Матлог, лекции

1 Введение

Логика — довольно старая наука, но наш предмет довольно молодой. В какой-то момент логики как дисциплины, которая учит просто правильно рассуждать, стало нехватать. Появилась теория множеств и общего здравого смысла оказалось не достаточно, нужен строгий математичесий язык. Это рубеж 19-20 веков.

Теория множеств, когда она была впервые сформулирована, была противоречива (как матан, сформулированный Ньютоном). Чтобы уверенно и эффективно заниматься матаном, нужно суметь его формализовать.

Парадокс Рассела или парадокс брадобрея — один пример парадокса в наивной теории множеств. Определим множество

$$A = \{X | X \notin X\}$$

Вопрос, принадлежит ли само A множеству A, неразрешим, оба варианта ответа (принадлежит / не принадлежит) приводят к противоречию с определением A.

У этого парадокса есть другая формулировка. На острове брадобрей бреет всех, кто не бреется сам. Вопрос — бреется ли брадобрей сам себя?

Мы приписываем элементу-человеку свойство, которое невыполнимо. Обьекта, выходит, не существует. Мы смогли очень быстро определить противоречие в этом определении. Но, может быть, мы не смогли его определить в других наших определениях (конструкциях вещественной прямой, и т.д и т.д)?

В связи с этим была сформулирована программа Гильберта:

1. Формализуем математику! Сформулируем теорию на языке (не на русском или английском), который не будет допускать парадоксов,

2. ... и на котором можно будует доказать непротиворечивость.

В 1930 году становится понятно, что про сколько-нибудь сильную теорию (т.е ту, в которой можно построить формальную арифметику) нельзя доказать, что она непротиворечивая.

Возможно, сама наша логика неправильная? Эта идея будет нам полезна, и к ней мы ещё вернемся.

Возможно, что недоказуемость непротиворечивости — просто свойство нашего мира, и мы хотим невозможного.

Из этих рассуждений выросло большое множество хороших идей, которые оказались полезны и в других местах.

Матлогика служит широкому кругу нужд. Мы можем доказывать, что программа работае корректно. Именно доказывать, а не проверять тестами!

Мы можем изучать свойства самих языков. Изоморфизм Карри-Говарда— доказательство это программа, утверждения это тип. Можно изучать языки программирования и можно развернуть изоморфизм: изучать математкиу как язык программирования.

Функциональные языки: Ocaml + Haskell. Ознакомление с этими языками преставляет собой способ ознакомиться с предметом немного с другой стороны.

2 Исчисление высказываний

Мы говоирм на двух языках: на предметном языке и метаязыке. Предметный язык — это то, что изучается, а метаязык — это язык, **на** котором это изучается.

На уроках английского предметным является сам английский, а метаязыком может быть русский. Метаязык — это язык исследователя, а предметный язык — это язык исследоваемого. Что такое язык вообще? Хороший вопрос.

Высказывание — это одно из двух:

1. Большая латниская буква начала алфавита, возможно с индексами и штрихами — это пропозициональные переменные;

2. Выражение вида $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\neg\alpha)$.

В определении выше α и β это метапеременные — места, куда можно подставить высказывание.

1. α, β, γ — метапеременные для всех высказываний;

2. X, Y, Z — метапеременные для пропозициональных переменных.

Метапеременные являются частью языка исследователя.

В формализации мы останавливаемся до места, в котором мы можем быть уверены, что сможем написать программу, которая всё проверяет.

Сокращение записи, приоритет операций: сначала $\neg$, потом $\&$, потом $\vee$, потом $\rightarrow$. Если скобки опущены, мы восстанавливаем их по приоритетам. Выражение без скобок является частью метаязыка и становится частью предметного, когда мы восстанавливаем их. Скобки последовательных импликаций расставляются по правилу правой ассоциативности — справа налево.

2.1 Теория моделей

У нас есть истинные значения $\{T, F\}$ в классической логике. И есть оценка высказываний $[\![\alpha]\!]$. Например $[\![A \vee \neg A]\!]$ истинно. Всё, что касается истинности высказываний, касается теории моделей.

Определение 1. Оценка — это функция, сопоставляющая высказыванию его истинное (истинностное) значение.

2.2 Теория доказательств

Определение 2. Аксиомы — это список высказываний. Схема аксиомы — высказывание вместе с метопеременными; при любой подстановке высказываний вместо метапеременной получим аксиому.

Определение 3. Доказательство (вывод) — последовательность высказываний $\gamma_1, \gamma_2 \dots$ где γ_i— любая аксиома, либо существуют $j, k < i$ такие что $\gamma_j \equiv (\gamma_k \rightarrow \gamma_i)$. (знак $\equiv$ здесь сокращение для "имеет вид"). Это правило "перехода по следствию" или Modus ponens.

Определим следующие 10 схем аксиом для того исчисления высказываний, которое мы рассматриваем.

1. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ — добавляет импликацию;
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ — удаляет импликацию;
3. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ — удаляет конъюнкцию;
4. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$;
5. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$ — добавляет конъюнкцию
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ — добавляет дизъюнкцию
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$;
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)$ — добавляет отрицание
10. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ — снимает двойное отрицание (очень спорная штука).

Вывод простого утверждения $A \rightarrow A$ выглядит вот так:

1. $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$ (сх. 1)
2. $A \rightarrow A \rightarrow A$ (сх. 1)
3. $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (сх. 2)
4. $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (M.P. 2, 3)
5. $A \rightarrow A$ (M.P. 1, 3)

3 Теорема о дедукции

Определение 4. (Метаметаопределение). Будем большими греческими буквами $\Gamma, \Delta, \Sigma \dots$ — списки формул, неупорядоченные.

Определение 5. Вывод из гипотез: $\Gamma \vdash \alpha$ (см. лекцию 1)

Теорема 1. $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$.

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n \equiv \alpha \to \beta$ выводит $\alpha \to \beta$. Дополним этот вывод двумя новыми высказываниями: $\delta_{n+1} \equiv \alpha$ (дано нам в гипотезе), $\gamma_{n+2} \equiv \beta$ (MP шагов n, $n+1$) — это и требовалось.

- Напишем программу, которая трансформирует один вывод в другой. Инвариант, который мы будем поддерживать: всё до $\alpha \to \delta_i$ — док-во. Доказательство индукцией по n.

  1. База: $n = 1$ — без комментариев.
  2. Если $\delta_1, \dots, \gamma_n$ можно перестроить в доказательство $\alpha \to \gamma_n$, то $\gamma_1 \dots \gamma_{n+1}$ тоже можно перестроить. Разберём случаи:

     – δ_i — гипотеза из Г. Тогда

     $(i - 0.1)$ δ_i (аксиома или гипотеза)

     $(i - 0.2)$ $\delta_i \to \alpha \to \delta_i$ (схема 1)

     (i) $\alpha \to \delta_i$ (MP)

     ДОПОЛНИТЬ

□

4 Теория моделей

Мы можем докаывать модели или оценивать их. "Мы можем доказать, что мост не развалится или можем выйти и попрыгать на нём."

Определение 6. $\mathbb{V}$ — истинностное множество.
F — множество высказываний нашего исчисления высказываний.
P — множество пропозициональных переменных.

$$[\![\cdot]\!] : F \to \mathbb{V} \text{ — оценка}$$

Определение 7. Для задания оценки необходимо задать оценку пропозициональных переменных.

$$[\![\cdot]\!] : P \to \mathbb{V} \quad f_P$$

Тогда:

$$[\![x]\!] = f_p(x)$$

Замечание 1. Обозначение: значения пропозициональных переменных будем определять в верхнем индексе: $[\![\alpha]\!]^{A=T, B=F \dots}$

Определение 8. α — общезначна (истинна), если $[\![\alpha]\!] = T$ при любой оценке P.
α — невыполнима (ложна), если $[\![\alpha]\!] = F$ при любой оценке P.
α — выполнима, если $[\![\alpha]\!] = T$ при некоторой f_P.
α — опровержима, если $[\![\alpha]\!] = F$ при некоторой f_P.

Определение 9. Теория корректна, если доказуемость влечёт общезначимость.
Теория полна, если общезначимость влечёт доказуемость.

Определение 10. $\Gamma \vDash \alpha$, α следует из $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, если $[\![\alpha]\!] = T$ всегда при $[\![\gamma_i]\!] = T$ при любых i.

Теорема 2. Исчисление высказываний корректно

$$\vdash \alpha \text{ влечёт } \vDash \alpha$$

Мы даём доказательство на метаязыке, не пускаясь в отчаянный формализм. Такая строгость нас устраевает.

Доказательство. Индукция по длине доказательства. Не очень сложно. □

В матлогике бесмысленно формализовывать русский язык. Она нужна, чтобы дать ответы на сложные вопросы в математике, где здравого смысла недостаточно и нужна формализация.

5 Полнота исчисления высказываний

Теорема 3. Исчисление высказываний полно.

Определение 11. ${}_{[\beta]}\alpha = \begin{cases} \alpha, & [\![\beta]\!] = T \\ \neg\alpha, & [\![\beta]\!] = F \end{cases}$

Лемма 3.1. ${}_{[\alpha]}\alpha,\ {}_{[\beta]}\beta \vdash_{[\alpha\star\beta]} \alpha \star \beta$
${}_{[\alpha]}\alpha \vdash_{[\neg\alpha]} \neg\alpha$

Лемма 3.2. Если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma, \Delta \vdash \alpha$.

Лемма 3.3. Пусть дана α, $X_1, \ldots, X_n$ — её переменные.

$${}_{[X_1]}X_1, \ldots {}_{[X_n]}X_n \vdash_{[\alpha]} \alpha$$

Доказательство. Индукция по структуре. ДОПОЛНИТЬ □

Сократим запись и вместо этой кучи X будем писать X'.

Лемма 3.4. Если $\vDash \alpha$, то $X' \vdash \alpha$.

Лемма 3.5.

$$\Gamma, Y \vdash \alpha, \quad \Gamma, \neg Y \vdash, \text{ то } \Gamma \vdash \alpha$$

Теорема 4. Если $\vDash \alpha$, то $\vdash \alpha$.

6 Интуиционистская логика

Мы не хотим дурацких коснтрукций вроде парадокса брадобрея. Мы не хотим странных, но логически верных утверждений вроде $A \to B \vee B \to A$. Интуиционисткая логика предлагает свою математику, в которой своя интерпретация логических связок. ВНК-интерпретация (Брауер-Гейтинг-Колмогоров).

- $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ — это конструкции.
- $\alpha \wedge \beta$ если мы умеем строить и α, и β.
- $\alpha \vee \beta$, если мы умеем строить α, β и знаем, что именно.
- $\alpha \to \beta$, если мы умеем перестроить α в β.
- $\perp$ — не имеет построения
- $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$

"Теория доказательств". Рассмотрим классическое исчисление высказываний и заменим схему аксиом 10 на следующую

$$\alpha \to \neg\alpha \to \beta$$

В этой формализации мы следуем не сути интуиционисткой логики, а традиции. В интуиционисткой логике формализм это не источник логики.

Примеры моделей.

1. Модели КИВ подходят: корректны, но не полны.
2. Пусть X топологическое пространство.

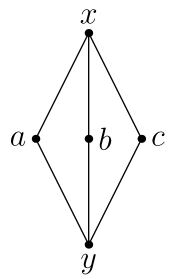

Рис. 1: Решетка, в которой для a, b не определено псевдодополнение

7 Общая топология

Определение 12. Топологическим пространством называется упорядоченная пара (X, Ω), $\Omega \subset 2^X$, причем выполнено

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. $\bigcup A_i \in \Omega$ если $\forall i\ A_i \in \Omega$
3. $\bigcap_n A_i \in \Omega$, если $\forall i\ A_i \in \Omega$

Определение 13. Связным топологическим пространством называется такое топ. пространство (X, Ω), в котором нет $A, B \in \Omega$ таких, что $A \cup B = X$ и $A \cap B = \emptyset$.

Определение 14. Подпространством пространства (X, Ω) называется топологическое пространство (X_1, Ω_1), где $X_1 \subset X$ и $\Omega_1 = \{A \cap X_1 \mid A \in \Omega\}$. Это подпр-во так же называется индуцированным подпространством.

Определение 15. Подмножество (Y) пр-ва $((X, \Omega))$ называется связным, если связно индуцированное им подпространство.

Пример топологии на (подвешенном) лесе. Теорема: лес связен титт., когда он связен как топ. пространство.

Определение 16. Рассмотрим частично-упорядоченное множество X, $(X, \leqslant)$. Решеткой называется. . ..

Пример: топологическое пространство с порядком по включению является решеткой. Антипример: произвольное дерево не является решеткой.

Определение 17. Дистрибутивной решеткой называется такая решетка, в которой

$$(a + b)c = ac + bc \quad a + bc = (ab) + (ac)$$

(Теорема . . .)

Определение 18. Псевдодополнение $a \to b$ это наибольший c из всех таких c, что $ac \leqslant b$.

Решетка, в которой псевдодополнение определено для всех пар элементов, называется импликативной.

Определение 19. Ноль 0 и единица 1 — это нейтральные элементы операций + и $\cdot$ одновременно.

Теорема 5. Рассмотрим импилкативную решетку $(X, \leqslant)$ с 0. Рассмотрим интуиционисткое исчисление высказываний, определим оценку следующим образом: $[\![\alpha \wedge \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cdot [\![\beta]\!]$, $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] + [\![\beta]\!]$, $[\![\alpha \to \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \to [\![\beta]\!]$, $[\![\neg\alpha]\!] = [\![\alpha]\!] \to 0$.

Исчисление высказываний с которым мы работали называется исчислением гильбертовского типа — очень много аксиом и практически одно правило вывода, и это несколько неудобно, как мы увидели. Не мы одни такие умные. Люди придумали что-то ещё. Полноты ради секвенциальное исчисление будет обсуждаться в конце, если останется время.

Теперь мы обсудим кое-что ещё. Доказательства в этой системе рисуются в виде дерева, в отличиии от длинного списка, как получается в гильбертовском исчислении. Вид док-ва: $\Gamma \vdash \varphi$.

Схемы:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}, \quad \frac{\Gamma, \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \varphi}, \quad \frac{\Gamma, \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}, \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \quad \Gamma, \psi \vdash \rho \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \rho}, \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}.$$

8 Алгебра Гейтинга

Определение 20. Алгебра Гейтинга — это импилкативная решетка с 0.

Определение 21. $\neg a \equiv a \to 0$.

Определение 22. Булева алгебра — алгебра Гейтинга, где $a + \neg a = 1$.

Пример.

Определение 23. $\alpha \preccurlyeq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$.

Определение 24. $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \preccurlyeq \beta$ и $\beta \preccurlyeq \alpha$.

Определение 25. Пусть E — множество всех высказываний ИИВ. Тогда $[E]_{\approx}$ — фактор-множество высказываний по отношению $\approx$, называется алгеброй Линденбаума, L.

Теорема 6. Алгебра Линденбаума — это алгебра Гейтинга.

Теорема 7. L — полная и корректная модель ИИВ.

Теорема 8. Алгебра Гейтинга — полная и корректная модель ИИВ.

Определение 26. Исчисление дизьюнктно, если для любых α, β доказуемость $\alpha \vee \beta$ влечет доказуемость или α или β.

Теорема 9. ИИВ дизьюнктно.

Определение 27. Пусть A, B — алгебры Гейтинга. f называется гомоморфизмом, если $f(0_A) = 0_B$, $f(1_A) = 1_B$, $f(\alpha \star_A \beta) = f(\alpha) \star_B f(\beta)$.

Определение 28. Гёделева алгебра — та, в которой $a + b = 1$ влечёт $a = 1$ или $b = 1$.

Определение 29. Пусть A — алгебра Гейтинга. Определим $\Gamma(A)$. $\gamma(x) = \begin{cases} \omega, & x = 1_A \\ x, & x < 1_A \end{cases}$. Добавим 1_B, которое больше каждого $\gamma(t)$.

Теорема 10. $\Gamma(A)$ — гёделева алгебра. В этой алгебре $\Gamma(A)$ выполнено $a + b = 1$ влечёт $a = 1$ или $b = 1$.

Теорема 11. $\Gamma(L)$ гёделева.

Определим $\gamma : \Gamma(L) \to L : \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \text{ или } x = \omega \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$. Утверждается, что это гомоморфизм.

Рассмотрим ИИВ и алгебры $L, \Gamma(L)$. Рассмотрим $\vdash \alpha \vee \beta$. $\Gamma(L)$ — геделева алгебра, т.е алгебра Гейтинга.

...

Определение 30. Модель ИИВ называется табличной, если множество истиностных значений $V = S$, $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_\star([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$. и есть два значения, выделенная истинна И, и $[\![\alpha]\!] =$ И в том и только том случае, когда $\vDash \alpha$.