Série 3 théorie des jeux

Calcul de l’équilibre mixte de NASH

Série 3 (solutions des exercices)

Exercice 1.

1) $\boldsymbol{\Sigma}_i = \left\{(\sigma_{i1},\sigma_{i2},,,\sigma_{in}) : \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij} = 1 \ \ et \ \sigma_{ij} \geq 0\right\}$ soient $\sigma_i \ \ et \ \ \sigma'_i \in \boldsymbol{\Sigma}_i$ alors pour que l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}_i$ soit convexe il faudrait que d'après la définition du cours: $t\sigma_i + (1-\mathrm{t})\sigma'_i = \sigma"_i \in \boldsymbol{\Sigma}_i \ \ \forall t \in [0,1]$

Les coordonnées de $\sigma"_i$ sont de la forme :$\sigma"_{ij} = t\sigma_{ij} + (1-\mathrm{t})\sigma'_{ij} \geq 0$

$et \ \sum_{j=1}^{n}\sigma"_{ij} = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}(t\sigma_{ij} + (1-t)\sigma'_{ij}) = t\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}}_{1} + (1\text{-}t)\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sigma'_{ij}}_{1}$

$= t + (1\text{-}t) = 1$

2) Soit $\mathrm{s_k} \in \mathrm{S_i}$ une stratégie pure du joueur i, on suppose que $\mathrm{s_k}$ n'est pas un point extrémal donc s'ecrit combinaison convexe de deux stratégies de $\boldsymbol{\Sigma}_i$:

$$\mathrm{s_k} = t\sigma_i + (1-\mathrm{t})\sigma'_i, \text{où } s_k = \Big(0,0,\dots,\underbrace{1}_{k},0,\dots,0\Big), \sigma_i = (\sigma_{i1},\sigma_{i2},,,\sigma_{in})$$

$$et \ \ \sigma'_i = (\sigma'_{i1},\sigma'_{i2},,,\sigma'_{in}) \ et \ 0 < t < 1$$

Donc nous obtenons les équations:

Série 3 (solutions des exercices)

- $$\begin{cases} t\sigma_{ik} + (1-t)\sigma'_{ik} = 1 \ (I) \\ t\sigma_{ij} + (1-t)\sigma'_{ij} = 0 \ pour \ j = 1, \dots, n \ j \neq k \ (II) \end{cases}$$

Les équations *(II)* comme $0 < t < 1 \Rightarrow \sigma_{ij}$=$\sigma'_{ij} = 0 \ \forall j \neq k \Rightarrow$

$\sigma_{ik} = \sigma'_{ik} = 1$(car distributions de probabilités) $\Rightarrow \sigma_i = \sigma'_i = s_k$ donc c'est un point extrémal, (Absurde).

Exercice 2.

1/2	Gauche	Droite
Gauche	(4,2)	(5,1)
Droite	(6,0)	(3 ,3)

Par invariance au support:$\sigma_1 = (p, 1-p) \ \ et \ \ \sigma_2 = (q, 1-q)$:

$$u_2(\sigma_1, \mathrm{G}) = u_2(\sigma_1, D) \Rightarrow 2\mathrm{p} + 0(1-\mathrm{p}) = \mathrm{p} + 3(1-\mathrm{p}) \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$

Série 3 (solutions des exercices)

Exercice 3.

1/2	E1	E2
E1	(2,2)	(4,6)
E2	(6,4)	(3,3)

Le choix est indifférent donc de Probabilité $\frac{1}{2}$

Par invariance de support sachant que $\sigma_1 = (p, 1-p)\ et\ \sigma_2 = (q, 1-q)$:

$$u_1(E1, \sigma_2) = u_1(E2, \sigma_2) \Rightarrow 2\mathrm{q} + 4(1-\mathrm{q}) = 6\mathrm{q} + 3(1-\mathrm{q}) \Rightarrow q = \frac{1}{5}$$

Donc (a) est vraie.

Série 3 (solutions des exercices)

Exercice 4.

$$BR1 = \{(D,G);(G,D)\} \cap BR2 = \{(G,G),(D,D)\} = \emptyset$$

Donc pas d'équilibre de Nash en pures,

Par invariance de support on trouve l'équilibre en mixte $(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$,

Exercice 5.

1/2	G	D
g	(1,1)	(1,1)
d	(-1,-1)	(2,0)

Deux équilibres de Nash en pures $(g,G)\ \ et\ \ \ (d,D)$,

Série 3 (solutions des exercices)

- $soit(\sigma_1, \sigma_2) = ((p, 1-p), (q, (1-q))$ un profil de stratégies mixtes de ce jeu:

$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = (3\mathrm{q} - 1)\mathrm{p} + (-3\mathrm{q} + 2)$

donc la fonction meilleur réponse du joueur 1 :

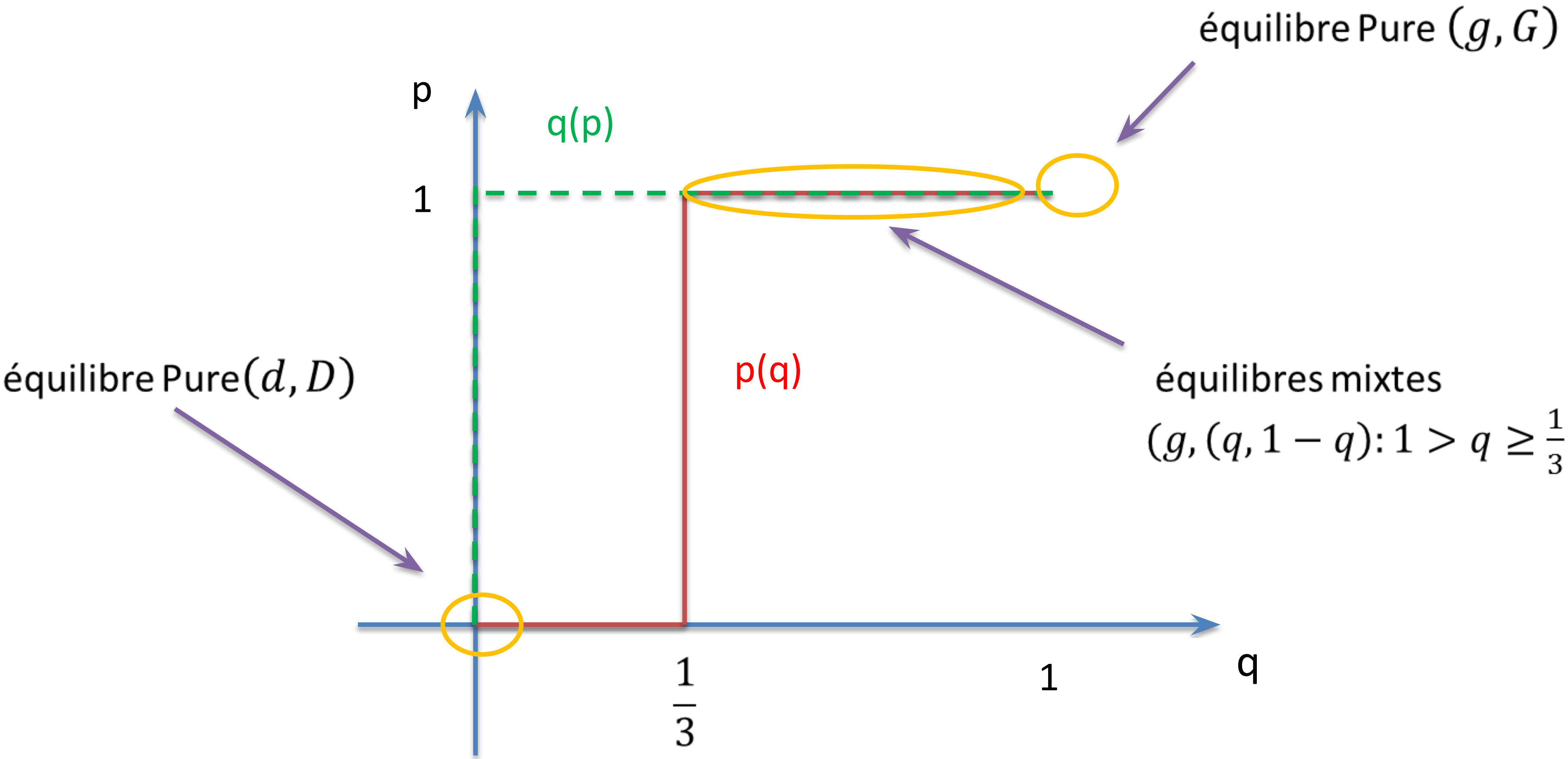
$$p(q) = \begin{cases} 1 \; si \; q > \dfrac{1}{3} \\ [0,1] si \; q = \dfrac{1}{3} \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

De même

$u_2(\sigma_1, \sigma_2) = (\mathrm{p} - 1)\mathrm{q} + \mathrm{p}$ la fonction meillure réponse du joueur 2 :

$$q(p) = \begin{cases} 0 \; si \; 0 \leq p < 1 \\ [0,1] \; si \; p = 1 \end{cases}$$

Série 3 (solutions des exercices)



Série 3 (solutions des exercices)

Exercice 6.

(Devoir à remettre)