Матан, лекции

1 Повторение

Задачи и темы, которые мы будем обсуждать в новом семестре: многообразия, дифференциальные формы на них, криволинейные интегралы, интегралы от параметров, формула Стокса, формула Остроградского, γ-, β-функции.

Интеграл от функции произвольного знака это разность интегралов компонент. В случаях, когда оба слогаемых не бесконечные, такая разность имеет смысл.

Интеграл комплекснозначной функции это сумма интегралов вещественных компонент функции.

$$\int_E f d\mu = \int_E \Re f d\mu + \int_E \Im f d\mu$$

Монотонность интеграла.

$$\int_E (f_1 + f_2) \geqslant \int_E f_1 = \infty$$

Теорема 1 (Теорема Леви для последовательности)**.** Если f_n неотрицательные измеримые на E функции и $f_n \uparrow f$ возрастая сходится поточечно к f, то

$$\lim \int_E f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu = \int f d\mu$$

Теорема 2 (Теорема Леви для рядов)**.** Если f_n неотрицательные измеримые на E функции, то интеграл от ряда совпадает с суммой ряда из интегралов.

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ — частичная сумма. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ □

Пример 1. Функция, которая не удовлетворяет условиям теоремы Леви:

$$f_k(x) = \xi_{[k,k+1]}(x)$$

$$\int_{[0,+\infty]} f_k(x) d\mu = \int_{[k,k+1]} f_k(x) d\mu = 1$$

$$\int f(x) d\mu = \int_{[0,+\infty]} 0 d\mu = 0$$

Замечание 1.

1. Для $f \in S(E)$ $|f| \in L(E,\mu)$ тогда и только тогда, когда $f \in L(E,\mu)$.
2. Если интеграл $\int_E f d\mu$ определен, то $\int_E |f| d\mu \geqslant |\int_E f d\mu|$.

Доказательство. □

Отсутпление про суммируемую мажоранту.

Если функция имеет суммируемую мажоранту, то сама она является суммируемой.

... $L_1(E,\mu)$: две функиции эквивалентны по мере на E, если они совпадают почти везде на E. Другими словами, мера подмножества E, на котором функции принимают разные значения, равна нулю.

$$\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$$

.

Элементы $L_1(E,\mu)$ могут быть определены не на всём E целиком, но на множестве полной меры.

$$|f + g| \leqslant |f| + |g|$$

Эта норма невырожденная. Если $f \in S_+(E)$ и $\int f\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

Теорема 3 (Счётная аддитивность интеграла)**.** Пусть $f \in S(E)$ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in ?$, определн $\int_E f d\mu$. Тогда

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$$

Доказательство. ... □

Теорема 4 (О приближении интеграла интегралом по множеству конечной меры)**.** Пусть мера E конечна и $f \in L(E, \mu)$ суммиурема. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists E_0 \subset E : \mu(E_0) < +\infty \text{и} \int_{E \setminus E_0} |f| d\mu < \epsilon$$

Доказательство. Не умаляя общности $f \geqslant 0$ на E. Продложим f нулем вне E. $J(A) = \int_A f d\mu$— мера. $E_K = E\{f > \frac{1}{k}\}$, $E_* = E\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Непрерывность меры снизу E_k — множества конечной меры.

Научились приближать с любой точностью интеграл интегралом по множествам конечной меры. □

Теорема Фато и теорема Лебега.

Теорема 5. Пусть f_k
$inS_+(E)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\underline{\lim}_{k \in \infty} \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$.

И если $f_k(x) \to f(x)$ на E, то $\int_E f(x) \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$

Теорема 6 (Теорема Лебега о мажорированной сходимости)**.** Пусть $f_n \to f$ сходится почти везде на E и $\Phi \in L(E, \mu)$: $\forall k \in \mathbb{N} |f_k| \leqslant \Phi$ почти везде на E. Тогда $f \in L(E, \mu)$ и $\lim_{k \to \infty} \int_E f d\mu$.