Faculté d'Electronique er d'Informatique
Département d'Informatique
MASTER 1: MIV — Test N°=1 — USTHB : 04/16

EXERCICE 1: **1)** Donner la définition de l'inertie.

2) Comment peut-on la calculer ?.

3) Que signifie une inertie nulle ?.

EXERCICE 2:

I) Soit A une matrice de la forme: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}; a \in R.$

1) Vérifier que $\lambda_1 = 1 - a$ est une valeur propre de la matrice A.
2) En déduire les autres valeurs propres de A.

II) On considère la matrice de données X de type (11, 3) :

$$X = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 & 9 & 7 & 8 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 8 & 9 & 7 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

1) Donner le nuage des points $N(I)$.
2) Calculer les écarts-types des variables.
3) Déterminer la matrice des variances-covariances V.
4) Donner l'expression et le type de la matrice des corrélations.
5) Quelles différences ya-t-il entre une ACP normée et centrée ?.
6) Après calculs, nous trouvons : $R = \begin{pmatrix} 1 & 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 1 & 0.75 \\ 0.75 & 0.75 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Donner l'inertie totale.
   b) Donner les valeurs propres de R.
   c) Calculer les pourcentages d'inerties. Déterminer le meilleur axe principal qui ajuste au mieux le nuage des individus.
   d) Calculer les contributions des individus X_2 *et* X_{10} à l'inertie du premier axe. Commenter les résultats obtenus.
   e) Soit $X_0 = (8,2,1)$ un nouveau individu. Déterminer les coordonnées de cet individu sur le premier axe principal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

$P(x) = \det(A - Id\,x)$

$$P(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1-x & a & a \\ a & 1-x & a \\ a & a & 1-x \end{vmatrix} \end{array}$$

$$P(x) = (1-x)\left[(1-x)^2 - a^2\right] - a\left[a(1-x) - a^2\right] + a\left[a^2 - a(1-x)\right]$$

$$P(x) = (1-x)^3 - a^2(1-x) + a\left[a^2 - a(1-x) - a(1-x) + a^2\right]$$

$$P(x) = (1-x)^3 - a^2(1-x) + a\left(2a^2 - 2a(1-x)\right)$$

$$P(x) = (1-x)^3 - a^2(1-x) - 2a^2(1-x) + 2a^3$$

$$P(x) = (1-x)^3 - 3a^2(1-x) + 2a^3 \quad \ldots \text{①}$$

: changement de variable :

posant $y = 1 - x \Rightarrow \boxed{x = 1 - y}$

$\Rightarrow P(x) = y^3 - 3a^2 y + 2a^3 \quad \ldots \text{②}$

on a : $\lambda_1 = 1 - a$ est une racine de 1

$\Rightarrow y_0 = 1 - (1-a) \Rightarrow \boxed{y_0 = a}$ est la racine de ②

$\Rightarrow (y-a)(Ay^2 + By + C) = y^3 - 3a^2y + 2a^3$

$Ay^3 + By^2 + Cy - Aay^2 - Bay - Ca =$ ①

$Ay^3 + (B - Aa)y^2 + (C - Ba)y - Ca = y^3 - 3a^2y + 2a^3$

$$\begin{cases} \boxed{A = 1} \\ B - Aa = 0 \Rightarrow B - a = 0 \Rightarrow \boxed{B = a} \\ C - Ba = -3a^2 \Rightarrow C - a^2 = -3a^2 \Rightarrow \boxed{C = -2a^2} \\ -Ca = 2a^3 \Rightarrow -(-2a^2)a = 2a^3 \Rightarrow 2a^3 = 2a^3 \end{cases}$$

$\Rightarrow (y-a)(y^2 + ay - 2a^2) = y^3 + \cancel{ay^2} - 2a^2y - \cancel{ay^2} - a^2y + 2a^3$

$\Rightarrow (y-a)(y^2 + ay - 2a^2) = y^3 - 3a^2y + 2a^3$

d'où : $(y-a)(y^2 + ay - 2a^2) = 0$

$$\begin{cases} y - a = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 - a \\ \text{ou} \\ y^2 + ay - 2a^2 = 0 \end{cases}$$

$D = a^2 - 4(1)(-2a^2)$

$D = a^2 + 8a^2$

$D = 9a^2 \Rightarrow \sqrt{D} = 3a$

$y_1 = \dfrac{-a+3a}{2}$; $y_2 = \dfrac{-a-3a}{2}$

$y_1 = a$; $y_2 = -2a$ / $x = 1 - y$

$\Rightarrow \boxed{\cancel{x}_2 = 1 - a}$; $\boxed{\lambda_3 = 1 + 2a}$

Verification :

$(y-a)(y-a)(y+2a) = (y+2a)(y-a)^2$

$= (y+2a)(y^2+a^2-2ay)$

$= y^3 + a^2y - \cancel{2ay^2} + \cancel{2ay^2} + 2a^3 - 4a^2y$

$= y^3 - 3a^2y + 2a^3 \equiv 2$

Remarque :

Pour moi ce que je viens de faire est un calcule et non pas une déduction

XD Pichoux

$$\Delta = (a+2)^2 - 4(1-2a^2+a)$$
$$= a^2 + 4 + 4a - 4 + 8a^2 - 4a = 9a^2$$
$$\lambda_2 = \frac{a+2+3a}{2} = 1+2a$$
$$\lambda_3 = \frac{a+2-3a}{2} = 1-a$$

20

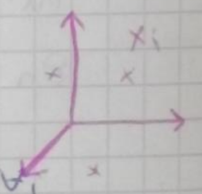
D'ou les val. propres de A sont
$\lambda_1 = 1-a = \lambda_3$, $\lambda_2 = 1+2a$.

Exo 2

II) $X \in M(11,3)$

$${}^tX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 & 9 & 7 & 8 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 8 & 9 & 7 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

1) nauge des point $N(I)$



$$N(I) = \{(X_i, \omega_i),\ i = 1 \text{ à } 11\}$$
tq $X_i \in \mathbb{R}^3$, $\forall i$ et $\omega_i = \frac{1}{11}$, $\forall i$

2) calculer les écarts-type des variable.
$$\sigma(x^i) = \left\{ \frac{1}{11} \sum_{j=1}^{11} (x_j^i)^2 \right\}^{1/2} \quad \forall i$$ erreur
$$\sigma(x^1) = \sigma(x^2) = \sigma(x^3) = \sqrt{46} \quad \sqrt{10}$$

2) Déterminer la matrice des variance-covariance :
$V = \frac{1}{11} {}^tY \cdot Y$ où Y est la matrice des données centré.
On a le centre de gravité des données est donné par :
$$g = \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{11} x_j^1, \sum_{i=1}^{11} x_j^2, \sum_{i=1}^{11} x_j^3 \right) = (6, 6, 6)$$
Alors :
$$Y = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -2 & -1 & -3 & -4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -1 & -3 & -2 & -5 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$V = \frac{1}{11} {}^t Y\, Y = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 110 & 83 & 83 \\ 83 & 110 & 83 \\ 83 & 83 & 110 \end{pmatrix}$$

3) donne le type et l'expression de matrice de correlation ?

On a : $R = \frac{1}{11} {}^t Z . Z$ où Z est la matrice centrée-réduite.

6/ Après calcule on trouve

(2)

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}75 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 0{,}75 & 1 \end{pmatrix}$$

1 - donner l'inertie totale = dimension de matrice X

= La somme de la trace de la matrice de R.

$I_{totale} = tr(R) = 3 =$ nbr de variables

b) calculer le pourcentage d'inertie. Déterminer le meilleur axe principale qui ajuste au mieu le nuage des individus.

- les valeurs propres sont : $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25 \\ \lambda_2 = 1 + 2 . 0{,}75 = 2{,}5 . \end{cases}$

Par suite les pourcentage d'inerties sont

d_i / Inertie totale $\Rightarrow I_1 = I_3 = \frac{0{,}25}{3} = 0{,}0833 \simeq 8{,}33\%$

$I_2 = \frac{2{,}5}{3} = 0{,}833 \simeq 83{,}33\%$

Ainsi que meilleur axe principale ajustant au mieu $N(I)$

est donné par $\lambda_2 = 2{,}5$

$F_2 = (\Delta\, u_2)$ où u_2 est le vecteur propre normé associé à λ_2

Soit $V_2 \in \mathbb{R}^3$ tq. $R . V_2 = \lambda_2 V_2$ i.e

$$\begin{cases} x + 0{,}75y + 0{,}75z = 2{,}5x \\ 0{,}75x + y + 0{,}75z = 2{,}5y \\ 0{,}75x + 0{,}75y + z = 2{,}5z . \end{cases} \qquad \begin{cases} -1{,}5x + 0{,}75y + 0{,}75z = 0 \\ 0{,}75x - 1{,}5y + 0{,}75z = 0 \\ 0{,}75x + 0{,}75y - 1{,}5z = 0 \end{cases}$$

$(2)-(3) \Rightarrow \quad -2{,}25\,y + 2{,}25\,z = 0$

$$\boxed{y = z}$$

22

$(1)-(2) \Rightarrow \quad -2{,}25 + 2{,}25\,y = 0$

$$\boxed{x = y}$$

D'où $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

D'où $\Delta_2 = (\Delta u_2)$ où $u_2 = {}^t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

meilleur axe principale.

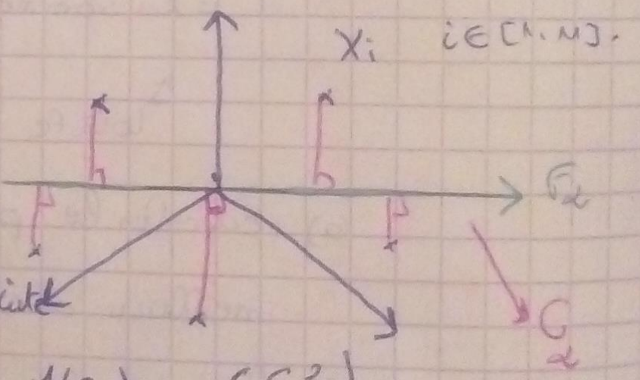
d/ Calculer la contribution des individus X_2 et X_{10} à l'inertie du 2ème axe commenter les résultats obtenus ?

On a :

$$\gamma_i^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(C_i^2\right)^2$$

pour $i = 2$ et $i = 10$

où : $C^2 = Z^{t} \cdot u_2$ ← centrée-réduite



$$C^2 = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^2 \\ \boxed{C_2^2} \\ \vdots \\ \boxed{C_{10}^2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$