

## МАТЛОГ 4(В)

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

Это решение опирается на закон об исключенном третьем, который тут не доказывается.

1.  $\alpha_1 \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
2.  $\alpha_1 \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
3.  $\neg \alpha_1 \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)$  (это доказанная схема  $\neg \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$ )
4.  $\neg \alpha_1 \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
5.  $(\alpha_1 \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)) \rightarrow (\neg \alpha_1 \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)) \rightarrow (\neg \alpha \vee \alpha) \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
6.  $(\neg \alpha \vee \alpha) \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
7.  $(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
- 6 + n  $((\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)) \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
- 7 + n  $(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$

Если считать  $\vee$  по правилу левой ассоциативности, то для формального обоснования двух последних шагов достаточно доказать следующую схему:

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \vee \beta$$

1.  $\alpha \rightarrow \alpha \vee \gamma$
2.  $\alpha \vee \gamma \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \vee \beta$
3.  $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \vee \beta$  (транзитивность  $\rightarrow$  к предыдущим двум)
4.  $\gamma \rightarrow \alpha \vee \gamma$
5.  $\gamma \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \vee \beta$  (транзитивность  $\rightarrow$  к 4 и 2)
6.  $\beta \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \vee \gamma$
7.  $(3) \vee (5) \vee (\alpha \vee \beta \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \vee \beta)$ .
8.  $\alpha \vee \gamma \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \vee \beta$  (МР с 2,3 и предыдущим)
9.  $(8) \rightarrow (6) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \rightarrow \beta$
10.  $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \rightarrow \beta$
11.  $(\alpha \vee \gamma) \rightarrow \beta$  (МР с гипотезой)

Теперь на каждом шаге процесса из

$$((\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots (\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1})) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$$

получается по схеме добавления  $\vee$

$$[((\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots (\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1})) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)] \vee (\alpha_{i+1} \rightarrow \alpha_{i+2})$$

и по новодоказанной схеме имеем

$$((\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots (\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1}) \vee (\alpha_{i+1} \rightarrow \alpha_{i+2})) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$$

что и требовалось для перехода.