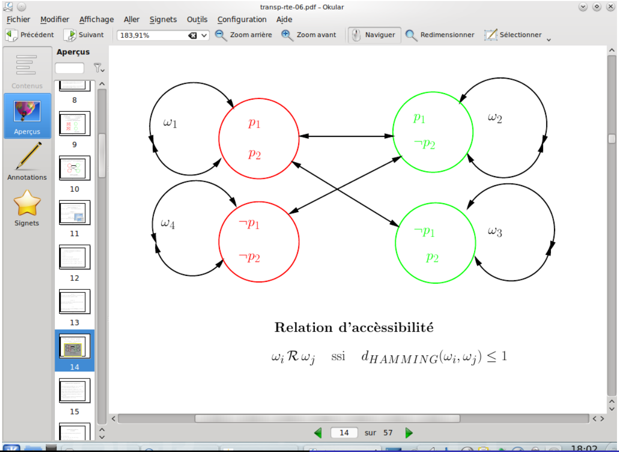
$$\text{notation} \quad \models A$$

Exemple 2 : on lance deux pièces de monnaie 1 et 2

$$\mathcal{M}, \omega_1 \models p_1 \qquad \mathcal{M}, \omega_2 \models p_1 \qquad \mathcal{M}, \omega_3 \not\models p_1$$

$$\mathcal{M}, \omega_1 \models \Box(p_1 \vee p_2) \qquad \mathcal{M}, \omega_2 \not\models \Box(p_1 \vee p_2)$$

$$\mathcal{M}, \omega_2 \models \Diamond(p_1 \vee p_2)$$



Sémantique des mondes possibles : exercice

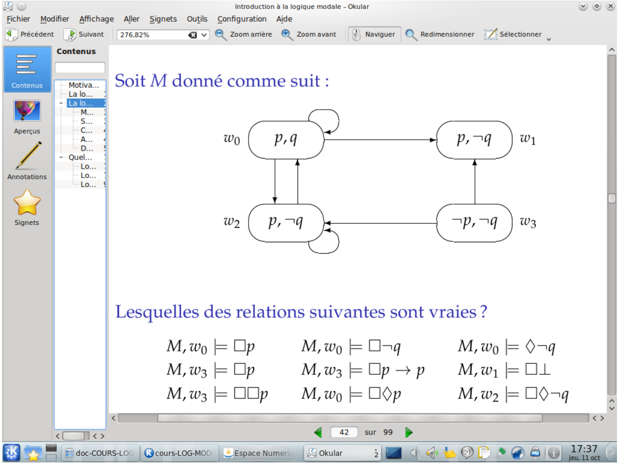


FIGURE: source : Stephan Merz

Sémantique des mondes possibles : exercice

Montrer :

$$\Diamond A \equiv \quad \neg\Box\neg A$$

$$\models \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

$\models \Box F$ (où si F est une tautologie)

Sémantique des mondes possibles : exercice

Montrer que dans le système K les axiomes suivants ne sont pas des tautologies :

T) $\Box A \rightarrow A$

4) $\Box A \rightarrow \Box \Box A$

5) $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$

Logique modale propositionnelle

propriétés de $\mathcal{R}$:

- réflexive : $\forall \omega_i, \omega_j,\ \omega_i \mathcal{R} \omega_j$
- sérielle : $\forall \omega_i, \exists \omega_j,\ \omega_i \mathcal{R} \omega_j$
- transitive : $\forall \omega_i, \omega_j, \omega_k$, si $\omega_i \mathcal{R} \omega_j$ et $\omega_j \mathcal{R} \omega_k$ alors $\omega_i \mathcal{R} \omega_k$
- euclidienne : $\forall \omega_i, \omega_j, \omega_k$, si $\omega_i \mathcal{R} \omega_j$ et $\omega_i \mathcal{R} \omega_k$ alors $\omega_j \mathcal{R} \omega_k$
- symétrique : $\forall \omega_i, \omega_j$, si $\omega_i \mathcal{R} \omega_j$ alors $\omega_j \mathcal{R} \omega_i$

Logique modale propositionnelle

il y a une infinité de logiques modales qui se comportent plus ou moins bien :

- K : logique modale la plus faible, formule caractéristique :
$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$
- T : systèmes réflexifs, $\mathcal{R}$ est réflexive, formule caractéristique :
$$\Box A \to A$$
- D : systèmes sériels, $\mathcal{R}$ est sérielle, formule caractéristique :
$$\Box A \to \Diamond A$$
- $K4$: systèmes transitifs, $\mathcal{R}$ est transitive, formule caractéristique :
$$\Box A \to \Box\Box A$$

Logique modale propositionnelle

- $S4$: systèmes réflexifs et transitifs, $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive

- KB : systèmes symétriques, $\mathcal{R}$ est symétrique, formule caractéristique :

$$\Box A \rightarrow \Box \diamond A$$

- B : systèmes réflexifs et symétriques, $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique

- $S5$: systèmes réflexifs, symétriques et transitifs $\mathcal{R}$ est euclidienne, formule caractéristique :

$$\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$$

Logique modale propositionnelle

résultats de correction et de complétude

le système formel K

théorème (de correction) : soit A une formule modale, si $\vdash A$ alors $\models A$
(les formules qui sont des théorèmes du système K sont des tautologies pour la classe K)

théorème (de complétude) : soit A une formule modale, si $\models A$ alors $\vdash A$

Logique modale propositionnelle

résultats de correction et de complétude

système formel T

théorème : $\Box A \to A$ est une tautologie ssi $\mathcal{R}$ est réflexive

système formel $S4$

théorème : $\Box A \to \Box\Box A$ est une tautologie ssi $\mathcal{R}$ est transitive

système formel $S5$

théorème : $\neg\Box A \to \Box\neg\Box A$ est une tautologie ssi $\mathcal{R}$ est euclidienne

Logique modale propositionnelle

quelques résultats de décidabilité

définition : une logique modale $\mathcal{L}$ possède la propriété de **modèle fini** si pour toute formule A qui n'est pas valide dans $\mathcal{L}$, il existe un modèle fini dans lequel A est falsifié

proposition : si une logique modale $\mathcal{L}$ possède une procédure de preuve et la propriété de **modèle fini** alors $\mathcal{L}$ est **décidable**

théorème : K, T, $S4$, $S5$ **sont décidables**