Fundamentos de los Momentos Invariantes de Hu

Momentos de Imagen

En el ámbito del Procesamiento Digital de las Imágenes, la Visión por Computador y otros ámbitos relacionados un momento de imagen es un cierto promedio ponderado de las intensidades de los pixeles de una imagen.

Los momentos de imagen son útiles de describir cuando se ha realizado un proceso de segmentación en un imagen. Con ello, se pueden obtener propiedades como las siguientes:

- Centroide
- Área
- Orientación

Momentos espaciales:

Da una función continua de dos dimensiones f(x,y), el momento de orden p, q se representa con la siguiente ecuación:

$$M_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^p \cdot y^q \cdot f(x,y)dx\ dy$$

En el caso de las imágenes digitales, éstas son discretas y dependen de las coordenas y pixeles que conforman las mismas.

Por lo tanto, la ecuación anterior se representa en el caso de las imágenes digitales como se indica a continuación:

$$M_{ij} = \sum_{\forall x}\sum_{\forall y} x^i \cdot y^j \cdot I(x,y)$$

i,j representan el orden de los momentos

x,y son las coordenadas de los pixeles que conforman la imagen

Es el nivel de intensidad que tiene un pixel en la coordenada x,y

Nota: La ecuación anterior permite calcular los momentos RAW

Cálculo del Centroide y el Área a partir de los Momentos RAW:

Para obtener el Centroide en las coordenadas x,y se debe emplear la siguiente fórmula:

$$Centroide(\overline{x},\overline{y}) = \left[\frac{m_{10}}{m_{00}}, \frac{m_{01}}{m_{00}}\right]$$

El momento de orden i=0, j=0 representa el área del objeto.

Ejemplo de cálculo:

Dada la siguiente imagen binaria, donde se representa un objeto segmentado, calcule el área y el centroide de dicho objeto. Considerar que los valores con 1 son blanco y los valores con cero son negro.0 0

y

0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6

x

$$M_{00} = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} x^0 \cdot y^0 \cdot I(x,y)$$

$$M_{00} = 0^0 \cdot 0^0 \cdot I(0,0) + 1^0 \cdot 0^0 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0^0 \cdot 1 + \cdots + 1^0 \cdot 1^0 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1^0 \cdot 1 +$$

$$M_{00} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1$$

$$M_{00} = 9$$ El área del objeto es 9.

$$M_{10} = 1^1 \cdot 0^0 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0^0 \cdot 1 + 1^1 \cdot 1^0 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1^0 \cdot 1 +$$

$$0^1 \cdot 2^0 \cdot 1 + 1^1 \cdot 2^0 \cdot 1 + 2^1 \cdot 2^0 \cdot 1 + 3^1 \cdot 2^0 \cdot 1 + 2^1 \cdot 3^0 \cdot 1$$

$$M_{10} = 1 + 2 + 1 + 2 + 0 + 1 + 2 + 3 + 2 = 14$$

$$M_{01} = 0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 13$$

$$Centroide(\overline{x}, \overline{y}) = \left[\frac{14}{9}, \frac{13}{9}\right]$$

Momentos invariantes a la traslación:

Son los momentos centrales que se definen a través de la siguiente ecuación:

$$\mu_{pq} = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} (x - \overline{x})^p \cdot (y - \overline{y})^q \cdot I(x, y)$$

Los momentos invariants a traslación son los que se indican a continuación:

$$\begin{aligned}
\mu_{00} &= M_{00},\\
\mu_{01} &= 0,\\
\mu_{10} &= 0,\\
\mu_{11} &= M_{11} - \bar{x}M_{01} = M_{11} - \bar{y}M_{10},\\
\mu_{20} &= M_{20} - \bar{x}M_{10},\\
\mu_{02} &= M_{02} - \bar{y}M_{01},\\
\mu_{21} &= M_{21} - 2\bar{x}M_{11} - \bar{y}M_{20} + 2\bar{x}^2 M_{01},\\
\mu_{12} &= M_{12} - 2\bar{y}M_{11} - \bar{x}M_{02} + 2\bar{y}^2 M_{10},\\
\mu_{30} &= M_{30} - 3\bar{x}M_{20} + 2\bar{x}^2 M_{10},\\
\mu_{03} &= M_{03} - 3\bar{y}M_{02} + 2\bar{y}^2 M_{01}.
\end{aligned}$$

Momentos Invariantes a la Escala (+ traslación):

Los momentos invarantes a la traslación y a la escala se definen a través de la siguiente ecuación, de acuerdo a lo propuesto por el Prof. Hu:

$$\eta_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_{00}^{\left(1+\frac{i+j}{2}\right)}}$$

Momentos invariantes a la Rotación (+ Escala, + Traslación):

Los 7 momentos de HU que son invariantes a rotación, traslación y escala, se definen a continuación:

$$I_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$

$$I_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2$$

$$I_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2$$

$$I_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2$$

$$I_5 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] + (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2]$$

$$I_6 = (\eta_{20} - \eta_{02})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] + 4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})$$

$$I_7 = (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] - (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2].$$