Complexité et algorithmique avancée

Cours de Master « Sécurité » 1ère année

Chargé de cours: H. Mosteghanemi

Département d'Informatique

Faculté d'Electronique et d'Informatique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

BP 32, El-Alia, Bab Ezzouar

DZ-16111 ALGER

Email: hmosteghanemi@usthb.dz;
h.mosteghanemi.usthb@gmail.com

Chapitres clés du cours

I. Chapitre introductif
II. Les bases de l'analyse d'un algorithme
III. Quelques outils mathématiques
IV. Structure de données avancées
    - Arbre et graphe
    - Dictionnaire, index et technique de hachage
V. Analyse d'algorithme de tri
VI. Récursivité
VII. Les classes de problèmes
VIII. Stratégies de résolutions des problèmes
IX. Algorithmique du texte

I. Chapitre Introductif

- Les bases de l'algorithmique
  - Instructions élémentaires
    - (arithmétique, logique, affectation, lecture/écriture, … etc)
  - Instructions de contrôles
    - (si, cas-vaux, … etc)
  - Instructions répétitives.
    - (pour, tant que, faire-tant que, repeter-jusqu'à, … etc).
  - Instructions ou actions paramétrées
    - (procédure, fonction, récursivité, … etc).

I. Chapitre Introductif

Face à une problématique (énoncé d'un problème) quelles sont les étapes à suivre pour mettre en place une solution ?

I. Chapitre Introductif

- En informatique, deux questions fondamentales se posent toujours devant un problème à résoudre :
  - Existe-t-il un algorithme pour résoudre le problème en question ?
  - Si oui, cet algorithme est-il utilisable en pratique, autrement dit le temps et l'espace mémoire qu'il exige pour son exécution sont-ils « raisonnables »

La première question traite de la ***calculabilité*** et la seconde traite de la ***complexité***

I. Chapitre Introductif

- ***Notion de problème***

Un problème est une question qui a les propriétés suivantes :

1. Elle est générique et s'applique à un ensemble d'éléments;
2. Toute question posée pour chaque élément admet une réponse

I. Chapitre Introductif

- ***Notion d'instance***

Une instance de problème est la question générique appliquée à un élément.

- ***Exemple :***
  - L'entier 15 est-il pair ou impair est une instance du problème de parité des nombres

I. Chapitre Introductif

- ***Notion de solution***

La solution d'un problème donné est un objet qu'il faut déterminer et qui satisfait les contraintes explicites imposées dans le problème.

Il existe quatre manières d'obtenir la solution d'un problème donné :

1. Appliquer une formule explicite
2. Utiliser une définition récursive
3. Utiliser un algorithme qui converge vers la solution
4. Énumérer les cas possibles.

I. Chapitre Introductif

- ***Notion de programme***
  - Un processus de solution (résolution) d'un problème pouvant être exécutée par un ordinateur.
  - Il contient toute l'information nécessaire pour résoudre le problème donné en un **temps fini**

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

- ***L'analyse d'un algorithme***
  - L'analyse des algorithmes s'exprime en termes d'évaluation de la complexité de ces algorithmes.
  - L'analyse d'un algorithme produit également :
    - La modularité
    - La correction
    - La maintenance
    - La simplicité
    - La robustesse
    - L'extensibilité
    - Le temps de mise en œuvre, … etc.

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

- ***Élément de base de la complexité***

Définition 1: un algorithme est un ensemble fini d'instructions qui, lors de leur exécution, accomplissent une tâche donnée.

Définition 2: Un algorithme est un ensemble d'opérations de calcul élémentaires, organisé selon des règles précises dans le but de résoudre un problème donné.

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

- ***Élément de base de la complexité***

Un algorithme doit satisfaire ces propriétés :

- Il peut avoir zéro ou plusieurs données en entrée;
- Il doit produire au moins une quantité en sortie;
- Chacune de ses instructions doit être claire et non ambiguë;
- Il doit se terminer après un nombre fini d'étapes;
- Chaque instruction doit être implémentable;

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

- Exemple : Soit le problème « trier un ensemble de n nombres entiers n>1 ».

Une solution pourrait être :

« Rechercher le minimum parmi les entiers non triés et le placer comme successeur de la succession trié ». Cette expression ne constitue pas un algorithme pour résoudre le problème

??? Proposez un Algorithme.

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

Qu'est ce que l'analyse ?

Déterminer la quantité des ressources nécessaire à son exécution

- Ces ressources peuvent être :
  - La quantité de mémoire utilisée;
  - Le temps de calcul;
  - La largeur de la bande passante, .. Etc.

Nous nous intéressons dans ce cours au temps et à la mémoire, le but étant d'identifier face à plusieurs algorithmes qui résolvent un même problème, ***celui qui est le plus efficace***.

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

Algorithme et Complexité :

- La complexité d'un algorithme est la mesure du nombre d'opérations élémentaires qu'il effectue pour le problème pour lequel il a été conçu
- La complexité est mesurée en fonction de la taille du problème ; la taille étant elle-même mesurée en fonction des données du problème
- La complexité est par conséquent mesurée en fonction des données du problème

Il s'agit donc de trouver une équation qui relie le temps d'exécution à la taille des données.

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

Trois Types de complexité

- Complexité au meilleur cas : cette mesure à peu d'intérêt et ne permet pas de distinguer deux solutions.
- Complexité en moyenne : nécessite la connaissance de la distribution des données.
- Complexité du pire cas : Fournit une borne supérieure du temps d'exécution que l'algorithme ne peut pas dépasser. C'est cette complexité qui nous intéresse dans la suite de ce cours.

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

Paramètres de l'analyse

Les performance d'un algorithme dépendent des trois principaux paramètres suivants :

- La taille des entrées : quelque soit le problème, il faut en premier lieu caractériser les entrées.
- La distribution des données
  - Exemple : données triés ou non
- La structure de données

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

La complexité asymptotique

- En pratique, il est difficile de calculer de manière exacte la complexité d'un algorithme.
- La complexité asymptotique est une approximation du nombre d'opération que l'algorithme exécute en fonction de la donnée en entrée (donnée de grande taille) et ne retient que le terme de poids fort dans la formule et ignore les coefficients multiplicateurs.
- La complexité d'un algorithme est indépendante du type de machine sur laquelle il s'exécute.

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

La notation de Landau :

- On ne mesure généralement pas la complexité exacte d'un algorithme
- On mesure son ordre de grandeur qui reflète son comportement asymptotique, c'est-a-dire son comportement sur les instances de grande taille.
- Landau propose un formalisme mathématique qui permet de cerner cette complexité asymptotique

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

Synthèse :

- Définition de problème, d'instance de solution et d'algorithme
- Le calcul de la complexité est l'objectif de base de l'analyse d'un algorithme
- Déterminer la complexité revient à trouver une formule qui relie le temps d'exécution à la taille du problème.
- Il existe trois types de complexité mais c'est la complexité au pire qui est la plus significative.
- La complexité des opérations de base est de O(1)
  - Lecture/écriture, affectation, opérations arithmétiques.
- Il n'existe pas de méthode automatique
- L'analyse fait appel à des outils mathématiques
  - L'algèbre, la théorie élémentaire des probabilités … etc.

II. Les bases de l'analyse d'un algorithme

La notation de Landau :

- f = **O(g)** ssi il existe n_0>= 0, il existe c>0,
  pour tout n ≥ n_0, f(n) ≤ c*g(n)
- f = **Ω(g)** ssi g = O(f)
- f = **o(g)** ssi pour tout c>0, il existe n_0,
  pour tout n ≥ n_0, f(n) ≥ c*g(n)
- f = **Θ(g)** ssi f = O(g) et g = O(f)

Autrement dit :

$$\exists\, C_1, C_2 > 0, \exists\, n_0 \geq 0,$$
$$0 \leq C_1 \times g(n) \leq f(n) \leq C_2 \times g(n).$$

III. Outils mathématiques

- Sommation
- Série et suites numériques
- Récurrences
- Calcul des sommes par intégrales
- Résolution des équations de récurrence

III. Outils mathématiques

- Calculer la complexité d'un algorithme revient à déterminer une formule mathématique qui exprime le coût de cet algorithme.
- Cette formule s'obtient en bornant des expressions de sommations et/ou de produits par un calcul de limite à l'infini
- Dans plusieurs situations les propriétés relationnelles entre les nombres réels s'appliquent aussi aux fonctions
- Ce chapitre donne quelques rappels fondamentaux liés à l'utilisation des fonctions

III. Outils mathématiques

- ***Sommation:***
  - Lorsqu'un algorithme contient une structure de contrôle répétitive, le temps d'exécution s'exprime comme une somme des temps pour exécuter chaque instruction dans le corps de la boucle.
  - Déterminer une fonction de complexité asymptotique exige le calcul d'expressions de sommation de série et savoir les bornées.

III. Outils mathématiques

- ***Séries et suites numériques:***
  - Lorsque le comportement de l'instruction répétitive n'est pas clairement défini il est nécessaire de traduire ce comportement en une série ou une suite numérique.
  - L'ordre de complexité dans ce cas va correspondre à la borne de la suite (resp. la série) ou à la longueur de celle-ci (le nombre de terme).

III. Outils mathématiques

- ***La récurrence:***
  - C'est un outil mathématique qui est plus utilisé pour montrer l'existence de la borne que pour trouver ladite borne.
  - Elle ne permet donc pas de déterminer l'ordre de complexité mais constitue un outil de preuve une fois que la borne est ***deviné***

III. Outils mathématiques

- ***Le Calcul des sommes par intégrale:***
  - Lorsque le comportement de l'instruction répétitive n'est pas clairement défini il est nécessaire de traduire ce comportement en une série ou une suite numérique.
  - L'ordre de complexité dans ce cas peut correspondre à la borne de la suite (resp. la série) ou à la longueur de celle-ci (le nombre de terme).

III. Outils mathématiques

- ***Formules et propriétés des Sommations:***

Soit une séquence de nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

La somme infinie $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$ Est interprétée par : $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} a_k$$

- Si la limite n'existe pas, la série diverge, autrement elle converge
- Si n n'est pas entier on suppose que la limite supérieur est $\lfloor n \rfloor$
- Si la somme commence avec $k = x$ et x n'est pas entier on supposera que la sommation commence avec l'entier $\lfloor x \rfloor$

III. Outils mathématiques

- ***Formules et propriétés des Sommations:***

Linéarité

Soient a_1, a_2, …, a_n et b_1, b_2, …, b_n deux séquences de nombres et c un réel, la linéarité signifie :

$$\sum_{k=1}^{k=n}(c * a_k + b_k) = c * \sum_{k=1}^{k=n} a_k + \sum_{k=1}^{k=n} b_k$$

Exemple :

$$\sum_{k=1}^{k=n}(\Theta(f(k)) = \Theta(\sum_{k=1}^{k=n} f(k))$$

III. Outils mathématiques

- ***Séries arithmétiques:***

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n * (n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

- ***Séries géométriques:*** Si x est un réel, x ≠ 1

$$\sum_{k=0}^{k=n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{(x^{n+1} - 1)}{x - 1}$$

Est une série exponentielle (géométrique), si |x|<1et la sommation est infinie, on obtient la série géométrique décroissante suivante:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x} \qquad \ldots (\#)$$

III. Outils mathématiques

- ***Séries harmoniques:*** n>0, le $n^{ième}$ nombre harmonique s'écrit:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$$
$$= \ln n + O(1).$$

- ***Séries emboitées:***

$a_0, a_1, \ldots, a_n$, on écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n.$$

III. Outils mathématiques

- ***Séries emboitées:***

Exemple : $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k*(k+1)}$$

On réécrit chaque terme sous la forme :

$$\frac{1}{k*(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k*(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \\ &= a_0 - a_n \\ &= 1 - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

III. Outils mathématiques

- ***Les produits***

Le produit fini $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ s'écrit :

$$\prod_{k=1}^{k=n} a_k$$

- Si n = 0 le produit vaut 1 par définition
- Une formule de produit peut être convertie en une formule de sommation en passant par le logarithme :

$$\log\left(\prod_{k=1}^{k=n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \log a_k .$$

III. Outils mathématiques

Borner une sommation

- ***Par récurrence:***

En utilisant la démonstration par récurrence il est possible de prouver que

$$\sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{n*(n+1)}{2}$$

Exemple :

Prouver que $\sum_{k=0}^{k=n} 3^k$ est en O(3^n)

III. Outils mathématiques

Borner une sommation

Démonstration :

On montre par récurrence, qu'il existe une constante c et un entier n_0 telle que : $\sum_{k=0}^{k=n} 3^k \leq c * 3^n, \forall n \geq n_0.$

Cas de base : n=0, on a : $\sum_{k=0}^{k=n} 3^k = 3^0 = 1 \leq c * 1$ pour c ≥1.

Hypothèse de récurrence : on suppose la formule vraie à l'ordre n et on montre qu'elle reste vraie à l'ordre n+1.

$$\sum_{k=0}^{k=n+1} 3^k = \sum_{k=0}^{k=n} 3^k + 3^{n+1} \leq c * 3^n + 3^{n+1}$$

$Or\ c*3^n+3^{n+1} = c*3^{n+1}(\frac{1}{3}+\frac{1}{c}) \leq c*3^{n+1}\ si\ \frac{1}{3}+\frac{1}{c} \leq 1\ ce\ qui\ est\ vrai\ si\ c \geq \frac{3}{2}.\ C.Q.F.D$

III. Outils mathématiques

- ***Récurrences*** Attention aux erreurs !

Dans la définition de O les constantes c et n_0 ne doivent pas varier en n

Contre-exemple : l'affirmation suivante : $\sum_{k=1}^{k=n} k = O(n)$ *est fausse. La démonstration par récurrence suivante est fausse :*

- ***cas de base*** *: pour n=0 on a :* $\sum_{k=1}^{k=1} k = 1 \leq c * 1$ *vraie pour* $c \geq 1$
- *hypothèse de récurrence :* $\exists c, n_0$ *telles que* $\sum_{k=1}^{k=n} k \leq c * n, \forall n \geq n_0$
- *Calculons* $\sum_{k=1}^{k=n+1} k = \sum_{k=1}^{k=n} k + (n+1) \leq c*n+(n+1) = n*(c+1)+1.$ *La constante c croit avec n.*
- *Calculons* $\sum_{k=1}^{k=n+2} k = \sum_{k=1}^{k=n} k + (n+1) + (n+2) \leq c*n+(n+1)+(n+2) = n*(c+2)+3$, *on voit bien que la constante c n'est pas unique pour tout* $n > n_0$.

III. Outils mathématiques

Borner un terme par le plus grand terme de la série

On peut borner une sommation en bornant chacun de ses termes par une borne supérieure intéressante. Il suffit dans plusieurs cas de borner tous les termes par le terme le plus grand, autrement dit :

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_k \leq n * max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Exemple :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \leq n \times n \times n \times \cdots \times n = n^n$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} k \leq \sum_{k=1}^{k=n} n = n^2$$

III. Outils mathématiques

Borner une série par une série géométrique

Pour borner une série $\sum_{k=1}^{k=n} a_k$, par une série géométrique, on doit montrer qu'il existe une constante r, telle que r < 1 et $a_{k+1}/a_k \leq 1$, si un tel r existe alors $a_k \leq a_0 * r^k$, $\forall k \geq 0$.

On obtient ainsi :

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_0 * r^k =$$

$$a_0 * \sum_{k=0}^{\infty} r^k =$$

$$a_0 * \frac{1}{1-r}.$$

Cette technique permet d'obtenir une meilleure borne que celle qui utilise le plus grand terme.

III. Outils mathématiques

Borner une série par une série géométrique

Exemple: Trouver une borne pour $\sum_{k=1}^{\infty} k/3^k$

Pour k = 1, a_1 = 1/3

- Le rapport entre deux termes quelconques vaut :

$$a_{k+1}/a_k = \frac{(k+1)/3^{k+1}}{k/3^k}$$

$$\frac{1}{3} * \frac{k+1}{k}$$

$$\frac{1}{3} * (1 + \frac{1}{k}) \leq \frac{2}{3} \qquad \forall k \geq 1.$$

Tout terme a_k est donc borné par $a_0 * r^k$ = (1/3)*(2/3)^k , d'où:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right) * \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} * \frac{1}{1-2/3} = 1$$

III. Outils mathématiques

Borner une série par une série géométrique

Remarque:

Pour appliquer cette méthode il est nécessaire de trouver une constante r < 1. Si r varie la méthode n'est pas applicable, comme pour la série divergente suivante:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \lim_{n \longleftarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} 1/k = \lim_{n \longleftarrow \infty} \Theta(\ln n) = \infty$$

Dans ce cas le rapport $a_{k+1}/a_k < r$ mais r est une variable qui tend vers 1. Il n'y a pas de r constant, r < 1.

Mais on peut appliquer cette méthode à partir d'un certain rang, à partir duquel il existe un r constant qui vérifie les conditions d'existence d'une série géométrique.

III. Outils mathématiques

Borner une série par une série géométrique

Exemple:

Par exemple, pour borner la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$, on calcule le rapport a_{k+1}/a_k. On peut montrer que $a_{k+1}/a_k \leq 8/9$ si $k \geq 3$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=1}^{2} \frac{k^2}{2^k} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

$$\leq O(1) + 9/8 \sum_{k=3}^{\infty} (8/9)^k$$

$$O(1).$$

III. Outils mathématiques

- ***Calcul des sommes par intégrales***
  - Une fonction est monotone croissante si
$$m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$$
  - Une fonction est monotone décroissante si
$$m \leq n \Rightarrow f(m) \geq f(n)$$

Soit à borner cette expression de sommation : $\sum_{k=m}^{n} f(k)$

  - Si *f est monotone croissante on à :*
$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{m}^{n} f(k) \leq \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$
  - *Si f est monotone décroissante on à:*
$$\int_{m}^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{m}^{n} f(k) \leq \int_{m-1}^{n} f(x)dx$$

III. Outils mathématiques

- ***Calcul des sommes par intégrales***

Exemple:

Bornons $\sum_{k=m}^{n} 1/k$; *par cette méthode,*

Puisque f(k) = 1/k est une fonction monotone décroissante, alors :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_1^n \frac{1}{k} \leq \int_0^n \frac{1}{x} dx$$

Nous avons alors d'une part :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \geq \ln(n+1).$$

Et d'autre part :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} \leq 1 + \ln n$$

III. Outils mathématiques

- ***Fonctions classiques***
  - ***La partie entière***

C'est une fonction monotone croissante, elle est définie comme suit pour tout réel x :

1. Le plus grand entier inférieur ou égal à x et s'écrit $\lfloor x \rfloor$
2. Le plus petit entier supérieur à x et s'écrit $\lceil x \rceil$.

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$$

Pour tout entier n :

$$\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$$

III. Outils mathématiques

- ***Fonctions classiques***
  - ***La fonction exponentielle***
- Pour tout réel a ≠ 0, m, n, on a les identités suivantes :

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^{-1} = 1/a$$
$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$
$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

La fonction a^n est monotone et croissante pour a ≥1.

On pose $0^0=1$ si nécessaire.

Comparaison avec un polynôme: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$

III. Outils mathématiques

- ***Fonctions classiques***
  - ***La fonction exponentielle (suite)***
- Une fonction exponentielle avec une base strictement plus grande que 1 croit plus vite qu'un polynôme quelconque. D'où: $n^b = O(a^n)$
- Si on s'intéresse à e = 2.71828… qui est la base qui logarithme népérien on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

D'où $e^x \geq 1 + x$. L'égalité est vérifié pour x = 0.

- Si |x| ≤ 1, alors $1+x \leq e^x \leq 1+x+x^2$.

On s'intéresse au comportement asymptotique quand $x \to 0$, on a : $e^x = 1 + x + \Theta(x^2)$

et pour tout x : $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

III. Outils mathématiques

- ***Fonctions classiques***
  - ***La fonction logarithme***

Le logarithme d'un nombre dans une base c'est l'exposant qu'il faut donner à la base pour obtenir ce nombre. (exemple $2^3 = 8 \Rightarrow \log_2 8 = 3$).

Notation :

Logarithme népérien : $\log_e n = \ln n$

Logarithme binaire : $\log_2 n = \ln n / \ln 2$

Exponentiation : $\log^K n = (\log n)^K$

Composition : log log n = log (log n).

III. Outils mathématiques

- ***Fonctions classiques***
  - ***La fonction logarithme***

Propriétés de calcul: Pour tout réels a, b, c >0, et un entier n :

1. $a = b^{\log_b a}$
2. $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$
3. $\log_b a^n = n \log_b a$
4. $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
5. $\log_b(1/a) = -\log_b a$
6. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
7. $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Ainsi le changement de base ne modifie pas la valeur du logarithme que d'un facteur constant, qui est négligeable dans la notation O.

III. Outils mathématiques

- ***Méthodes de résolutions des équations de récurrence:***

Généralement le temps d'exécution d'une fonction récursive s'exprime par une équation de récurrence. L'équation de récurrence décrit une fonction à partir de sa valeur sur des entrées plus petites.

III. Outils mathématiques

- ***Méthodes de résolutions des équations de récurrence:***
  - ***Méthode par substitution***
- On pose l'hypothèse d'une borne qu'on devine
- et on démontre par récurrence que cette hypothèse est correcte.
- La difficulté de cette méthode tient au fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour deviner une borne autre que l'expérience des cas similaires.

III. Outils mathématiques

- ***Méthodes de résolutions des équations de récurrence:***
  - ***Méthode par substitution(suite)***

Exemple: Démontrons l'existence d'une borne pour l'expression suivante: $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

*On suppose que la solution c'est O(n long n). La méthode consiste à prouver que T(n) ≤ c * n log n pour c > 0.*

On suppose que cette borne est valable pour $\lfloor n/2 \rfloor$.

Donc T($\lfloor n/2 \rfloor$*) ≤ c *$*\lfloor n/2 \rfloor$ *log* $\lfloor n/2 \rfloor$*. On remplace T(*$\lfloor n/2 \rfloor$*) par sa valeur dans l'équation de récurrence et on obtient:*

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(c * \lfloor n/2 \rfloor \log(\lfloor n/2 \rfloor)) + n \\ &\leq c * n * log(n/2) + n \\ &= c * n \log n - c * n \log 2 + n \\ &= c * n \log n - c * n + n \\ &\leq c * n \log n \quad si\ c \geq 1 \end{aligned}$$

III. Outils mathématiques

- ***Méthodes de résolutions des équations de récurrence:***
  - ***Méthode par substitution***

Exemple: (suite)

On peut imposer que le cas de base de la récurrence c'est n = 2 ou n = 3, car pour n > 3 la récurrence ne dépend pas de T(1).

Mais cette valeur de c ne convient pas au cas de base de la récurrence car :

$T(1) \leq c * 1 \log 1 = 0.$

Il suffit donc de choisir c = 2.

III. Outils mathématiques

- ***Méthodes de résolutions des équations de récurrence:***
  - ***Méthode itérative***

Cette méthode transforme la récurrence en une sommation qu'il s'agit de borner

  - ***Méthode générale***

Elle donne des bornes pour les récurrences de la forme suivante : $T(n) = a*T(n/b)+ f(n)$ avec $a \geq 1, b > 1$

Et f(n) est une fonction donnée.

III. Outils mathématiques

Synthèse :

- Rappel des notions mathématiques nécessaire pour le calcul de la complexité.
- Puisque l'objectif de la complexité c'est de définir une borne supérieur au comportement de l'algorithme dans le pire cas, cela revient dans la majeur partie des cas de borner les sommations en se basant sur les approches proposés dans ce chapitre.
- Les approches proposés ne sont qu'une méthode parmi tant d'autres pour définir les bornes d'une sommation.
- L'utilisation de telle ou telle approche ne peut se faire que si les conditions de son applicabilité son vérifier
- C'est l'expérience des cas similaire qui permet de bien choisir l'approche à suivre pour trouver une telle borne.

IV. Analyse des algorithmes de tri

- Tri par bulle
- Tri par insertion
- Tri par sélection
- Tri fusion (merge sort)
- Le tri rapide (quick sort)
- Tri par Tas

IV. Analyse des algorithmes de tri

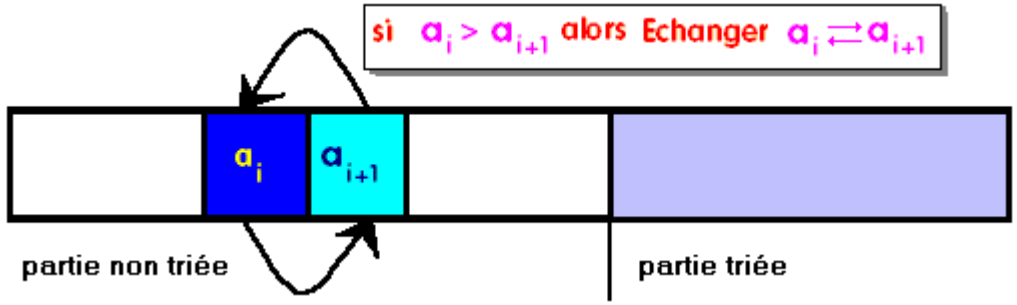
Tri par bulle:

- C'est le moins performant de la catégorie des tris par échange ou sélection, mais comme c'est un algorithme simple, il est intéressant pour une utilisation pédagogiquement.
- Son principe est de parcourir la liste (**a**1, **a**2, ... , **a**n) en intervertissant toute paire d'éléments consécutifs (**a**i-1, **a**i) non ordonnés. Ainsi après le premier parcours, l'élément maximum se retrouve en $\mathbf{a}_n$. On suppose que l'ordre s'écrit de gauche à droite (à gauche le plus petit élément, à droite le plus grand élément).
- On recommence l'opération avec la nouvelle sous-suite (**a**1, **a**2, ... , **a**n-1) , et ainsi de suite jusqu'à épuisement de toutes les sous-suites (la dernière est un couple).
- Le nom de tri à bulle vient du fait qu'à la fin de chaque itération interne, les plus grands nombres de chaque sous-suite se déplacent vers la droite successivement comme des bulles de la gauche vers la droite.

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par bulle: Concrètement

- La suite (**a**1, **a**2, ... , **a**n) est rangée dans un tableau T[...] en mémoire centrale. Le tableau contient une partie triée (en violet à droite) et une partie non triée (en blanc à gauche). On effectue plusieurs fois le parcours du tableau à trier; le principe de base étant de réordonner les couples (**a**i-1, **a**i) non classés (en inversion de rang soit **a**i-1 > **a**i) dans la partie non triée du tableau, puis à déplacer la frontière (le maximum de la sous-suite (**a**1, **a**2, ... , **a**n-1)) d'une position :



- Tant que la partie non triée n'est pas vide, on permute les couples **non ordonnés** ((**a**i-1, **a**i) tels que **a**i-1 > **a**i)) pour obtenir le maximum de celle-ci à l'élément frontière. C.-à-d., qu'au premier passage c'est l'extremum global qui est bien classé, au second passage le second extremum etc...

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par bulle: Algorithme

```
Algorithme Tri_a_Bulles
 local:  i , j , n, temp ∈  Entiers naturels
 Entrée : Tab ∈  Tableau d'Entiers naturels de 1 à n éléments
 Sortie : Tab ∈  Tableau d'Entiers naturels de 1 à n éléments
début
 pour i de n jusquà 1 faire // recommence une sous-suite (a1, a2, ... , ai)
  pour j de 2 jusquà i faire // échange des couples non classés de la sous-suite
   si Tab[ j-1 ] > Tab[ j ] alors // aj-1et aj non ordonnés
     temp ← Tab[ j-1 ] ;
     Tab[ j-1 ] ← Tab[ j ] ;
     Tab[ j ]  ← temp //on échange les positions de aj-1et aj
   Fsi
  fpour
 fpour
Fin Tri_a_Bulles
```

Pire cas : tableau classé dans l'ordre inverse

Complexité = $O(n^2)$.

IV. Analyse des algorithmes de tri

i = 6 / pour j de 2 jusqà 6 faire

5	4	2	3	7	1	5> 4 donc permutation des deux cellules
4	5	2	3	7	1	5>2 donc permutation des deux cellules
4	2	5	3	7	1	5> 3 donc permutation des deux cellules
4	2	3	5	7	1	5< 7 donc aucune action sur ces deux cellules
4	2	3	5	7	1	7> 1 donc permutation des deux cellules
4	2	3	5	1	7	A la fin de la boucle externe le max 7 est rangé

i = 5 / pour j de 2 jusqà 5 faire

4	2	3	5	1	7	4 > 2 donc permutation des deux cellules
2	4	3	5	1	7	4 > 3 donc permutation des deux cellules
2	3	4	5	1	7	4 < 5 donc aucune action sur ces deux cellules
2	3	4	5	1	7	5 > 1 donc permutation des deux cellules
2	3	4	1	5	7	A la fin de la boucle externe le max 5 est rangé

i = 4 / pour j de 2 jusqà 4 faire

2	3	4	1	5	7	2 < 3 donc aucune action sur ces deux cellules
2	3	4	1	5	7	3 < 4 donc aucune action sur ces deux cellules
2	3	4	1	5	7	4 > 1 donc permutation des deux cellules
2	3	1	4	5	7	A la fin de la boucle externe le max 4 est rangé

i = 3 / pour j de 2 jusqà 3 faire

2	3	1	4	5	7	2 < 3 donc aucune action sur ces deux cellules
2	3	1	4	5	7	3 > 1 donc permutation des deux cellules
2	1	3	4	5	7	A la fin de la boucle externe le max 3 est rangé

i = 2 / pour j de 2 jusqà 2 faire

2	1	3	4	5	7	2 > 1 donc permutation des deux cellules
1	2	3	4	5	7	A la fin de la boucle externe le max 2 est rangé

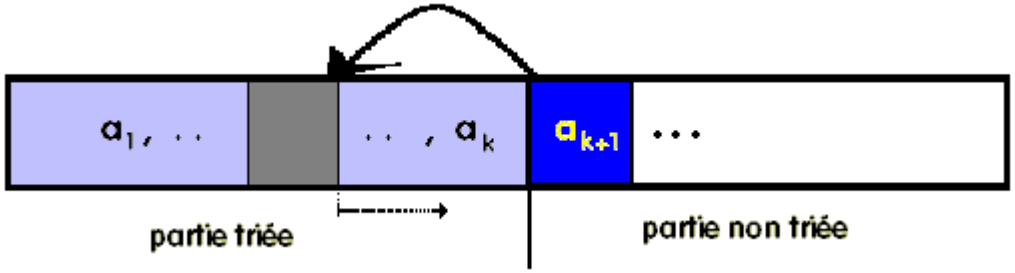
i = 1 / pour j de 2 jusqà 1 faire ***(boucle vide)***

1	2	3	4	5	7	Il ne reste plus d'éléments à comparer !

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par insertion:

- En général un peu plus coûteux qu'un tri par sélection
- Son principe est de parcourir la liste non triée (**a**1, **a**2, ... , **a**n) en la décomposant en deux parties une partie déjà triée et une partie non triée.
- Identique au rangement des cartes : on insère dans le paquet de cartes déjà rangées une nouvelle carte au bon endroit. L'opération de base consiste à prendre l'élément frontière dans la partie non triée, puis à l'insérer à sa place dans la partie triée (place que l'on recherchera séquentiellement), puis à déplacer la frontière d'une position vers la droite. Ces insertions s'effectuent tant qu'il reste un éléments à ranger dans la partie non triée.. L'insertion de l'élément en frontière est effectuée par décalages successifs d'une cellule.



IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par insertion: Algorithme

```
Algorithme Tri_Insertion
local  i , j , n, v ∈  Entiers naturels
Entrée : Tab ∈  Tableau d'Entiers naturels de 0 à n éléments
Sortie : Tab ∈  Tableau d'Entiers naturels de 0 à n éléments
{ dans la cellule de rang 0 se trouve une sentinelle chargée d'éviter de tester dans la boucle
tantque .. faire si l'indice j n'est pas inférieur à 1, elle aura une
valeur inferieure à toute valeur possible de la liste
}
début
 pour i de 2 jusqu à n faire// la partie non encore triée (ai, ai−1, … , an)
    v ← Tab[ i ] ; // l'élément frontière : ai
    j ← i ;        // le rang de l'élément frontière
    Tantque Tab[ j-1 ] >v faire//on travaille sur la partie déjà triée (a1, a2, .. , ai)
          Tab[ j ] ← Tab[ j-1 ] ; // on décale l'élément
          j ← j-1;                // on passe au rang précédent
    FinTant ;
    Tab[ j ] ← v //on recopie ai dans la place libérée
  fpour
Fin Tri_Insertion
```

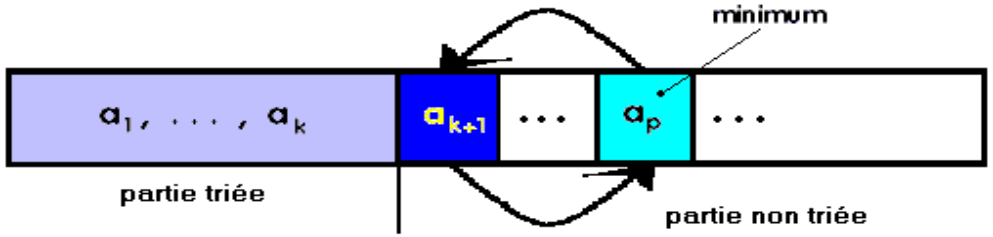
Nombre d'opération = $n(n+1)/2 + 2(n-1) = O(N^2)$

IV. Analyse d'algorithme de tri

Tri par sélection:

- Le principe est de parcourir la partie non-triée de la liste (**a**k+1, **a**k+2, ... , **a**n) en cherchant l'élément minimum, puis en l'échangeant avec l'élément **a**k+1, puis à déplacer la frontière d'une position. Il s'agit d'une récurrence sur les minima successifs. On suppose que l'ordre s'écrit de gauche à droite.
- On recommence l'opération avec la nouvelle sous-suite (**a**k+2, ... , **a**n) , et ainsi de suite jusqu'à ce la dernière soit vide.

si $a_{k+1} > a_p$ alors Echanger $a_p \rightleftarrows a_{k+1}$



IV. Analyse d'algorithme de tri

Tri par sélection: Algorithme

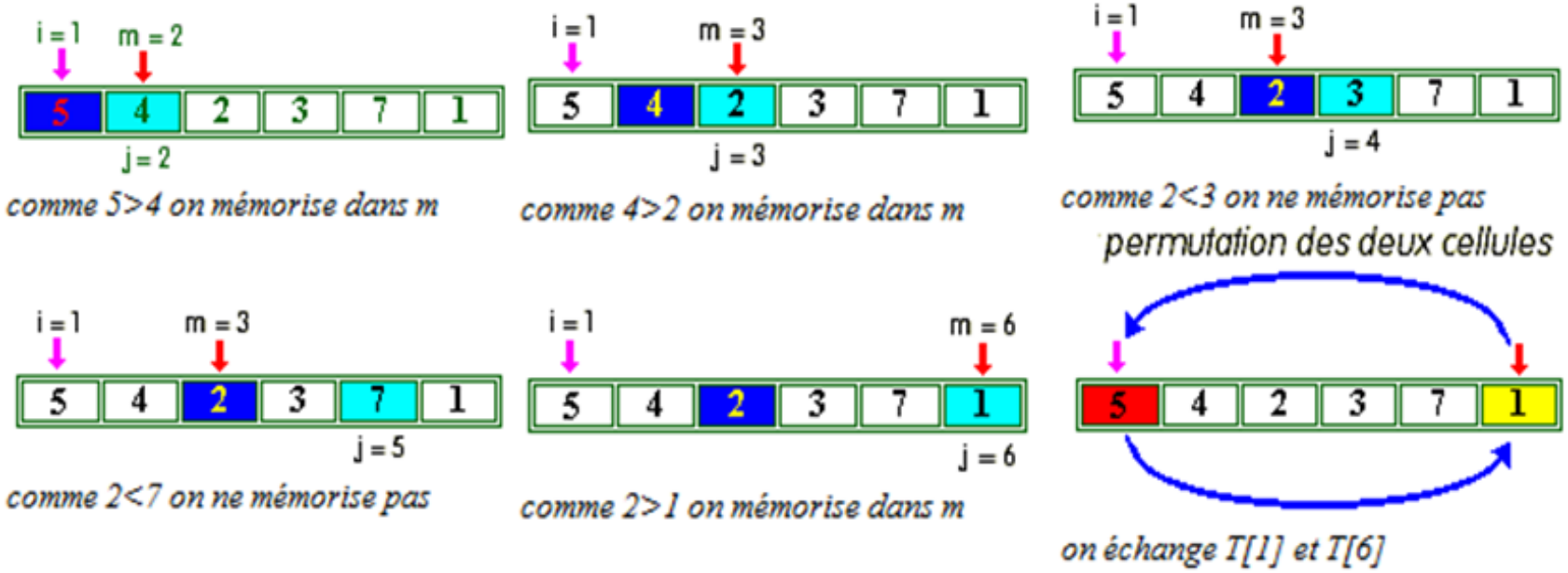
```
Algorithme Tri_Selection
 local:  m, i , j , n, temp ∈  Entiers naturels
 Entrée : Tab ∈  Tableau d'Entiers naturels de 1 à n éléments
 Sortie : Tab ∈  Tableau d'Entiers naturels de 1 à n éléments

début
 pour i de 1 jusqà n-1faire // recommence une sous-suite
  m ← i ; // i est l'indice de l'élément frontière ai = Tab[ i ]
  pour j de i+1 jusqà n faire// (ai+1, a2, … , an)
   si Tab[ j ] <  Tab[ m ] alors // aj est le nouveau minimum partiel
     m ← j ; // indice mémorisé
   Fsi
  fpour;
  temp ← Tab[ m ] ;
  Tab[ m ] ← Tab[ i ] ;
  Tab[ i ]  ← temp //on échange les positions de ai et de aj
 fpour
Fin Tri_Selection
```

Complexité = $O(N^2)$

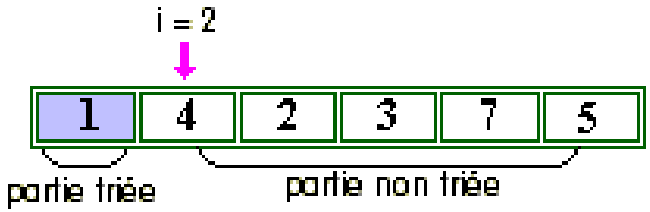
IV. Analyse d'algorithme de tri

Tri par sélection: Exemple



L'algorithme ayant terminé l'échange de T[1] et de T[6], il passe à l'itération externe suivante (i = 2) :

etc....



IV. Analyse d'algorithme de tri

Tri fusion (merge sort):

- C'est un algorithme de tri très utilisé dans la résolution de problèmes courants grâce à simplicité
- L'intérêt de cet algorithme est sa complexité exemplaire et sa stabilité
- Basé sur le principe de fusion de deux ensembles triés

IV. Analyse d'algorithme de tri

Tri fusion (merge sort): *Principe*

- Il consiste à fusionner deux sous-séquences triées en une séquence triée.
- Il exploite directement le principe « Diviser pour Regner » qui repose sur la division d'un problème en ses sous problèmes et en des recombinaisons bien choisies des sous-solutions optimales.
- Le principe de cet algorithme tend à adopter une formulation récursive :
  - On découpe les données à trier en deux parties plus ou moins égales
  - On trie les 2 sous-parties ainsi déterminées
  - On fusionne les deux sous-parties pour retrouver les données de départ

IV. Analyse d'algorithme de tri

Tri fusion (merge sort): *Principe*

- Donc chaque instance de la récursion va faire appel à nouveau au même processus, mais avec une séquence de taille inférieure à trier.
- La terminaison de la récursion est garantie, car les découpages seront tels qu'on aboutira à des sous-parties d'un seul élément; le tri devient alors trivial.
- Une fois les éléments triés indépendamment les uns des autres, on va fusionner (merge) les sous-séquences ensemble jusqu'à obtenir la séquence de départ, triée.

IV. Analyse d'algorithme de tri

Tri fusion (merge sort): *Principe*

- La fusion consiste en des comparaisons successives. Des 2 sous-séquences à fusionner, un seul élément peut-être origine de la nouvelle séquence. La détermination de cet élément s'effectue suivant l'ordre du tri à adopter.
- Une fois que l'ordre est choisi, on peut trouver le chiffre à ajouter à la nouvelle séquence; il est alors retiré de la sous-séquence à laquelle il appartenait. Cette opération est répétée jusqu'à ce que les 2 sous-séquences soient vides.

IV. Analyse d'algorithme de tri

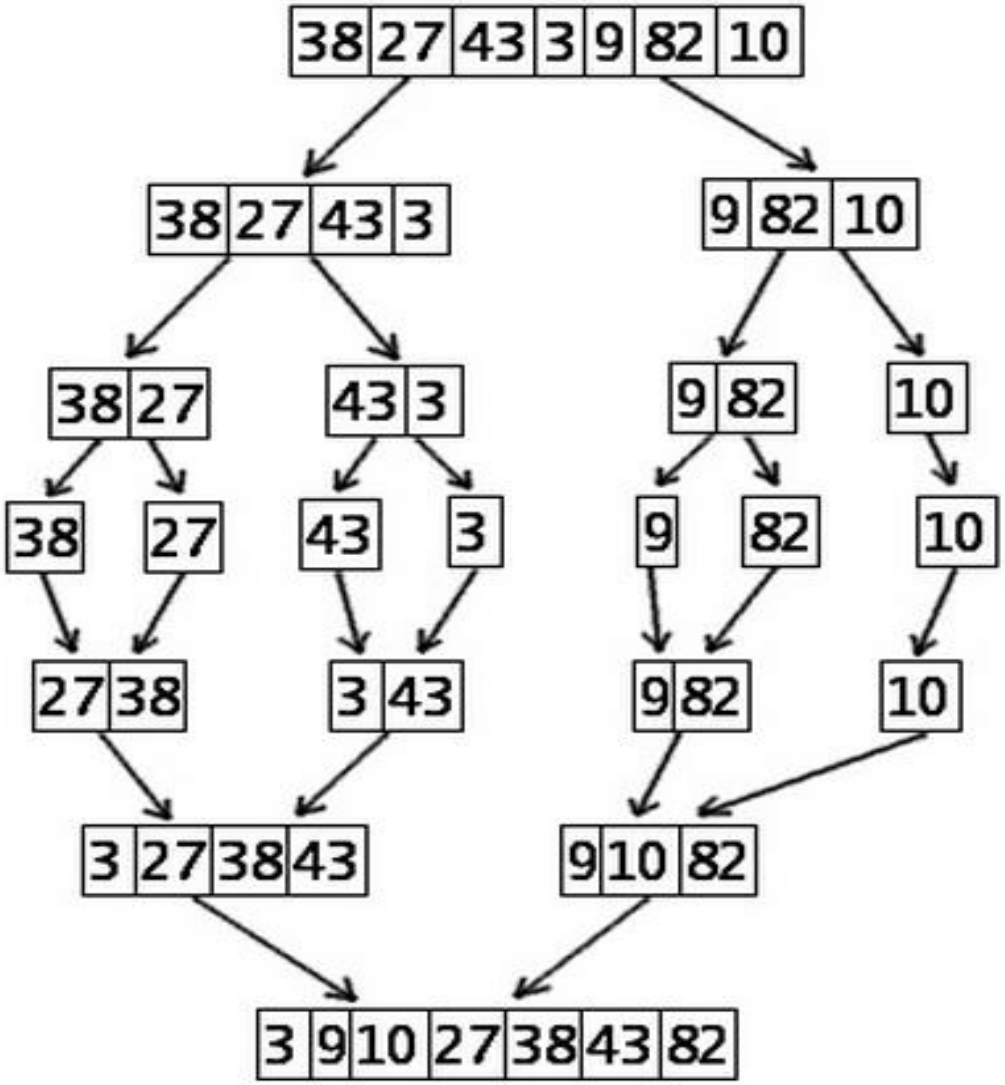
Tri fusion (merge sort):

Étant donné un tableau (ou une liste) de $T[1, \ldots, n]$:

- si $n = 1$, retourner le tableau T !
- sinon :
  - Trier le sous-tableau $T[1 \ldots \frac{n}{2}]$
  - Trier le sous-tableau $T[\frac{n}{2} + 1 \ldots n]$
  - Fusionner ces deux sous-tableaux. . .

IV. Analyse d'algorithme de tri

Tri fusion (merge sort): Exemple



IV. Analyse d'algorithme de tri

Tri rapide:

- C'est le plus performant des tris en table et certainement le plus utilisé. Ce tri a été trouvé par C.A.Hoare.
- Son principe est de parcourir la liste L = (**a**1, **a**2, ... , **a**n) en la divisant systématiquement en deux sous-listes L1 et L2. L'une est telle que tous ses éléments sont inférieurs à tous ceux de l'autre liste et en travaillant séparément sur chacune des deux sous-listes en réappliquant la même division à chacune des deux sous-listes jusqu'à obtenir uniquement des sous-listes à un seul élément.
- C'est un algorithme dichotomique qui divise donc le problème en deux sous-problèmes dont les résultats sont réutilisés par recombinaison, il est donc de complexité **O(n.log(n))**.

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri rapide: Principe 1/3

- Pour partitionner une liste L en deux sous-listes L_1 et L_2 :
  - on choisit une valeur quelconque dans la liste L appelée pivot,
  - La sous-liste L1 va contenir tous les éléments de L inférieure ou égale au pivot,
  - et la sous-liste L2 tous les éléments de L supérieure au pivot.
- Ainsi de proche en proche en subdivisant le problème en deux sous-problèmes, à chaque étape, nous obtenons un pivot bien placé.
- Le processus de partitionnement décrit ci-haut (appelé aussi segmentation) est le point central du tri rapide.
- Une fonction **Partition** va réaliser cette action .Cette fonction est récursive puisqu'on la réapplique sur les deux sous-listes obtenues, le tri rapide devient alors une procédure récursive.

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri rapide: Principe 2/3

L = [4, 23, 3, 42, 2, 14, 45, 18, 38, 16]
prenons comme pivot la dernière valeur pivot = 16

- Nous obtenons par exemple :
  L1 = [4, 3, 2, 14]
  L2 = [23, 45, 18, 38, 42]
- **A cette étape voici l'arrangement de L :**
  L = L1 + pivot + L2 = [**4,, 3, 2,14,16**, **23, 45, 18, 38, 42**]
- En effet, en travaillant sur la table elle-même par réarrangement des valeurs, le pivot **16** est placé au bon endroit directement :

[4<16, 3<16, 2<16, 14<16,16, 23>16, 45>16, 18>16, 38>16, 42>16]

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri rapide: Principe 3/3

- En appliquant la même démarche au deux sous-listes : L1 (pivot=2) et L2 (pivot=42)
  [**4, 14, 3, 2**, **16**, **23, 45, 18, 38, 42**] nous obtenons :
- L11=[ ] liste vide
  L12=[**4, 3, 14**]
  L1=L11 + pivot + L12 = (**2,4, 3, 14**)
- L21=[**23, 38, 18**]
  L22=[**45**]
  L2=L21 + pivot + L22 = (**23, 38, 18, 42, 45**)
- **A cette étape voici le nouvel arrangement de L :**
  L = [(**2,4, 3, 14**), **16**, (**23, 38, 18, 42, 45**)]
  etc...

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri rapide

```
Global :Tab[min..max] tableau d'entier

fonction Partition( G , D : entier ) résultat : entier
Local : i , j , piv , temp : entier
début
    piv ← Tab[D];
    i ← G-1;
    j ← D;
    repeter
      repeter i ← i+1 jusquà Tab[i] >= piv;
      repeter j ← j-1 jusquà Tab[j] <= piv;
      temp ← Tab[i];
      Tab[i] ← Tab[j];
      Tab[j] ← temp
    jusquà j <= i;
    Tab[j] ← Tab[i];
    Tab[i] ← Tab[d];
    Tab[d] ← temp;
    résultat ← i
FinPartition

Algorithme TriRapide( G , D : entier );
Local : i : entier
début
 si D > G alors
   i ← Partition( G , D );
  TriRapide( G , i-1 );
  TriRapide( i+1 , D );
 Fsi
FinTRiRapide
```

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par tas

- Basé sur la structure de Tas
- Un tas est un arbre binaire partiellement ordonné qui vérifie les propriétés suivantes:
  - la différence maximale de profondeur entre deux feuilles est de 1 (*i.e.* toutes les feuilles se trouvent sur la dernière ou sur l'avant-dernière ligne) ;
  - les feuilles de profondeur maximale sont tassées à gauche.
  - chaque nœud est de valeur supérieure (resp. inférieure) à celles de ses deux fils, pour un tri ascendant (resp. descendant).
  - Il en découle que la racine du tas (le premier élément) contient la valeur maximale (resp. minimale) de l'arbre. Le tri est fondé sur cette propriété.

IV. Analyse des algorithmes de tri

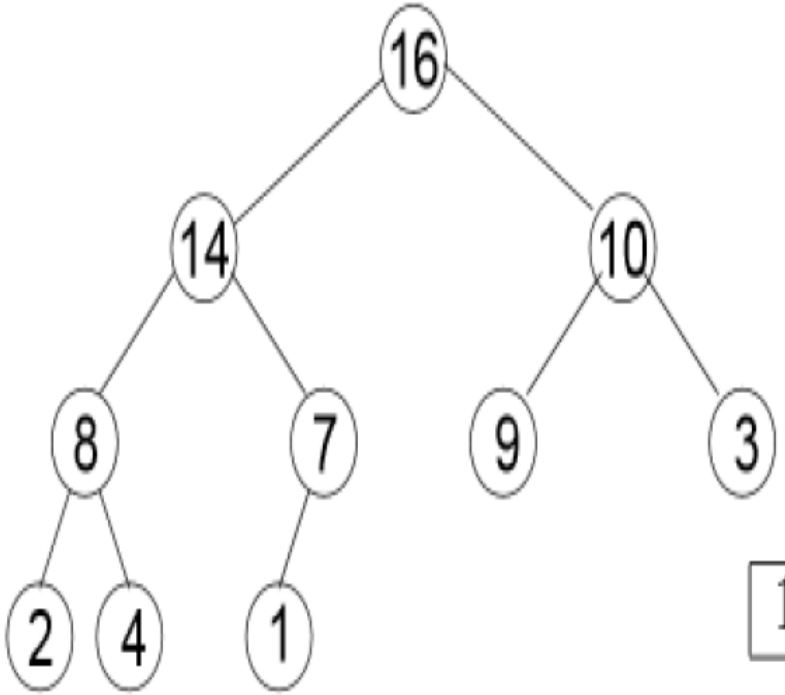
Tri par tas

- Un tas est une structure logique qui peut être modélisé sous forme d'un tableau de dimension N de la manière suivante :
  - Les nœuds de l'arbre seront énumérés niveau par niveau dans le tableau, la racine en premier, puis ses fils, et ainsi de suite avec les sous-arbres gauches puis droits de chaque nœuds.
  - T[1] correspond à la racine du tas.
  - Tout nœud i a son père en i/2 et
    - son fils gauche en 2*i (si il existe, c.-à-d.2i ≤ n), et
    - son fils droit en 2*i + 1 (si 2i + 1 ≤ n).

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par tas

Exemple



16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par tas: Principe

- L'opération de base de ce tri est le *tamisage*, d'un élément, supposé le seul « mal placé » dans un arbre qui est presque un tas.
- Plus précisément, considérons un arbre *A*=*A*[1] dont les deux sous-arbres (*A*[2] et *A*[3]) sont des tas, tandis que la racine est éventuellement plus petite que ses fils.
- L'opération de tamisage consiste à échanger la racine avec le plus grand de ses fils, et ainsi de suite récursivement jusqu'à ce qu'elle soit à sa place.

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par tas: Principe

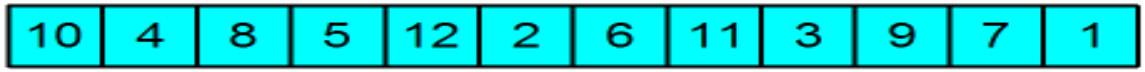
- Pour construire un tas à partir d'un arbre quelconque, on tamise les racines de chaque sous-tas, de bas en haut et de droite à gauche. On commence donc par les sous-arbres « élémentaires » — contenant deux ou trois nœuds, donc situés en bas de l'arbre. La racine de ce tas est donc la valeur maximale du tableau.
- Puis on échange la racine avec le dernier élément du tableau, et on restreint le tas en ne touchant plus au dernier élément, c'est-à-dire à l'ancienne racine ; on a donc ainsi placé la valeur la plus haute en fin de tableau (donc à sa place), et l'on n'y touche plus.

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par tas: Principe

- Puis on tamise la racine pour créer de nouveau un tas, et on répète l'opération sur le tas restreint jusqu'à l'avoir vidé et remplacé par un tableau trié.

Exemple :



IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par tas:

Procédure *construire-tas(n) ;*

début

pour *i := n/2* ***à*** *1 par pas=-1* ***faire*** *(* prendre la partie entière de n/2 *)*

Tamiser (i, n) ;

fait;

Fin.

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par tas:

```
procédure Tamiser (i, j) ;
début imax = 0 ;
si (2*i) <= j (* A[i] n'est pas une feuille *)
        alors si (2*i+1) <= j alors
        si (A[2*i] > A[i] ou A[2*i+1] > A[i]) alors
        si A[2*i] > A[2*i+1] alors imax = 2*i sinon imax = 2*i+1;
                fsi;
         temp = A[i]; A[i] = A[imax]; A[imax] = temp;
        sinon si A[i] < A[2*i] alors imax = 2*i ;
        fsi; fsi; fsi;
        si imax <> 0 alors  Tamiser (imax, j);  fsi;
fin fin ;
```

IV. Analyse des algorithmes de tri

Tri par tas:

```
procédure Tri_Tas(k) ;
Début
        Construire-tas(k);
        Tant que (k > 1)
                Faire  temp := A[1];
                       A[1]:= A[k];
                       A[k]:= temp;
                       Tri_Tas(k-1);
                Fait;
Fin.
```

V. Structures de données avancées

- Pile et File
- Liste
- Graphe
- Arbre
- Dictionnaire
- Index
- Hachage et table de Hachage

V. Structures de données avancées

- ***Pile***
  - Une structure de données mettant en œuvre le principe LIFO : Last In First Out
  - Une pile P peut être implémentée par un tableau, et elle est caractérisée par :
    - Un sommet noté sommet(P) indiquant l'indice de l'élément le plus récemment inséré dans la pile
    - Un caractère spécial, comme $, initialisant la pile
    - Une procédure EMPILER(P,x)
    - Une fonction DEPILER(P)
    - Une fonction booléenne PILE-VIDE(P) retournant VRAI si et seulement si P est vide

V. Structures de données avancées

- ***Pile***

```
fonction PILE-VIDE(P: pile): bouléen
Début Si sommet_P=0  alors retourner VRAI
        sinon retourner FAUX Fsi;
Fin.

Procédure EMPILER(P,x)
Début Si sommet_P=longueur(P)
        alors erreur (débordement positif)
        sinon sommet_P=sommet_P+1; P[sommet_P]=x; fsi;
Fin.

Fonction DEPILER(P): élément
Début Si PILE-VIDE(P)
        alors erreur (débordement négatif)
        sinon x = P[sommet_P] ; sommet_P=sommet_P - 1; fsi;
Fin.
```

V. Structures de données avancées

- ***File***
  - Une structure de données mettant en œuvre le principe FIFO : First In First Out.
  - Une file F peut être implémentée par un tableau, et elle est caractérisée par :
    - Un pointeur tête(F) qui pointe vers la tête de la file (l'élément le plus anciennement inséré)
    - Un pointeur queue(F) qui pointe vers la première place libre, où se fera la prochaine insertion éventuelle d'un élément
    - Initialement : tête(F)=NIL et queue(F)=1

V. Structures de données avancées

- ***File***

- fonction FILE-VIDE(F: file): bouléen

```
Début Si tete_F=NIL  alors retourner VRAI
        sinon retourner FAUX Fsi;
Fin.
```

- Procédure INSERTION(F,x)

```
Début si (tête_F ≠ NIL et queue_F = tête_F)
        alors erreur (débordement positif)
        sinon F[queue_F]=x; queue_F=(queue_F + 1)(modulo n);
                si (tête_F = NIL) alors tête_F=1 fsi; fsi;
Fin.
```

- Fonction DEFILER(P): élément

```
Début si FILE-VIDE(F) alors erreur (débordement négatif)
        sinon temp = F[tête_F]; tête_F = tête_F + 1)(modulo n);
                si (tête_F = queue_F) alors tête_F=NIL ; queue_F =1;
        fsi;        fsi;
retourner temp;
Fin.
```

V. Structures de données avancées

- ***Liste chainée***
- Une liste chaînée est une structure de données dont les éléments sont arrangés linéairement, l'ordre linéaire étant donné par des pointeurs sur les éléments
- Un élément d'une liste chaînée est un enregistrement contenant un champ clé, un champ successeur consistant en un pointeur sur l'élément suivant dans la liste
- Si le champ successeur d'un élément vaut NIL, il s'agit du dernier élément de la liste, appelé aussi queue de la liste
- Un pointeur TETE(L) est associé à une liste chaînée L : il pointe sur le premier élément de la liste
- Si une liste chaînée L est telle que TETE(L)=NIL alors la liste est vide

V. Structures de données avancées

- ***Liste chainée particulière :***
- Liste doublement chainée
- Liste chainée triée
- Liste circulaire (anneau)

V. Structures de données avancées

- ***Liste chainée :***

Algorithme de manipulation des listes simplement chainées

```
RECHERCHE-LISTE(L,k)
Début x=TETE(L);
tant que(x<>NIL et clé(x)!=k)
        faire x=x -> svt; fait;
retourner x;
Fin;
```

```
INSERTION-LISTE_1(L,X)
Début x->svt =TETE(L);
        TETE(L)=x;
Fin;
```

```
INSERTION-LISTE_2(L,X)
Début
Y=tete(L);
Tant que (y->svt <>NIL)
Faire y=y -> svt; fait;
y->svt=x;
Fin;
```

```
INSERTION-LISTE_3(L,X)
Début
Y=tete(L);
Tant que (y->svt <>NIL)et (y.cle < x.cle)
Faire z:= y; y=y -> svt; fait;
z->svt=x;
x->svt=y;
Fin;
```

V. Structures de données avancées

- ***Liste chainée :***

Algorithme de manipulation des listes simplement chainées

```
SUPPRESSION-LISTE_1(L,X)
Début
        Si x=TETE(L) alors TETE(L)=x->svt;
        sinon y=TETE(L);
       tant que (y.cle<>x.cle) et (y->svt <> NIL)
        faire x=y; y=y->svt; fait;
        Y->svt=x->svt;Fsi;
Fin;

SUPPRESSION-LISTE_2(L,k)
Début
Si k<0 ou k> langueur(L) alors erreur
Sinon i=1;y=tete(L); tant que i< k faire faire z=y; y=y->svt; fait;
        z->svt=y->svt;Fsi;
Fin;
```

V. Structures de données avancées

- ***Liste chainée :***

Algorithme de manipulation des listes simplement chainées

Exercice:

Implémenter une liste en utilisant un tableau

Ecrire les algorithmes d'insertion et de suppression dans une liste en prenant en considération tous les cas possible.

V. Structures de données avancées

```
Insertion (x : entier, position : entier) ;
Début
Si vide = nil alors ecrire("débordement  positif ") ;
Sinon z= vide ; vide := vide -> svt ; L[z].val := x ; z->svt := nil ;
        Si tete = nil alors tete = z ;
        Sinon si position = 1 alors tete -> svt := z ; tete := z ;
                Sinon /* insertion en fin de liste si position >
                langueur (L)*/
                k :=1 ; p= tete ; q=tete ;
                Tant que (p->svt <> nil) et (k<position)
                        Faire q := p ; p := p -> svt ; k := k + 1 ;
fait ;
q -> svt := z ; z-> svt := p ; fsi ;
fsi ;fsi ;Fin ;
```

V. Structures de données avancées

Suppression (x : entier, position : entier) : entier ;

Début

Si tete = nil alors ecrire (”débordement négatif “) ;

Sinon si position = 1 alors z := tete ; tete :=tete -> svt ; z -> svt := vide ; vide :=z ;

Sinon p := tete ; q := tete ; k := 1 ;

Tant que (p -> svt <> nil) et (k < position)

Faire q := p ; p := p -> svt ; k := k + 1 ; fait ;

Z := p ; q -> svt := p -> svt ; z -> svt := vide ; vide := z ;

Fsi ;

Fsi ;

Fin ;

V. Structures de données avancées

- ***Graphe :***
- **Graphe orienté :** couple (S,A), S ensemble fini (sommets) et A relation binaire sur S (arcs)
- **Graphe non orienté :** couple (S,A), S ensemble fini (sommets) et A relation binaire sur S (arêtes)

V. Structures de données avancées

- ***Graphe :***

Quelque propriétés sur les graphes

- Arcs : un arc est orienté (couple)
- Arêtes : une arête n'est pas orientée (paire)
- Possibilité d'avoir des boucles (une boucle est un arc reliant un sommet à lui-même) ou pas
- Un arc (u,v) part du sommet u et arrive au sommet v
- Une arête (u,v) est incidente aux sommets u et v
- Degré sortant d'un sommet : nombre d'arcs en partant
- Degré rentrant d'un sommet : nombre d'arcs y arrivant
- Degré= degré sortant + degré entrant
- Degré d'un sommet : nombre d'arêtes qui lui sont incidentes

V. Structures de données avancées

- ***Graphe :***

Quelque propriétés sur les graphes

- Chemin de degré k d'un sommet u à un sommet v :

(u0,u1,…,uk) u=u0 et v=uk

- Chemin élémentaire : plus court chemin
- Chaîne et chaîne élémentaire :suite d'arête reliant deux sommets
- Circuit et circuit élémentaire : chemin fermé
- Cycle et cycle élémentaire : circuit non orienté
- Graphe sans circuit
- Graphe acyclique : graphe ne contenant aucun cycle.

V. Structures de données avancées

- ***Graphe :***

Quelque propriétés sur les graphes

- Graphe fortement connexe : tout sommet est accessible à partir de tout autre sommet (par un chemin)
- Graphe connexe : chaque paire de sommets est reliée par une chaîne
- Composantes fortement connexes d'un graphe : classes d'équivalence de la relation définie comme suit sur l'ensemble des sommets : R(s1,s2) si et seulement si il existe un chemin (resp. chaîne) de s1 vers s2 et un chemin (resp. chaîne) de s2 vers s1.

V. Structures de données avancées

- ***Arbre :***
- G=(S,A) graphe non orienté :
- G arbre
- G connexe et |A|=|S|-1
- G acyclique et |A|=|S|-1
- Deux sommets quelconques sont reliés par une unique chaîne élémentaire

V. Structures de données avancées

Arbre enracinée (rooted tree)

- La racine de l'arbre: un sommet particulier
- La racine impose un sens de parcours de l'arbre
- Pour un arbre enraciné : sommets ou nœuds
- Ancêtre, père, fils, descendant
- L'unique nœud sans père : la racine
- Nœuds sans fils : nœuds externes ou feuilles
- Nœuds avec fils : nœuds internes
- Sous arbre en x : l'arbre composé des descendants de x.
- Degré d'un nœud : nombre de fils
- Profondeur : longueur du chemin entre la racine et le nœud
- Hauteur d'un arbre
- Arbre ordonné

V. Structures de données avancées

Arbre binaire

- De manière récursive ce défini par :
  - Ne contient aucun nœud (arbre vide)
  - Est formé de trois ensembles disjoints de nœuds : la racine ; le sous arbre gauche (arbre binaire) ; le sous arbre droit (arbre binaire)
- Un arbre binaire est plus qu'un arbre ordonné
- Arbre binaire complet : au moins 0 fils, au plus 2 fils
- Arbre n-aire : degré d'un nœud est égal à N.
- Un arbre binaire peut être représenté par une liste doublement chainée

V. Structures de données avancées

Arbre binaire: Parcours

- Par profondeur d'abord
  - Descendre le plus profondément possible dans l'arbre
  - Une fois une feuille atteinte, remonter pour explorer les branches non encore explorées, en commençant par la branche la plus basse
  - Les fils d'un nœud sont parcourus suivant l'ordre défini sur l'arbre
- Par largeur d'abord
  - Visiter tous les nœuds de profondeur i avant de passer à la visite des nœuds de profondeur i+1
  - Utilisation d'une file

V. Structures de données avancées

```
Algorithme Parcours_largeur( Racine : arbre);
Début
A:= racine;
Enfiler(A, F);
Tant que (non vide (F))
Faire
        A:=Defiler(F); Afficher(A.val);
        Si (A->fg <> Nil) alors Enfiler (A->fg, F); fsi;
        Si (A->fd <> Nil) alors Enfiler(A->fd, F); fsi;
Fait;
Fin.
```

V. Structures de données avancées

Arbre binaire: Parcours

- Par profondeur d'abord
  - Préfixé
    - Racine
    - Sous arbre gauche
    - Sous arbre droit
  - Postfixé
    - Sous arbre gauche
    - Sous arbre droit
    - Racine
  - Infixé
    - Sous arbre gauche
    - Racine
    - Sous arbre droit

V. Structures de données avancées

- Algorithme Parcours_Préfixé (Arbre Racine)

```
Début
   A:=Racine; Afficher(A.clé);  Empiler(A,P);
   A:=A->fg;
   Tant que (non Vide(P)) faire
   Tant que (A <> null) Faire Afficher(A.clé);  Empiler(A,P);
                                          A:=A->fg;
                              Fait;
      A:=Depiler(P); /* cas des feuilles*/
      tant que ((tete(P)->fd = A) et non_vide(P))
                              faire A:=Depiler(P); fait;
      Si (non_vide(P)) alors A := Tete(P)->fd; /* sommet frères ou
                                                  bien un encêtre fd*/
                     Sinon A:= null;
      Fsi;
      Fait;
   Fait;
Fin.
```

V. Structures de données avancées

- Algorithme Parcours_Postfixé (Arbre Racine)

```
Début
   A:=Racine;  Empiler(A,P);
   A:=A->fg;
   Tant que (non Vide(P)) faire
   Tant que (A <> null) Faire Empiler(A,P);
                                        A:=A->fg;
                              Fait;
      A:=Depiler(P); Afficher(A.clé);  /* cas des feuilles*/
      tant que ((tete(P)->fd = A) et non_vide(P))
                              faire A:=Depiler(P); Afficher(A.clé); fait;
      Si (non_vide(P)) alors A := Tete(P)->fd; /* sommet frères ou
                                                  bien un encêtre fd*/
                     Sinon A:= null;
      Fsi;
      Fait;
   Fait;
Fin.
```

V. Structures de données avancées

- Algorithme Parcours_Infixé (Arbre Racine)

```
Début
   A:=Racine; Afficher(A.clé);  Empiler(A,P);
   A:=A->fg;
   Tant que (non Vide(P)) faire
   Tant que (A <> null) Faire Afficher(A.clé);  Empiler(A,P);
                                        A:=A->fg;
                              Fait;
      A:=Depiler(P); Afficher(A.clé); /* cas des feuilles*/
      tant que ((tete(P)->fd = A) et non_vide(P))
                              faire A:=Depiler(P); fait;
      Si (non_vide(P)) alors A := Tete(P)->fd; /* sommet frères ou
                                                  bien un encêtre fd*/
                              Afficher(tete(P).val);
                    Sinon A:= null;
      Fsi;
      Fait;  Fait;
Fin.
```

V. Structures de données avancées

Parcours d'arbre: Généralisation des algorithmes de parcours pour un arbre quelconque

```
Algorithme Parcours_largeur( Racine : arbre);
Début
A:= racine;
Enfiler(A, F); Afficher (A.val);
Tant que (non vide (F))
Faire
        A:=Defiler(F); Afficher(A.val);
        Tant que (A->fils <> Nil)
                faire
                        B:= Defiler(A->fils); Enfiler (B, F);
                Fait;
Fait;
Fin.
```

V. Structures de données avancées

Parcours d'arbre: Généralisation des algorithmes de parcours pour un arbre quelconque

- Algorithme Parcours_Préfixé (Arbre Racine)

```
Début
   A:=Racine; Afficher(A.clé);  Empiler(A,P);
   A:=Defiler(A->fils);
   Tant que (non Vide(P))
   Faire  Tant que (A <> null) Faire Afficher(A.clé);  Empiler(A,P);
                                     A:=Defiler(A->fils); Fait;
          A:=Depiler(P); /* cas des feuilles*/
          tant que ((tete(P)->fils = Nil) et non_vide(P))
                                     faire A:=Depiler(P); fait;
          Si (non_vide(P)) alors A := Defiler(tete(P)->fils));
                                Sinon A:= null; Fsi;
          Fait;
   Fait; Fin.
```

V. Structures de données avancées

Arbre binaire de recherche

- *Définition* : Un arbre binaire de recherche est un arbre binaire tel que pour tout nœud x :
  - Tous les nœuds y du sous arbre gauche de x vérifient clef(y)<clef(x)
  - Tous les nœuds y du sous arbre droit de x vérifient clef(y)>clef(x)
- *Propriété* : le parcours (en profondeur d'abord) infixé d'un arbre binaire de recherche permet l'affichage des clés des nœuds par ordre croissant

```
Infixe(A)
début
        Si A≠NIL alors Infixe(A->fg);
                       Afficher(A.clef);
                       Infixe(A->fd);
Fsi; FIN;
```

V. Structures de données avancées

Arbre binaire de recherche

Recherche d'un élément :

- la fonction rechercher(A,k) ci-dessous retourne le pointeur sur un nœud dont la clé est k, si un tel nœud existe
- elle retourne le pointeur NIL sinon

```
rechercher(A,k)
Début
si (A=NIL ou A.clef=k) alors retourner A
sinon si (k<A.clef) alors rechercher(A->fg,k)
                          sinon rechercher(A->fd,k)
                          Fsi;
Fsi;
Fin;
```

V. Structures de données avancées

Arbre binaire de recherche

Insertion d'un élément :

- la fonction insertion(A,k) insère un nœud de clé k dans l'arbre dont la racine est pointée par A.

```
Insertion(A,k)
Début
z.Clef = k;  z->fg = NIL;  z->fd = NIL;
x=A;  père_de_x = NIL;
tant que (x≠NIL) faire père_de_x=x;
                              si (k<x.clef) alors x=x->fd;
                                            sinon x=x->fg fsi;
si (père_de_x=NIL) alors A=z;
sinon si (k<père_de_x.clef) alors père_de_x->fg = z;
          sinon père_de_x->fd = z; Fsi;
Fin.
```

V. Structures de données avancées

Index et Dictionnaire

- Index et dictionnaire sont des structures de données pour représenter un ensemble de mots et rechercher l'appartenance ou non d'un mot à l'ensemble.
- La différence fondamentale entre ces deux structures c'est la données conservée, la taille de la structure et la complexité des algorithmes pour les opérations de manipulation.

V. Structures de données avancées

Dictionnaire

- Un dictionnaire est un ensemble de mots qui supporte uniquement les opérations suivantes : Rechercher un mot, Insérer un mot, Supprimer un mot
- L'opération de recherche est considérée comme la plus importante. C'est l'unique opération si le dictionnaire est statique, s'il est dynamique les opérations de consultations sont généralement très supérieurs au nombre d'ajouts et de suppression de mots, d'où son importance.
- A tout ensemble de mots fini E = $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, on associe une structure Dictionnaire(E) qui, pour un mot M donné, vérifie son appartenance au dictionnaire, retourne sa position s'il existe et (-1) ou (0) sinon.

V. Structures de données avancées

Index

- Un index est une structure permettant de représenter les occurrences (positions) d'un ensemble de mot d'un texte ou d'un ensemble de textes.
- Rechercher un mot dans le texte consiste à retrouver, soit sa première occurrence, soit toutes les occurrences, soit une occurrence à partir d'une position donnée du texte, soit dans un intervalle de position.
- L'index est dynamique si on peut ajouter de nouveaux mots à l'index actuel.
- Les opérations de base dans un dictionnaire sont généralisés dans un index.
- Elles se basent aussi sur les techniques de hachage pour une implémentation plus efficace

V. Structures de données avancées

Index

- Soit $E = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ un ensemble de n textes. On définit l'index de E par l'ensemble suivant :
  - Index (E) = {(m, p, i) | m est un mot ou un facteur dans un moins un texte (T_i, i = 1, … , n) et p une position de m dans un $T_i \in E$
- Donc si $E = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ est un ensemble de n textes, l'index de ces n textes est un ensemble de mots, tel que chaque mot a une occurrence dans au moins un texte et p est la position de cette occurrence.

V. Structures de données avancées

Index

- Opération sur les index
  - ***La recherche:*** trouver toutes les positions d'un mot dans un texte
  - ***La mise à jour:*** Ajouter ou supprimer un texte à l'ensemble des textes
    - Dans un index statique cela revient à réindexer (reconstruire un nouvel index) après la mise à jour
    - Dans un index dynamique (incrémental)

V. Structures de données avancées

Le hachage

- Une table de hachage est une structure qui permet d'implémenter un dictionnaire.
  - Soit T une table de hachage (dictionnaire) et x un mot de T. Une table de hachage permet d'associer une clé d'accès *f(x)* à chaque élément x de T
- La recherche d'une clé dans T est au O(n), n étant le nombre d'entrées dans la table T, mais en pratique on peut arriver à des algorithmes en O(1) pour un élément qui existe dans la table
- La table de hachage généralise la notion de tableau classique. L'accès direct à un élément i du tableau se fait en O(1). Cette généralisation est rendu possible grâce à la notion de clé

V. Structures de données avancées

Le hachage

- La clé ou la position d'un élément dans la table T, se calcule à l'aide d'une fonction f, dite fonction de hachage.
- Cette fonction prend en entrée un élément x de T et fournit en sortie un entier dans un intervalle donné.
- La fonction f est construite de manière à ce que les entiers qu'elle fournit soient uniformément distribués dans cet intervalle. Ces entiers sont les indices du tableau T.
- Les tables de hachage sont très utiles lorsque le nombre de données effectivement stockées et très petit par rapport au nombre de données possibles

V. Structures de données avancées

Le hachage

- ***Exemple :*** Soit T le tableau suivant :

7	5	4	6	1	8	2	3

- La recherche dans ce tableau est en O(n). Mais si on constate que tous les T[i] <= 8, on peut obtenir une recherche en O(1) avec le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8

V. Structures de données avancées

Le hachage

- ***Exemple :*** (suite)

Mais si n est grand et le nombre de clés présentés dans T est m avec m << n, on ne peut plus adopter cette solution, on utilise les tables de hachage.

C'est le cas d'un dictionnaire de la langue. L'alphabet est ∑= {a, b, c, d, …, y, z}, |∑| = 26, le nombre de mots possibles obtenus par combinaisons et permutations des caractères est très grand par rapport au nombre réel des mots d'un dictionnaire. L'arrangement de r lettres parmi 26, donne A^r_{26} mots possible, . Si r tend vers 26 (le mot le plus long), ce nombre tend vers 26! mots possibles.

V. Structures de données avancées

Le hachage

- On dit qu'il y'a collision si deux éléments différents x_1 et x_2 de T peuvent avoir la même clé , $f(x_1) = f(x_2)$
  - Exemple : Fonction de hachage = mod(n).
- Une bonne fonction de hachage doit minimiser le nombre de collisions
- Un algorithme complet de hachage consiste en une fonction de hachage et une méthode de résolution des collisions
- Il existe deux grandes classes distinctes de méthodes de résolution de collisions

V. Structures de données avancées

Le hachage

- ***Méthode de résolution des collisions :***
  - Hachage par chaînage : En cas de collisions, tous les éléments accessibles par la même clés seront chaînés entre eux pour faciliter d'accès et les opérations de mise à jour.
  - Adressage ouvert : Dans cette méthode, tous les éléments seront conservés dans la table de hachage elle-même. Chaque entrée de la table contient soit une clé, soit NUL. Si k est une clé, on vérifie si f(k) est dans la table ou non, si on ne le trouve pas on calcule un nouvel indice à partir de cette clé (re-hache) jusqu'à trouver la clé ou NUL si l'élément n'appartient pas à la table. Dans ce type de hachage, la table peut se remplir entièrement et on ne peut plus insérer une nouvelle clé

V. Structures de données avancées

Le hachage

- Type de hachage :
  - Statique : table de taille fixe
  - Dynamique : extension du hachage statique pour s'adapter à des tables de tailles croissantes ou décroissantes
  - Parfait : taux de collision = 0
  - Table de hachage distribué (DHT): identifier et retrouver une information dans un système réparti, comme les réseaux P2P.

VI. Stratégie de résolution des problèmes

1. ***Approche par force brute:***
   - Résoudre directement le problème, à partir de sa définition ou par une recherche exhaustive
2. ***Diviser pour régner:***
   - Diviser le problème à résoudre en un certain nombre de sous-problèmes (plus petits)
   - Régner sur les sous-problèmes en les résolvant récursivement :
     - Si un sous-problème est élémentaire (indécomposable), le résoudre directement
     - Sinon, le diviser à son tour en sous-problèmes
     - Combiner les solutions des sous-problèmes pour construire une solution du problème initial

VI. Stratégie de résolution des problèmes

3. ***Programmation dynamique:***
   - Obtenir la solution optimale à un problème en combinant des solutions optimales à des sous-problèmes similaires plus petits et se chevauchant
4. ***Algorithmes gloutons:***
   - Construire la solution incrémentalement, en optimisant de manière aveugle un critère local

VII. Les classes de problèmes

Type de problèmes

Un problème est étroitement lié à la question posée dans sa définition. Selon la forme de la question posée, il existe différents types de problèmes selon le degré de leur difficulté :

- Problème de décision : Réponse 'oui' ou 'non'
- Problème de recherche de solution : Trouver une ou plusieurs solution possible
- Problème d'optimisation : calcul de la solution approchée
- Problèmes de dénombrement de solution : Déterminer le nombre de solutions du problème sans toutefois les rechercher

VII. Les classes de problèmes

Les classes de problèmes

Définition 1:

Un algorithme est dit en temps polynômial, si pour tout n, n étant la taille des données, l'algorithme s'exécute en temps borné par un polynôme $f(n) = c*n^k$ opérations élémentaires.

Définition 2:

On dit qu'un problème est polynômial si est seulement si il existe un algorithme polynomiale pour le résoudre.

Définition 3:

Un algorithme est dit ***de résolution*** s'il permet de construire la solution au problème, et il est dit ***de validation*** s'il permet de vérifier si une solution donnée répond au problème.

VII. Les classes de problèmes

Les classes de problèmes

Définition 4: Réduction polynomiale:

Un problème P1 peut être ramené ou réduit à un problème P2 si une instance quelconque de P1 peut être traduite comme une instance de P2 et la solution de P2 sera aussi solution de P1. la fonction de traduction ou de transformation doit être polynomiale (De complexité polynomiale).

La relation de réductibilité est réflexive et transitive

La réduction polynomiale de P1 en P2 est noté :

$$P1 \leq P2$$

VII. Les classes de problèmes

Les classes de problèmes

Quelle est la particularité d'un algorithme polynômial par rapport à un algorithme exponentiel ?

VII. Les classes de problèmes

La classe P

Un problème est de classe P s'il existe un algorithme ***polynomiale déterministe*** pour le résoudre.

La classe NP

Un algorithme est de classe NP si et seulement si, il existe un algorithme de validation ***non déterministe*** et qui s'exécute en un temps ***polynomiale***. Ainsi, la classe NP contient l'ensemble des problèmes dont la vérification est polynomial mais dont la résolution ne l'est pas obligatoirement.

Les problèmes NP-Complet

On dit qu'un problème A est NP-Complet si et seulement si:

1. A appartient à la classe NP
2. $\forall B \in NP, B \leq A$.

VII. Les classes de problèmes

Les problèmes NP-Complet

On dit qu'un problème A est NP-Complet si et seulement si:

1. A appartient à la classe NP
2. $\exists B \in NP - Complet, B \leq A$.

Explication : B est NP-Complet $\Rightarrow \forall X \in NP, X \leq B$

Donc si on arrive à trouver un problème déjà démontrer NP-Complet et qu'on puisse le réduire en notre problème A, on aura démontrer par transitivité que tous les problèmes NP peuvent être réduit en le problème A. Donc, si :

$$\exists B \in NP - Complet, B \leq A \Rightarrow \forall X \in NP, X \leq B \leq A$$

VII. Les classes de problèmes

- Quelques problèmes NP-complets
  - SAT : le père des problèmes NP-complets (le tout premier à avoir été montré NP-complet par Stephen COOK en 1971)
  - 3-SAT : Satisfiabilité d'une conjonction de clauses dont chaque clause est composée d'exactement trois littéraux
  - CYCLE HAMILTONIEN : Existence dans un graphe d'un cycle hamiltonien
  - VOYAGEUR DE COMMERCE : Existence dans un graphe pondéré d'un cycle hamiltonien de coût minimal
  - CLIQUE : Existence dans un graphe d'une clique (sous-graphe complet) de taille k
  - 3-COLORIAGE D'UN GRAPHE : peut-on colorier les sommets d'un graphe avec trois couleurs de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur ?
  - PARTITION : Peut-on partitionner un ensemble d'entiers en deux sous-ensembles de même somme ?

V.

La Récursivité

- On appelle récursive toute fonction ou procédure qui s'appelle elle même.
- Deux types de récursivité :
  - Directe: Les appels se font à l'intérieurs même de la fonction
  - Indirecte : La fonction principale appelle une autre fonction et cette dernière rappelle la fonction principale avec d'autres paramètres

V. La Récursivité

Lorsque le temps de calcul d'un algorithme en fonction de la taille du problème à traiter est exprimé par une relation de récurrence (situation naturelle pour les algorithmes récursifs). Il existe quatre approches pratiques :

- Méthode par développement itératif de la récurrence
- Méthode par détermination de l'arbre des coûts
- Méthode par substitution et récurrence mathématique
- Méthode générale pour des récurrences de la forme $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$

V. La Récursivité

- **Par développement itératif de la récurrence**

itérer la récurrence par valeurs croissantes, exprimer chaque résultat par une somme de termes fonctions de la taille du problème et des conditions initiales, et dégager progressivement une forme générale.

Exemple:

$$T(n=1) = a$$
$$T(n=2^{p>0}) = b + c\,n + 2\,T(n/2)$$

V. La Récursivité

- **Par développement itératif de la récurrence**

Exemple: $T(n=1) = a$

$$T(n=2^{p>0}) = b + c\,n + 2\,T(n/2)$$

$$T(n=2=2^{p=1}) = b + 2\,c + 2\,a$$

$$T(n=4=2^{p=2}) = b + 4\,c + 2\,T(2) = b(1+2) + 2\times 4c + 4\,a$$

$$T(n=8=2^{p=3}) = b + 8\,c + 2\,T(4) = b(1+2+4) + 3\times 8c + 8\,a$$

…

$$T(n=2^{p>0}) = b\sum_{i=0}^{p-1} 2^i + p\,n\,c + n\,a$$

$$= b\,(2^p - 1) + p\,n\,c + n\,a$$

$$= b\,(n-1) + lg(n)\,n\,c + n\,a$$

$$= \theta(n\,log(n))$$

V. La Récursivité

- **Par Détermination de l'arbre des coûts**

développer la récurrence en un arbre dont les nœuds représentent les coûts à chaque étape, puis, par niveau d'abord puis globalement pour tout l'arbre, sommer et borner les coûts.

- Cette méthode s'avère pratique, notamment, quand la récurrence décrit le temps d'exécution d'un algorithme de type « *diviser pour régner* ».

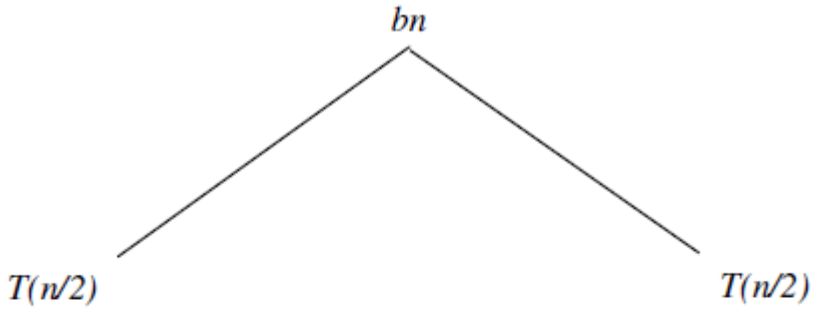
Exemple:

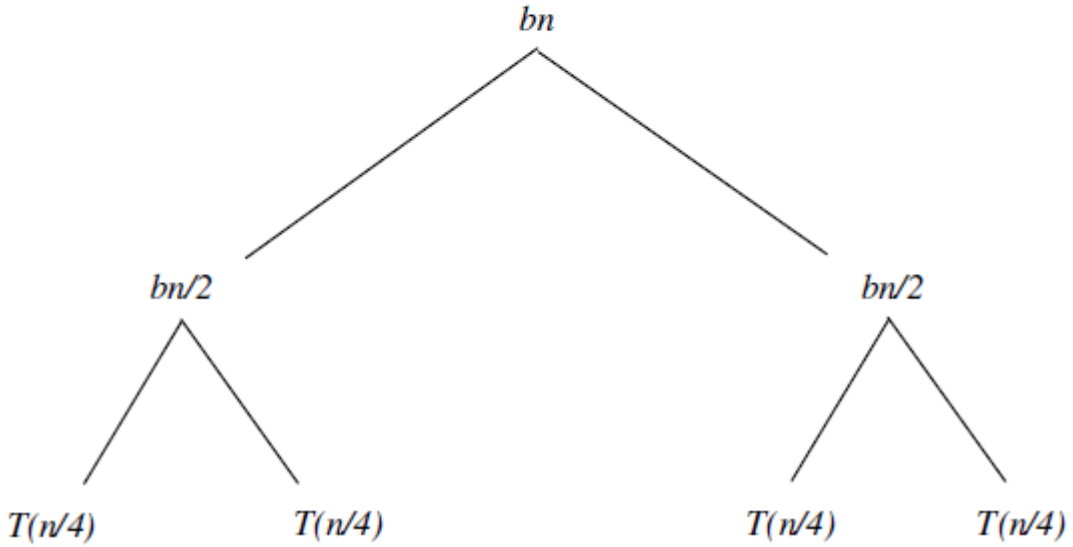
$T(n=1) = a$

$T(n>1) = 2\,T(n/2) + bn$

La Récursivité

- **Par Détermination de l'arbre des coûts**





V. La Récursivité

- **Par Détermination de l'arbre des coûts**