Sea Y_n la cantidad de palabras con n letras de entre el conjunto $\{D, E, F\}$ en las cuales nunca aparece DD. Encuentra el valor de Y_{20}.

Solución:

Decimos que una palabra es válida si no contiene DD. Definimos la siguiente notación:

- A_n: Conjunto de palabras válidas de largo n.
- B_n: Conjunto de palabras válidas de largo n que terminan en D.
- C_n: Conjunto de palabras válidas de largo n que no terminan en D.

Como una palabra solo puede acabar o no acabar en D, tenemos que:

$$|A_n| = |B_n| + |C_n| \tag{1}$$

Ahora, tomando una palabra en C_{n-1}, podemos hacer una palabra válida de largo n añadiendo una D al final. Claramente, sólo podemos hacer esto para las palabras en C_{n-1}, ya que si tomásemos una en B_{n-1}, dado que estas acaban en D, tendríamos una DD al final. Por lo tanto, todas las palabras en B_n pueden ser generadas tomando una palabra en C_{n-1} y añadiendo una D, de lo cual se sigue:

$$|B_n| = |C_{n-1}| \tag{2}$$

Por otro lado, si tomamos una palabra en A_{n-1}, podemos hacer una válida de largo n añadiendo una E o una F al final. Como esta nueva palabra no acabará en D, y como A_{n-1} contiene todas las palabras posibles de largo $n-1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |C_n| &= 2|A_{n-1}| \\ &= 2(|B_{n-1}| + |C_{n-1}|) \end{aligned}$$

Usando la ecuación (2):

$$|C_n| = 2|C_{n-1}| + 2|C_{n-2}| \tag{3}$$

Luego, reescribiendo la ecuación (3) usando la ecuación (2):

$$|B_n| = 2|B_{n-1}| + 2|B_{n-2}| \tag{4}$$

Finalmente, usando la ecuación (1):

$$\begin{aligned} |A_{n+2}| &= |B_{n+2}| + |C_{n+2}| \\ &= (2|B_{n+1}| + 2|B_n|) + (2|C_{n+1}| + 2|C_n|) \\ &= 2(|B_{n+1}| + |C_{n+1}|) + 2(|B_n| + |C_n|) \\ &= |A_{n+1}| + |A_n| \end{aligned}$$

Con lo cual llegamos a la relación de recurrencia:

$$|A_{n+2}| = 2|A_{n+1}| + 2|A_n| \tag{5}$$

Para encontrar los valores iniciales, escribimos A_n explícitamente:

$$A_0 = \{\}, \qquad A_1 = \{D, E, F\}$$

Por lo tanto:

$$|A_0| = 1, \qquad |A_1| = 3 \tag{6}$$

Ahora, encontramos la función generadora. Escribiendo $Y_n = |A_n|$, por la ecuación (5), tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2}^{\infty} (Y_n - 2Y_{n-1} - 2Y_{n-2}) x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} Y_n x^n - 2 \sum_{n=2}^{\infty} Y_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=2}^{\infty} Y_{n-2} x^n \end{aligned}$$

Definiendo $Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n x^n$:

$$= (Y(x) - Y_0 - Y_1 x) - 2x(Y(x) - Y_0) - 2x^2 Y(x)$$

Usando los valores inicales previamente encontrados:

$$= (Y(x) - 1 - 3x) - 2x(Y(x) - 1) - 2x^2 Y(x)$$

Resolviendo para $Y(x)$, concluimos:

$$Y(x) = \frac{x+1}{1 - 2x - 2x^2}$$

Ahora, para facilitarnos las cosas, reescribimos $Y(x)$ como:

$$Y(x) = -\frac{x+1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + x - \frac{1}{2}} \tag{7}$$

Las raíces del denominador de la derecha son:

$$x_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - 1), \qquad x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Por lo tanto, podemos reescribirlo como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + x - \frac{1}{2}} &= \frac{1}{x - \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - 1)} \frac{1}{x - \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{1}{x - x_1} \cdot \frac{1}{x - x_2} \end{aligned} \tag{8}$$

con x_1, x_2 las raíces.

Como ambos términos de la derecha son de la forma $\frac{1}{x-a}$, su serie de Taylor es:

$$\frac{1}{x-a} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n a^{-n-1}$$

Sustituyendo en la ecuación (8):

$$\frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n x_1^{-n-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n x_2^{-n-1}\right)$$

Por la fórmula del producto de Cauchy, esto puede expresarse como:

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} x_1^{-j-1} x_2^{-k+j-1}\right) x^k$$

$$= \frac{1}{x_1 x_2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^j\right) x_2^{-k} x^k$$

La suma de adentro es una progresión geométrica, por lo tanto:

$$= \frac{1}{x_1 x_2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k - x_1}{x_2 - x_1}\right) x_2^{-k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_2^{k+1} - x_1^{k+1}}{x_1^{k+1} x_2^{k+1}(x_2 - x_1)} x^k$$

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (7) como:

$$\begin{aligned}
Y(x) &= -\frac{x+1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\; x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_2^{k+1} - x_1^{k+1}}{x_1^{k+1} x_2^{k+1}(x_2 - x_1)} x^k - \frac{1}{2}\;\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_2^{k+1} - x_1^{k+1}}{x_1^{k+1} x_2^{k+1}(x_2 - x_1)} x^k \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_2^{k+1} - x_1^{k+1}}{x_1^{k+1} x_2^{k+1}(x_2 - x_1)} x^{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_2^{k+1} - x_1^{k+1}}{x_1^{k+1} x_2^{k+1}(x_2 - x_1)} x^k
\end{aligned}$$

Moviendo el índice de la primera suma:

$$= -\frac{1}{2}\;\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_2^{k} - x_1^{k}}{x_1^{k} x_2^{k}(x_2 - x_1)} x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_2^{k+1} - x_1^{k+1}}{x_1^{k+1} x_2^{k+1}(x_2 - x_1)} x^k$$

Como para $k = 0$ la primer suma es cero:

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_2^{k} - x_1^{k}}{x_1^{k} x_2^{k}(x_2 - x_1)} + \frac{x_2^{k+1} - x_1^{k+1}}{x_1^{k+1} x_2^{k+1}(x_2 - x_1)}\right) x^k$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_1 x_2(x_2^{k} - x_1^{k}) + x_2^{k+1} - x_1^{k+1}}{x_1^{k+1} x_2^{k+1}(x_2 - x_1)} x^k$$

De esto, concluimos que:

$$
\begin{aligned}
Y_n &= -\frac{1}{2}\ \frac{x_1x_2(x_2^n - x_1^n) + x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{x_1^{n+1}x_2^{n+1}(x_2 - x_1)} \\
&= \frac{x_1^{n+1}(x_2+1) - x_2^{n+1}(x_1+1)}{2x_1^{n+1}x_2^{n+1}(x_2 - x_1)}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo las raíces previamente obtenidas:

$$
Y_n = \frac{\left[-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\right]^{n+1}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)+1\right] - \left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\right]^{n+1}\left[-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)+1\right]}{2\left[-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\right]^{n+1}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\right]^{n+1}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) - (-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1))\right]}
$$

Simplificando, llegamos a:

$$
Y_n = \frac{2^{n-1}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^n}\left[(\sqrt{3}-2)^{n+1} + \sqrt{3} + 2\right]
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
Y_{20} &= \frac{2^{19}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^{20}}\left[(\sqrt{3}-2)^{21} + \sqrt{3} + 2\right] \\
&= 578\,272\,256
\end{aligned}
$$