ДМ, лекции

Последний семестр дискретной математики. Две больших темы: производящие функции (комбинаторика) и введение в теорию вычислимости.

1 Производящие фукнции

Рассмотрим последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\ltimes} \subset \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Назовём эти последовательности A и B и будем почленную сумму обозначать кратко $A + B$. Это несколько неудобно и неестественно, об этих конвенциях нужно договариваться.

Вместо этого давайте рассмотрим формальный степенной ряд, у которого члены последовательности это коэффициенты ряда.

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots a_n t^n + \dots$$

Тогда почленная сумма последовательностей будет соотвествовать обычной сумме рядов $A(t) + B(t)$.

Чтобы сдвинуть последовательность на 1 вправо, можно просто умножить степенной ряд на x.

Можем рассмотреть степенной ряд-композицию $A(t^2) = a_0 + 0t + a_1 t^2 + \dots$. Это степенной ряд, соответвующий последовательности $a_0, 0, a_1, 0, a_2 \dots$.

Таким образом, мы можем "оперировать" над последовательностью как единым целым, и это очень удобно.

Мы не рассматриваем степенные ряды с стороны, с которой на них смотрит мат. анализ: как способ приблизить фукнцию, с некоторым радиусом сходимости и т.д. У нас степенные ряды *формальные* и не всегда (всегда не) должны пониматься как функции, в которой в переменную можно подставить значение.

$\mathbb{R}[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из кольца R, состоящий из формальных многочленов. $\mathbb{R}[x]^+$ — множество формальных степенных рядов.

Определение 1. Формальный степенной ряд $A(t)$ последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется производящей функцией (generating function).

Название неудачное. Оно связано с другими корнями понятия производящей функции (они нужны не только в комбинаторике).

Определена сумма производящих функций и произведение

$$A(t)B(t) = C(t) \quad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Несмотря на то, что мы работаем с бесконечным по размеру обьектом, нам необходимо только конечное число элементов, чтобы посчитать каждый отдельынй его член. Этот раздел дискретной математики не любит предельных переходов.

Определено умножение на скаляр.

$$\lambda A(t) = C(t) \quad c_n = \lambda a_n$$

Определено даже деление!

$$\frac{A(t)}{B(t)} = C(t);\ b_0 \neq 0 \quad c_n = \frac{a_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i b_{n-i}}{b_0}$$

Так можно посчитать, например, что

$$C(t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots t^n + \dots; \quad a_n = 1$$

Мы записали короткой (конечной) производящей функцией бесконечную последовательность. Более того, мы можем эту запись взять и производить с ней операции (умножать и складывать с другими производящими функциями).

$$\frac{1}{1-2t} = 1 + 2t + 4t^2 + \ldots + 2^n t^n; \quad c_n = 2^n$$

Обобщая мы видим, что

$$\frac{1}{1-bt} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n t^n = C(bt)$$

Вообще говоря,

$$A(t) = \sum a_n t^n \quad A(bt) = \sum a_n b^n t^n$$

Замечание 1. Если $b_0 = \pm 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, тогда $C = \frac{A}{B}$ с целочисленными коэффициентами $c_i \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{1}{1-t-t^2} = 1 + t + 2t^2 + \ldots + F_n t^n + \ldots$$

Мы одной дробью породили целую последовательность Фиббоначи!

А как быть, если мы хотим взять последовательность и найти представление для её производящей функции? Мы можем поступить так.

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Отсюда $F(t) + F(t)t = \frac{F(t)-1}{t}$ (следует из операций над производящими функциями и рекурентным соотношением последовательности фиббоначи).

А что с дифференцированием? Обыкновенная операция взятия производной (формального) степенного ряда позволяет нам умножать член последовательности на его номер.

$$A(t) \to A(t)' \cdot t$$

Эту операцию можно производить многократно, получая последовательноть членов исходной п-ти в k степени.

Как найти представление производящей функции для последовательности $a_n = n$?

$$a_n = n * 1$$

Производящая функция для п-ти единиц это $\frac{1}{1-t}$. Тогда

$$A(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)' t = \frac{t}{(1-t^2)}$$

Формальное деление это подтверждает.

А что с интегрированием? С интегрированием всё не очень мило.

А что с композицией?

$$C(t) = A(B(t))$$

Здесь много проблем доставляет свободый коэффициент у B. Давайте его уберем — $b_0 = 0$. Теперь мы можем посчитать

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{n=i_1+i_2+\ldots i_k} b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_k}$$

Пример с доминошками.

Пример с деревьями.