Lista 2 - Teoria dos Grafos / Algoritmos para Grafos e Aplicações 2023.1

Professor: Leonardo Sampaio

Esta lista corresponde a 50% da primeira avaliação da disciplina. Esteja atento às seguintes informações:

- Procure ser o mais detalhado possível em suas respostas. A falta de explicações pode ocasionar a perda de pontos.
- Explique seus argumentos e, sempre que quiser utilizar um dos resultados do livro texto, identifique o número do resultado no capítulo correspondente.
- *Não existe segunda chamada para lista de exercícios.* A data de entrega deve ser respeitada.
- O trabalho deverá ser entregue por meio do *classroom*. O aluno deverá escanear ou fotografar suas resoluções e adicionar a atividade ao *classroom*.
- *A lista deve ser resolvida individualmente.* Em nenhum hipótese serão aceitas soluções "idênticas". Caso isso ocorra, ambas questões serão anuladas.
- Data de entrega: 15/05/2023 até às 23:59.

Questão 1. Mostre que $\kappa(G) = \kappa'(G)$ se G for um grafo simples com $\Delta(G) \leq 3$. *(1 ponto)*

Questão 2. Um grafo é dito bipartido quando seus vértices podem ser divididos em duas partes distintas tais que toda aresta do grafo conecta apenas vértices de partes diferentes. Mostre que toda árvore com mais de 2 vértices é um grafo bipartido. *(1,5 ponto)*

Questão 3. Dado um grafo não-direcionado e conexo $G(V, E)$, demonstre que G é uma árvore se, e somente se, a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo. *(1,5 ponto)*

Questão 4. Considere um grafo conexo $G(V, E)$. Prove que G possui pelo menos uma árvore geradora. *(1,5 ponto)*

Questão 5. Considere uma modificação do problema da árvore geradora mínima onde a entrada é um grafo conexo $G = (V, E)$, uma função de pesos $w : E(G) \to \mathbb{R}$, e um conjunto de arestas $S \subset E(G)$ tal que $G[S]$ é uma floresta. A saída do problema deve ser uma árvore geradora T tal que as arestas de S estejam necessariamente contidas em $E(T)$, e tal que o peso de T seja o menor possível. Apresente um algoritmo para resolver o problema e explique porque ele funciona. Você pode utilizar algoritmos e resultados vistos em sala. *(2,5 pontos)*

Questão 6. Considere uma modificação do problema da árvore geradora mínima onde a entrada é um grafo conexo $G = (V, E)$, uma função de pesos $w : E(G) \to \mathbb{R}$, e uma restrição $r : V(G) \to \mathbb{N}^+$. A saída do problema deve ser uma árvore geradora T tal que cada vértice $v \in V(G)$ possui grau máximo $r(v)$ em T, e cujo peso seja o menor possível. Para qualquer entrada do problema sempre existe uma árvore geradora que atende as restrições? Explique. *(2 pontos)*