Faculté d'Electronique er d'Informatique
Département d'Informatique
MASTER 1 : MIV

Examen Final (ANAD)

USTHB : 05/17

EXERCICE 1:

I) On considère la matrice de données X de type (4, 3) :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer la matrice des variances-covariances V.

2) Que représente cette matrice ?.

3) Déterminer la matrice des corrélations R.

4) Déterminer les valeurs propres de R.

5) Interpréter ces valeurs en termes d'inertie.

6) Préciser le meilleur sous espace principal ajustant le nuage des points qui explique au moins 80% de l'inertie totale.

7) Déterminer les nouvelles variables définies par les facteurs principaux.

8) Que représente le cosinus carré de l'angle formé par chaque individu et sa projection ?. (Donner son expression et expliquer).

9) Calculer les contributions des individus X_3 *et* X_4 à l'inertie du premier axe. Commenter les résultats obtenus.

EXERCICE 2: Soit la matrice des contingences suivante

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Donner la matrice des fréquences relatives. Ainsi que les fréquences marginales.

2) Déterminer les matrices des profils lignes et colonnes centrées.

3) Etudier la similarité entre les deux derniers points du nuage profils lignes.

Corrigé du TD 2 — 11-05-16

Exo 1 : Soit $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

1/ ~~a)~~ On a $g = (1, 1, 1)$ et les écarts-types sont $\begin{cases} \sigma(\overset{1}{X}) = \left[\frac{1}{4}(2)\right]^{1/2} = 1/\sqrt{2} \\ \sigma(\overset{2}{X}) = [1/4(4)] = 1 \\ \sigma(\overset{3}{X}) = [1/4(4)]^{1/2} = 1 \end{cases}$

où $Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

d'où $V = \frac{1}{4} {}^tY Y = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) La matrice V représente la matrice d'inertie

3) " " de corrélation $R = \frac{1}{4} {}^tZ Z$

où $Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}$. $R = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) La matrice R est symétrique, définie positive et $tr(R) = n = \sum_i \lambda_i$

5) $P_R(\lambda) = \det(R - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 1/2(1-\lambda)$
$= (1-\lambda)\left(1-\lambda-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\lambda+1/\sqrt{2}\right)$

$P_R(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.29 \\ \lambda_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 1.7 \end{cases}$

6) i) Soit v_1 tq : $Rv_1 = \lambda_1 v_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y = x \\ \frac{\sqrt{2}}{2} x + y = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$

d'où le premier axe principal $F_1 = \langle u_1 \rangle$ où $u_1 = {}^t(0, 0, 1)$.

ii) Soit v_3 tq : $Rv_3 = \lambda_3 v_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{2}/2\, y = 1.7x \\ \sqrt{2}/2\, x + y = 1.7y \\ z = 1.7z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $x \in \mathbb{R}$.

d'où le 2ème axe principal $F_2 = \langle u_3 \rangle$ où $u_3 = {}^t(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

Le meilleur sous-espace ajustant le nuage des pts avec au moins 80% de l'inertie cumulé est l'espace engendré par F_1 et F_2