Матлог, лекции

1 Теорема о дедукции

Определение 1. (Метаметаопределение). Будем большими греческими буквами $\Gamma, \Delta, \Sigma \dots$ — списки формул, неупорядоченные.

Определение 2. Вывод из гипотез: $\Gamma \vdash \alpha$ (см. лекцию 1)

Теорема 1. $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$.

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n \equiv \alpha \to \beta$ выводит $\alpha \to \beta$. Дополним этот вывод двумя новыми высказываниями: $\delta_{n+1} \equiv \alpha$ (дано нам в гипотезе), $\gamma_{n+2} \equiv \beta$ (MP шагов n, $n+1$) — это и требовалось.

- Напишем программу, которая трансформирует один вывод в другой. Инвариант, который мы будем поддерживать: всё до $\alpha \to \delta_i$ — док-во. Доказательство индукцией по n.

  1. База: $n = 1$ — без комментариев.
  2. Если $\delta_1, \dots, \gamma_n$ можно перестроить в доказательство $\alpha \to \gamma_n$, то $\gamma_1 \dots \gamma_{n+1}$ тоже можно перестроить. Разберём случаи:

     – δ_i — гипотеза из Γ. Тогда

     $(i - 0.1)$ δ_i (аксиома или гипотеза)

     $(i - 0.2)$ $\delta_i \to \alpha \to \delta_i$ (схема 1)

     (i) $\alpha \to \delta_i$ (MP)

     ДОПОЛНИТЬ

∎

2 Теория моделей

Мы можем докаывать модели или оценивать их. "Мы можем доказать, что мост не развалится или можем выйти и попрыгать на нём."

Определение 3. $\mathbb{V}$ — истинностное множество.
F — множество высказываний нашего исчисления высказываний.
P — множество пропозициональных переменных.

$$[\![\cdot]\!] : F \to \mathbb{V} \text{ — оценка}$$

Определение 4. Для задания оценки необходимо задать оценку пропозициональных переменных.

$$[\![\cdot]\!] : P \to \mathbb{V} \quad f_P$$

Тогда:

$$[\![x]\!] = f_p(x)$$

Замечание 1. Обозначение: значения пропозициональных переменных будем определять в верхнем индексе: $[\![\alpha]\!]^{A=T,B=F\dots}$

Определение 5. α — общезначна (истинна), если $[\![\alpha]\!] = T$ при любой оценке P.
α — невыполнима (ложна), если $[\![\alpha]\!] = F$ при любой оценке P.
α — выполнима, если $[\![\alpha]\!] = T$ при некоторой f_P.
α — опровержима, если $[\![\alpha]\!] = F$ при некоторой f_P.

Определение 6. Теория корректна, если доказуемость влечёт общезначимость.
Теория полна, если общезначимость влечёт доказуемость.

Определение 7. $\Gamma \vDash \alpha$, α следует из $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, если $[\![\alpha]\!] = T$ всегда при $[\![\gamma_i]\!] = T$ при любых i.

Теорема 2. Исчисление высказываний корректно

$$\vdash \alpha \text{ влечёт } \vDash \alpha$$

Мы даём доказательство на метаязыке, не пускаясь в отчаянный формализм. Такая строгость нас устраевает.

Доказательство. Индукция по длине доказательства. Не очень сложно. $\square$

В матлогике бесмысленно формализовывать русский язык. Она нужна, чтобы дать ответы на сложные вопросы в математике, где здравого смысла недостаточно и нужна формализация.

3 Полнота исчисления высказываний

Теорема 3. Исчисление высказываний полно.

Определение 8. ${}_{[\beta]}\alpha = \begin{cases} \alpha, & [\![\beta]\!] = T \\ \neg\alpha, & [\![\beta]\!] = F \end{cases}$

Лемма 3.1. ${}_{[\alpha]}\alpha,\ {}_{[\beta]}\beta \vdash_{[\alpha\star\beta]} \alpha \star \beta$
${}_{[\alpha]}\alpha \vdash_{[\neg\alpha]} \neg\alpha$

Лемма 3.2. Если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma, \Delta \vdash \alpha$.

Лемма 3.3. Пусть дана α, $X_1, \dots, X_n$ — её переменные.

$${}_{[X_1]}X_1, \dots {}_{[X_n]}X_n \vdash_{[\alpha]} \alpha$$

Доказательство. Индукция по структуре. ДОПОЛНИТЬ $\square$

Сократим запись и вместо этой кучи X будем писать X'.

Лемма 3.4. Если $\vDash \alpha$, то $X' \vdash \alpha$.

Лемма 3.5.

$$\Gamma, Y \vdash \alpha, \quad \Gamma, \neg Y \vdash, \text{ то } \Gamma \vdash \alpha$$

Теорема 4. Если $\vDash \alpha$, то $\vdash \alpha$.

4 Интуиционистская логика

Мы не хотим дурацких коснтрукций вроде парадокса брадобрея. Мы не хотим странных, но логически верных утверждений вроде $A \to B \vee B \to A$. Интуиционисткая логика предлагает свою математику, в которой своя интерпретация логических связок. ВНК-интерпретация (Брауер-Гейтинг-Колмогоров).

- $\alpha, \beta, \gamma \dots$ — это конструкции.
- $\alpha \wedge \beta$ если мы умеем строить и α, и β.
- $\alpha \vee \beta$, если мы умеем строить α, β и знаем, что именно.
- $\alpha \to \beta$, если мы умеем перестроить α в β.