Матлог 3.7

Рассмотим линейно-упорядоченное множество $(X, \leqslant)$. Раз у нас все элементы X сравнимы между собой, операции $a \cdot b$ и $a + b$ можно реализовать как

$$a \cdot b = \min\{a, b\}$$

$$a + b = \max\{a, b\}$$

Это значит, что $(X, \leqslant)$ образует решетку.

Наличие $0, 1$ зависит от X. В $\mathbb{R}$ с $\pm\infty$ есть $0, 1$. В $\mathbb{Z}$ их нет.

Дистрибутивность. Проверим

$$a + (bc) = (a + b)(a + c)$$

Другими словами, нужно проверить, что $\max(a, \min(b, c)) = \min(\max(a, b), \max(a, b))$.

1. $a \geqslant \min(b, c)$. Тогда обе части равенства вычислятся как a.

2. $a < \min(b, c)$. Тогда обе части вычислятся как $\min(b, c)$.

Импликативности в общем случае нет.

$$\text{наиб}\{c \mid ac \leqslant b\} = \text{наиб}\{c \mid \min(a, c) \leqslant b\}$$

$\min(a, c) \leqslant b$ означает, что если $a \leqslant b$, то подходит любой $c \geqslant b$. В $\mathbb{Z}$ такого не существует.