Матлог, лекции

Мы начнём с паросочетаний и потоков.

1 Паросочетания

Паросочетание графа — это набор его ребер, не имеющих общих вершин.

Паросочетания в двудольных графах ищутся гораздо проще, чем в произвольных. Алгоритмы решают эту задачку понемногу. Берется маленькое (пустое) паросочетание и расширяется с помощью дополняющих цепочек.

Дополняющая цепочка — это путь, который начинается и заканчивается в вершинах вне паросочетания, и ребра в нём чередуются (принадлежит - не принадлежит пар. сочетанию). Из такой цепочки можно получить паросочетание большего размера (на 1).

Алгоритм начинает строить цепочки и удаляет дополняющие цепочки такой заменой.

Теорема 1. В графе нет дополняющего пути тогда и только тогда, когда паросочетание максимально.

Это утверждение сформулировано для произвольных графов: для двудольных и не очень. А в чём проблема? Проблема в поиске дополняющих путей.

В двудольном графе это делается просто. Это алгоритм Куна.

Двудольный граф можно хранить не как нормальный граф. "Алгоритм КУНА. Это не связано с аниме никак!" "Код, на самом деле, за пять копеек." Асимптотика: $O(nm)$.

Алгоритм никогда не освобождает вершины — если вершшина попала в пар. соч., она там останется, можно dfs из неё не запускать. Чуть сложнее: если dfs однажда не нашел доп. пути из одной вершины, он никогда его не найдёт — можно его не запускать.

Немного о полных сочетаниях.

Теорема 2. В двудольном графе $G_{n,n}$ существует полное паросочетание в том и только том случае, когда для любого подмножества A вершин одной доли выполнено $|N(A)| \geqslant |A|$.

Паросочетания позволяют решать кучу прикольных задач.

Вершинное покрытие

Вершинное покрытие в графе — это набор вершин, таких, что никаие две вершины не лежат на одном ребре. Это понятие двойственное понятию паросочетания. Мы ищем минимальное по мощности вершинное покрытие. Это NP-полная задача в произвольном графе. В двудольном, однако, всё очень мило.

Размер покрытия в графе всегда не превосходит размер вершинного покрытия: $M \leqslant S$.