Universidad de La Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias **Temuco**, agosto 2025

Departamento de Matemática y Estadística.

Guía de Derivadas - IME045
Regla de la Cadena

1. **Ejercicio propuesto en el texto guía: Stewart,J. 7 Ed. ejercicios de la sección 3.4 , página 206, ejercicio 72**

   Sea g una función dos veces derivable en cualquier $x \in \mathbb{R}$. Se define una nueva función f tal que
   $$f(x) = xg(x^2)$$

   a) Calcule $f'(x)$

   Solución: $f'(x) = g(x^2) + xg'(x^2)2x$

   b) (complete con V o F)
   Decida si la siguiente afirmación es V o F: $f'(0) = g(0)$ ....V.............

   c) Determine la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $P(0, f(0))$

   Solución: $f(0) = 0$. Luego la recta tangente al gráfico de f en el punto $P(0, 0)$ es:
   $$y = g(0)x$$

2. (marque la alternativa correcta)

Si $f(x) = \ln(\, x + \sqrt{1+x^2}\,)$, con $x \geq 0$, entonces:

a) $f'(0) = \dfrac{1}{2}$
b) $f''(0) = 1$
c) $f'(x) > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}_0^+$.
d) $f'(x) < 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Solución: Como $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ y $f''(x) = -x(1+x^2)^{-3/2}$
entonces la alternativa correcta es: c)

3. Si $y = xe^{-x}$, entonces

a) $xy\,' = (1-x^2)y$
b) $y'' + y\,' = e^x$
c) $y\,'(0) = -1$
d) $xy'' = (x-2)y$
e) $y'' = (x-2)e^{-x}$

Solución: Alternativa *e*)

De hecho:
Observe que si $y = xe^{-x}$, entonces $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} - y$.

Como $y' = e^{-x} - y \longrightarrow xy\,' = xe^{-x} - xy = y - xy = (1-x)y$
por tanto la alternativa a) no es siempre verdadera.

Por otro lado $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1 - y(0) = 1$, por lo que la alternativa c) es Falsa.

Si $y' = e^{-x} - y \longrightarrow y'' = -e^{-x} - y' \longrightarrow y'' = -e^{-x} - (e^{-x} - y)$

Es decir: $y'' = -2e^{-x} + y$

Calculando $y'' + y'$ se tiene: $y'' + y' = -e^{-x}$, por tanto la alternativa b) no se cumple.

Quedan dos alternativas : d) y e) . Decida.

4. *a*) Considere $H(x) = \dfrac{x^2}{2(1-x^2)}$ y $f(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^2}$

   a.1) Calcule la derivada de f

   Solución:

   $$f'(x) = \frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$$

   a.2) (sólo marque la alternativa correcta)

   se afirma:
   I: $H(x) = f'(x)$
   II: $H'(x) = f(x)$
   III: $H'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$

   De las afirmaciones anteriores siempre son verdaderas:

   i) sólo **I y III**
   ii) sólo **II y III**
   iii) **I , II y III**
   iv) sólo **II** alternativa correcta

De hecho: Es claro que $H(x) = f'(x)$ no se cumple.
Por otro lado , si se cumple $H'(x) = f(x)$
y si analizamos la tercera afirmación: se tiene que el limite es 1 y la derivada $H'(0) = 0$

b) Si $U(x)=\dfrac{\mathbf{e}^{\frac{x}{2}}}{x}$ entonces:

b.1) (Complete)

$$U'(x)=\frac{\mathbf{e}^{\frac{x}{2}}(\frac{x}{2}-1)}{x^2}$$

b.2) (en cada columna marque con una X la alternativa correcta)

X	$U'(-1)$ =-1.5$e^{-0,5}$
	$U''(x)=x^{-3}e^{x}$
	$U'(\mathbf{e})=0$

y

	$U'(x)<0$ si $x>2$.
	$U'(x)>0$, para todo $x>0$.
X	$U'(2)=0$

Verifique que $U''(x)=\dfrac{\mathbf{e}^{\frac{x}{2}}(\frac{x^2}{4}-x-2)}{x^3}$

5. (Sólo marque la alternativa correcta)

Se afirma:
I: Si $f(x)=\arctan(\operatorname{sen}(x))$ entonces $f'(\pi)=0$
II: Si $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ entonces $f'(-1)=2$
III: Si $f(x)=x^2\sqrt{100-2x}$ entonces $f'(x)=\dfrac{200x-5x^2}{\sqrt{100-2x}}$
De las afirmaciones anteriores siempre son verdaderas:

a) sólo **I**
b) sólo **II**
c) **I , II y III**
d) sólo **II y III**
e) sólo **III** alternativa correcta

considere:

La afirmación I es Falsa

6. En cada caso, calcule $f'(x)$.

a) $f(x) = \left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^2$, donde a es una constante.

b) $f(x) = \dfrac{\ln(-x) - \ln(b)}{b}$, con b constante positiva.

c) $f(x) = e^{-3x} + x^2$

d) $f(x) = \arctan(2x) + (tan(x))^2$

e) $f(x) = x \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

f) $f(x) = \ln\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

g) $f(x) = e^{x^2}\left(\dfrac{x^2+1}{x+3}\right)$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$