Матлог 6.5в

Докажем по индукции по p.

- База. $p = 0$, тогда $p = 0 \vee (\exists q.q' = p)$.
- Переход. Пусть $p = 0 \vee (\exists q.q' = p)$. Тогда для p' $q = p$ и $q' = p'$ (A2).

Доказательство в формальной арифметике: $P = p = 0 \vee \exists q.q' = p$

1. $0 = 0$ (теорема)
2. $0 = 0 \implies 0 = 0 \vee \exists q.q' = 0$ (добавление "или" к 1)
3. $0 = 0 \vee \exists q.q' = 0 - P[p = 0]$ (MP1,2)
4. $p' = p'$ (теорема) $- (q' = p')[q = p]$
5. $(q' = p')[q = p] \implies \exists q.q' = p'$ (аксиома 12)
6. $\exists q.q' = p'$ (MP 4,5)
7. $\exists q.q' = p' \implies (\exists q.q' = p') \vee p' = 0$ (добавление "или" к 6)
8. $(\exists q.q' = p') \vee p' = 0 - P[p = p']$ (MP 6,7)
9. $P[p = p'] \implies 0 = 0 \implies P[p = p']$ (аксиома 1)
10. $0 = 0 \implies P[p = p']$ (MP)
11. $(0 = 0 \implies P[p = p']) \implies 0 = 0 \implies \forall p.P[p = p']$ (правило для $\forall$)
12. $\forall p.P[p = p']$ (MP)
13. $P[p = 0] \implies \forall p.P[p = p'] \implies (P[p = 0] \wedge \forall p.P[p = p'])$ (введение "и")
14. $P[p = 0] \wedge \forall p.P[p = p']$ (MP дважды)
15. $P[p = 0] \wedge \forall p.P[p = p'] \implies P$ (правило индукции)
16. P
17. $0 = 0 \implies P$
18. $(0 = 0 \implies P) \implies (0 = 0 \implies \forall p.P)$
19. $0 = 0 \implies \forall p.P$
20. $\forall p.P$