Категорная логика

0.1 Введение в теорию категорий

Задача 1. Покажите, что если множества, моноиды, и предпорядки рассматривать как категории, то функторы между ними это то же, что и гомоморфизмы.

Задача 2. Опишите инициальные и терминальные объекты в категориях: Cat, Top (категория всех топологических пространств), $Group$.

Задача 3. Рассмотрим множество X. Любое множество подмножеств $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ образует категорию (в которой объекты – подмножества и стрелка между двумя объектами X,Y есть в том случае, если $X \subseteq Y$).

Что значит, что в этой категории есть инициальный или терминальный объекты?

Определение 1 (Напоминание)**.** Конкретной категорией называется такая категория, у которой каждый объект – множество, и каждая стрелка – теоретико-множественная функция.

Определение 2. Функтор $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется унивалентным (строгим), если для любой пары стрелок $f, g : X \rightrightarrows Y$, если $U(f) = U(g)$, то $f = g$. Другими словами, функтор унивалентен если он инъективен на $\mathrm{Hom}(X, Y)$ для любых объектов X, Y в $\mathcal{A}$.

Задача 4. Докажите, что у каждой конкретной категории $\mathcal{A}$ есть унивалентный функтор $\mathcal{A} \to Set$.

Задача 5. Покажите, что каждое действие моноида (группы) M на множество можно представить как функтор из M как категории в Set (действие моноида M на X – это гомоморфизм из M в моноид перестановок множества X).

Задача 6. Убедитесь, что следующие отображения дают примеры функторов:

1. $\mathcal{P} : Set \to Set$, которое множеству X сопоставляет множество его подмножеств $\mathcal{P}(X)$ и функции $f : X \to Y$ функцию $\mathcal{P}(f)(A) = f(A),\ A \subseteq X$; и $\mathcal{P} : Set \to Set^{op}$, как предыдущее, только функции $f : X \to Y$ оно сопоставляет $\mathcal{P}(f)(B) = f^{-1}(B),\ B \subseteq Y$.
2. $Ring \to Ring$, отображение кольцу R кольцо многочленов $R[x]$; $Ring \to Ring$, отображение кольцу R его кольцо квадратных матриц $M_{n,n}(R)$.
3. $F\text{-}Vect \to F\text{-}Vect^{op}$, отображение векторному пространству K его сопряженное K^* ($F\text{-}Vect$ – категория векторных пространств над полем F).

Задача 7. Как можно следующие объекты представить в виде функтора?

1. Стрелка $f : X \to Y$ в произвольной категории $\mathcal{A}$
2. Цепочка функций в $Sets$ $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \ldots \xrightarrow{f_n} X_n$.
3. Бесконечная цепочка вложенных подмножеств $\mathbb{R}$ $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \ldots \subset X_n \subset \ldots$;

Задача 8. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}$ и зафиксируем в ней объект X. Построим отображение на объектах $\mathrm{Hom}(X, -) : C \to Set$, которое каждому объекту сопоставляет множество $\mathrm{Hom}(X, A)$. Теперь определим отображение на стрелках следующим образом: стрелке $f : A \to B$ сопоставим отображение между $\mathrm{Hom}(X, A)$ и $\mathrm{Hom}(X, B)$, отправляющее $g : X \to A$ в $fg : X \to B$.

Покажите, что эти отображения дают функтор.

0.2 Сопряженные функторы

Конспект.

Задача 1. Рассмотрим множества с предпорядком $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и ковариантное соответствие Галуа (F, G).

Доказать:

1. $a \leq GF(a)$
2. $GFGF(a) \leq GF(a)$
3. $a \leq a' \Rightarrow GF(a) \leq GF(a')$

Задача 2. Рассмотрим множества X, Y и бинарное отношение $R \subseteq X \times Y$.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(x), \subseteq)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{P}(y), \text{superseteq})$.

Функторы $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ определены так:

- $A \subseteq X$. $F(A) = \{y \in Y | \forall x \in A.\ (x, y) \in R\}$
- $B \subseteq Y$. $F(B) = \{x \in X | \forall y \in B.\ (x, y) \in R\}$

Доказать (или опровергнуть), что (F, G) – соответствие Галуа.

Задача 3. Понять, как соотносятся сопряжение для множеств с предпорядками и сопряжение для категорий. Сопряжение для категорий можно взять в смысле четверки (F, U, η, ϵ).

Задача 4. Доказать утверждение.

Сопряжение (F, U, η, ϵ) в категориях $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ взаимно однозначно соответствует решению $(F, \eta, *)$ для функтора $U : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

План доказательства и само утверждение можно найти в книжке на странице 14.

Задача 5. Пусть (F, G) – соответствие Галуа между посетами (частично упорядоченными) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. показать, что F сохраняет супремумы, а G сохраняет инфимумы. Доказать, что если $\mathcal{A}$ имеет, а F сохраняет супремумы, то правое сопряжение $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ может быть вычислено формулой $G(b) = sup\{a \in \mathcal{A} | F(a) \leq b\}$.

Задача 6. Понять, объяснить, и доказать утверждение 3.4 на странице 15.

Задача 7. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - пред упорядоченные множества формул пропозиционального исчисления, где порядок – следование. Для фиксированный формулы C показать, что $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, определенные как $F(A) = C \wedge A$ и $G(B) = C \Rightarrow B$, являются парой сопряженных функторов. Что есть "единство противоположностей"в таком случае?

Задача 8. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbf{Sets}$, C – фиксированное множество, $F(A) = C \times A$, $U(B) = B^C$ для всех A и B. Расширить U и F до функторов и показать, что U право-сопряжен к F.