

Série 4

Solutions des exercices

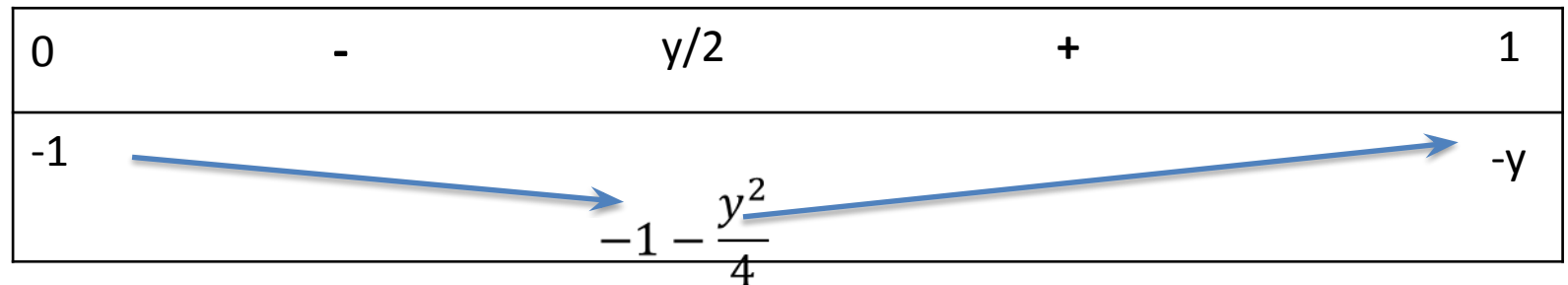
Solutions

Exercice 1.

Le joueur 1 possède une stratégie dominante si et seulement si

$\exists a \in [0,1]$ tel $g(a, y) \geq g(x, y) \quad \forall x \in [0,1], \forall y \in [0,1] \Rightarrow$
la fonction $g_y(x)$ admet un maximum sur $[0,1]$,

On étudie la fonction $g_y(x)$ donc on calcule $\frac{dg_y}{dx} = 2x - y = 0$ si $x = \frac{y}{2}$



$x = 1$ est un maximum car $g(1, y) \geq g(x, y)$, donc la stratégie $x = 1$ est une stratégie dominante.

Solutions

Pour le joueur 2 cela revient à chercher une stratégie b du joueur 2 tel que $g(x, b) \leq g(x, y)$ donc cela revient à étudier la fonction $g_x(y)$,

$$\frac{dg_x}{dy} = -x \leq 0 \text{ donc décroissante c'est à dire le minimum est atteint en } 1$$

$\Rightarrow g(x, 1) \leq g(x, y)$ donc la stratégie $y=1$ est dominante pour le joueur 2 donc le profil $(1,1)$ est une issue du jeu d'après le théorème vu en cours c'est aussi un équilibre en stratégies prudentes.

Exercice 2. (résolu en cours),

Exercice 3. comme le joueur 1 dispose seulement de deux stratégies donc on essaiera de calculer la stratégie prudente du joueur 1 c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{b \in B} f(\sigma_1, b) &= \max_{p \in [0,1]} \min(1 - p, 2p, 2 - p) = \max_{p \in [0,1]} \min(1 - p, 2p) \\ &= \max_{p \in [0,1]} \begin{cases} 2p \text{ si } p \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 1 - p \text{ si } p \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases} = \frac{2}{3} \text{ atteint en} \end{aligned}$$

$p = \frac{1}{3}$ donc $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ est la stratégie prudente du joueur 1.

Solutions

On vérifie le support de la stratégie prudente σ_2 du joueur 2 grâce au fait que le gain dans le support est invariant face à la stratégie σ_1 , c'est-à-dire

$$f(\sigma_1, b_1) = f(\sigma_1, b_2) = f(\sigma_1, b_3)$$

Si on suppose que les trois stratégies du joueur 2 sont dans le support de la stratégie prudente on obtient parés calcul : $f(\sigma_1, b_1) = \frac{2}{3}$; $f(\sigma_1, b_2) = \frac{2}{3}$;

$$f(\sigma_1, b_3) = \frac{5}{3} \text{ donc la stratégie } b_3 \text{ est hors support alors } \sigma_2 = (q, 1 - q, 0)$$

par invariance au support du joueur 1 on détermine q $f(a_1, \sigma_2) = f(a_2, \sigma_2)$

$$\Rightarrow 2(1 - q) = q \Rightarrow q = 2/3 \text{ donc la stratégie prudente du joueur 2 est}$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

Solutions

Exercice 4. Ce jeu admet un point selle si et seulement si :

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

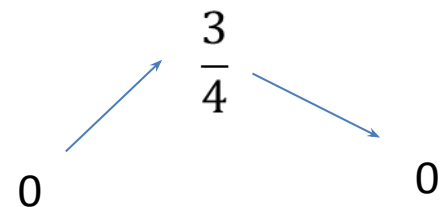
Car l'ensemble des stratégies $[0,1] \times [0,1]$ est un ensemble compact(borné et fermé) donc on peut appliquer le théorème vu en cours.

On calcule $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} (1 - (x - y)^2)$

On calcule alors la dérivé partiel par rapport $\frac{df_x}{dy} = 2(x - y)$ d'où la tableau de variation :

0	+	x	-	1
$1-x^2$	↗		↘	
		1		
				$1-(x-1)^2$

$$\min_{y \in Y} (1 - (x - y)^2) = \begin{cases} 1 - (x - 1)^2 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x^2 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

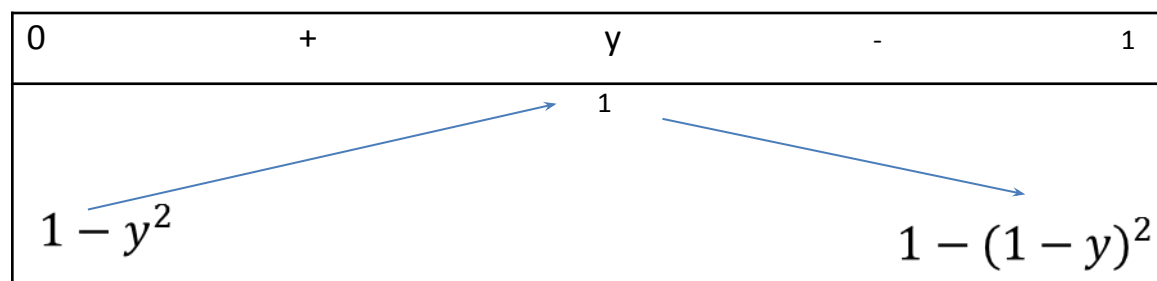


Solutions

$$\bullet \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} (1 - (x - y)^2) = \frac{3}{4}$$

on calcule de même $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} (1 - (x - y)^2)$

On doit étudier alors la fonction $f_y(x)$ $\frac{df_y}{dx} = -2(x - y)$



$$\max_{x \in X} (1 - (x - y)^2) = 1 \Rightarrow \min_{y \in Y} \max_{x \in X} (1 - (x - y)^2) = 1$$

Donc le jeu n'admet pas de valeur ni de points selles.

Solutions

Exercice 5. (à remettre le 28/05 par email)

Exercice 6. 1) on suppose la stratégie 3 du joueur 2 est dominée par une stratégie mixte combinaison des stratégies pures 1 et 2 alors cela entraîne :

$$\exists p \in]0, 1[\text{ tel } \sigma = py_1 + (1-p)y_2 \text{ et } f(x, \sigma) \leq f(x, y_3) \quad \forall x \in \{x_1, x_2\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p + 3(1-p) \leq 0 \\ 2p + (1-p) \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2p + 3 \leq 0 \text{ (équation impossible)} \\ p + 1 \leq 4 \end{cases}$$

2) De même cela implique alors

$$\begin{cases} -2p + 3 \leq a \\ p + 1 \leq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq \frac{3-a}{2} \\ p \leq b-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-a}{2} \leq 1 \\ b-1 \geq 0 \\ b-1 \geq \frac{3-a}{2} \end{cases} \Rightarrow b \geq 1 \text{ et } a \geq 1 \text{ et } b \geq \frac{5-a}{2}$$