Τεχνητή Νοημοσύνη: 2η Σειρά Ασκήσεων

Ιωάννης Μπουρίτης

15 Φεβρουαρίου 2025

Άσκηση 1:

Εκφώνηση

Θεωρήστε την παρακάτω λογική πρόταση:

$$[(\Delta ουλεια \Rightarrow \mathrm{X}ρημα) \wedge (\neg \mathrm{X}ρημα \Rightarrow \mathrm{E}υτυχια)] \Rightarrow [\Delta ουλεια \Rightarrow \neg \mathrm{E}υτυχια]$$

Χρησιμοποιώντας απαρίθμηση (πλήρη πίνακα αληθείας) αποφανθείτε αν η παραπάνω πρόταση είναι έγκυρη, ικανοποιήσιμη (όχι όμως έγκυρη), ή μη ικανοποιήσιμη.

Απάντηση

Συμβολισμός:

- **Δουλειά:** W
- **Χρήμα:** M
- **Ευτυχία:** H

W	**M**	**H**	$\mathbf{W \Rightarrow M}$	$\mathbf{\neg M \Rightarrow H}$	$\mathbf{(W \Rightarrow M) \wedge (\neg M \Rightarrow H)}$	$\mathbf{W \Rightarrow \neg H}$	$\mathbf{[(W \Rightarrow M) \wedge (\neg M \Rightarrow H)] \Rightarrow [W \Rightarrow \neg H]}$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

Η πρόταση είναι ικανοποιήσιμη, καθώς είναι αληθής σε 7 από τα 8 μοντέλα.

Άσκηση 2:

Εκφώνηση

Αποφανθείτε αν ο παρακάτω ισχυρισμός λογικής κάλυψης ισχύει ή όχι.

$$(Q \Rightarrow R) \land (P \Rightarrow Q) \land \neg R \models \neg P$$

Απάντηση

Δημιουργώντας τον πλήρη πίνακα αληθείας παίρνουμε:

Q	**R**	**P**	$\mathbf{Q \Rightarrow R}$	$\mathbf{P \Rightarrow Q}$	$\mathbf{\neg R}$	$\mathbf{(Q \Rightarrow R) \land (P \Rightarrow Q) \land \neg R}$	$\mathbf{\neg P}$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

Παρατηρούμε πως οι 2 τελευταίες στήλες του πίνακα διαφέρουν, δηλαδή υπάρχουν μοντέλα που διαψεύδουν την παραπάνω σχέση, άρα ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

Άσκηση 3:

Εκφώνηση

Σε έναν κόσμο με φοιτητές, μαθήματα και καθηγητές, θεωρήστε τα παρακάτω κατηγορήματα:

- *Student(x):* δηλώνει ότι το αντικείμενο x είναι φοιτητής
- *Course(x):* δηλώνει ότι το αντικείμενο x είναι μάθημα
- *Registered(x, c):* δηλώνει ότι ο x (φοιτητής) είναι εγγεγραμμένος στο c (μάθημα)
- *Teaches(x, c):* δηλώνει ότι ο x (καθηγητής) διδάσκει το c (μάθημα)
- *Exam(x):* δηλώνει ότι το x (μάθημα) έχει εξέταση
- *Easy(x):* δηλώνει ότι το x (μάθημα) είναι εύκολο
- *Happy(x):* δηλώνει ότι ο x (φοιτητής) είναι ευτυχισμένος

(α) Περιγράψτε τα παρακάτω αξιώματα σε λογική πρώτης τάξης.

- Αν ένα μάθημα είναι εύκολο, υπάρχουν φοιτητές εγγεγραμμένοι στο μάθημα που είναι ευτυχισμένοι.
- Αν ένα μάθημα έχει εξέταση, όλοι οι εγγεγραμμένοι στο μάθημα φοιτητές είναι δυστυχισμένοι.
- Ολα τα μαθήματα που διδάσκονται από τον καθηγητή Alan Turing είναι εύκολα.

(β) Χρησιμοποιώντας ανάλυση, αποδείξτε ότι τα μαθήματα που διδάσκει ο κ. Turing δεν έχουν εξέταση

(γ) Καταγράψτε σε φυσική γλώσσα την απόδειξη που προέκυψε.

Απάντηση

(α)

- $\forall c(Course(c) \land Easy(c) \Rightarrow \exists x(Student(x) \land Registered(x, c) \land Happy(x)))$
- $\forall c(Course(c) \land Exam(c) \Rightarrow \forall s(Student(s) \land Registered(s, c) \Rightarrow \neg Happy(s)))$
- $\forall c(Course(c) \land Teaches(AlanTuring, c) \Rightarrow Easy(c))$

(β)

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$\forall c(Course(c) \land Teaches(AlanTuring, c)) \Rightarrow \neg Exam(c)$$

Μετατρέπουμε τις προτάσεις του (α) σε CNF. Άρα έχουμε:

———————————————————————————————————————

$$\forall c(\neg(Course(c) \land Easy(c)) \lor \exists x(Student(x) \land Registered(x,c) \land Happy(x)))$$
$$\equiv \forall c(\neg Course(c) \lor \neg Easy(c) \lor \exists x(Student(x) \land Registered(x,c) \land Happy(x)))$$
$$\equiv \forall c(\neg Course(c) \lor \neg Easy(c) \lor (Student(f(x)) \land Registered(f(x),c) \land Happy(f(x))))$$
$$\equiv \forall c((\neg Course(c) \lor \neg Easy(c) \lor Student(f(x)))$$
$$\land(\neg Course(c) \lor \neg Easy(c) \lor Registered(f(x),c))$$
$$\land(\neg Course(c) \lor \neg Easy(c) \lor Happy(f(x))))$$

———————————————————————————————————————

$$\forall c(Course(c) \land Exam(c) \Rightarrow \forall s(Student(s) \land Registered(s,c) \Rightarrow \neg Happy(s)))$$
$$\equiv \forall c(\neg(Course(c) \land Exam(c)) \lor \forall s(Student(s) \land Registered(s,c) \Rightarrow \neg Happy(s)))$$
$$\equiv \forall c(\neg(Course(c) \land Exam(c)) \lor \forall s(\neg(Student(s) \land Registered(s,c)) \lor \neg Happy(s)))$$
$$\equiv \forall c(\neg Course(c) \lor \neg Exam(c) \lor \forall s(\neg Student(s) \lor \neg Registered(s,c) \lor \neg Happy(s)))$$
$$\equiv \forall c,s(\neg Course(c) \lor \neg Exam(c) \lor \neg Student(s) \lor \neg Registered(s,c) \lor \neg Happy(s))$$

———————————————————————————————————————

$$\forall c(Course(c) \land Teaches(AlanTuring, c) \Rightarrow Easy(c))$$
$$\equiv \forall c(\neg(Course(c) \land Teaches(AlanTuring, c)) \lor Easy(c))$$
$$\equiv \forall c(\neg Course(c) \lor \neg Teaches(AlanTuring, c) \lor Easy(c))$$

———————————————————————————————————————

Το ζητούμενο σε CNF είναι:

$$\forall c(Course(c) \land Teaches(AlanTuring, c) \Rightarrow \neg Exam(c))$$
$$\equiv \forall c(\neg(Course(c) \land Teaches(AlanTuring, c)) \lor \neg Exam(c))$$
$$\equiv \forall c(\neg Course(c) \lor \neg Teaches(AlanTuring, c) \lor \neg Exam(c))$$

και η άρνησή του:

$$\forall c \neg(\neg Course(c) \vee \neg Teaches(AlanTuring, c) \vee \neg Exam(c))$$

$$\equiv \forall c (Course(c) \wedge Teaches(AlanTuring, c) \wedge Exam(c))$$

Άρα ξεκινάμε την ανάλυση:

1. $\neg Course(c) \vee \neg Easy(c) \vee Student(f(x))$
2. $\neg Course(c) \vee \neg Easy(c) \vee Registered(f(x), c)$
3. $\neg Course(c) \vee \neg Easy(c) \vee Happy(f(x))$
4. $\neg Course(c) \vee \neg Exam(c) \vee \neg Student(s) \vee \neg Registered(s, c) \vee \neg Happy(s)$
5. $\neg Course(c) \vee \neg Teaches(AlanTuring, c) \vee Easy(c)$
6. $Course(c)$
7. $Teaches(AlanTuring, c)$
8. $Exam(c)$
9. $Easy(c)$ (Από 5, 6, 7)
10. $Student(f(x))$ (Από 1, 6, 9)
11. $Registered(f(x), c)$ (Από 2, 6, 9)
12. $Happy(f(x))$ (Από 3, 6, 9)
13. $\neg Exam(c)$ (Από 4, 6, 10, 11, 12)
14. $\emptyset$

Καταλήξαμε σε άτοπο, συνεπώς αποδείξαμε το ζητούμενο.

(γ)

Έστω ότι ο Alan Turing διδάσκει μαθήματα τα οποία έχουν εξέταση. Από το 3ο αξίωμα έχουμε ότι τα μαθήματα του Alan Turing είναι εύκολα. Επίσης από το 1ο αξίωμα έχουμε πως αν ένα μάθημα είναι εύκολο, υπάρχουν φοιτητές εγγεγραμμένοι στο μάθημα που είναι ευτυχισμένοι. Συνεπώς υπάρχουν φοιτητές εγγεγραμμένοι σε μαθήματα του Alan Turing που είναι ευτυχισμένοι. Γνωρίζουμε επίσης από το 2ο αξίωμα ότι αν ένα μάθημα έχει εξέταση, όλοι οι εγγεγραμμένοι στο μάθημα φοιτητές είναι δυστυχισμένοι. Συνεπώς δε γίνεται ο Alan Turing να διδάσκει μαθήματα τα οποία έχουν εξέταση καθώς είναι γνωστό ότι υπάρχουν φοιτητές εγγεγραμμένοι σε μαθήματα του που είναι ευτυχισμένοι. Επομένως, τα μαθήματα που διδάσκει ο Alan Turing δεν έχουν εξέταση.