Матлог 4(в)

$$(A \to B) \vee (B \to A)$$

Это решение опирается на закон об исключенном третьем, который тут не доказывается.

1. $\alpha_1 \to (\alpha_n \to \alpha_1)$
2. $\alpha_1 \to (\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)$
3. $\neg\alpha_1 \to (\alpha_1 \to \alpha_2)$ (это доказанная схема $\neg\alpha \to \alpha \to \beta$)
4. $\neg\alpha_1 \to (\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)$
5. $(\alpha_1 \to (\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)) \to (\neg\alpha_1 \to (\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)) \to (\neg\alpha \vee \alpha) \to (\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)$
6. $(\neg\alpha \vee \alpha) \to (\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)$
7. $(\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)$

$6 + n$ $((\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)) \to (\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_2 \to \alpha_3) \vee \ldots \vee (\alpha_n \to \alpha_1)$

$7 + n$ $(\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_2 \to \alpha_3) \vee \ldots \vee (\alpha_n \to \alpha_1)$

Если считать $\vee$ по правилу левой ассоциативности, то для формального обоснования двух последних шагов достаточно доказать следующую схему:

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \to (\alpha \vee \gamma) \vee \beta$$

1. $\alpha \to \alpha \vee \gamma$
2. $\alpha \vee \gamma \to (\alpha \vee \gamma) \vee \beta$
3. $\alpha \to (\alpha \vee \gamma) \vee \beta$ (транизитивность $\to$ к предыдущим двум)
4. $\gamma \to \alpha \vee \gamma$
5. $\gamma \to (\alpha \vee \gamma) \vee \beta$ (транизитивность $\to$ к 4 и 2)
6. $\beta \to (\alpha \vee \gamma) \vee \gamma$
7. $(3) \vee (5) \vee (\alpha \vee \beta \to (\alpha \vee \gamma) \vee \beta)$.
8. $\alpha \vee \gamma \to (\alpha \vee \gamma) \vee \beta$ (MP с 2,3 и предыдущим)
9. $(8) \to (6) \to (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \to (\alpha \vee \gamma) \to \beta$
10. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \to (\alpha \vee \gamma) \to \beta$
11. $(\alpha \vee \gamma) \to \beta$ (MP с гипотезой)

Теперь на каждом шаге процесса из

$$((\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_2 \to \alpha_3) \vee \ldots (\alpha_i \to \alpha_{i+1})) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)$$

получается по схеме добавления $\vee$

$$[((\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_2 \to \alpha_3) \vee \ldots (\alpha_i \to \alpha_{i+1})) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)] \vee (\alpha_{i+1} \to \alpha_{i+2})$$

и по новодоказанной схеме имеем

$$((\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_2 \to \alpha_3) \vee \ldots (\alpha_i \to \alpha_{i+1}) \vee (\alpha_{i+1} \to \alpha_{i+2})) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)$$

что и требовалось для перехода.