

МАТЛОГ 8.8В

$$\forall x. \forall y. x \in \omega \wedge y \in \omega \implies x' = y' \implies x = y$$

Рассмотрим x, y — ординалы (из ω). Пусть $x' = y'$. Тогда $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$. Есть несколько случаев.

1. $x \in \{y\}$. Тогда немедленно $x = y$, ч.т.д.
2. $y \in \{x\}$. Тогда сразу $y = x$, ч.т.д.
3. Остаётся только $x \in y$ и $y \in x$. Вспомним определение транзитивного множества. Множество A называется транзитивным, если

$$\forall a. \forall b. a \in b \wedge b \in A \implies a \in A$$

Для элементов $z \in x$ в нашем случае это означает, что из $z \in x$ и $x \in y$ следует, что $z \in y$. Таким образом $z \in y$ для любого $z \in x$. Отсюда $x \subset y$. Аналогично $y \subset x$ следует из $y \in x$. Тогда $x = y$, ч.т.д.