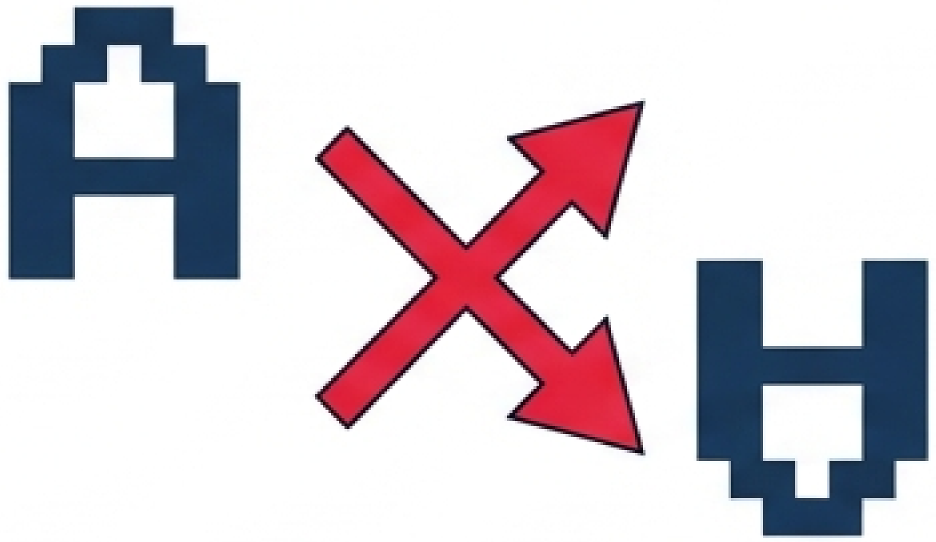
Momentos de Zernike: Descriptores de Forma Robustos

De la óptica fundamental a la inteligencia artificial moderna. Teoría, implementación y validación.

Un análisis técnico basado en polinomios ortogonales.

El Desafío de la Invarianza Rotacional



El Problema: Una computadora ve una imagen rotada como una matriz de números totalmente diferente. Los métodos tradicionales son costosos y frágiles.

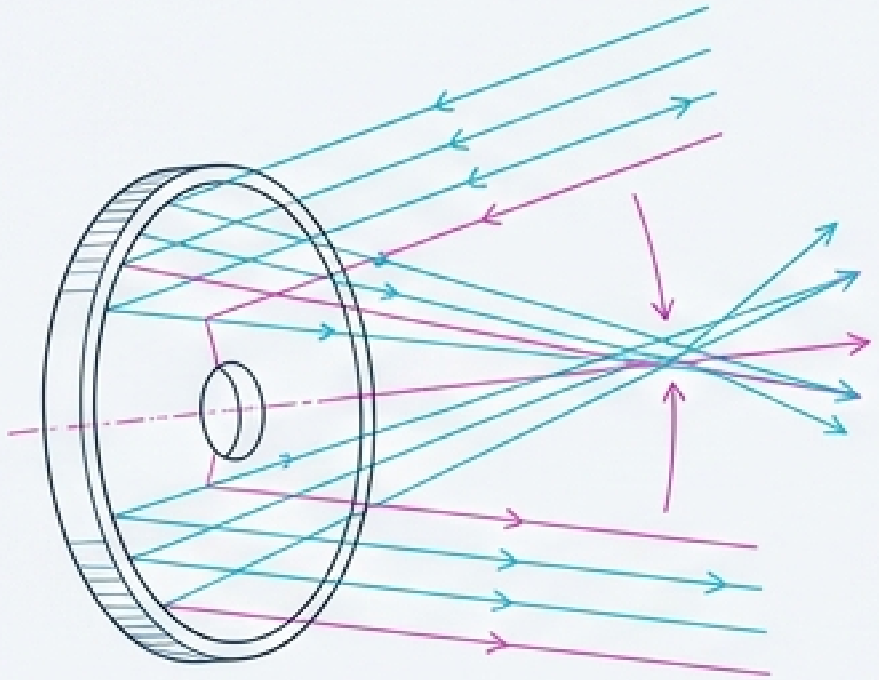
La Limitación de Hu: Los Momentos Geométricos sufren de *redundancia* de información. Sus 7 momentos están correlacionados matemáticamente.

La Solución Zernike: Utiliza una base de polinomios ortogonales. Cada momento extrae información única e independiente de la imagen.

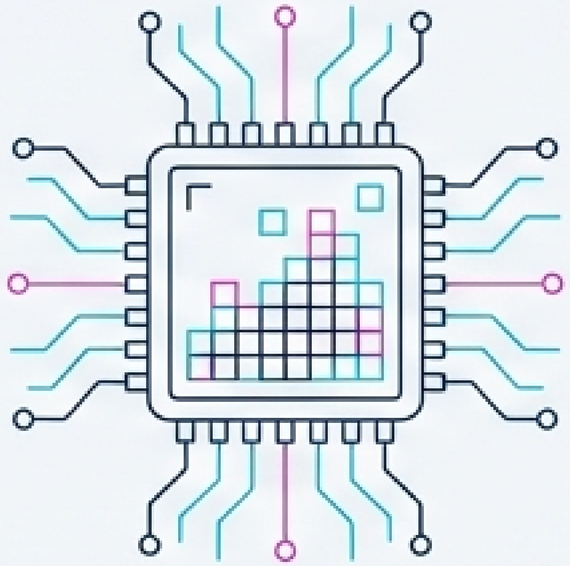
La **ortogonalidad** minimiza la redundancia, haciendo a Zernike superior en presencia de ruido.

Un Legado de la Física Óptica (1934 - 1980)

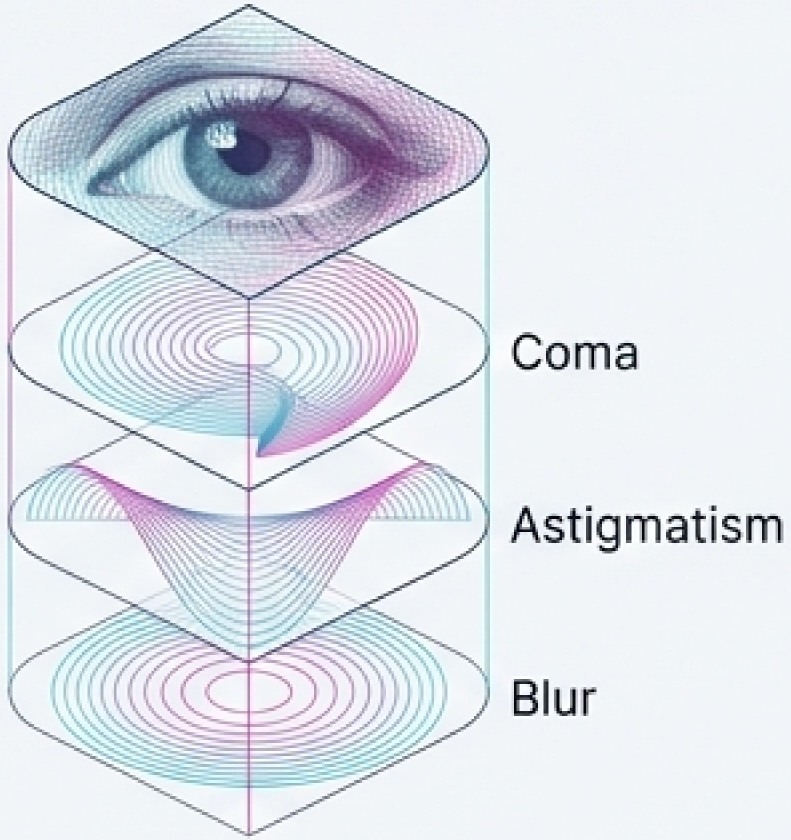
Origen: (1934) → **Adaptación Digital: (1980)** → **Concepto Clave: (Lego)**



Desarrollados por Frits Zernike (Nobel de Física 1953) para caracterizar aberraciones en aberraciones en espejos y lentes telescópicos.



M.R. Teague propuso usar estos polinomios para describir imágenes digitales, resolviendo la falta de ortogonalidad de los momentos geométricos.



Como ‘piezas de Lego’ matemáticas. Combinando modos básicos, reconstruimos formas complejas.

Del Cuadrado al Disco Unitario

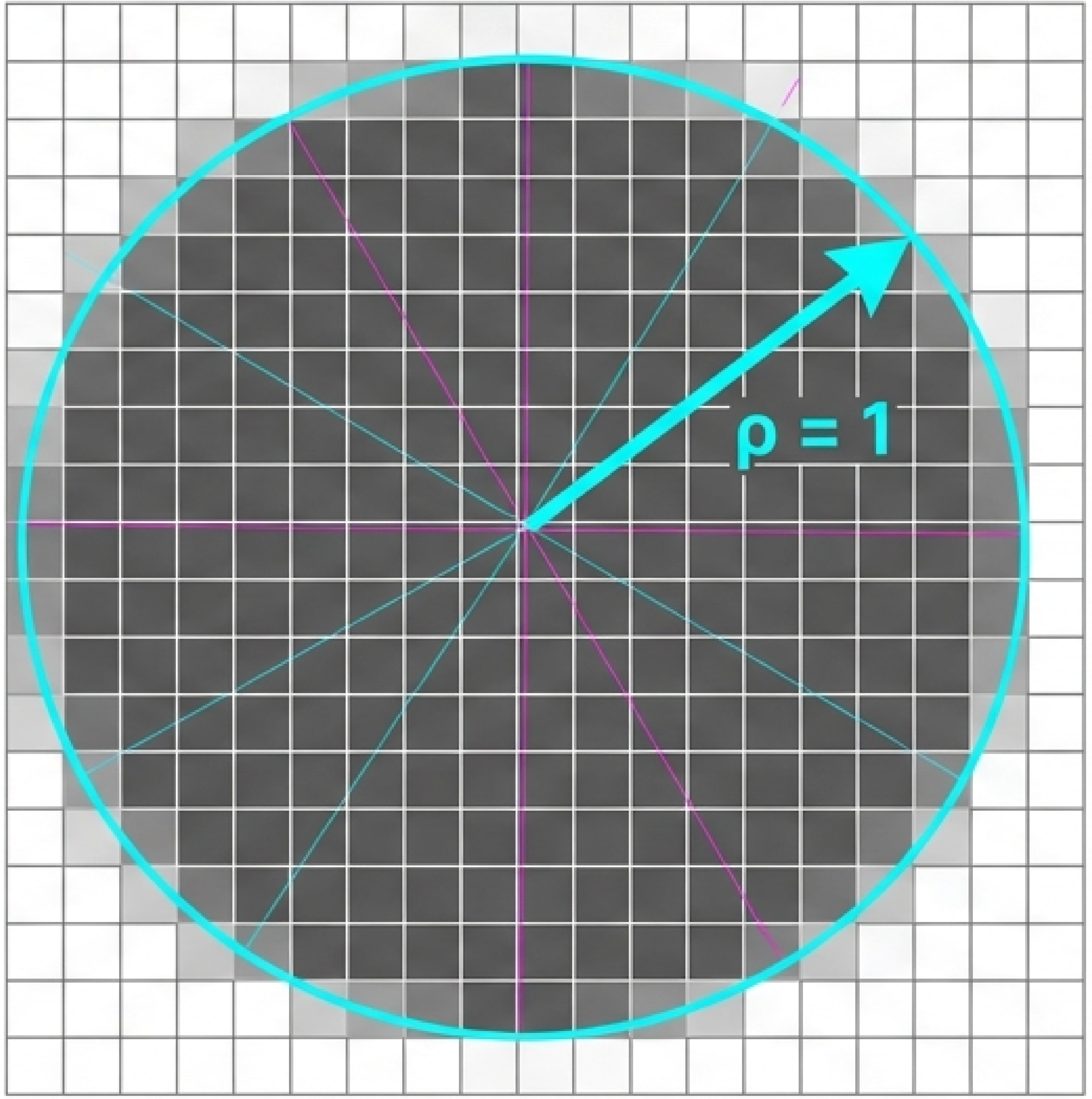
Cambio de Paradigma: Las imágenes digitales son retículas cartesianas (x, y), pero Zernike opera en coordenadas polares (ρ, θ) dentro de un disco unitario.

La Ecuación Base:

$$V_{nm}(\rho, \theta) = R_{nm}(\rho)e^{jm\theta}$$

El Mapeo:

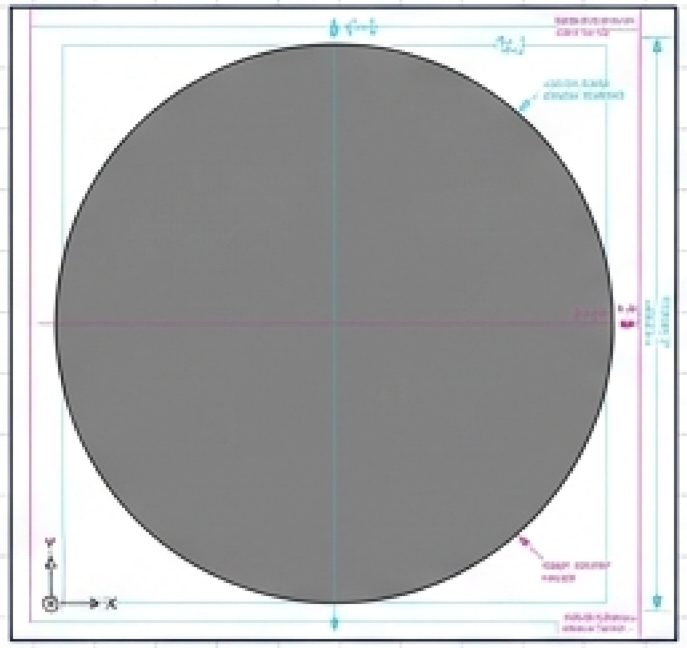
1. Calcular el centro de masa (x_c, y_c).
2. Mapear cada píxel a una distancia normalizada ρ donde el radio máximo es 1.



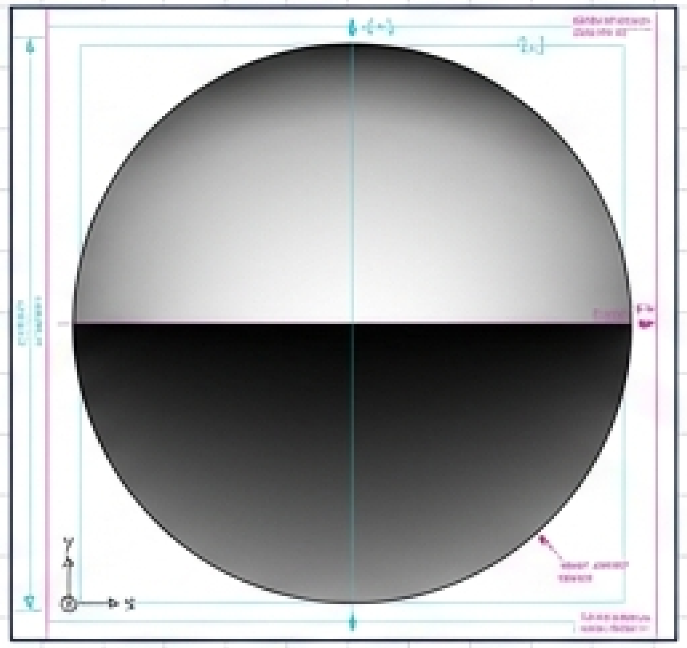
Los Polinomios Radiales $R_{nm}(\rho)$

La complejidad de la forma se define mediante el orden radial (n) y la repetición angular (m).

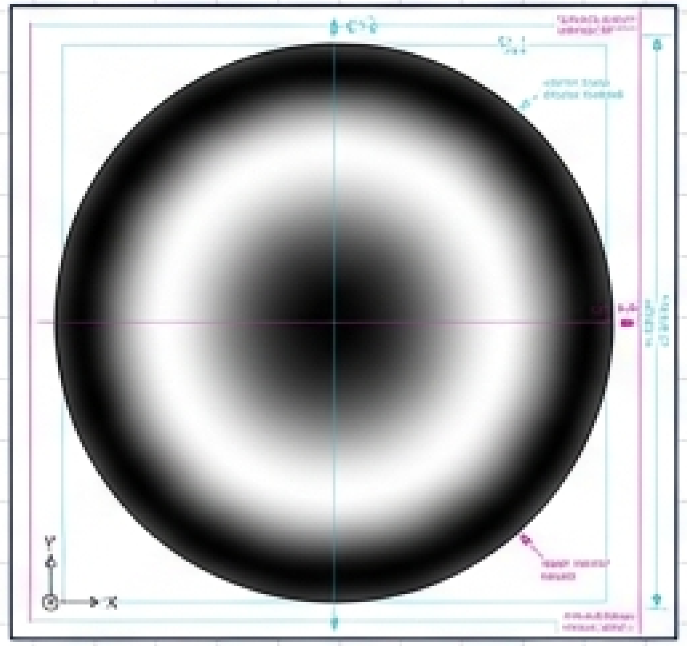
Restricción de Paridad: $n - |m|$ debe ser par y $|m| \leq n$.



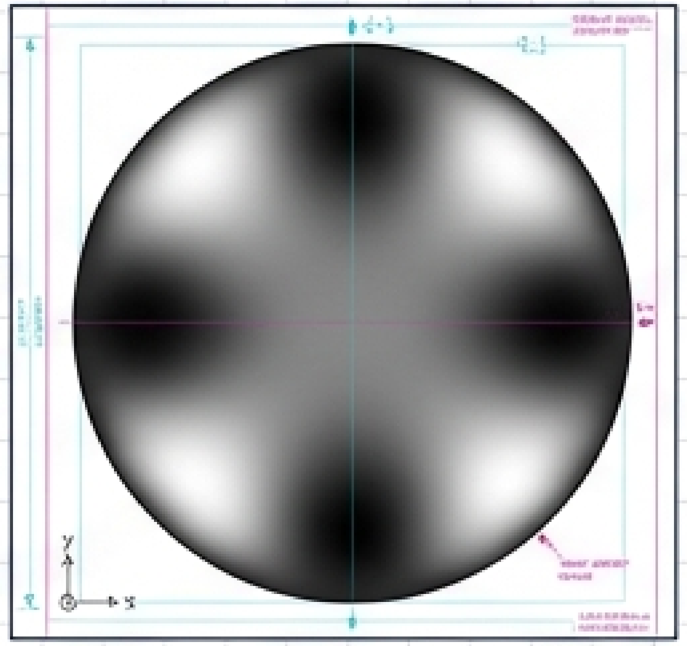
$n = 0$, $m = 0$ (Pistón)



$n = 1$, $m = 1$ (Tilt)



$n = 2$, $m = 0$ (Defocus)

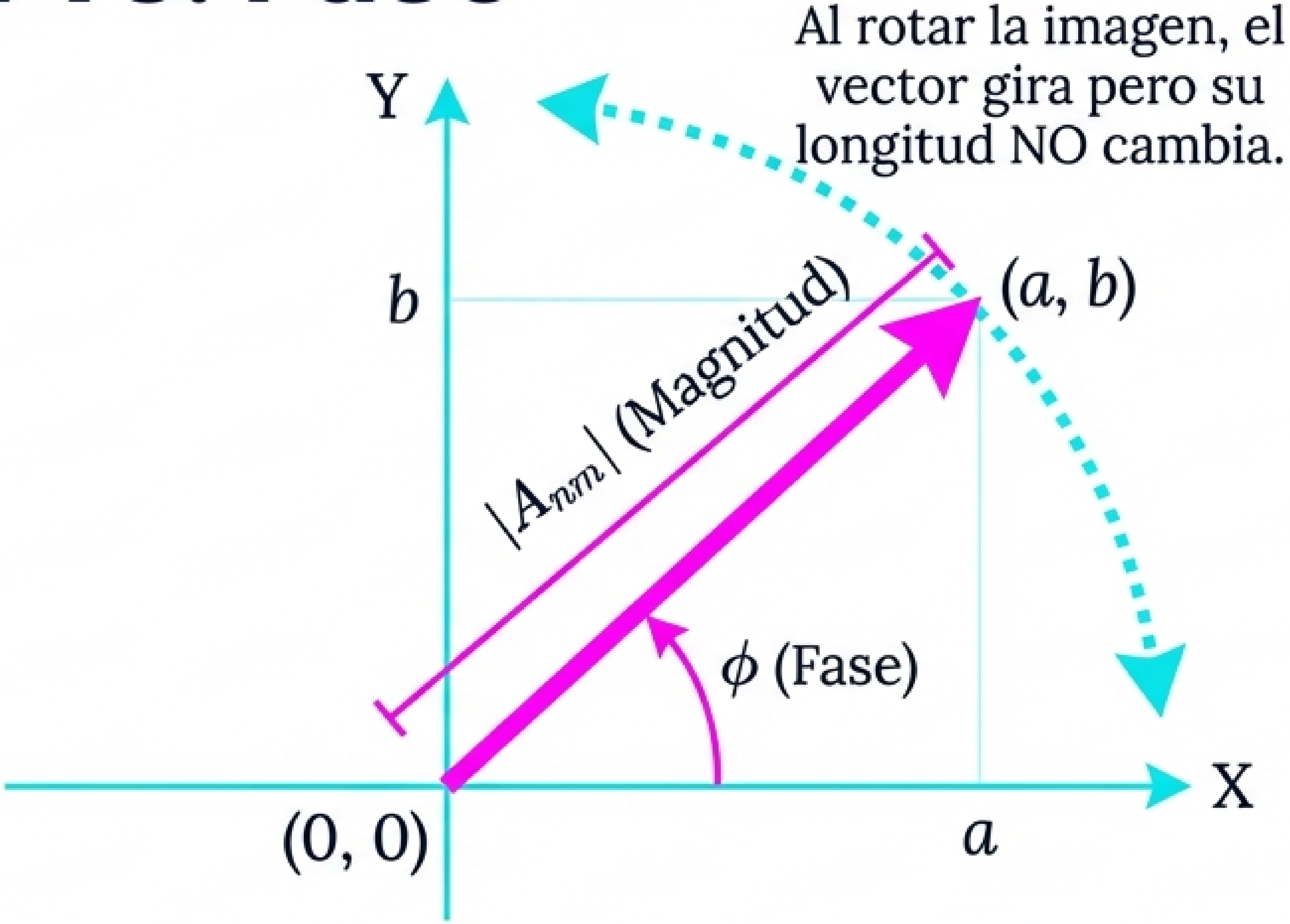


$n = 2$, $m = 2$ (Astigmatismo)

El Secreto: Magnitud vs. Fase

Magnitud ($|A_{nm}|$): Es **Invariante a la Rotación**. Representa "cuánto" de esa forma existe. Usado para clasificación.

Fase (ϕ): Representa la **Orientación**. Nos dice hacia dónde apunta el objeto.



La magnitud es *qué* objeto es; la fase es *hacia dónde* apunta.

Cálculo Paso a Paso: El Caso de la "Cruz"

Ubicación	Índices (y,x)	ρ^2	Polinomio $2\rho^2 - 1$	Contribución
Centro	(3,3)	0	-1	-1
Brazo Vertical	(2,3)	1/18	-8/9	-0.889
Brazo Horizontal	(3,2)	1/18	-8/9	-0.889
Esquina (Fondo)	(0,0)	0.5	0	0
·**SUMA TOTAL**				**-6.7778**

Proceso:

1. Definir centro geométrico (3,3).
2. Calcular distancia normalizada ρ.
3. Aplicar polinomio $R_{2,0}$.
4. Sumar contribuciones ponderadas.

Implementación en Python con Mahotas

```python
import mahotas
import numpy as np

# 1. Cargar y procesar imagen (escala de grises)
img = mahotas.demos.load('lena')
img = img.max(2) # Convertir a 2D

# 2. Definir parámetros
radius = 10  # Tamaño del disco unitario
cm = mahotas.center_of_mass(img)

# 3. Calcular momentos de Zernike
zernike_feats = mahotas.features.zernike_moments(img, radius, degree=8)

print(zernike_feats)
# Output: [0.318 0.012 0.006 ... ]
```

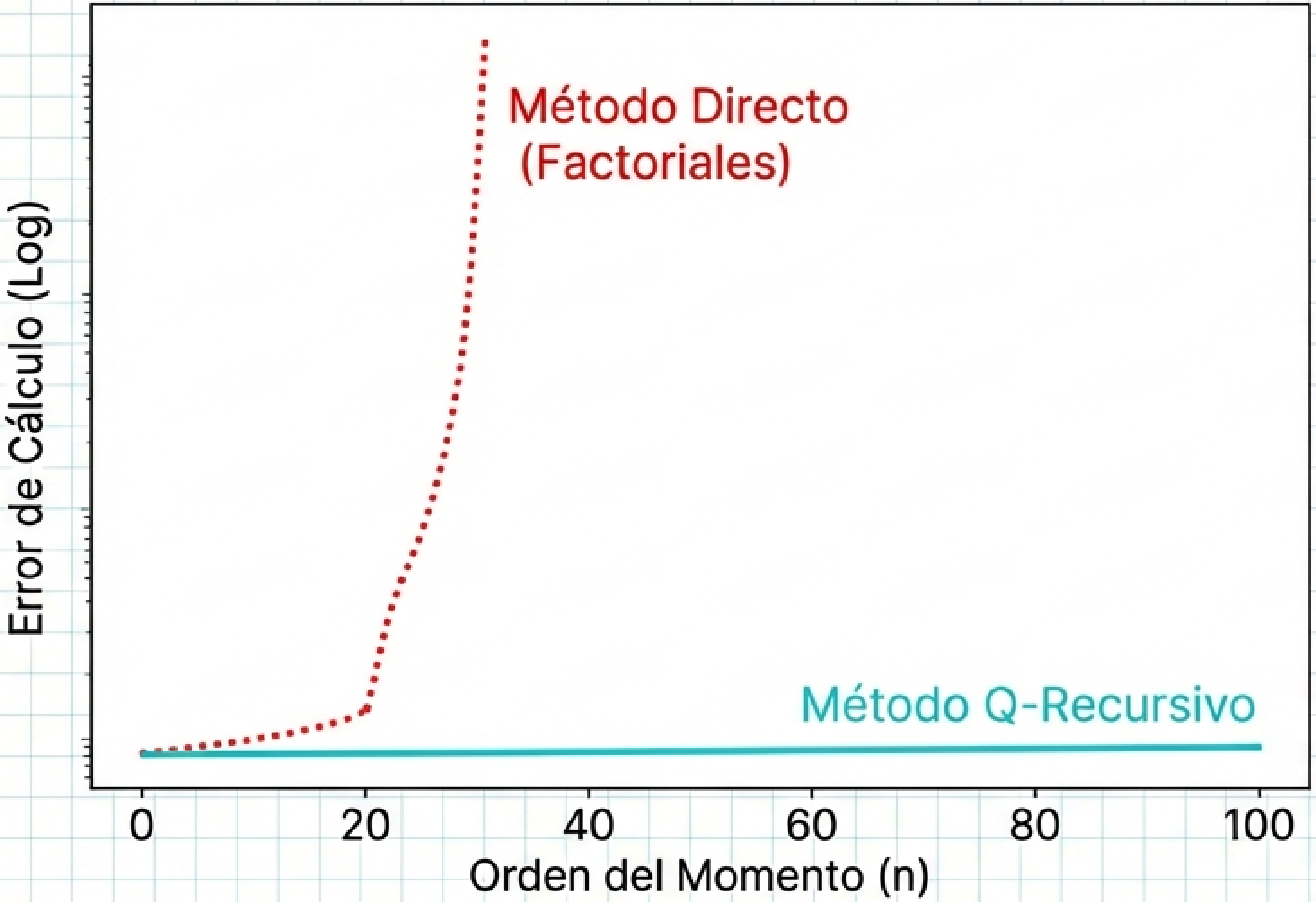
Define el círculo unitario. Píxeles fuera son ignorados.

Orden máximo de cálculo.

Sintaxis:
`mahotas.features.zernike_moments(img, radius)`

La función devuelve un vector 1D conteniendo las magnitudes de los momentos.

Desafíos Computacionales y Estabilidad



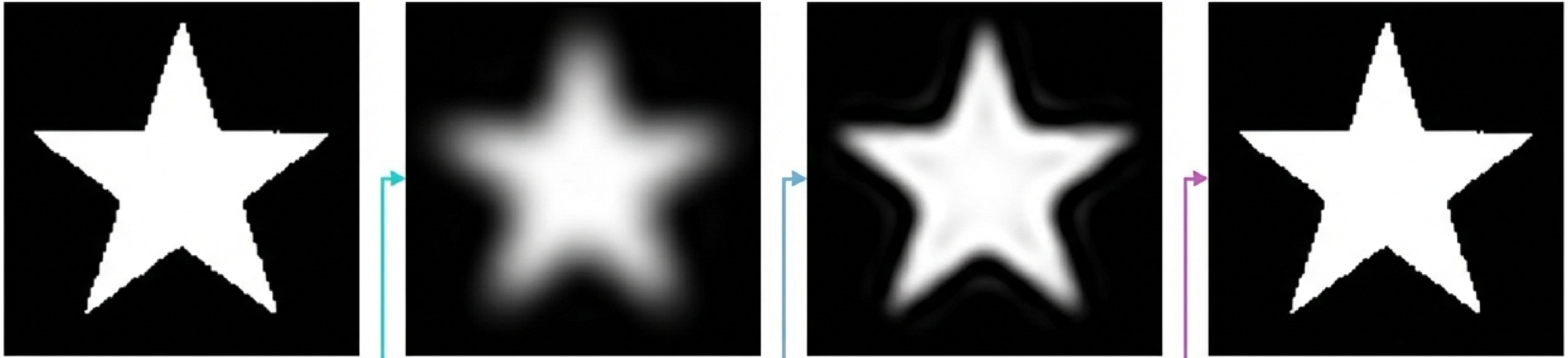
El Problema de los Factoriales:

La fórmula directa requiere factoriales masivos (ej. 50!). Para n > 20, esto causa desbordamiento numérico.

Evolución Algorítmica:

1. **Kintner (1976):** Recurrencia limitada.
2. **Prata (1989):** Elimina factoriales, mejor estabilidad.
3. **Q-recursivo (Estado del Arte):** Permite n > 100. Esencial para biometría de alta resolución.

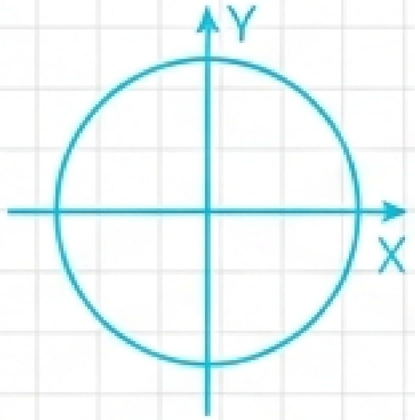
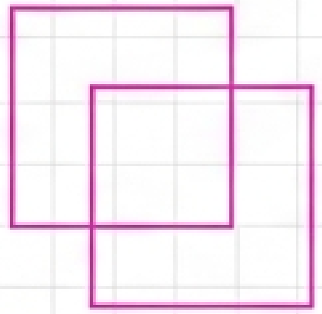
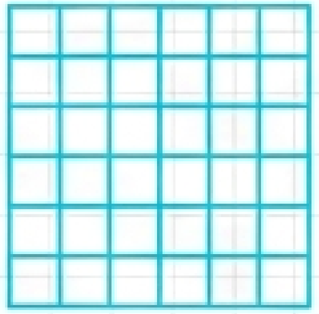
Validación mediante Reconstrucción de Imágenes

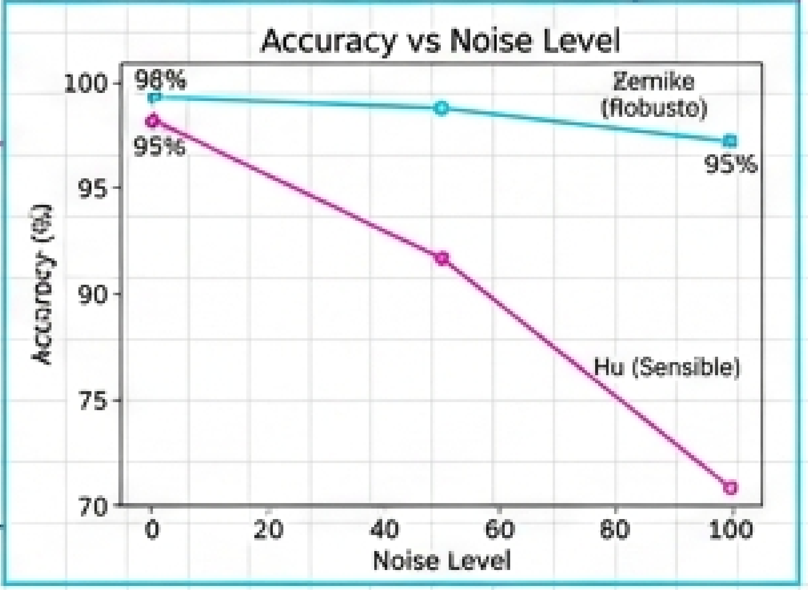


Original → Orden Bajo ($n = 5$) → Orden Medio ($n = 12$) → Orden Alto ($n = 20$)

Prueba de Fuego: La Transformada Inversa permite recuperar la imagen sumando polinomios. Con $n = 19$, la tasa de reconstrucción supera el 95%, demostrando que los momentos capturan la esencia de la forma.

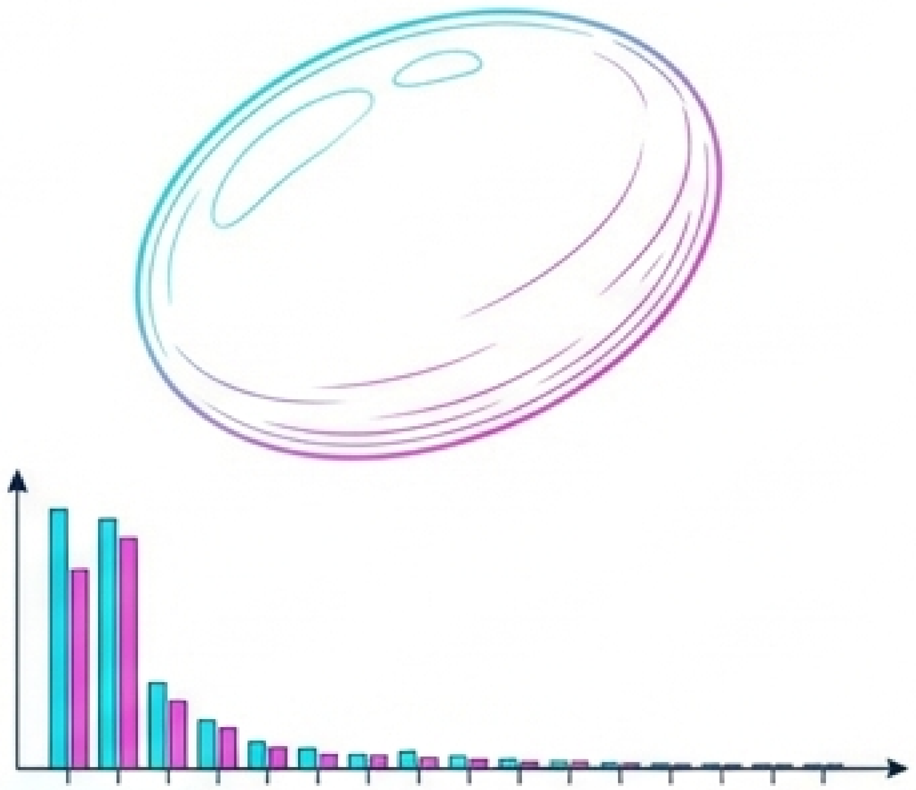
Zernike vs. Hu y Legendre

Zernike		**Pros** • Ortogonal (Sin redundancia) • Invariante a Rotación • Reconstrucción Robusta	**Verdict** **Estándar de Oro**
Momentos de Hu		**Cons** • Altamente Redundante • Sensible al Ruido • Solo 7 valores invariantes.	
Legendre		**Cons** • Dominio Cuadrado (Mala rotación) • Complejidad alta para invarianza	



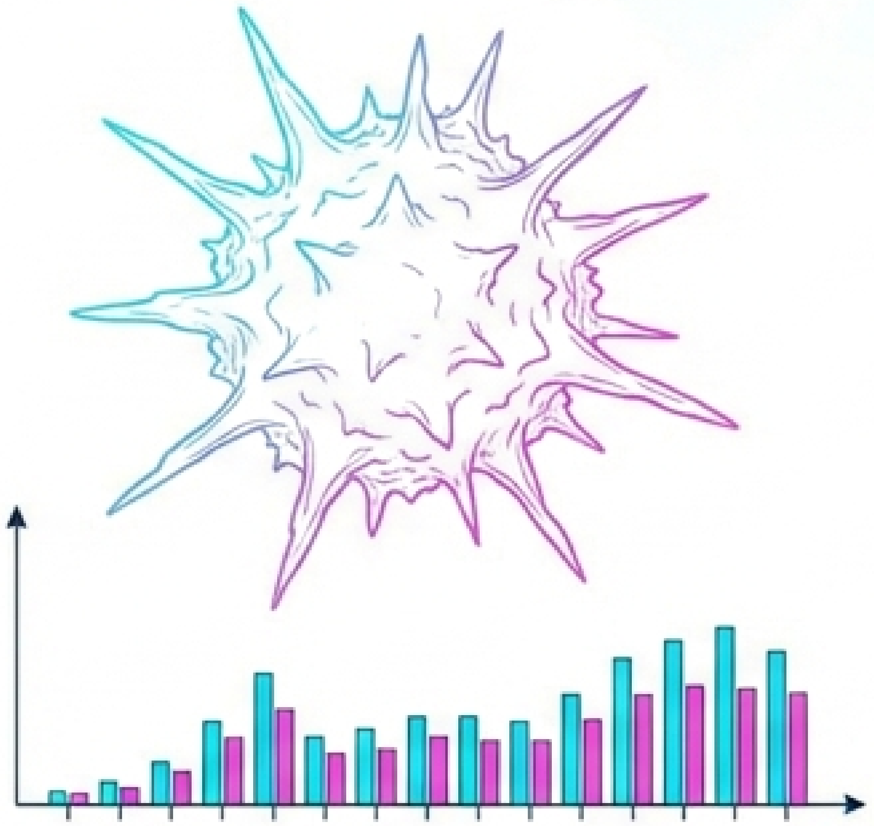
Aplicación Crítica: Diagnóstico Médico

Tumor Benigno



Energía en Bajo Orden. Formas suaves y redondeadas.

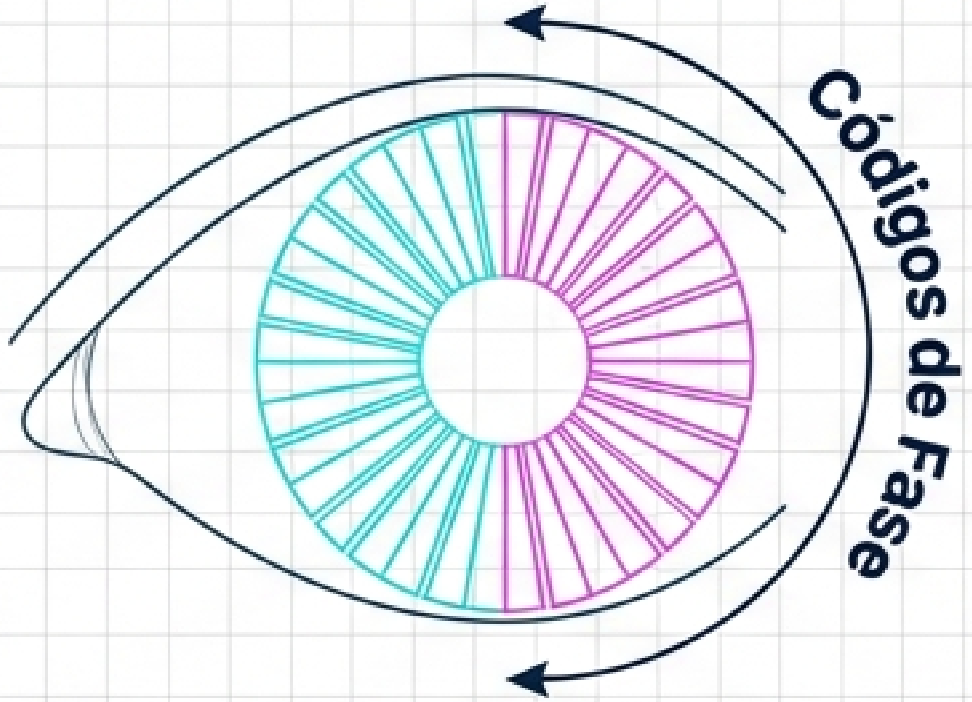
Tumor Maligno



Energía en Alto Orden. Espículas y bordes rugosos disparan frecuencias altas.

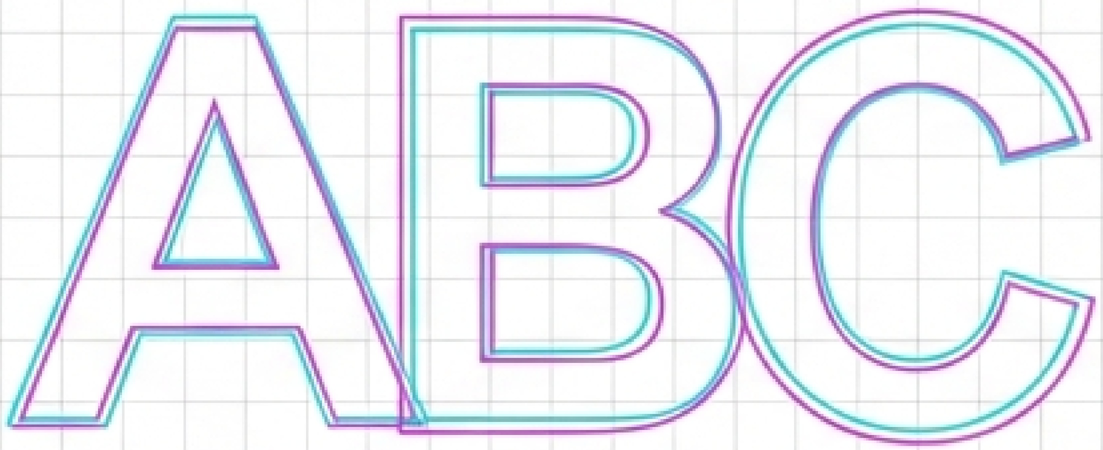
Precisión >95% en clasificación de masas en mamografías y tumores cerebrales.

Biometría y Estándares Multimedia



Reconocimiento de Iris

El iris es naturalmente circular. Zernike captura la textura estocástica resistiendo oclusiones (pestañas).



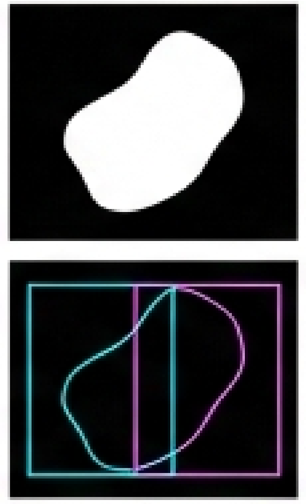
Estándar MPEG-7

Seleccionado como “Region-based Shape Descriptor”. Maneja formas disjuntas y ruidosas con vectores compactos.

Guía de Implementación: Mejores Prácticas

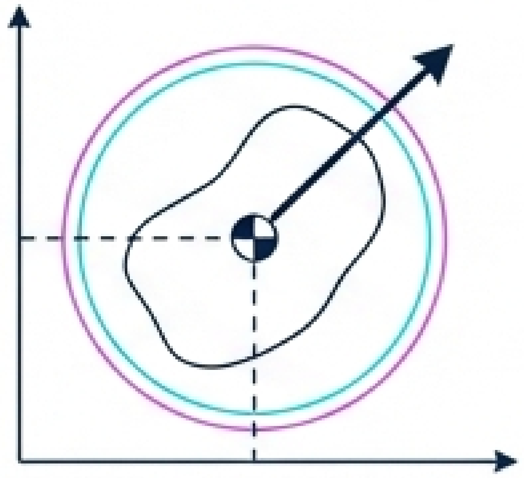
1 Pre-procesamiento

Convertir a binaria/gris. Invertir colores si es necesario (Objeto blanco, fondo negro).

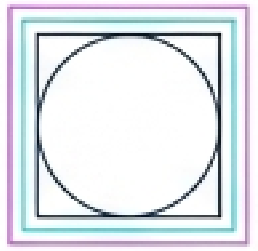


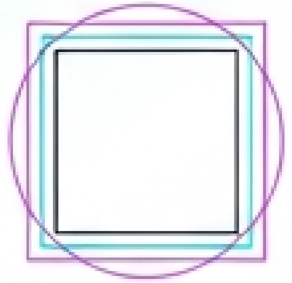
2 Normalización

Trasladar imagen al Centro de Masa (CM) antes de calcular.



3 Elección del Radio





Inscrito
Círculo Inscrito evita ruido externo;

Circunscrito
captura esquinas.

4 Selección de Orden

Simples: $n = 10$.
Biometría/Textura: $n = 20+$ (usar algoritmos recursivos).

Referencias y Lectura Adicional

- Investigation.md: Tratado Exhaustivo sobre los Momentos de Zernike.
- Tutorials Point & GeeksforGeeks: Mahotas - Zernike Moments Implementation.
- Universidad Politécnica Salesiana: Tutorial de Cálculo de Momentos de Zernike.
- Liu, He & Ye (2007): Image Zernike moments shape feature evaluation based on image reconstruction (Geo-spatial Information Science).

$$V_{nm}(\rho, \theta) = R_{nm}(\rho)e^{jm\theta}$$

$V_{nm}(\rho, \theta) = R_{nm}(\rho)e^{jm\theta}$