Матлог 6.5с

Доказательство в формальной арифметике $\forall p.\forall q.p \cdot q = 0 \implies p = 0 \lor q = 0$. В КИВ выполнено $p \cdot q = 0 \implies p = 0 \lor q = 0 \equiv p \cdot q = 0 \implies \neg p = 0 \implies q = 0$ Поэтому докажем сначала

$$p \cdot q = 0, \neg p = 0 \vdash q = 0,$$

(и потом повесим $\forall p.\forall q.\ldots$)

1. $p \cdot q = 0$
2. $\neg p = 0$
3. $\forall \neg p = 0 \implies \exists s.s' = p$
4. $\forall \neg p = 0 \implies \exists s.s' = p \implies \neg p = 0 \implies \exists s.s' = p$
5. $\neg p = 0 \implies \exists q.q' = p$
6. $\exists q.q' = p$

   Далее следует вывод, в котором для предыдущих утверждений выполнена подстановка $[p = s']$. Теперь докажем такую теорему индукцией по q:

   $$P = s'q = 0 \implies q = 0$$

7. $0 = 0$
8. $0 = 0 \implies (s'0 = 0) \implies 0 = 0$
9. $(s' \cdot 0 = 0) \implies 0 = 0 - P[q = 0]$
10. $P[q = 0] \land (\forall q.P \implies P[q = q']) \implies P$ (привило индукции)

    докажем переход $P \implies P[q = q']$.

11. $s' \cdot q' = s' + s'q$
12. $s' + s'q = (s + s'q)'$
13. $s' \cdot q' = s' + s'q \implies s' + s'q = (s + s'q)' \implies s'q' = (s + s'q)'$ (А1 и свойства "=", которые из неё следуют)
14. $s'q' = (s + s'q)'$
15. $\neg(s + s'q)' = 0$

    тогда следует (неформально)

16. $\neg s'q' = 0$
17. $s'q' = 0 \implies (\neg s'q'0) \implies (q = 0)$ (аксиома 10 в КИВ)

    … тогда

18. $s'q' = 0 \implies q = 0$
19. $P \implies s'q' = 0 \implies q = 0$