SYS843
Réseaux de neurones et systèmes flous
Séance 08

Eric Granger
Ismail Ben Ayed

Hiver 2017

B. SYSTEMES FLOUS

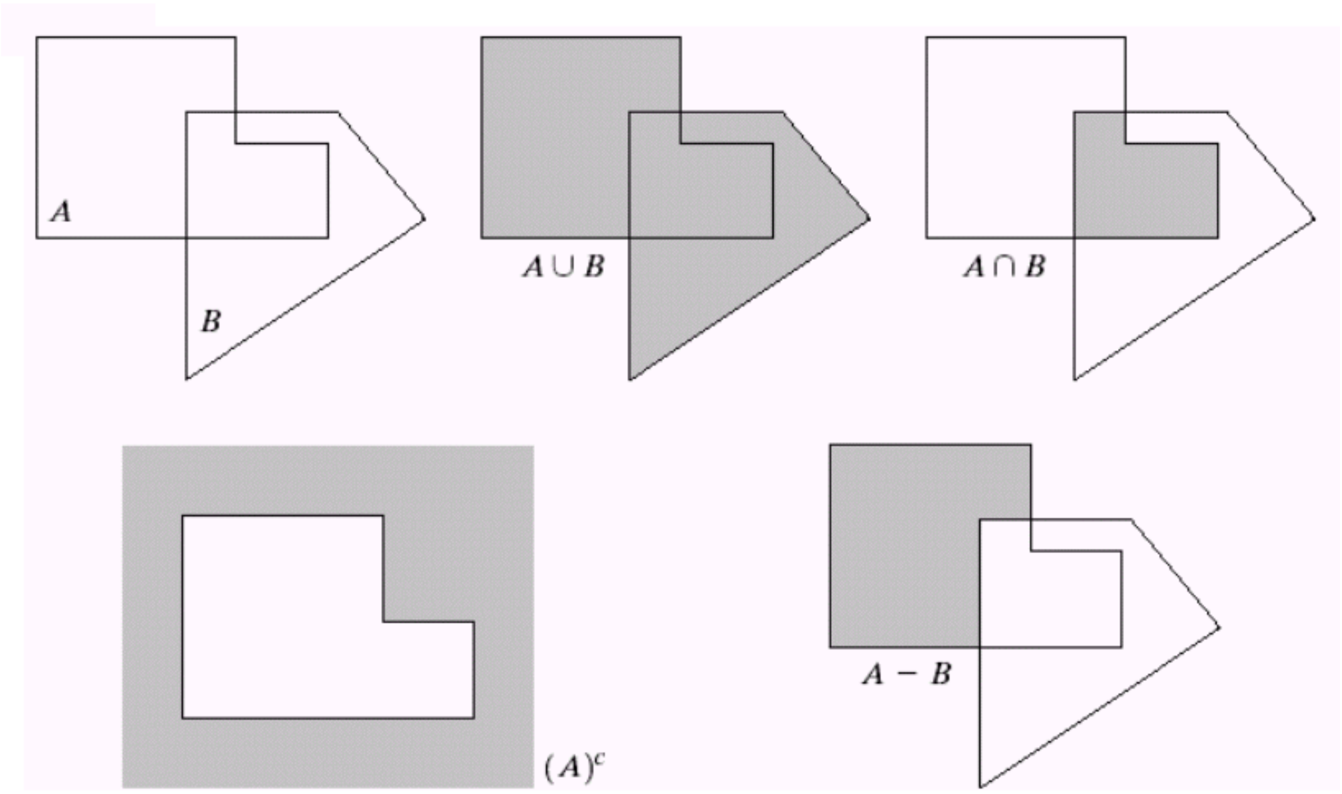
1) Rappel sur les ensemble ordinaires (« crisp sets ») et les opérations logiques
2) Introduction à la logique flou
3) Définitions et opérations sur les sous-ensembles flous
3) Coupes associées à un sous-ensemble flou
4) Produit cartésien de sous-ensembles flous
5) Normes et co-normes triangulaires
6) Moteur d'inférence flou

Révision sur les ensembles

- Ensemble (set) : {…}
  - ✓ex: $B = \{\omega | \omega \geq 0\}$
- $a \in A$ … est un élément de …
- $a \notin A$ … n'est pas un élément de …
- $A \subseteq B$ … est un sous-ensemble de …
- $\varnothing$ est l'ensemble vide

Révision sur les ensembles

- Union, intersection, complément, différence



Révision sur les ensembles

- Formellement:

➢ Ensembles disjoints ou mutuellement exclusifs

$$A \cap B = \varnothing$$

➢ Complément d'un ensemble

$$A^C = \{\omega | \omega \notin A\}$$

➢ Différence entre deux ensembles

$$A - B = \{\omega | \omega \in A, \omega \notin B\} = A \cap B^C$$

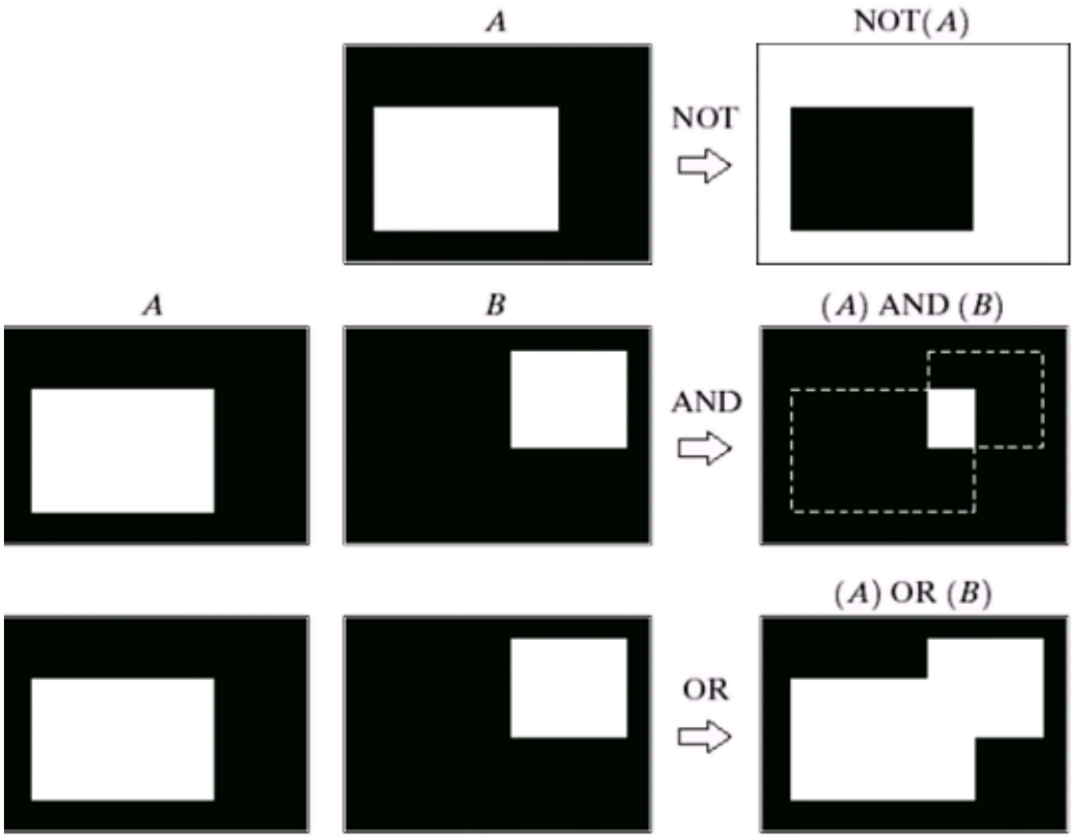
Les opérations logiques

- Opérateurs : ET, OU, NON (PAS)

p	q	p ET q	p OU q	PAS p
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Les opérations logiques

- Opérateurs : ET, OU, NON (PAS)



Ensemble	*Logique*
A^C	*NOT*
$A \cap B$	*A ET B*
$A \cup B$	*A OU B*

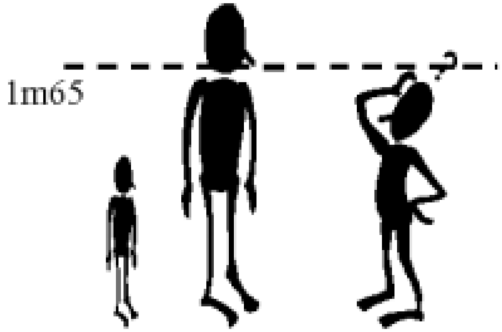
Logique/Ensemble flou

Introduction

- Qu'est ce que la logique flou?

➢ **Raisonnement humain**: basé sur des données imprécises/ incomplètes

➢ **Machine**: données exactes



Historique

- 1965: Naissance du concept avec le Prof. Lotfi Zadeh (Californie)

➢ ‘’Un contrôleur électromécanique dotée d’un raisonnement humain serait plus performant qu’un contrôleur classique’’

➢ Théorie des sous-ensembles flous

- 1973: Zadeh introduit la notion de variables linguistiques
- 1974: Mamdani (Londres) réalise un contrôleur flou pour moteur à vapeur

Historique (suite)

- 1987: Explosion du flou au Japon (qui atteint son apogée en 1990)

- Aujourd'hui: Une vaste gamme de produits qui ont une étiquette ''produit flou'' (''Fuzzy'')

Domaines d'applications

- **Automatisation**: production du fer et de l'acier, purification de l'eau, chaînes et robots de fabrication, …
- **Instrumentation**: capteurs, instruments de mesure, reconnaissance de voix et de caractères, …
- **Conception/Jugement**: consultation, investissement et développement, horaires de train, …
- **Ordinateurs**: opérateurs, unités arithmétique, micro-ordinateurs, …
- **Traitement d'information**: base de données, recherche d'information, modélisation de systèmes, …

Applications (suite)

- Les champions dans toutes les catégories de la logique floue sont les Japonais:
  - ➢ 80 % du marché mondial dans les années 1990
- Voici quelques réalisations mises sur le marché:
  - ➢ En 1987, le métro de Sendaï
  - ➢ Une machine à laver “intelligente”
  - ➢ Une photocopieuse “intelligente”
  - ➢ Une caméra vidéo “intelligente”

Ensembles ordinaires vs. flous

Définitions

- **Ensemble ordinaire:** Chaque élément $x \in X$ peut appartenir ou non à un sous-ensemble A, $A \subseteq X$:
  - Le degré d'appartenance est 0 ou 1
  - La fonction caractéristique du sous-ensemble a des valeurs **binaires**

Ensembles ordinaires vs. flous

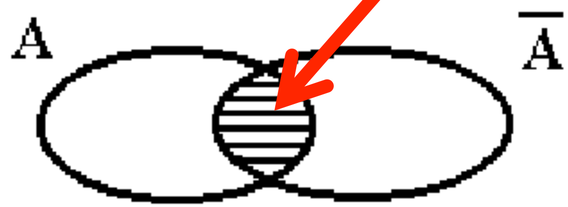
Notre exemple d'individus grands/petits

Ordinaire

$$A \cup \overline{A} = U$$

$$A \cap \overline{A} = \Phi$$

Flou



Exemple : U = ensemble des individus
A = ensemble des gens petits

• En logique flou, un élément peut appartenir à un ensemble et en même temps à son complément

Ensembles ordinaires vs. flous

Définitions

- **Ensemble flou:** Un ensemble de paires ordonnées

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$$

– $\mu_{\tilde{A}}(x)$ est la **fonction d'appartenance** (degré d'appartenance), qui transforme X à l'espace d'appartenance M

–Si M contient uniquement les points 0 et 1, alors l'ensemble n'est pas flou et la fonction d'*appartenance* devient identique à la fonction *caractéristique* d'un ensemble ordinaire.

Ensembles ordinaires vs. flous

Notre exemple d'individus grands/petits

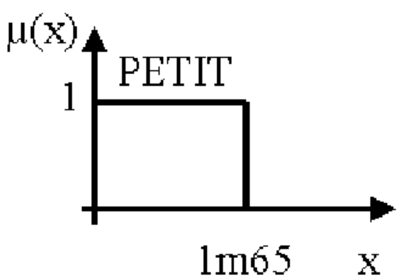
Théorie Classique

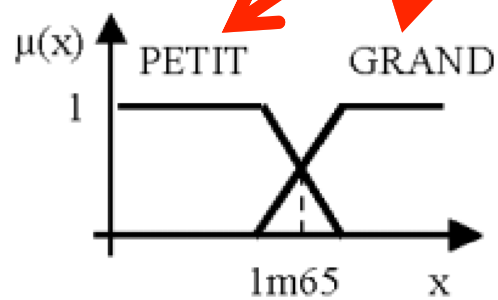
$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

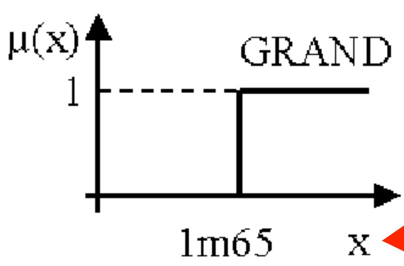
Théorie Floue

$$\mu(x) \in [0,1]$$

Valeurs linguistiques







Variables linguistiques

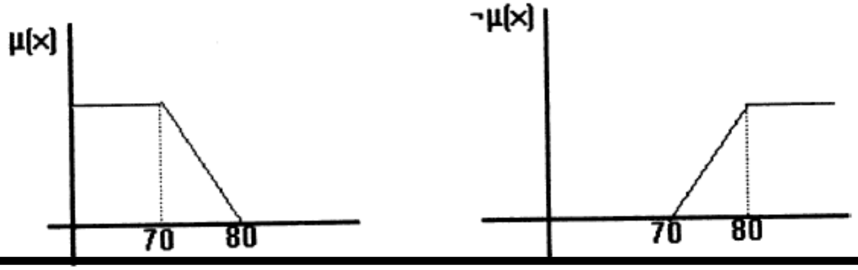
Logique flou

• Généralisation des opérateurs de base négation, intersection et union de la théorie classique des ensembles, ex.:

L'opérateur NON (complément)

→ $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$

→ représenté par la fonction $\boxed{non(\mu_A(x)) = \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)}$



Opérations de base: intersection (ET)

• Zadeh: La fonction d’appartenance de **<u>l’intersection (ET)</u>** de deux ensembles flous est donnée par le ***min***:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$$

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \qquad x \in X$$

Opérations de base: Union (OU)

•Zadeh: La fonction d'appartenance de **l'union (OU)** de deux ensembles flous est donnée par le **max**:

$$\tilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$$

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \qquad x \in X$$

Attention!

•La théorie des probabilités est différente de la théorie de la logique flou, bien que toutes les deux décrivent une notion de doute (incertain), à l'aide de nombres compris entre 0 et 1:

$$\mu_A(x) \neq P(x \in A)$$

•Il existe une différence importante:

Probabilités : $P(A \cap \overline{A}) = P(\Phi) = 0$ et $P(A \cup \overline{A}) = P(U) = 1$

Logique Floue : $P(A \cap \overline{A})$ pas nécessairement $= P(\Phi)$

et $P(A \cup \overline{A})$ pas nécessairement $= P(U)$

Ordinaires vs. flous

- Exemples en logique classique

Soit un ensemble de référence U = {a,b,c,d,e,f,g} .
Soit A et B deux sous-ensembles de U :

	a	b	c	d	e	f	g
A	0	1	0	1	1	0	1
B	1	1	0	0	1	0	1

	a	b	c	d	e	f	g
$\overline{A}$	1	0	1	0	0	1	0

	a	b	c	d	e	f	g
$A \cap B$	0	1	0	0	1	0	1

	a	b	c	d	e	f	g
$A \cup B$	1	1	0	1	1	0	1

	a	b	c	d	e	f	g
$A \cap \overline{A}$	0	0	0	0	0	0	0

→ $A \cap \overline{A} = \Phi$

	a	b	c	d	e	f	g
$A \cup \overline{A}$	1	1	1	1	1	1	1

→ $A \cup \overline{A} = U$

Ordinaires vs. flous

- Exemples en logique floue

Soit un ensemble de référence U = {a,b,c,d,e,f,g} .
Soit C et D deux sous-ensembles de U :

	a	b	c	d	e	f	g
C	0.4	0.8	1	0.8	0.2	0.5	0.1
D	0	0.5	0.3	0.9	1	0.7	0

	a	b	c	d	e	f	g
$\overline{C}$	0.6	0.2	0	0.2	0.8	0.5	0.9

	a	b	c	d	e	f	g
$C \cap D$	0	0.5	0.3	0.8	0.2	0.5	0

	a	b	c	d	e	f	g
$C \cup D$	0.4	0.8	1	0.9	1	0.7	0.1

	a	b	c	d	e	f	g
$C \cap \overline{C}$	0.4	0.2	1	0.2	0.2	0.5	0.1

→ $C \cap \overline{C} \neq \Phi$

	a	b	c	d	e	f	g
$C \cup \overline{C}$	0.6	0.8	0	0.8	0.8	0.5	0.9

→ $C \cup \overline{C} \neq U$

Ensembles flous (Exemples)

- Un vendeur immobilier veut classer les maisons offertes à ses clients
  - Un indicateur de confort est le nombre de chambres à coucher dans la maison (*x*)

$$X = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 10\}$$

  - L'ensemble flou ‘’ **un type de maison confortable pour une famille de quatre personnes**” peut être décrit par:

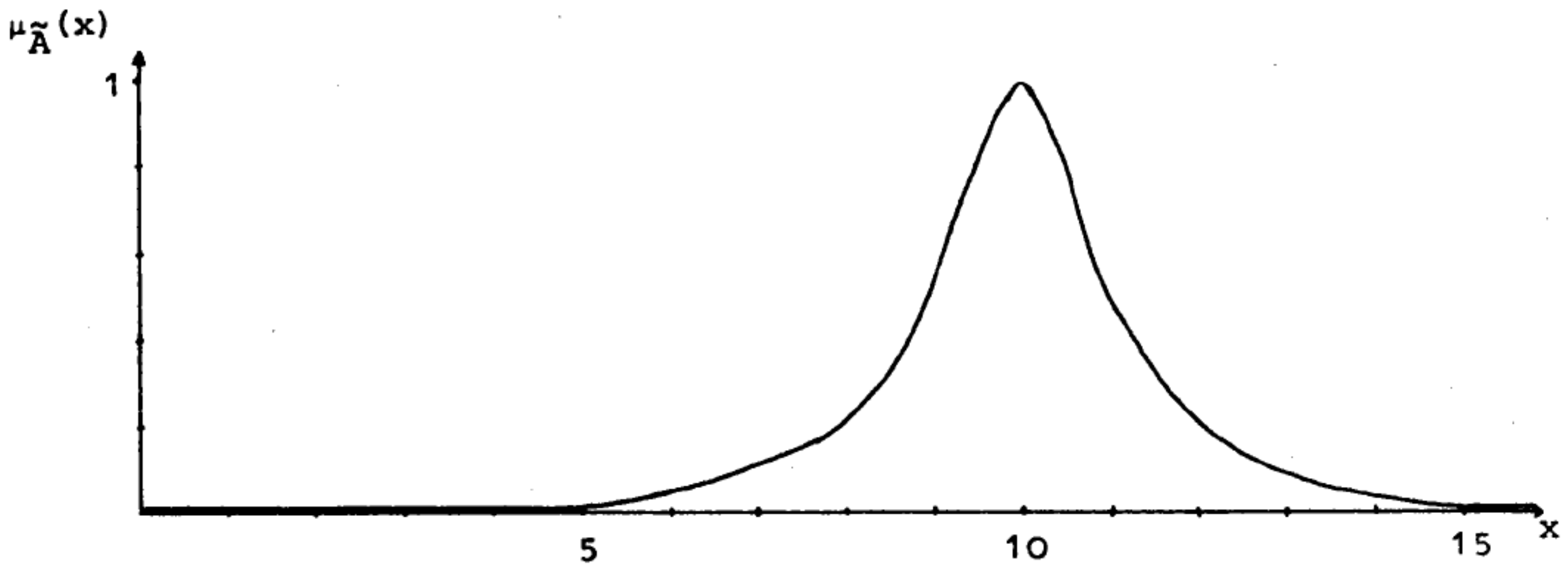
$$\tilde{A} = \{(1,\ .2),\ (2,\ .5),\ (3,\ .8),\ (4,\ 1),\ (5,\ .7)\ (6,\ .3)\}$$

x $\mu_{\tilde{A}}(x)$

Ensembles flous (Exemples)

- Ensemble flou: ‘’**Les nombres réels proches de 10**”

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = (1 + (x-10)^2)^{-1}\}$$



Ensembles flous normalisés

- Les fonctions d’appartenance ne sont pas forcement limitées aux valeurs entre 0 et 1.
- Si $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, alors l’ensemble flou est un ensemble normal.
- Un ensemble flou peut toujours être normalisé en divisant sa fonction d’appartenance par $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$
- En général, on assume que **les ensembles flous sont normalisés**

Support d'un ensemble flou

• Le support d'un ensemble flou $\tilde{A}$, qu'on dénote $S(\tilde{A})$ est l'ensemble **ordinaire** de tous les $x \in X$ tel que:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$$

• Le support de $S(\tilde{A}) = \{1,2,3,4,5,6\}$

• Les éléments (types de maisons) {7,8,9,10} ne font pas partie du support

Les ensembles flous

- **L'ensemble *alpha*-niveau**
  - Le sous-ensemble ordinaire des éléments de degré supérieur ou égal à une certaine valeur:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

$$A'_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

Alpha-niveau fort **Inégalité stricte**

Les ensembles flous

- **L'ensemble *alpha*-niveau (Exemple)**
  - ➢Revenons à notre exemple de maisons:

$$A_{.2} = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A_{.5} = \{2,3,4,5\}$$

$$A_{.8} = \{3,4\}$$

$$A_{1} = \{4\}$$

$$A'_{.8} = \{4\}$$

Les ensembles flous

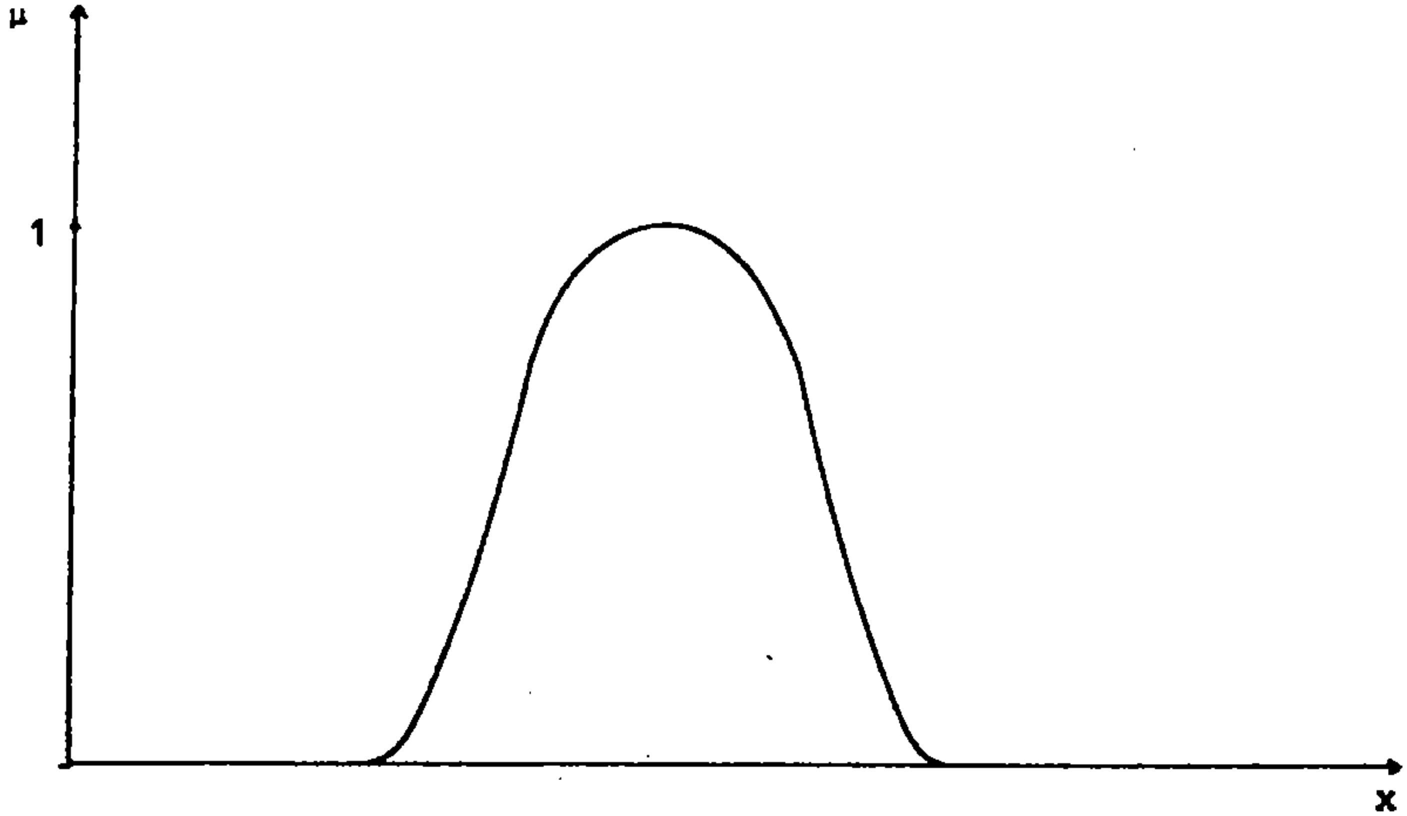
- **Ensemble flou convexe**

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)),$$
$$x_1, x_2 \in X, \qquad \lambda \in [0,1]$$

➢ De plus, un ensemble flou est convexe si tous ces sous-ensembles *alpha*-niveaux sont convexes

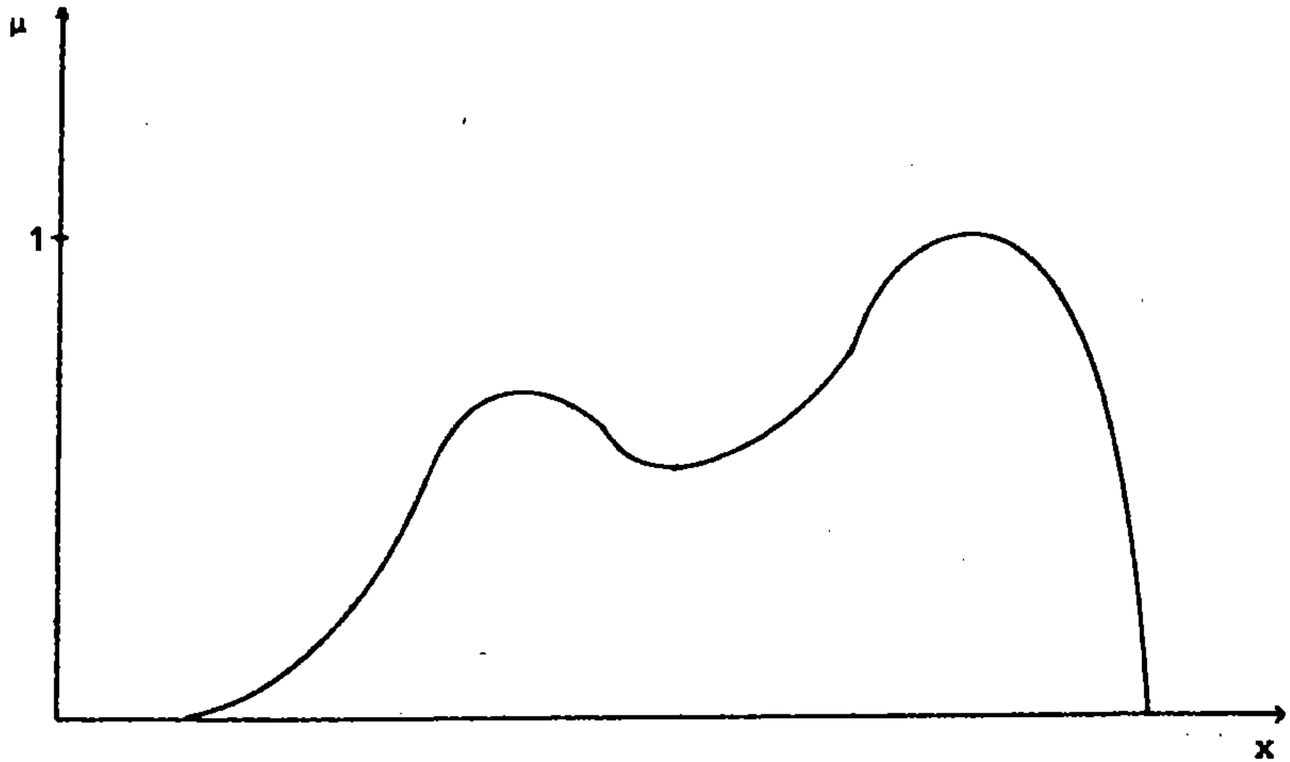
Les ensembles flous

- **Ensemble flou <u>convexe</u>**



Les ensembles flous

- Ensemble flou <u>non-convexe</u>



Cardinalité d'un ensemble flou

•La cardinalité d'un ensemble flou est définie par:

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

•La cardinalité relative est:

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}$$

Cardinalité d'un ensemble flou

• Revenons à notre exemple: L'ensemble flou ''**Un type de maison confortable pour 4 personnes**''

$$|\tilde{A}| = .2 + .5 + .8 + 1 + .7 + .3 = 3.5$$

Cardinalité

$$\|\tilde{A}\| = \frac{3.5}{10} = 0.35$$

Relative: Fraction des éléments de *X* étant dans le sous-ensemble flou, pondérées par leur dégrée d'appartenance.

Cardinalité d'un ensemble flou

- Pour un *X* infini, la cardinalité est:

$$|\tilde{A}| = \int_{x} \mu_{\tilde{A}}(x)\,dx$$

N'existe pas toujours: peut être infini

Opérations de base: ET/OU

• En fait, il existe de nombreuses possibilités pour représenter les opérateurs ET et OU.

• Les fonctions que nous avons vues jusqu'à maintenant (MIN et MAX) sont dues à Zadeh et sont encore aujourd'hui les plus utilisées.

• Nous allons voire d'autres possibilités.

Opérations de base (complément)

- La fonction d'appartenance du **complément**:

$$\mu_{\neg\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \qquad x \in X$$

Opérations de base (Exemples)

• **Premier ensemble flou:** ‘’Un type de maisons confortable pour une famille de 4 personnes”.

$$\tilde{A} = \{(1, .2), (2, .5), (3, .8), (4, 1), (5, .7) (6, .3)\}$$

• **Deuxième ensemble flou:** ‘’Une grande maison”

$$\tilde{B} = \{(3, .2), (4, .4), (5, .6), (6, .8), (7, 1), (8, 1) \}$$

Opérations de base (Exemples)

- **L'intersection de Zadeh (MIN):** $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$

$$\tilde{C} = \{(3,\ .2),\ (4,\ .4),\ (5,\ .6),\ (6,\ .3)\ \}$$

- **L'union de Zadeh (MAX):** $\tilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$

$$\tilde{D} = \{(1,\ .2),\ (2,\ .5),\ (3,\ .8),\ (4,\ 1),\ (5,\ .7),\ (6,\ .8),\ (7,\ 1)\ (8,\ 1)\}$$

Opérations de base (Exemples)

- **Premier ensemble flou:** ‘’Nombres réels considérablement plus grand que 10”

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 10 \\ (1 + (x-10)^{-2})^{-1} & x > 10 \end{cases}$$

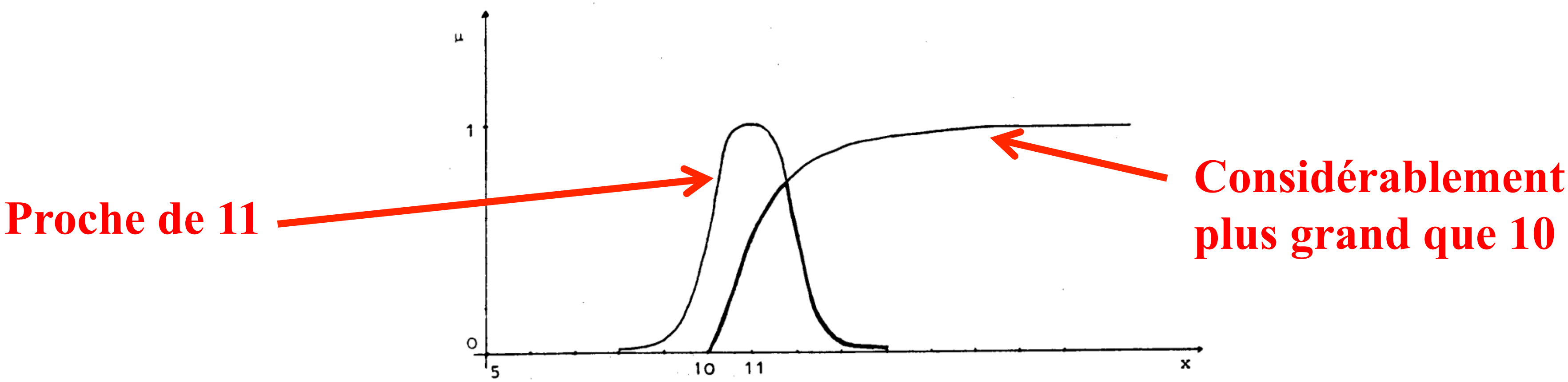
- **Deuxième ensemble flou:** ‘’Nombres réels proches de 11”

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = (1 + (x-11)^{4})^{-1}$$

Opérations de base (Exemples)

- **Intersection:** ‘’Nombres réels considérablement plus grand que 10 et proche de 11’’

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \min\left[(1+(x-10)^{-2})^{-1},\ (1+(x-11)^{4})^{-1}\right] & x>10 \\ 0, & x\leq 10 \end{cases}$$



Produit Cartésien

- Soit $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ des ensembles flous dans $X_1, \ldots, X_n$

- Le **produit Cartésien** est l'ensemble flou dans l'espace

$X_1 \times \ldots \times X_n$

$$\mu_{(\tilde{A}_1 \times \ldots \times \tilde{A}_n)} = \min_i \{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \mid x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in X_i\}$$

Produit Cartésien (Exemple)

- Soit les ensembles flous suivants:

$$\tilde{A}(x) = \{(3,.5),\ (5,1),\ (7,.6)\}$$

$$\tilde{B}(x) = \{(3,1),\ (5,.6)\}$$

- Le produit Cartésien est:

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \{[(3;3),.5],\ [(5;3),1],\ [(7;3),.6],\ [(3;5),.5],\ [(5;5),.6],\ [(7;5),.6]\}$$

Puissance d'un ensemble flou

• La *m-ième* puissance d'un ensemble flou est l'ensemble flou de fonction d'appartenance:

$$\mu_{\tilde{R}^m}(x) = [\mu_{\tilde{A}}(x)]^m, \qquad x \in X$$

m-ième **puissance**

Ensemble flou

Puissance (Exemple)

- Soit l'ensemble flou suivant:

$$\tilde{A}(x) = \{(3,.5),\ (5,1),\ (7,.6)\}$$

- La *2-ième* puissance est:

$$\tilde{A}^{2} = \{(3,.25),\ (5,1),\ (7,.36)\}$$

Somme algébrique (OU probabiliste)

- La somme algébrique (OU probabiliste) est définie par:

$$\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$$

$$\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x)) \mid x \in X\}$$

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$$

Somme algébrique (OU probabiliste)

Exemple

- Revenons aux deux ensembles flous suivants:

$$\tilde{A}(x) = \{(3,.5),\ (5,1),\ (7,.6)\}$$

$$\tilde{B}(x) = \{(3,1),\ (5,.6)\}$$

- La somme algébrique est:

$$\tilde{A} \dotplus \tilde{B} = \{(3,1),\ (5,1),\ (7,.6)\}$$

Produit algébrique (ET probabiliste)

- Le produit algébrique (ET probabiliste) est défini par:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$$

$$\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)) \mid x \in X\}$$

Produit algébrique (ET probabiliste)

Exemple

- Revenons aux deux ensembles flous suivants:

$$\tilde{A}(x) = \{(3,.5),\ (5,1),\ (7,.6)\}$$

$$\tilde{B}(x) = \{(3,1),\ (5,.6)\}$$

- Le produit algébrique est:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \{(3,.5),\ (5,.6)\}$$

Somme bornée

• La **<u>somme bornée (OU de Lukasiewicz)</u>** est définie comme suit:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \oplus \tilde{B}$$

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x) = \min\{1,\ \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

Somme bornée

Exemple

- Pour les deux ensembles flous:

$$\tilde{A}(x) = \{(3,.5),\ (5,1),\ (7,.6)\}$$

$$\tilde{B}(x) = \{(3,1),\ (5,.6)\}$$

- La somme bornée:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \{(3,1),\ (5,1),\ (7,.6)\}$$

Différence bornée

•La **<u>différence bornée (ET de Lukasiewicz)</u>** est définie comme suit:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \ominus \tilde{B}$$

$$\mu_{\tilde{A}\ominus\tilde{B}}(x) = \max\{0,\ \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1\}$$

Différence bornée

Exemple

- Pour les deux ensembles flous:

$$\tilde{A}(x) = \{(3,.5),\ (5,1),\ (7,.6)\}$$

$$\tilde{B}(x) = \{(3,1),\ (5,.6)\}$$

- La différence bornée:

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \{(3,.5),\ (5,.6)\}$$

Opérations ensemblistes

• ***t-normes***

➢ Les fonctions *t* définissent une classe générale d' opérateurs **d'intersection** pour les ensemble flous

➢ Des fonctions à deux variables de $[0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$ qui satisfont certaines conditions

t-normes (Conditions)

1. $t(0,0) = 0;\ t(\mu_{\tilde{A}}(x),1) = t(1,\mu_{\tilde{A}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x), \qquad x \in X$

2. $t(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) \leq t(\mu_{\tilde{C}}(x),\ \mu_{\tilde{D}}(x))$ *(monotonocité)*
   $si \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x)\ ET\ \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{D}}(x)$

3. $t(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = t(\mu_{\tilde{B}}(x),\ \mu_{\tilde{A}}(x))$ *(commutativité)*

4. $t(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x),\ \mu_{\tilde{C}}(x)) = t(t(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x),\ \mu_{\tilde{C}}(x)))$
   (associativité)

Opérations ensemblistes

• ***t-conormes (ou s-normes)***

➢ Une classe générale d' opérateurs <u>**d'union**</u> d'ensembles flous appelés co-normes triangulaires ou t-conormes

➢ Des fonctions à deux variables de $[0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$ qui satisfont certaines conditions

t-conormes (Conditions)

1. $s(1,1) = 1;\ s(\mu_{\tilde{A}}(x),0) = s(0,\mu_{\tilde{A}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x), \quad x \in X$

2. $s(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) \leq s(\mu_{\tilde{C}}(x),\ \mu_{\tilde{D}}(x))$ $(monotonocité)$
   $si \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x)\ ET\ \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{D}}(x)$

3. $s(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = s(\mu_{\tilde{B}}(x),\ \mu_{\tilde{A}}(x))$ $(commutativité)$

4. $s(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x),\ \mu_{\tilde{C}}(x)) = s(s(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x),\ \mu_{\tilde{C}}(x)))$
   $(associativité)$

t-normes et t-conormes (s-normes)

- Les t-normes et t-conormes sont reliées par:

$$t(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = 1 - s(1 - \mu_{\tilde{A}}(x),\ 1 - \mu_{\tilde{B}}(x))$$

➢Chaque t-conorme *s* peut être générée à partir d'une t-norme *t* (en utilisant cette relation*)*

Principales *t-normes* et *t-conormes*

- **Non paramétrées**

➢ *Produit drastique*:

$$t_w(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \begin{cases} \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\} & si\ \ \max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\} = 1 \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Principales *t-normes* et *t-conormes*

- **<u>Non paramétrées</u>**

➢ *Somme drastique*:

$$s_w(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \begin{cases} \max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\} & si\ \ \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\} = 0 \\ 1 & autrement \end{cases}$$

Principales *t-normes* et *t-conormes*

• **<u>Non paramétrées</u>**

➢ *Différence bornée*:

$$t_1(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \max\{0,\ \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1\}$$

➢ *Somme bornée:*

$$s_1(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \min\{1,\ \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

Principales *t-normes* et *t-conormes*

- **Non paramétrées**

➢ *Produit d'Einstein:*

$$t_{1.5}(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{2 - [\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)]}$$

➢ *Somme d'Einstein:*

$$s_{1.5}(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 + \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)]}$$

Principales *t-normes* et *t-conormes*

- **Non paramétrées**

➢ *Produit algébrique:*

$$t_2(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$$

➢ *Somme algébrique:*

$$s_2(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$$

Principales *t-normes* et *t-conormes*

- **Non paramétrées**

➢ *Produit d'Hamacher*:

$$t_{2.5}(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}$$

➢ *Somme d'Hamacher:*

$$s_{2.5}(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 2\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}$$

Principales *t-normes* et *t-conormes*

- **Non paramétrées**

➢ *Le minimum:*

$$t_3(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

➢ *Le maximum:*

$$s_3(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

Principales *t-normes* et *t-conormes*

- **<u>Non paramétrées</u>**

➢ *Les t-normes et t-conormes sont ordonnées*:

$$s_3 \leq s_{2.5} \leq s_2 \leq s_{1.5} \leq s_1 \leq s_w$$

$$t_w \leq t_1 \leq t_{1.5} \leq t_2 \leq t_{2.5} \leq t_3$$

Principales *t-normes* et *t-conormes*

• **Paramétrées**

➢ *Intersection d'Hamacher*:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)}{\gamma + (1-\gamma)(\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x))}, \quad \gamma \geq 0$$

➢ *Union d'Hamacher:*

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \frac{(\gamma'-1)\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x) + \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 + \gamma'\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)}, \quad \gamma' \geq -1$$

Principales *t-normes* et *t-conormes*

•**Paramétrées**

Produit algébrique quand ce paramètre est 1

➢ *Intersection d'Hamacher*:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)}{\gamma + (1-\gamma)(\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x))}, \quad \gamma \geq 0$$

➢ *Union d'Hamacher:*

Somme algébrique quand ce paramètre est 0

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \frac{(\gamma'-1)\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x) + \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 + \gamma'\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)}, \quad \gamma' \geq -1$$

Principales *t-normes* et *t-conormes*

• **Paramétrées**

➢ *Intersection de Dubois et Prade*:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x)}{\max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x),\ \alpha\}}, \qquad \alpha\in[0,\ 1]$$

➢ Décroissant par rapport à α

➢Varie entre le produit algébrique (paramètre égale à 1) l'operateur min (paramètre égal à 0)

Principales *t-normes* et *t-conormes*

•**Paramétrées**

➢ *Intersection de Dubois et Prade (suite)*

➢ Le paramètre jour le rôle d'un seuil qui permet de relier l'intersection aux relations suivantes:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad pour \quad \mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x) \in [\alpha,\ 1]$$

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x)}{\alpha} \qquad pour \quad \mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x) \in [0,\ \alpha]$$

Principales *t-normes* et *t-conormes*

•<u>Paramétrées</u>

➢ *Union de Dubois et Prade*:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) - \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x),\ (1-\alpha)\}}{\max\{(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)),\ (1 - \mu_{\tilde{B}}(x)),\ \alpha\}}$$

$$\alpha \in [0,\ 1]$$

Principe d'extension

- Soit X le produit Cartésien des univers $X = X_1 \ldots X_r$ et $A_1 \ldots A_r$ les ensembles flous définis sur $X_1 \ldots X_r$

- f est une implication de X vers l'univers Y, $y = f(x_1, \ldots, x_r)$

- Le principe d'extension permet la définition d'un ensemble flou: $\tilde{B} \in Y$

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, \ldots, x_r), \quad (x_1, \ldots, x_r) \in X\}$$

Principe d'extension (suite)

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, \ldots, x_r), \quad (x_1, \ldots, x_r) \in X\}$$

Inverse de *f*

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, \ldots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r)\} & si \ f^{-1} \neq \varnothing \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Principe d'extension (suite)

- Pour $r=1$, le principe d'extension se résume à:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x), \quad x \in X\}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x) & si \ f^{-1} \neq \varnothing \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Principe d'extension (suite)

Exemple

$$\tilde{A} = \{(-1,\ .5),\ (0,\ .8),\ (1,\ 1),\ (2,\ .4)\} \text{ et } f(x) = x^2$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(0,\ .8),\ (1,\ 1),\ (4,\ .4)\}$$

Implication flou

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in A, \ \text{alors } y \in B}$$

$$\boxed{\mu_{A/B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))}$$

Moteur d'inférence

- ***Processus à <u>trois étapes:</u>***

➢ *<u>Fuzzification</u>*: Transforme les entrées en grandeurs floues

➢ *<u>Inférence (avec une base de règles):</u>* Prends les décisions

➢ *<u>Dé-fuzzification:</u>* Transforme les grandeurs floues en valeurs déterminées

Étape 1

- ***Fuzzification:***

➢ Définition de fonctions d’appartenance pour toutes les variables d’entrée

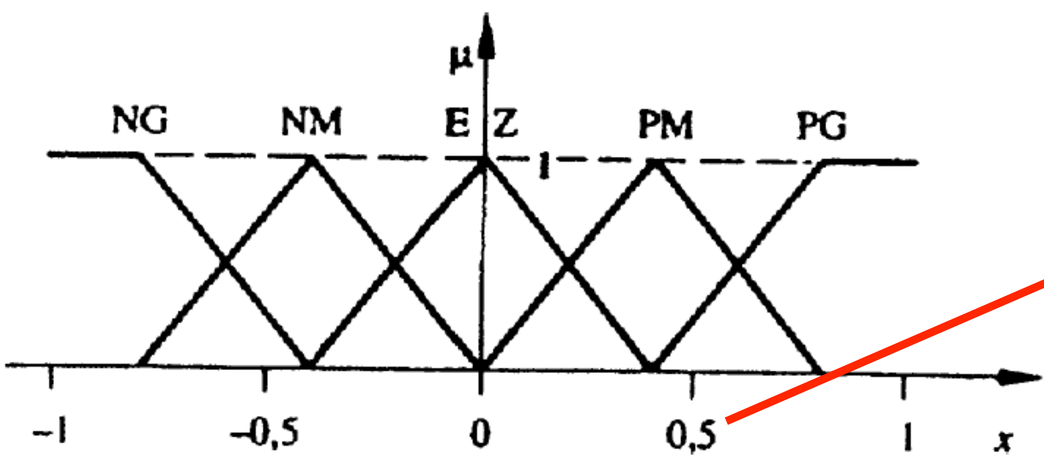
➢ Passage: Grandeurs physique vers variables linguistiques

➢ En général, on utilise des formes triangulaires et trapézoïdales pour les fonctions d’appartenance, bien qu’il n’existe pas de règles précises pour ce choix.

Exemple

- ***Une variable linguistique d'entrée x, définie par 5 fonctions d'appartenance floue (FAF):***

➢À chaque variable linguistique d'entrée (*x*), on fait correspondre une valeur linguistique (Négatif Grand, Négatif Moyen, etc.) avec un degré d'appartenance.



$$\mu_{PM}(0.5) = 0.75$$
$$\mu_{PG}(0.5) = 0.25$$

Étape 2

- ***Inférence avec base de règles:***

➢ Donne la relation qui existe entre les variables d'entrée (exprimées comme variables linguistiques) et les variables de sorties (également exprimées comme variables linguistiques)

Étape 2: Exemple

• ***Deux entrées x1 et x2, et une sortie xR, toutes définies selon 5 FAFs:***

➢Description de la base de règles élaborées par un expert, d'après ses connaissances du problème:

Si (x1 = NG ET x2 = EZ), Alors xR = PG ou
Si (x1 = NG ET x2 = PM), Alors xR = PM ou
Si (x1 = NM ET x2 = EZ), Alors xR = PM ou
Si (x1 = NM ET x2 = PM), Alors xR = EZ ou
Si (x1 = NM ET x2 = PG), Alors xR = NM ou
Si (x1 = PG ET x2 = EZ), Alors xR = NG.

Continuons l'exemple

• Supposons que x1 = 0.44 ET x2 = -0.67, et que l' inférence est composée des deux règles suivantes:

Si (x_1 PG **ET** x_2 EZ), **Alors** x_R EZ **ou**
Si (x_1 NG **OU** x_2 PM), **Alors** x_R PM

•Il faut maintenant ''traduire'' les opérateurs ET, OU et l'implication par une des fonctions qu'on a vues.

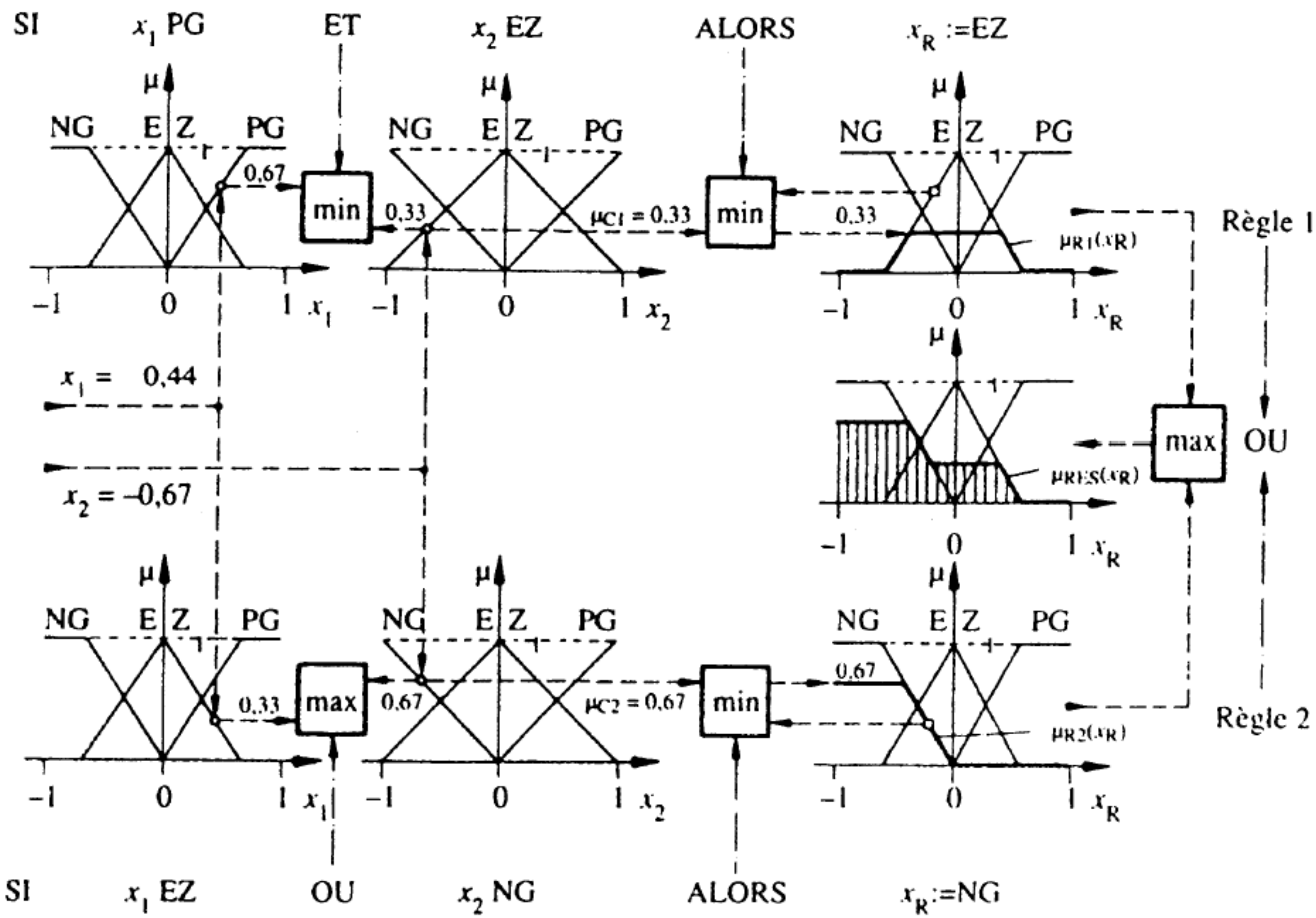
Inférence Max-Min

Au niveau de la condition : ET → Min   OU → Max

Au niveau de la conclusion : ou → Max   Alors → Min

•**Résultat**: Une fonction résultante donnée par la surface hachurée (exemple va suivre). Cette fonction sera traitée lors de la dé-fuzzification.

Inférence Max-Min



Inférence Max-Min

La première règle donne:

1. $x1 = 0,44$ est PG avec un degré de 0,67 et $x2 = -0,67$ est EZ avec un degré de 0,33

2. ($x1$ = PG **ET** $x2$ = EZ) équivaut à min(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,33

3. Alors = min équivaut à tronquer la fonction d'appartenance de x_R = EZ par 0,33

Inférence Max-Min

La deuxième règle donne:

1. $x1 = 0{,}44$ est PG avec un degré de 0,67 et $x2 = -0{,}67$ est EZ avec un degré de 0,33

2. ($x1$ = EZ **OU** $x2$ = NG) équivaut à max(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,67

3. Alors = min équivaut à tronquer la fonction d'appartenance de x_R = NG par 0,67

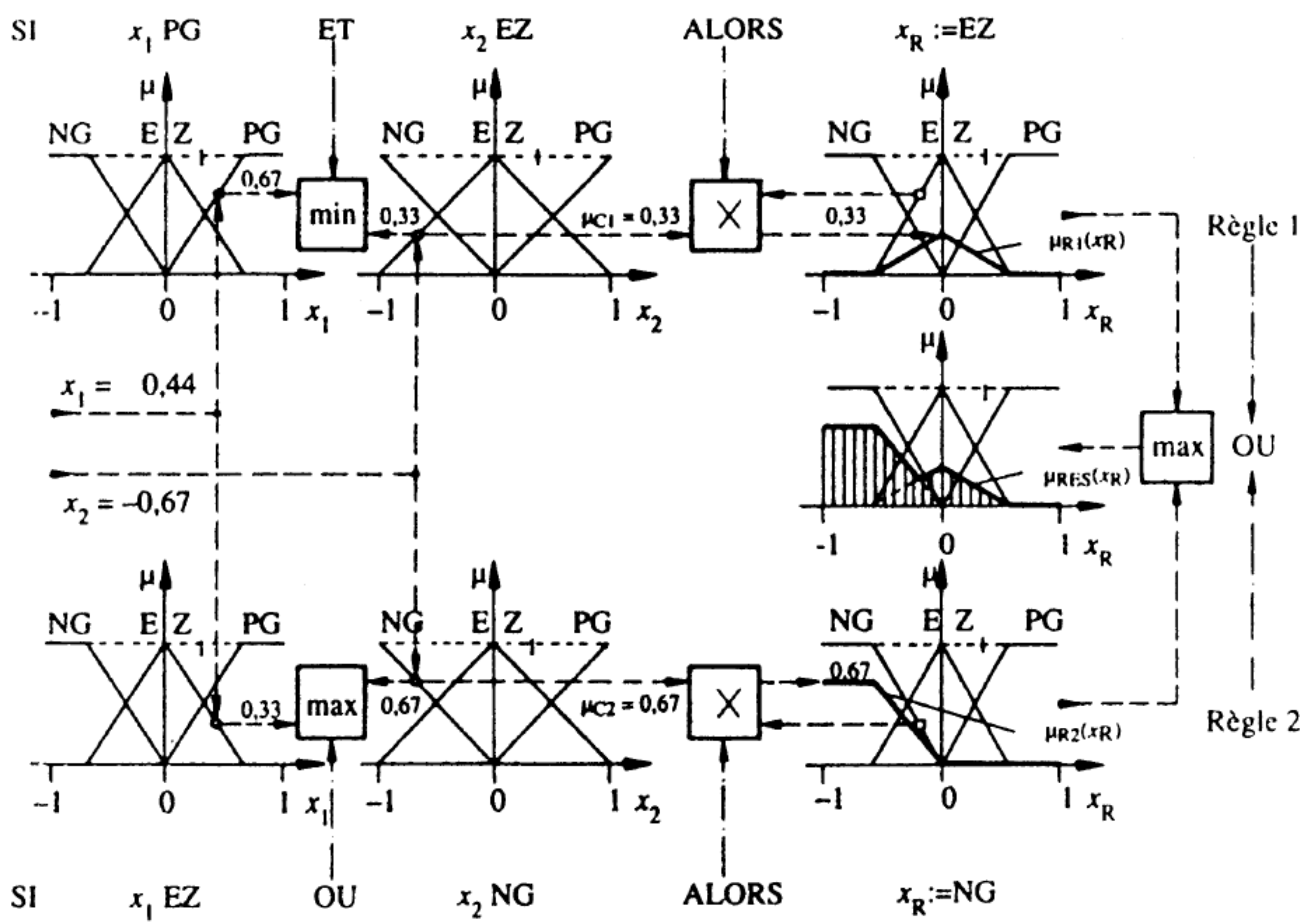
Inférence Max-Prod

Au niveau de la condition : ET → Min   OU → Max

Au niveau de la conclusion : ou → Max   Alors → Prod

•**Résultat**: Une fonction résultante donnée par la surface hachurée (exemple va suivre). Cette fonction sera traitée lors de la dé-fuzzification.

Inférence Max-Prod



Inférence Max-Prod

La première règle donne:

1. $x1 = 0{,}44$ est PG avec un degré de 0,67 et $x2 = -0{,}67$ est EZ avec un degré de 0,33

2. ($x1$ = PG **ET** $x2$ = EZ) équivaut à min(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,33

3. Alors = prod équivaut à multiplier la fonction d'appartenance de x_R = EZ par 0,33

Inférence Max-Prod

La deuxième règle donne:

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33

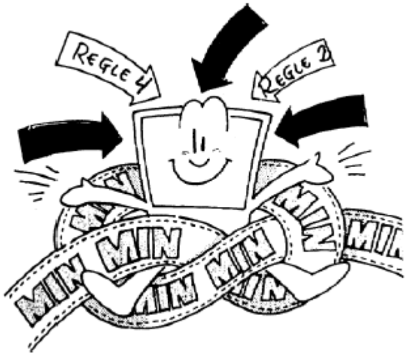
2. (x1 = EZ **OU** x2 = NG) équivaut à max(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,67

3. Alors = min équivaut à multiplier la fonction d'appartenance de x_R = NG par 0,67

Défuzzification

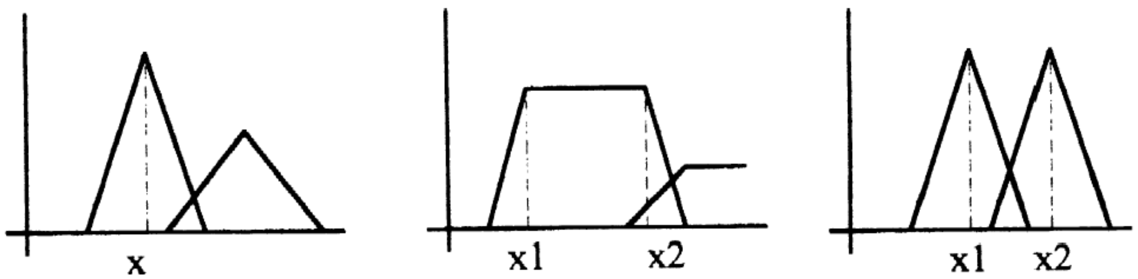
- Les méthodes d’inférence fournissent une fonction d’appartenance résultante pour la variable de sortie.

- Il s’agit donc d’une information flou qu’il faut transformer en grandeur physique



Méthode du maximum

- La sortie correspond à l'abscisse du maximum de la fonction d'appartenance résultante.
- Trois cas peuvent se produire:



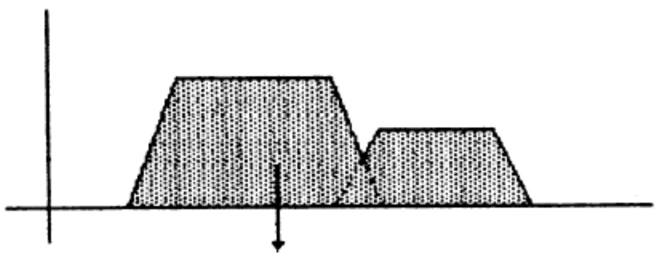
- Conclusion: Méthode simple, rapide et facile mais elle introduit des ambiguïtés dans la sorte

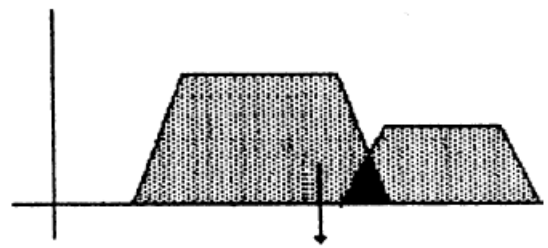
Méthode du centroide

- Sortie: centre de gravite de la surface. Il existent deux méthodes:

➢ Centroide de l'union des sous-ensembles flous

➢ Centroide de chaque sous-ensemble, puis la moyenne des centroides





- Conclusion: Pas d'ambiguïtés mais plus complexe

Références

- H. –J Zimmermann, ‘’Fuzzy Set Theory and its Applications’’, Edition 2, Kluwer Academic Publishers, 1993
- Notes de cours du Prof. Robert Sabourin: Sys-843, Vol. 2, Systèmes flous