

# КАТЕГОРНАЯ ЛОГИКА

## 0.1 Введение в теорию категорий

**Задача 1.** Покажите, что если множества, моноиды, и предпорядки рассматривать как категории, то функторы между ними это то же, что и гомоморфизмы.

**Задача 2.** Опишите инициальные и терминальные объекты в категориях:  $Cat$ ,  $Top$  (категория всех топологических пространств),  $Group$ .

**Задача 3.** Рассмотрим множество  $X$ . Любое множество подмножеств  $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$  образует категорию (в которой объекты – подмножества и стрелка между двумя объектами  $X, Y$  есть в том случае, если  $X \subseteq Y$ ).

Что значит, что в этой категории есть инициальный или терминальный объекты?

**Определение 1** (Напоминание). Конкретной категорией называется такая категория, у которой каждый объект – множество, и каждая стрелка – теоретико-множественная функция.

**Определение 2.** Функтор  $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  называется унивалентным (строгим), если для любой пары стрелок  $f, g : X \rightrightarrows Y$ , если  $U(f) = U(g)$ , то  $f = g$ . Другими словами, функтор унивалентен если он инъективен на  $\text{Hom}(X, Y)$  для любых объектов  $X, Y$  в  $\mathcal{A}$ .

**Задача 4.** Докажите, что у каждой конкретной категории  $\mathcal{A}$  есть унивалентный функтор  $\mathcal{A} \rightarrow Set$ .

**Задача 5.** Покажите, что каждое действие моноида (группы)  $M$  на множество можно представить как функтор из  $M$  как категории в  $Set$  (действие моноида  $M$  на  $X$  – это гомоморфизм из  $M$  в моноид перестановок множества  $X$ ).

**Задача 6.** Убедитесь, что следующие отображения дают примеры функторов:

1.  $\mathcal{P} : Set \rightarrow Set$ , которое множеству  $X$  сопоставляет множество его подмножеств  $\mathcal{P}(X)$  и функции  $f : X \rightarrow Y$  функцию  $\mathcal{P}(f)(A) = f(A)$ ,  $A \subseteq X$ ; и  $\mathcal{P} : Set \rightarrow Set^{op}$ , как предыдущее, только функции  $f : X \rightarrow Y$  оно сопоставляет  $\mathcal{P}(f)(B) = f^{-1}(B)$ ,  $B \subseteq Y$ .
2.  $Ring \rightarrow Ring$ , отображение кольца  $R$  кольцо многочленов  $R[x]$ ;  $Ring \rightarrow Ring$ , отображение кольца  $R$  его кольцо квадратных матриц  $M_{n,n}(R)$ .
3.  $F-Vect \rightarrow F-Vect^{op}$ , отображение векторному пространству  $K$  его сопряженное  $K^*$  ( $F-Vect$  – категория векторных пространств над полем  $F$ ).

**Задача 7.** Как можно следующие объекты представить в виде функтора?

1. Стрелка  $f : X \rightarrow Y$  в произвольной категории  $\mathcal{A}$
2. Цепочка функций в  $Sets$   $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \dots \xrightarrow{f_n} X_n$ .
3. Бесконечная цепочка вложенных подмножеств  $\mathbb{R} X_0 \subset X_1 \subset X_2 \dots \subset X_n \subset \dots$ ;

**Задача 8.** Рассмотрим категорию  $\mathcal{C}$  и зафиксируем в ней объект  $X$ . Построим отображение на объектах  $\text{Hom}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow Set$ , которое каждому объекту сопоставляет множество  $\text{Hom}(X, A)$ . Теперь определим отображение на стрелках следующим образом: стрелке  $f : A \rightarrow B$  сопоставим отображение между  $\text{Hom}(X, A)$  и  $\text{Hom}(X, B)$ , отправляющее  $g : X \rightarrow A$  в  $fg : X \rightarrow B$ .

Покажите, что эти отображения дают функтор.

## 0.2 Сопряженные функторы

Конспект.

**Задача 1.** Рассмотрим множества с предпорядком  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  и ковариантное соответствие Галуа  $(F, G)$ .

Доказать:

1.  $a \leq GF(a)$
2.  $GFGF(a) \leq GF(a)$
3.  $a \leq a' \Rightarrow GF(a) \leq GF(a')$

**Задача 2.** Рассмотрим множества  $X, Y$  и бинарное отношение  $R \subseteq X \times Y$ .

Пусть  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ,  $\mathcal{B} = (\mathcal{P}(Y), \supseteq)$ .

Функторы  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  и  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  определены так:

- $A \subseteq X$ .  $F(A) = \{y \in Y \mid \forall x \in A. (x, y) \in R\}$
- $B \subseteq Y$ .  $G(B) = \{x \in X \mid \forall y \in B. (x, y) \in R\}$

Доказать (или опровергнуть), что  $(F, G)$  – соответствие Галуа.

**Задача 3.** Понять, как соотносятся сопряжение для множеств с предпорядками и сопряжение для категорий. Сопряжение для категорий можно взять в смысле четверки  $(F, U, \eta, \epsilon)$ .

**Задача 4.** Доказать утверждение.

Сопряжение  $(F, U, \eta, \epsilon)$  в категориях  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  взаимно однозначно соответствует решению  $(F, \eta, *)$  для функтора  $U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ .

План доказательства и само утверждение можно найти в книжке на странице 14.

**Задача 5.** Пусть  $(F, G)$  – соответствие Галуа между посетами (частично упорядоченными)  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . показать, что  $F$  сохраняет супремумы, а  $G$  сохраняет инфимумы. Доказать, что если  $\mathcal{A}$  имеет, а  $F$  сохраняет супремумы, то правое сопряжение  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  может быть вычислено формулой  $G(b) = \sup\{a \in \mathcal{A} \mid F(a) \leq b\}$ .

**Задача 6.** Понять, объяснить, и доказать утверждение 3.4 на странице 15.

**Задача 7.** Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  – пред упорядоченные множества формул пропозиционального исчисления, где порядок – следование. Для фиксированной формулы  $C$  показать, что  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  и  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ , определенные как  $F(A) = C \wedge A$  и  $G(B) = C \Rightarrow B$ , являются парой сопряженных функторов. Что есть "единство противоположностей" в таком случае?

**Задача 8.** Пусть  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbf{Sets}$ ,  $C$  – фиксированное множество,  $F(A) = C \times A$ ,  $U(B) = B^C$  для всех  $A$  и  $B$ . Расширить  $U$  и  $F$  до функторов и показать, что  $U$  право-сопряжен к  $F$ .

## 0.3 Пределы

**Задача 1.** Найдите хотя бы два уравнителя функций  $\text{id} :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$  и  $\text{abs} :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$  в категории  $\mathbf{Hask}$ .

Объясните, почему следующие функции не являются уравнителями:

1.  $\text{id} :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$
2.  $\backslash n \rightarrow -n :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$
3.  $\backslash n \rightarrow 0 :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$

**Задача 2.** Найдите хотя бы один уравнитель функций  $\text{fst} :: (\text{Int}, \text{Int}) \rightarrow \text{Int}$  и  $\text{snd} :: (\text{Int}, \text{Int}) \rightarrow \text{Int}$  в категории  $\mathbf{Hask}$ .

**Задача 3.** Найдите хотя бы один уравнитель функций  $\text{fst}'$  и  $\text{snd}'$ , где:

```

data IntOrChar = I Int | C Char

fst' :: (Int, Char) -> IntOrChar
fst' = I . fst

snd' :: (Int, Char) -> IntOrChar
snd' = C . snd

```

в категории `Hask`.

**Задача 4.** Найдите хотя бы два коуравнителя функций `id :: Int -> Int` и `abs :: Int -> Int` в категории `Hask`.

**Задача 5.** Найдите хотя бы один pullback функций `length :: [Int] -> Int` и `length :: [Char] -> Int` в категории `Hask`.

**Задача 6.** Найдите хотя бы один pullback функций `id :: Int -> Int` и `(const 0) :: () -> Int` в категории `Hask`.

**Задача 7.** Найдите хотя бы один pullback функций `(const ()) :: Int -> ()` и `(const ()) :: Char -> ()` в категории `Hask`.

**Задача 8.** Опишите построение pullback'a из задачи 5 через двоичные произведения и уравниватели.

**Задача 9.** Докажите, что любой предел можно построить через произведения и уравниватели.

**Задача 10.** Найдите предел функтора `Identity`.

**Задача 11.** Найдите предел функтора `Maybe`.

## 0.4 Декартово замкнутые категории

**Задача 1.** Доказать, что `Grp` не является декартово замкнутой.

**Задача 2.** Доказать биективность  $\hat{\phantom{x}}$  (преобразующей  $g$  в  $\hat{g}$ )

**Задача 3.**  $A$  и  $B$  конечные множества из категории `Sets`. Какова мощность  $A^B$ ?

**Задача 4.** Узнать связь между  $\Leftarrow$  и  $\rightarrow$  в полурешетке Гейтинга

## 0.5 Декартово замкнутые категории в уравнениях и графах

**Задача 1.** Показать, что в любой декартовой категории:

1.  $A \times 1 \cong A$
2.  $A \times B \cong B \times A$
3.  $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$

**Задача 2.** Показать, что в любой декартово замкнутой категории:

1.  $A^1 \cong A$
2.  $1^A \cong 1$
3.  $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$
4.  $A^{B \times C} \cong (A^C)^B$

**Задача 3.** Записать эквивалентное определение декартово замкнутой категории через

$$\begin{aligned} U_B &= (\cdot)^B, \quad F_B = (\cdot) \times B : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \\ \varepsilon_B(A) &= \varepsilon_{A,B}; \quad \varepsilon_B : F_B U_B \rightarrow 1_{\mathcal{A}} \\ \eta_B(C) &= \eta_{C,B} : C \rightarrow (C \times B)^B, \end{aligned}$$

где  $U_B(f) = f^B \equiv f \Leftarrow 1_B = (f\varepsilon_{A,B})^*$  для всех  $f : A \rightarrow A'$  (см. предыдущую лекцию).

**Задача 4.** Доказать, что

$$\lceil f^{\neg} \rceil = f, \quad \lceil g^{\neg} \rceil = g,$$

где  $\lceil f^{\neg} \rceil \equiv (f\pi'_{1,A})^*$ ,  $f : A \rightarrow B$  и  $g^{\neg} \equiv \varepsilon_{B,A}(g \circ_A 1_A)$ ,  $g : 1 \rightarrow B^A$ .

**Задача 5.** Показать, что дедуктивная система  $\mathcal{L}(x)$  с прошлой лекции — это  $\mathcal{D}(\mathcal{L}_x)$ , где  $\mathcal{L}_x$  — граф, полученный из  $\mathcal{L}$  добавлением нового ребра  $x$  между старыми вершинами  $T$  и  $A$ .