Integrales Triples.

1. Integrales Triples en Coordenadas Rectangulares.

El concepto de integral puede ampliarse hasta 3 dimensiones permaneciendo con un significado geométrico.

diferencial de altura

$$I = \underbrace{\iint}_{\text{Area en uno de los 3 planos}} \int dh \cdot dA$$

$dA \rightarrow$ diferencial de área.

$\int \rightarrow$ Altura del rectangulo representativo en volumen (prisma)

Un volumen de un sólido en el espacio, por definición, equivale a una integral triple.

$$V = \iiint_R dV.$$

En cambio, si la integral triple contiene un integrando, no representa un volumen, pero puede tener un significado físico.

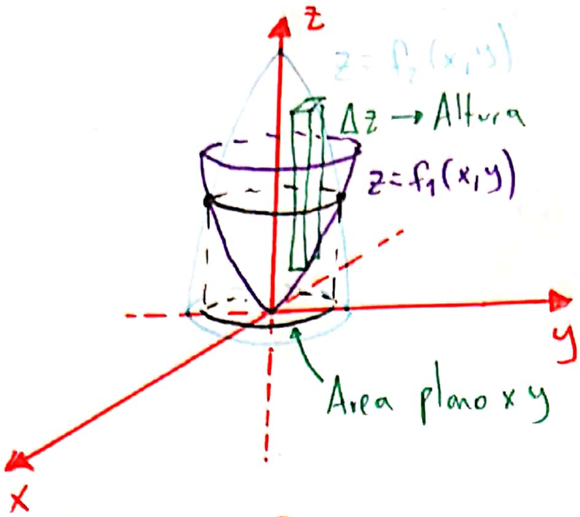
$$I = \iiint_R \underline{f(x,y,z)}\, dV.$$

$f(x,y,z) \rightarrow$ Integrando.

Las integrales triples en coordenadas rectangulares pueden plantearse en hasta 6 órdenes diferentes de integración, dependiendo de la conveniencia donde deba integrarse el área del sólido y su altura.

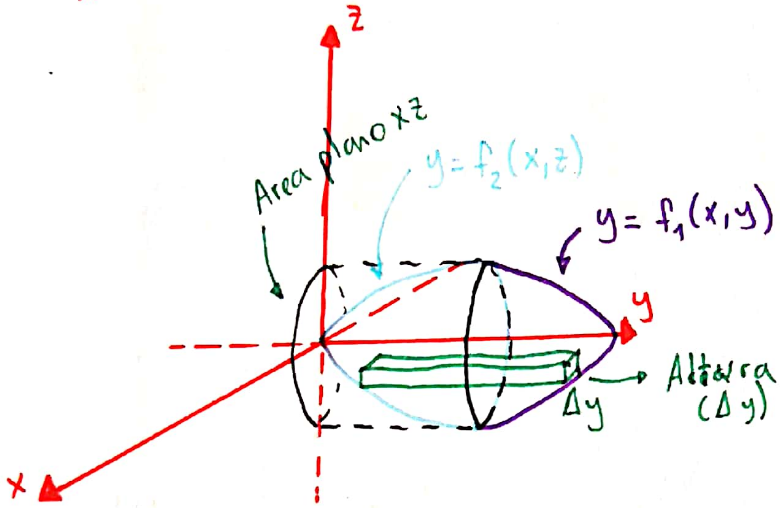
Existen órdenes de integración que son más fáciles de resolver que otros, por lo que en ocasiones, es adecuado <u>cambiar el orden de integración</u>, pasando de la integral al sólido, verificar el orden adecuado, plantear la integral y resolver.

Ordenes de integración:



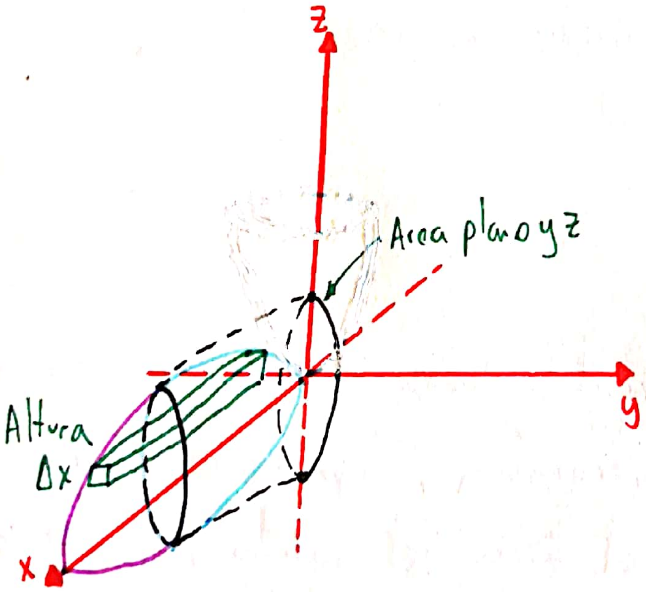
$$I=\underbrace{\iint}_{\substack{\text{Area}\\(\text{plano } xy)}}\ \underbrace{\int}_{\substack{\text{Altura}\\(\Delta z)}} dz.\,dA$$

$dA \rightarrow dydx$ ó $dxdy$



$$I=\underbrace{\iint}_{\substack{\text{Area}\\(\text{plano } xz)}}\ \underbrace{\int}_{\substack{\text{Altura}\\(\Delta y)}} dy.\,dA$$

$dA \rightarrow dxdz$ ó $dzdx$

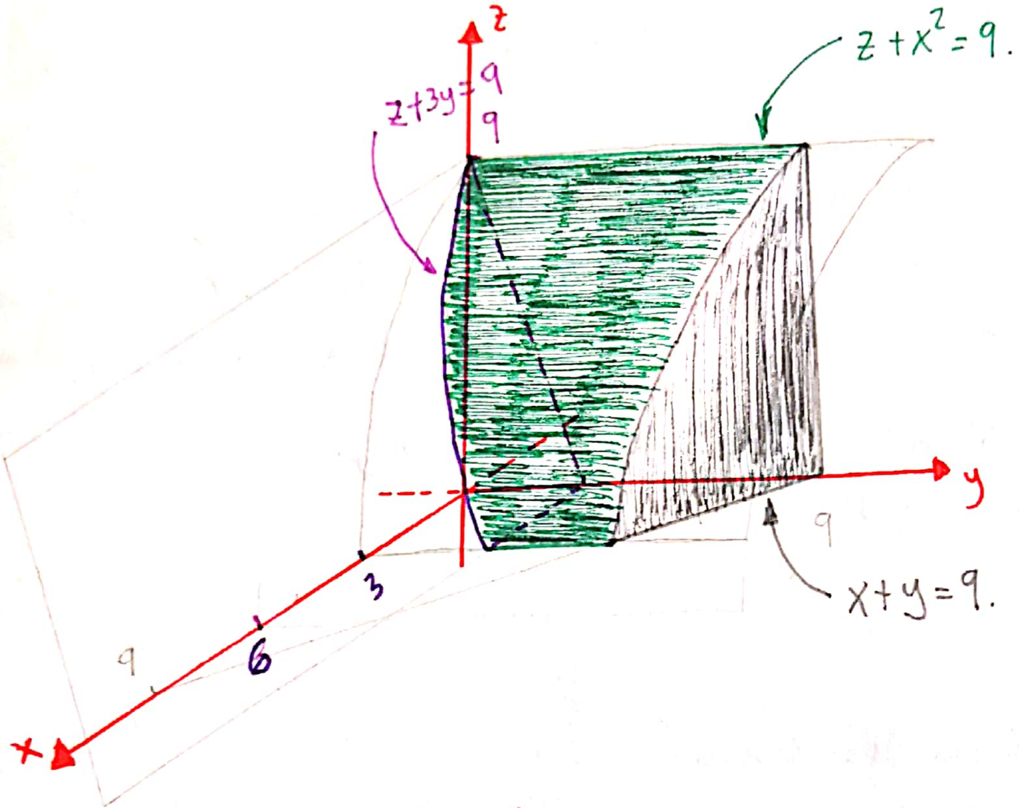


$$I=\underbrace{\iint}_{\substack{\text{Area}\\(\text{plano } yz)}}\ \underbrace{\int}_{\substack{\text{Altura}\\(\Delta x)}} dx.\,dA$$

$dA \rightarrow dydz$ ó $dzdy$.

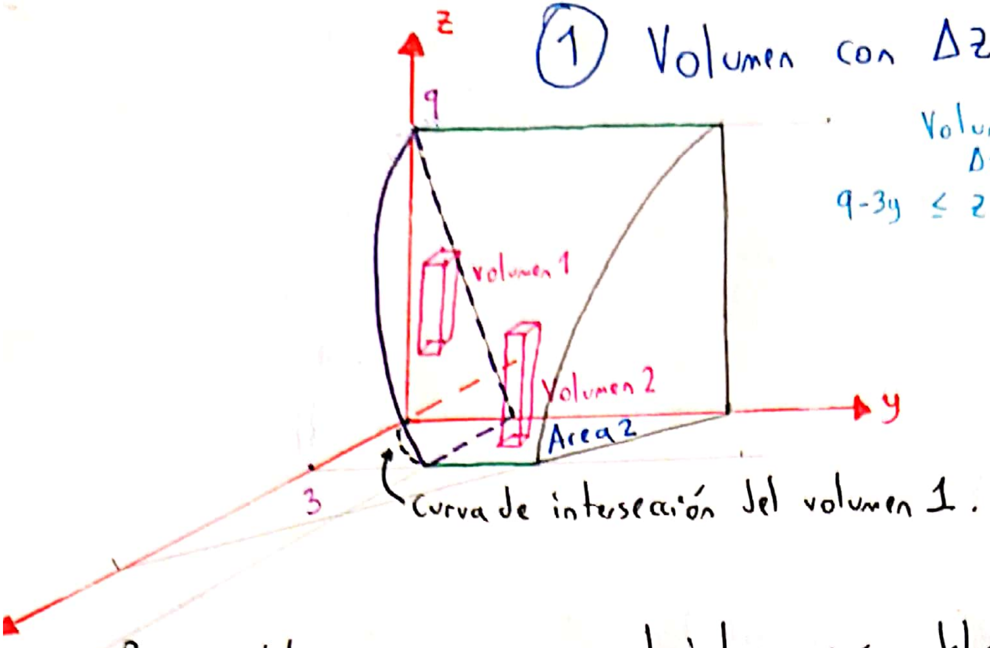
① Exprese en los seis órdenes de integración el volumen del sólido en el primer octante, encerrado por $z+x^2=9$, $x+y=9$, $z+3y=9$.
Resuelva uno de los órdenes.

* (generalmente el orden que se sigue para graficar un sólido es:
- Figuras de una variable (planos)
- Figuras de dos variables (superficies cilíndricas)
- Figuras de tres variables (superficies cuádricas, planos)) *



* Sobre la curva de intersección:
Se necesitará en dos casos:
- Cuando el sólido no tenga una de sus caras en el plano coordenado
- Cuando la función (ó funciones) que representa la altura cambi[a] por otra.

① Volumen con Δz



Volumen 1
Δz
$9-3y \leq z \leq 9-x^2$

Volumen 2
Δz
$0 \leq z \leq 9-x^2$

Para obtener una curva de intersección, deben simultanearse las ecuaciones de las superficies que se cortan de tal manera que quede en terminos de las variables del plano coordenado.

$z+3y=9$ con $z+x^2=9$. en el plano xy.

$z=9-x^2$

$\underbrace{\cancel{9}-x^2}_{z}+3y=\cancel{9}$.

$3y=x^2$.

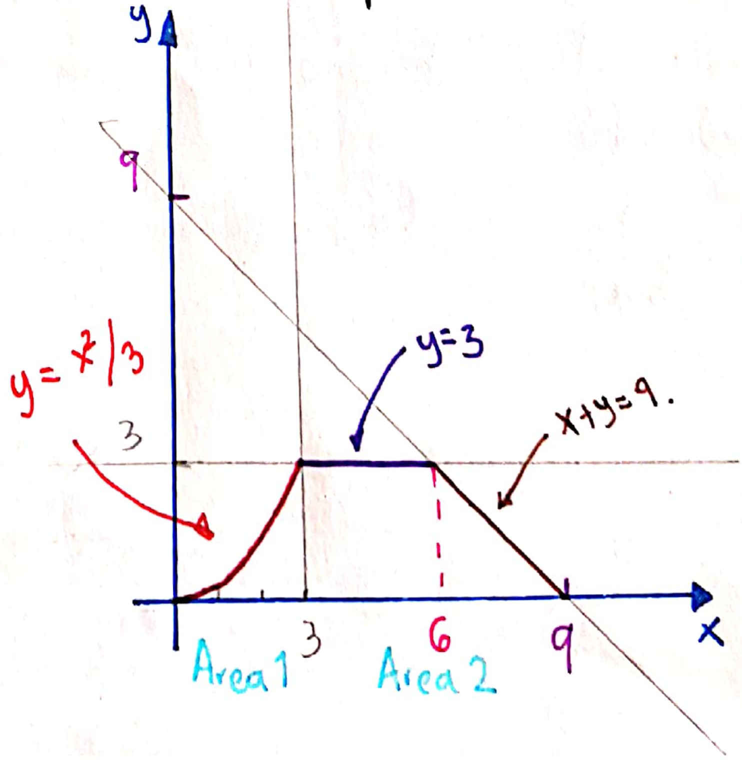
$y=\dfrac{x^2}{3}$. $\Rightarrow$ Curva de intersección

Además, el área 2 se obtiene eliminando de todas las ecuaciones la variable z, porque no existe en el plano xy. (donde calculamos el área).

$\cancel{z}+x^2=9 \rightarrow x=3$

$x+y=9$

$\cancel{z}+3y=9 \rightarrow y=3$



(1.1) Area con Δx.

Area 1. Area 2.1

$$V = \int_0^3 \int_0^{x^2/3} \int_{9-3y}^{9-x^2} dz\,dy\,dx + \int_3^6 \int_0^3 \int_0^{9-x^2} dz\,dy\,dx$$

$$+ \int_6^9 \int_0^{9-x} \int_0^{9-x^2} dz\,dy\,dx$$

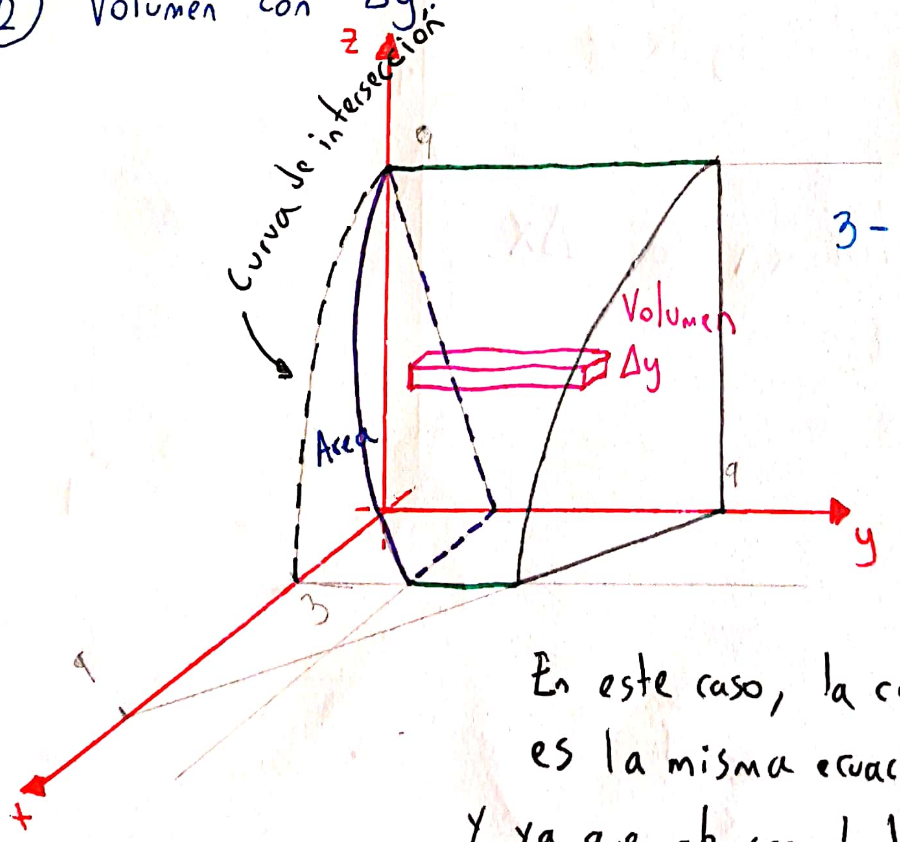
Area 2.2

(1.2) Area con Δy,

Area 1 Area 2

$$V = \int_0^3 \int_{\sqrt{3y}}^3 \int_{9-3y}^{9-x^2} dz\,dx\,dy + \int_0^3 \int_3^{9-y} \int_0^{9-x^2} dz\,dx\,dy$$

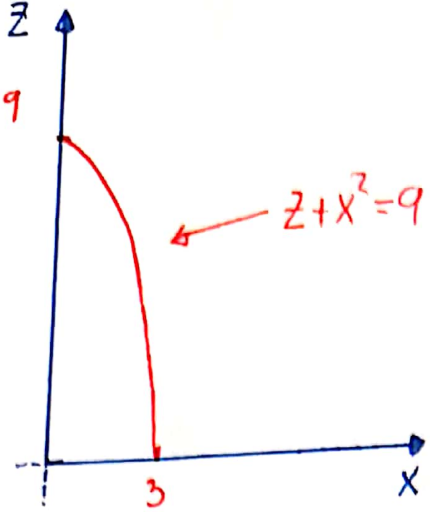
(2) Volumen con Δy.



Volumen Δy.

$$3 - \frac{z}{3} \leq y \leq 9 - x$$

En este caso, la curva de intersección es la misma ecuación de la parábola, y ya que abarca todo el volumen, no se necesita ninguna ecuación más.



2.1 Area con Δx

$$V = \int_0^3 \int_0^{9-x^2} \int_{3-\frac{z}{3}}^{9-x} dy\, dz\, dx$$

2.2 Area con Δz

$$V = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{9-z}} \int_{3-\frac{z}{3}}^{9-x} dy\, dx\, dz$$

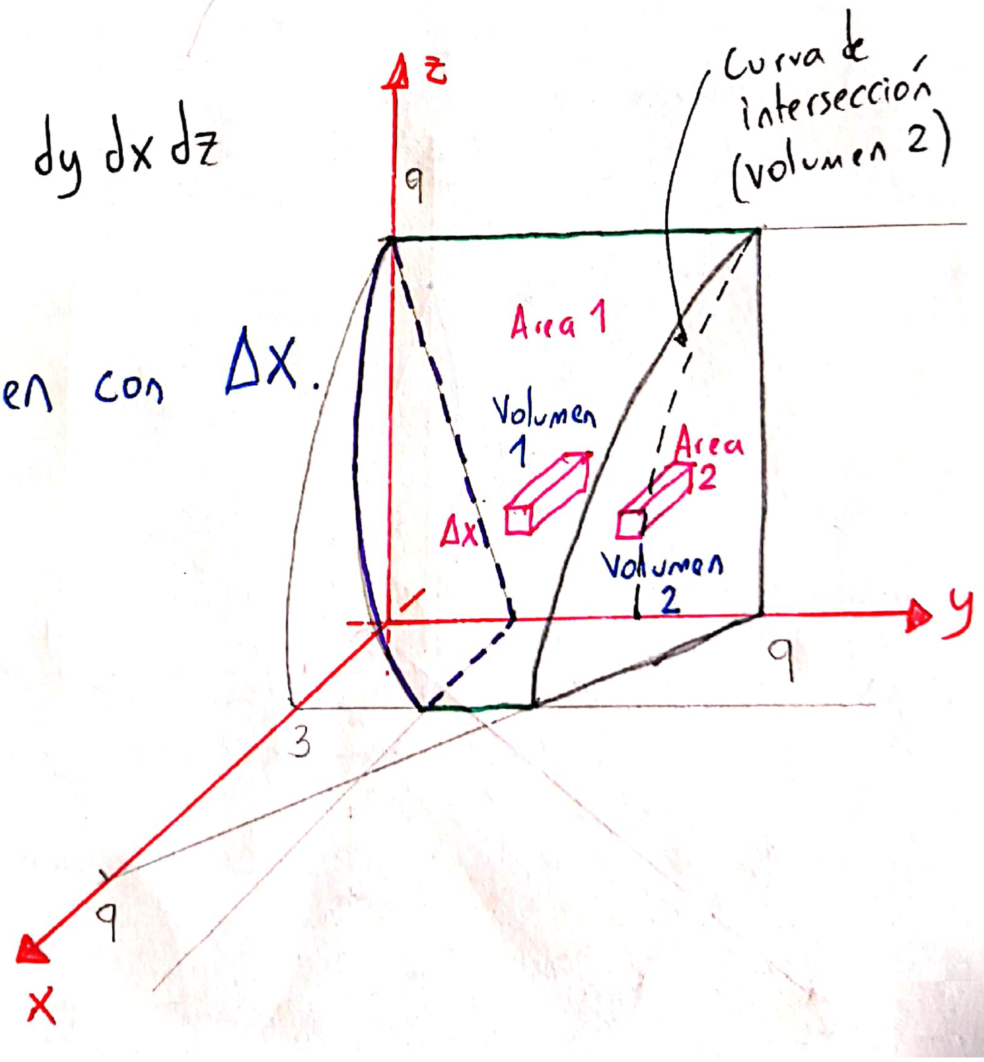
3 Volumen con Δx.

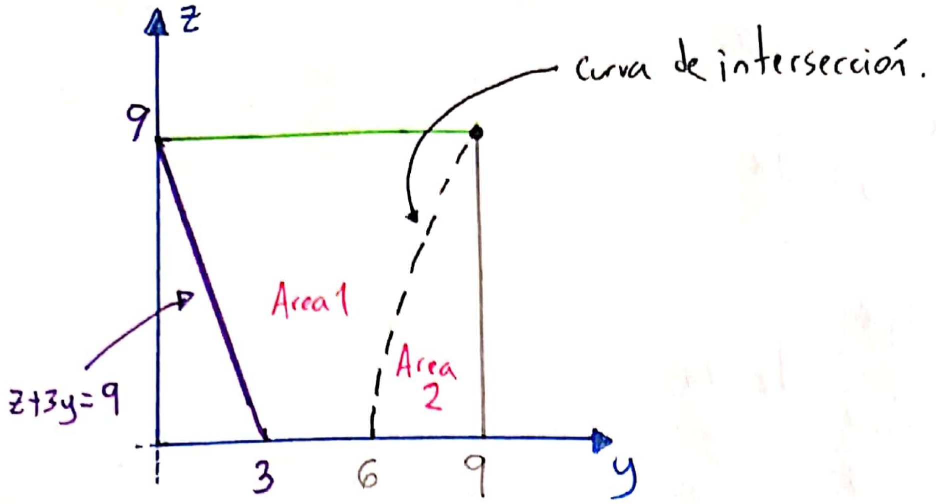
Δx volumen 1.

$0 \leq x \leq \sqrt{9-z}$

Δx volumen 2.

$0 \leq x \leq 9-y$





Curva de intersección:

$$z+x^2=9 \quad \text{con} \quad x+y=9 \quad \text{en el plano } yz$$

$$z+\underbrace{(9-y)}_{x}{}^2=9 \Rightarrow z=9-(y-9)^2$$

$$(z-9)=-(y-9)^2 \rightarrow \text{parábola abierta hacia abajo}$$

$$9-z=(y-9)^2$$

$$y=9\pm\sqrt{9-z}$$

$$C(9,9)$$

3.1 Area con Δy.

54

Area 1.1 — Area 1.2

$$\int_0^3\int_{9-3y}^{9}\int_0^{\sqrt{9-z}} dx\,dz\,dy + \int_3^6\int_0^9\int_0^{\sqrt{9-z}} dx\,dz\,dy +$$

$\frac{972\sqrt{3}}{5}$ $\quad \frac{108}{5}$

Area 1.3 — Area 2

$$\int_6^9\int_{9-(y-9)^2}^{9}\int_0^{\sqrt{9-z}} dx\,dz\,dy + \int_6^9\int_0^{9-(y-9)^2}\int_0^{9-y} dx\,dz\,dy$$

$\frac{27}{2}$ $\quad 81/4$

3.2 Area con Δz

$$\int_0^9\int_{\frac{9-z}{3}}^{9-\sqrt{9-z}}\int_0^{\sqrt{9-z}} dx\,dy\,dz + \int_0^9\int_{9-\sqrt{9-z}}^{9}\int_0^{9-y} dx\,dy\,dz$$

$$\frac{791}{10} + \frac{81}{4}$$

Resolviendo el orden más sencillo:

$$V = \int_0^3 \int_0^{9-x^2} \int_{3-\frac{z}{3}}^{9-x} dy\,dz\,dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{9-x^2} y \Big|_{3-\frac{z}{3}}^{9-x} dz\,dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{9-x^2} 9-x-3+\frac{z}{3}\,dz\,dx = \int_0^3 \int_0^{9-x^2} 6-x+\frac{z}{3}\,dz\,dx$$

$$= \int_0^3 6z - xz + \frac{1}{6}z^2 \Big|_0^{9-x^2} dx$$

$$= \int_0^3 (9-x^2)\left(6-x+\frac{1}{6}(9-x^2)\right) dx$$

$$= \int_0^3 (9-x^2)\left(6-x+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}x^2\right) dx$$

$$= \int_0^3 (9-x^2)\left(\frac{15}{2}-x-\frac{1}{6}x^2\right) dx = \int_0^3 \frac{135}{2} - 9x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{2}x^2 + x^3 + \frac{1}{6}x^4\,dx$$

$$= \int_0^3 \frac{135}{2} - 9x - 9x^2 + x^3 + \frac{1}{6}x^4\,dx$$

$$\frac{135}{2}x - \frac{9}{2}x^2 - 3x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{30}x^5 \Big|_0^3 = \frac{2187}{20} \approx \underline{109.35\,u^3}$$

② Para la siguiente integral

a) Escriba los órdenes restantes

b) Integre uno de ellos

$$\int_{-5}^{0}\int_{-10-x}^{-5-x}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{0} (25-y^2)^{3/2}\, dy\, dz\, dx$$

** Se comienzan obteniendo todas las ecuaciones a partir de los límites y graficando desde los más internos a los más externos. **

(derecha) $y=0 \rightarrow y=0 \rightarrow$ plano xz

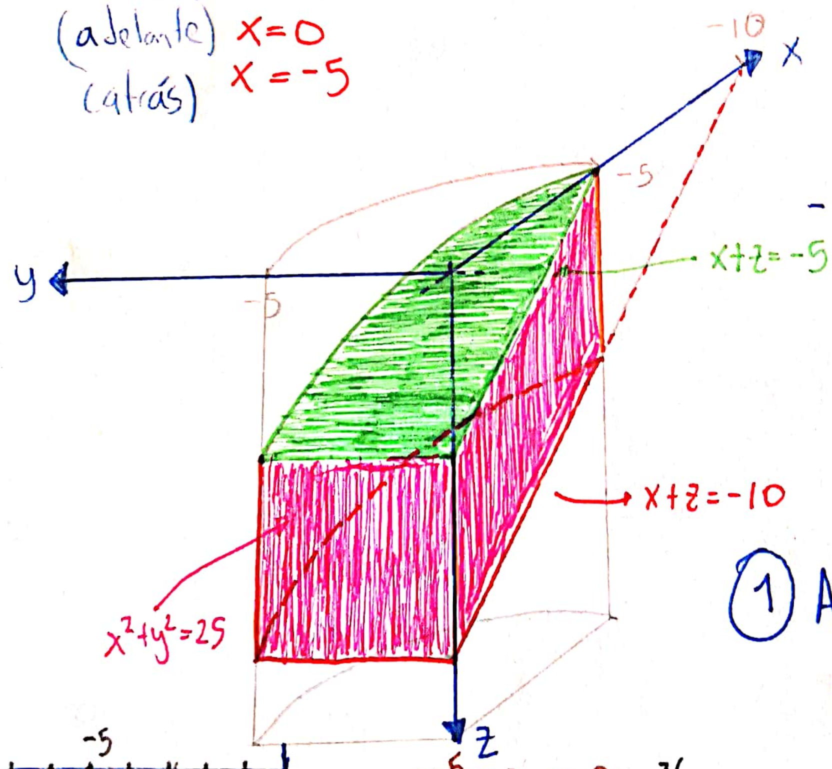
(izquierda) $y=-\sqrt{25-x^2} \rightarrow y^2+x^2=25 \rightarrow$ (parte izquierda)

(arriba) $z=-5-x \rightarrow x+z=-5$

(abajo) $z=-10-x \rightarrow x+z=-10$

(adelante) $x=0$

(atrás) $x=-5$

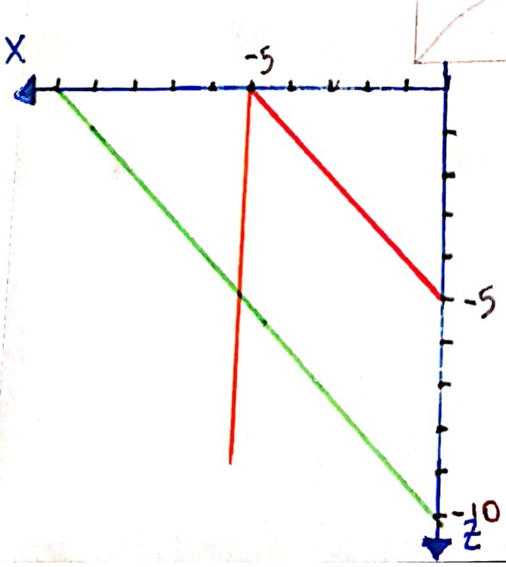


Volumen Δy

$$-\sqrt{25-x^2} \le y \le 0$$

① Area plano xz

Δz

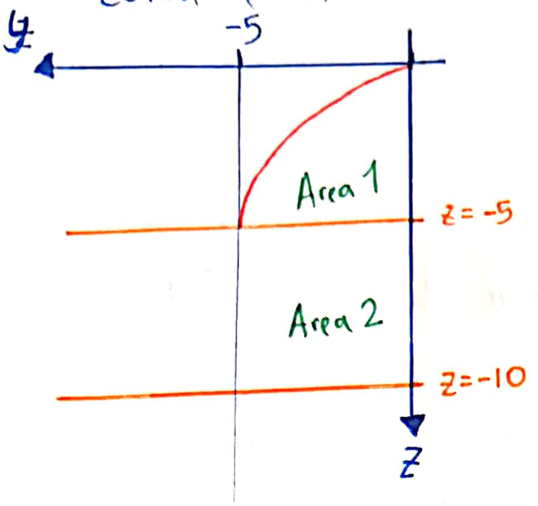


$$\int_{-10}^{-5}\int_{-10-z}^{0}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{0}(25-y^2)^{3/2}\, dy\, dx\, dz \quad +$$

$$\int_{-5}^{0}\int_{-5}^{-5-z}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{0}(25-y^2)^{3/2}\, dy\, dx\, dz$$

② Area plano yz.

(Observe que el volumen se parte en 2, y se necesita una curva de intersección). (Eliminar x de cada ecuación)



$y=0$ ✓

$y^2+\cancel{x^2}=25 \rightarrow y=-5$

$\cancel{x}+z=-5 \rightarrow z=-5$

$\cancel{x}+z=-10 \rightarrow z=-10$

$\cancel{x=0}$

$\cancel{x=-5}$

Curva de intersección.

$y^2+x^2=25$ con $x+z=-5$ en plano yz.

$$y^2+(-z-5)^2=25 \rightarrow (z+5)^2=25-y^2 \Rightarrow z=-5\pm\sqrt{25-y^2}$$

$$\boxed{y^2+(z+5)^2=25} \rightarrow C(0,-5)\ r=5.$$

Volumen 1

Δx

$$-\sqrt{25-y^2}\le x\le -5-z$$

Volumen 2

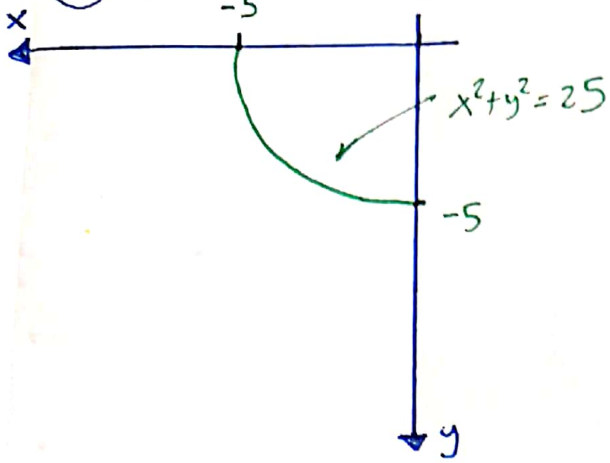
Δx

$$-\sqrt{25-y^2}\le x\le 0$$

$$V=\int_{-5}^{0}\int_{-5}^{-5+\sqrt{25-y^2}}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{-5-z}(25-y^2)^{3/2}\,dx\,dz\,dy+\int_{-5}^{0}\int_{-10}^{-5}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{0}(25-y^2)^{3/2}\,dx\,dz\,dy$$

$$V=\int_{-5}^{0}\int_{-\sqrt{25-(z+5)^2}}^{0}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{-5-z}(25-y^2)^{3/2}\,dx\,dy\,dz+\int_{-10}^{-5}\int_{-5}^{0}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{0}(25-y^2)^{3/2}\,dx\,dy\,dz$$

③ Area Plano xy.



* La curva de intersección es el mismo cilindro. *

Altura volumen Δz

$$-10-x \leq z \leq -5-x$$

$$V=\int_{-5}^{0}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{0}\int_{-10-x}^{-5-x}(25-y^2)^{3/2}\,dz\,dy\,dx$$

$$V=\int_{-5}^{0}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{0}\int_{-10-x}^{-5-x}(25-y^2)^{3/2}\,dz\,dx\,dy.$$

* El orden de integración más facil, es el que menos se integra *

$$I=\int_{-5}^{0}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{0} z\,(25-y^2)^{3/2}\Big|_{-10-x}^{-5-x}\,dx\,dy$$

$$=\int_{-5}^{0}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{0}(25-y^2)^{3/2}(-5-\cancel{X}+10+\cancel{X})\,dx\,dy$$

$$=5\int_{-5}^{0}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{0}(25-y^2)^{3/2}\,dx\,dy.$$

$$5\int_{-5}^{0} (25-y^2)^{3/2}\, x \Big|_{-\sqrt{25-y^2}}^{0} dy$$

$$= 5\int_{-5}^{0} (25-y^2)^{3/2} \sqrt{25-y^2}\, dy.$$

$$= 5\int_{-5}^{0} (25-y^2)^2\, dy = 5\int_{-5}^{0} 625 - 50y^2 + y^4\, dy$$

$$= 5\left[625y - \frac{50}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right]_{-5}^{0}$$

$$= 5\left[625(-5) - \frac{50}{3}(-5)^3 + \frac{1}{5}(-5)^5\right] = \frac{-25{,}000}{3}. \text{ RX}$$

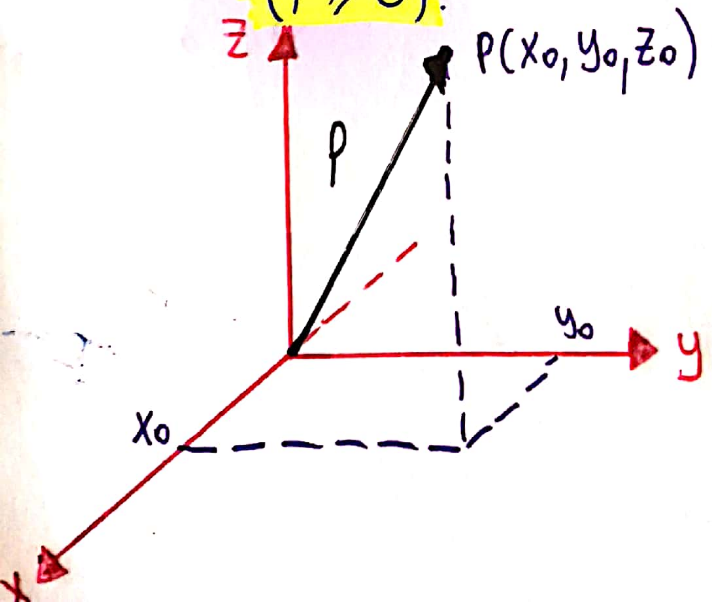
---

② Integrales Triples en coordenadas esféricas.

2.1 Coordenadas esféricas.

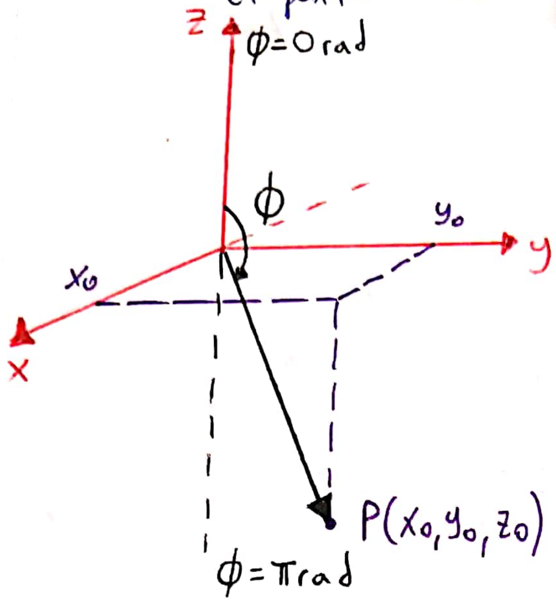
ⓐ ρ : es la distancia desde el origen hasta el punto P.

$(\rho \geq 0)$.



$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

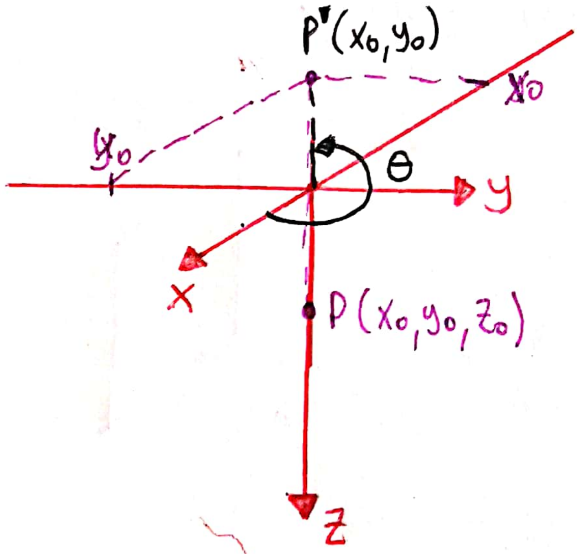
(b) ϕ: Es el angulo medido a partir del eje z positivo hasta el punto P. $0 \leq \phi \leq \pi$



ϕ puede medirse en cualquier dirección a partir de z^+ (siempre y cuando $0 \leq \phi \leq \pi$).

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

(c) θ: Es el mismo angulo utilizado en coordenadas polares para describir un movimiento en el plano xy $0 \leq \theta \leq 2\pi$



$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Otras conversiones:

$$x = \rho \operatorname{Sen}\phi \operatorname{Cos}\theta$$
$$y = \rho \operatorname{Sen}\phi \operatorname{Sen}\theta$$
$$z = \rho \operatorname{Cos}\phi$$

$$x^2 + y^2 = r^2 = \rho^2 \operatorname{Sen}^2\phi.$$

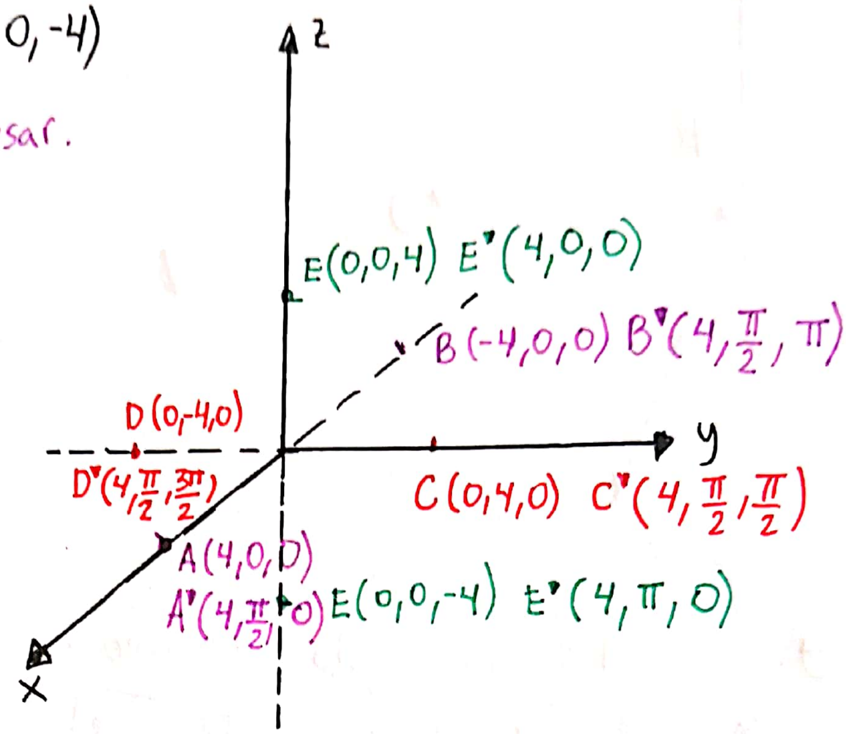
* Convertir los siguientes puntos a coordenadas esféricas (sin las Fórmulas):

$A(4,0,0)$ $B(-4,0,0)$ $C(0,4,0)$ $D(0,-4,0)$

$E(0,0,4)$ $F(0,0,-4)$

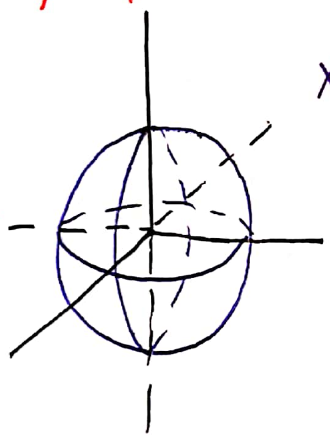
esféricas $(\rho, \phi, \theta) \rightarrow$ usar.

[algunos libros (ρ, θ, ϕ)]



Figuras simples en coordenadas esféricas:

a) Esferas.

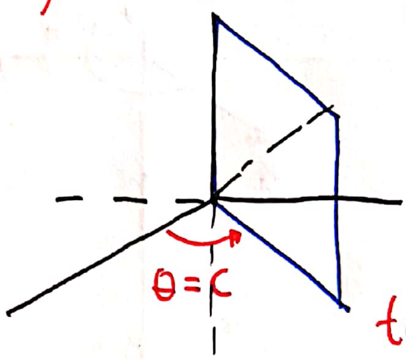


$x^2+y^2+z^2=r^2$

$\rho^2=r^2$

$\boxed{\rho=r}$

b) Planos ($z=c$, ó $y=mx$)



$y=mx$

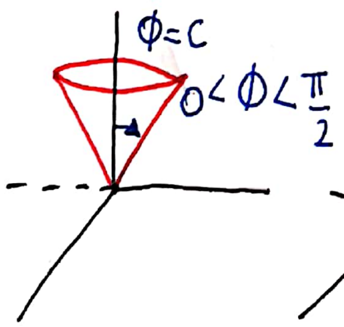
$\frac{y}{x}=m$

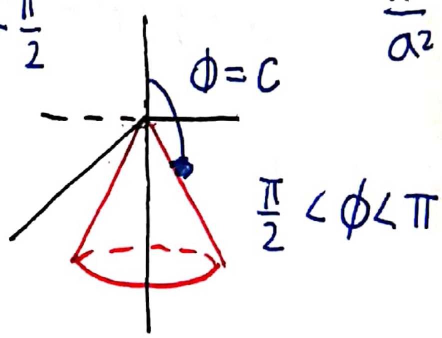
$\tan\theta=m$

$\theta=\tan^{-1}m$

$\boxed{\theta=C}$

c) Conos.





$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z^2$$

$$\frac{\cancel{\rho^2}\,\text{Sen}^2\phi}{a^2}=\cancel{\rho^2}\cos^2\phi$$

$$\frac{\text{Sen}^2\phi}{\cos^2\phi}=a^2$$

$\tan^2\phi = a^2.$

$\tan\phi = a.$

$\phi = \tan^{-1}(a)$

$\boxed{\phi = c}$

2.2 Integral triple en coordenadas esféricas.

Se utilizará en los siguientes casos:

1. Cuando el volumen del sólido sea estrictamente simétrico en el eje z.
2. Cuando el sólido este formado por: esferas, conos, planos ($y = mx$, $z = c$), también podría usarse en paraboloides y cilindros.
3. Cuando el integrando contenga términos de la forma: $x^2+y^2+z^2$, $\frac{y}{x}$, ó alguno de sus derivados.

Forma de la integral de volumen:

$$V = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \overbrace{\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta}^{\text{diferencial de volumen}}.$$

θ: movimiento en el plano xy

ϕ: movimiento en el eje z^+

ρ: distancia a partir del origen

Si la integral contiene un integrando, entonces no tiene significado geométrico.

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho,\phi,\theta)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

① Hallar el volumen del solido en los octantes inferiores, limitado por $z=-1$, $z=-3$, $z^2=x^2+y^2$, $-4z=x^2+y^2$.

* (Se recominda convertir los conos a coordenadas esféricas antes de graficarlos)

** (Se recomienda en TODA integral en esféricas, dibujar en 2D el sólido en el plano yz y luego rotar).

$z=-1 \rightarrow \rho\cos\phi=-1 \rightarrow \rho=\dfrac{-1}{\cos\phi}$
(plano)

$z=-3 \rightarrow \rho\cos\phi=-3 \rightarrow \rho=\dfrac{-3}{\cos\phi}$
(plano)

$z^2=x^2+y^2 \rightarrow \cancel{\rho^2}\cos^2\phi=\cancel{\rho^2}\sin^2\phi \Rightarrow 1=\tan^2\phi$
(cono)

$1=\tan\phi.$

$\phi=\tan^{-1}(1)$

$\boxed{\phi=\pi/4}$ pero,

al ser inferior,

$\phi=\pi-\pi/4$

$\boxed{\phi=3\pi/4}$

$-4z=x^2+y^2 \rightarrow -4\cancel{\rho}\cos\phi=\rho^{\cancel{2}}\sin^2\phi$
(paraboloide)

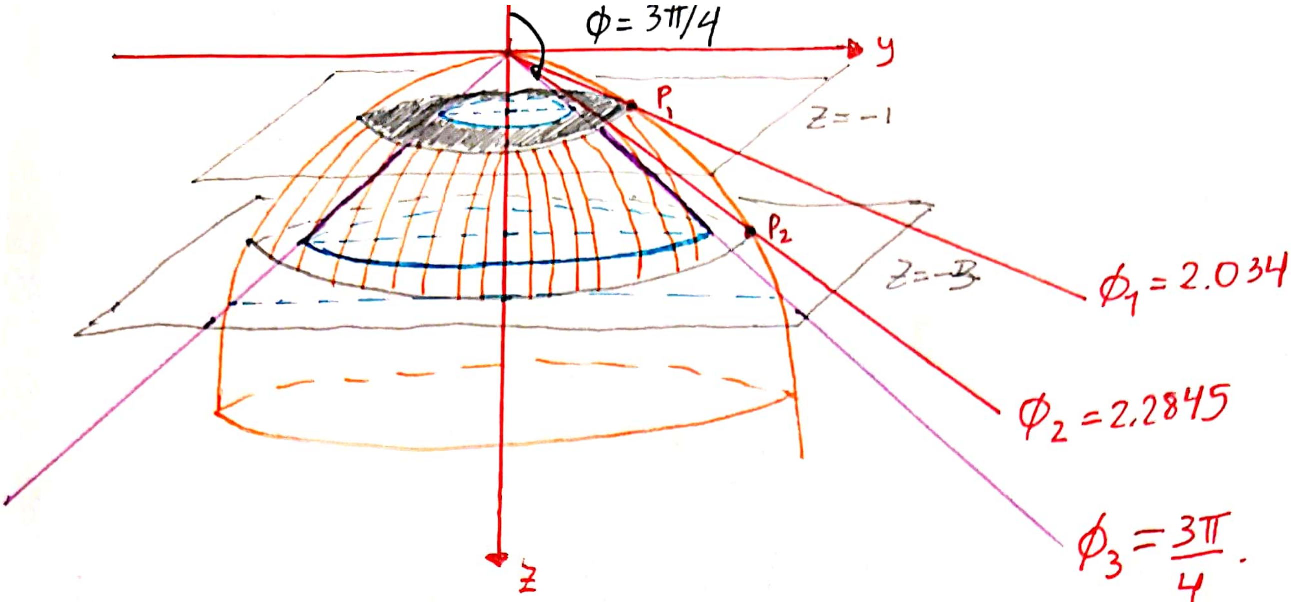
$\rho=\dfrac{-4\cos\phi}{\sin^2\phi}=\boxed{\dfrac{-4\cos\phi}{\sin^2\phi}}$ ó $\Rightarrow -4\cot\phi\csc\phi$

* Corte entre paraboloide y cono:

$z^2=x^2+y^2$ con $-4z=x^2+y^2$

$z^{\cancel{2}}=-4\cancel{z}$ y $\boxed{z=0}$

$\boxed{z=-4}$



ϕ_1.

$\rho = \frac{-1}{\cos\phi}$ con $\rho = -\frac{4\cos\phi}{\text{sen}^2\phi}$

$\frac{+1}{\cos\phi} = \frac{+4\cos\phi}{\text{sen}^2\phi}$

$\text{sen}^2\phi = 4\cos^2\phi$

$\tan^2\phi = 4$

$\tan\phi = 2$

$\phi_1 = \tan^{-1}(2)$

$\phi_1 = 1.107$ rad.

$\phi_1 = \pi - 1.107$ rad

$\phi_1 = 2.034$ rad.

ϕ_2.

$z = -3$ con $\rho = -\frac{4\cos\phi}{\text{sen}^2\phi}$

$\frac{-3}{\cos\phi} = -4\frac{\cos\phi}{\text{sen}^2\phi}$

$-3\text{sen}^2\phi = -4\cos^2\phi$

$\tan^2\phi = \frac{4}{3}$

$\tan\phi = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0.8571$

$\phi_2 = 2.2845$

Otra Forma:

$P(0, y, -1)$

$-4z = \cancel{x} + y^2$

$4 = y^2$.

$\boxed{y = 2}$

$P_1(0, 2, -1)$

$P_2(0, \sqrt{12}, -3)$

$\phi_1 = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{0+4+1}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$

$\phi_1 = 2.0344$.

$\phi_2 = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{21}}\right)$

Entre ϕ_1 y ϕ_2

$$\frac{-1}{\cos\phi} \leq \rho \leq -\frac{4\cos\phi}{\operatorname{Sen}^2\phi}$$

Entre ϕ_2 y ϕ_3 =

$$\frac{-1}{\cos\phi} \leq \rho \leq \frac{-3}{\cos\phi}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)}^{\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{21}}\right)} \int_{\frac{-1}{\cos\phi}}^{\frac{-4\cos\phi}{\operatorname{Sen}^2\phi}} \rho^2 \operatorname{Sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \longrightarrow I_1$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_{\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{21}}\right)}^{3\pi/4} \int_{\frac{-1}{\cos\phi}}^{\frac{-3}{\cos\phi}} \rho^2 \operatorname{Sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta . \longrightarrow I_2 .$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_{\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)}^{\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{21}}\right)} \operatorname{Sen}\phi \cdot \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_{\frac{-1}{\cos\phi}}^{\frac{-4\cos\phi}{\operatorname{Sen}^2\phi}} d\phi \, d\theta .$$

$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)}^{\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{21}}\right)} -\frac{64\cos^3\phi}{\operatorname{Sen}^6\phi} \cdot \operatorname{Sen}\phi + \frac{\operatorname{Sen}\phi}{\cos^3\phi} \, d\phi \, d\theta$$

$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)}^{\cos^{-1}(-3/\sqrt{21})} -\frac{64\cos^2\phi}{\operatorname{Sen}^5\phi} \cdot \cos\phi + \frac{\operatorname{Sen}\phi}{\cos^3\phi} \, d\phi \, d\theta$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)}^{\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{21}}\right)} \frac{-64(1-\text{Sen}^2\phi)}{\text{Sen}^5\phi}\cdot\cos\phi + \frac{1}{\cos^3\phi}\,\text{Sen}\,\phi\, d\phi\, d\theta.$$

$$\frac{-64}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\cos^{-1}(-1/\sqrt{5})}^{\cos^{-1}(-3/\sqrt{21})} \frac{1-\text{Sen}^2\phi}{\text{Sen}^5\phi}\cdot\cos\phi\, d\phi\, d\theta$$

$U = \text{Sen}\,\phi$ $\qquad U_{inf} = 2\sqrt{5}/5$

$du = \cos\phi\, d\phi$ $\qquad U_{sup} = 2\sqrt{7}/7$

$$\frac{-64}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{2\sqrt{7}/7} \frac{1}{U^5} - \frac{U^2}{U^5}\, du\, d\theta$$

$$\frac{-64}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{2\sqrt{7}/7} U^{-5} - U^{-3}\, du\, d\theta$$

$$-\frac{64}{3}\int_0^{2\pi} -\frac{U^{-4}}{4} + \frac{U^{-2}}{2}\Bigg|_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{2\sqrt{7}/7} d\theta = -\frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\frac{7}{64} - \frac{15}{64}$$

$$\frac{8}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{8}{3}\,\theta\Big|_0^{2\pi} = \boxed{\frac{16\pi}{3}}$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\cos^{-1}(-1/\sqrt{5})}^{\cos^{-1}(-3/\sqrt{21})} \frac{1}{\cos^3\phi}\,\text{Sen}\,\phi\, d\phi\, d\theta$$

$U = \cos\phi$

$du = -\text{Sen}\,\phi\, d\phi.$

$U_{inf} = \cos\left(\cos^{-1}\left(-1/\sqrt{5}\right)\right) = -1/\sqrt{5}$

$U_{sup} = -3/\sqrt{21}.$

$$\frac{-1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{-1/\sqrt{5}}^{-3/\sqrt{21}} \frac{1}{U^3}\, du\, d\theta = \frac{-1}{3}\int_0^{2\pi}\frac{U^{-2}}{-2}\Bigg|_{-1/\sqrt{5}}^{-3/\sqrt{21}} d\theta$$

$$\frac{1}{\cancel{6}}\int_0^{2\pi} -\frac{8}{3} = \frac{-4}{9}\,\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{-8\pi}{9}$$

$$I_1 = \frac{40}{9}\pi$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\int_{\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{21}}\right)}^{3\pi/4}\int_{\frac{-1}{\cos\phi}}^{\frac{-3}{\cos\phi}} \rho^2 \operatorname{Sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{21}}\right)}^{3\pi/4} \operatorname{Sen}\phi \cdot \rho^3 \Big|_{\frac{-1}{\cos\phi}}^{\frac{-3}{\cos\phi}} d\phi\, d\theta$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{21}}\right)}^{3\pi/4} \left[\frac{-27}{\cos^3\phi} + \frac{1}{\cos^3\phi}\right] \operatorname{Sen}\phi \, d\phi\, d\theta$$

$$U_{inf} = \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{21}}\right)\right) = \frac{-3}{\sqrt{21}}$$

$$U = \cos\phi$$
$$dU = -\operatorname{Sen}\phi\, d\phi. \quad U_{sup} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{-3/\sqrt{21}}^{-\sqrt{2}/2} -27U^{-3} + U^{-3} \; d\phi\, d\theta$$

$$\frac{-26}{3}\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}U^{-2}\Big|_{-3/\sqrt{21}}^{-\sqrt{2}/2} d\theta = \frac{13}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\right) d\theta = \frac{-13}{9}\,\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$I_2 = \frac{-26}{9}\pi$$

$$V = \frac{40}{9}\pi - \frac{26}{9}\pi = \frac{14}{9}\pi\, u^3$$

② Usando integrales triples, hallar el valor de:

$$\iiint_R \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dV$$

donde R es el sólido en los octantes superiores, dentro de $x^2+y^2+z^2=16$, fuera de $x^2+y^2+z^2=9$, fuera de $x^2+y^2+z^2=4z$.

$x^2+y^2+z^2=16.$

$\rho^2=16$

$\boxed{\rho=4}$

$x^2+y^2+z^2=9$

$\rho^2=9$

$\boxed{\rho=3}$

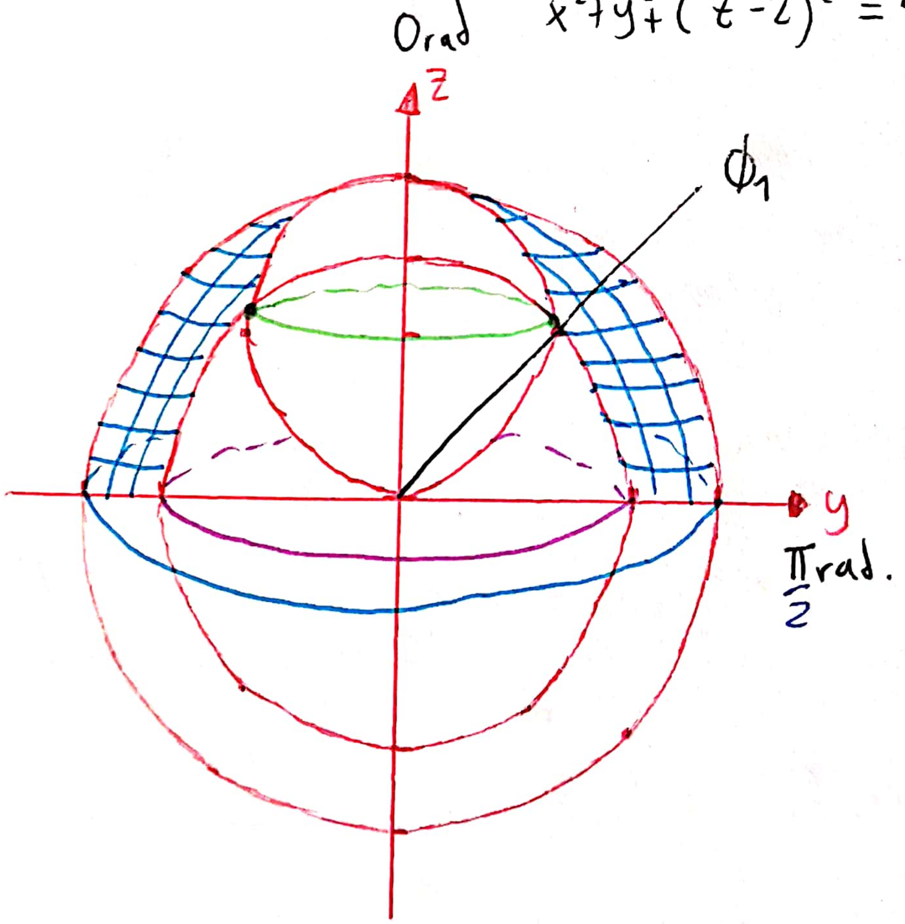
$x^2+y^2+z^2=4z.$

$\rho^{\cancel{2}}=4\cancel{\rho}\cos\phi$

$\boxed{\rho=4\cos\phi}$

$x^2+y^2+z^2-4z+4=4$

$x^2+y^2+(z-2)^2=4.$



$3=4\cos\phi.$

$\frac{3}{4}=\cos\phi$

$\phi=\cos^{-1}(3/4)$

$\phi=0.7227$ rad

$\phi_1=41.41°.$

Scanned by CamScanner

Entre 0 rad y ϕ_1

$4\cos\phi \le \rho \le 4$

Entre ϕ_1 y π:

$3 \le \rho \le 4.$

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\cos^{-1}(3/4)}\int_{4\cos\phi}^{4} \frac{1}{\rho^2}\rho^2 \operatorname{Sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta \; +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{\cos^{-1}(3/4)}^{\pi/2}\int_3^4 \frac{1}{\rho^2}\rho^2 \operatorname{Sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\cos^{-1}(3/4)}\int_{4\cos\phi}^{4} \frac{1}{\cancel{\rho^2}}\cancel{\rho^2} \operatorname{Sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos^{-1}(3/4)} \operatorname{Sen}\phi \cdot \rho \Big|_{4\cos\phi}^{4} \, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\cos^{-1}(3/4)} 4\operatorname{Sen}\phi - 4\operatorname{Sen}\phi\cos\phi \, d\phi\, d\theta.$$

$u = \operatorname{Sen}\phi$

$du = \cos\phi\, d\phi.$

$$= \int_0^{2\pi} -4\cos\phi - 2\operatorname{Sen}^2\phi \Big|_0^{\cos^{-1}(3/4)} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-31}{8} + 4 \, d\theta = \frac{1}{8}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

Scanned by CamScanner

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\int_{\cos^{-1}(3/4)}^{\pi/2}\int_3^4 \frac{1}{\cancel{\rho^2}}\cancel{\rho^2}\,\text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\cos^{-1}(3/4)}^{\pi/2} \text{sen}\,\phi\; \rho\Big|_3^4\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\cos^{-1}(3/4)}^{\pi/2} \text{sen}\,\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$-\int_0^{2\pi} \cos\phi\Big|_{\cos^{-1}(3/4)}^{\pi/2} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos[\cos^{-1}(3/4)] - \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\, d\theta$$

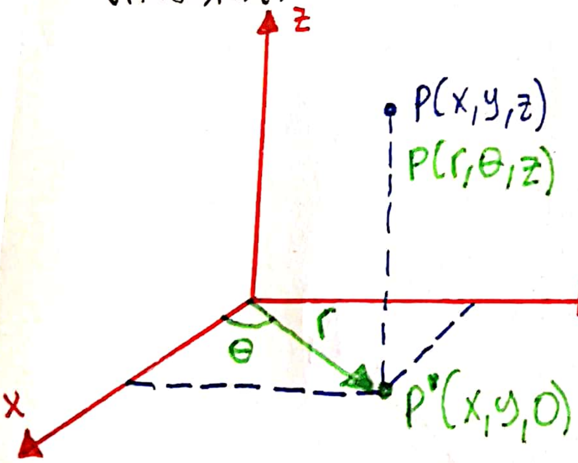
$$\frac{3}{4}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{4}(2\pi) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

$$I = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} \quad R//$$

---

(3) Integrales triples en coordenadas cilíndricas.

Es una generalización de las coordenadas polares a las tres dimensiones.



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$z = z$$

$$I = \underbrace{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2}}_{\text{Area en polares plano } xy} \underbrace{\int_{f_1}^{f_2}}_{z = f(r,\theta)} g(r,\theta,z)\, \underbrace{r\, dz\, dr\, d\theta}_{dV}$$

Se utilizarán para los siguientes casos:

1) Cuando el sólido este formado por cilindros, paraboloides, conos, planos, esferas y el diferencial de volumen más conveniente sea un Δz. $\underset{\text{rectangulares}}{dz} = \underset{\text{cilíndricas.}}{dz}$

② Cuando el integrando contenga términos de la forma
x^2+y^2, $\frac{y}{x}$ ó alguna forma derivada.

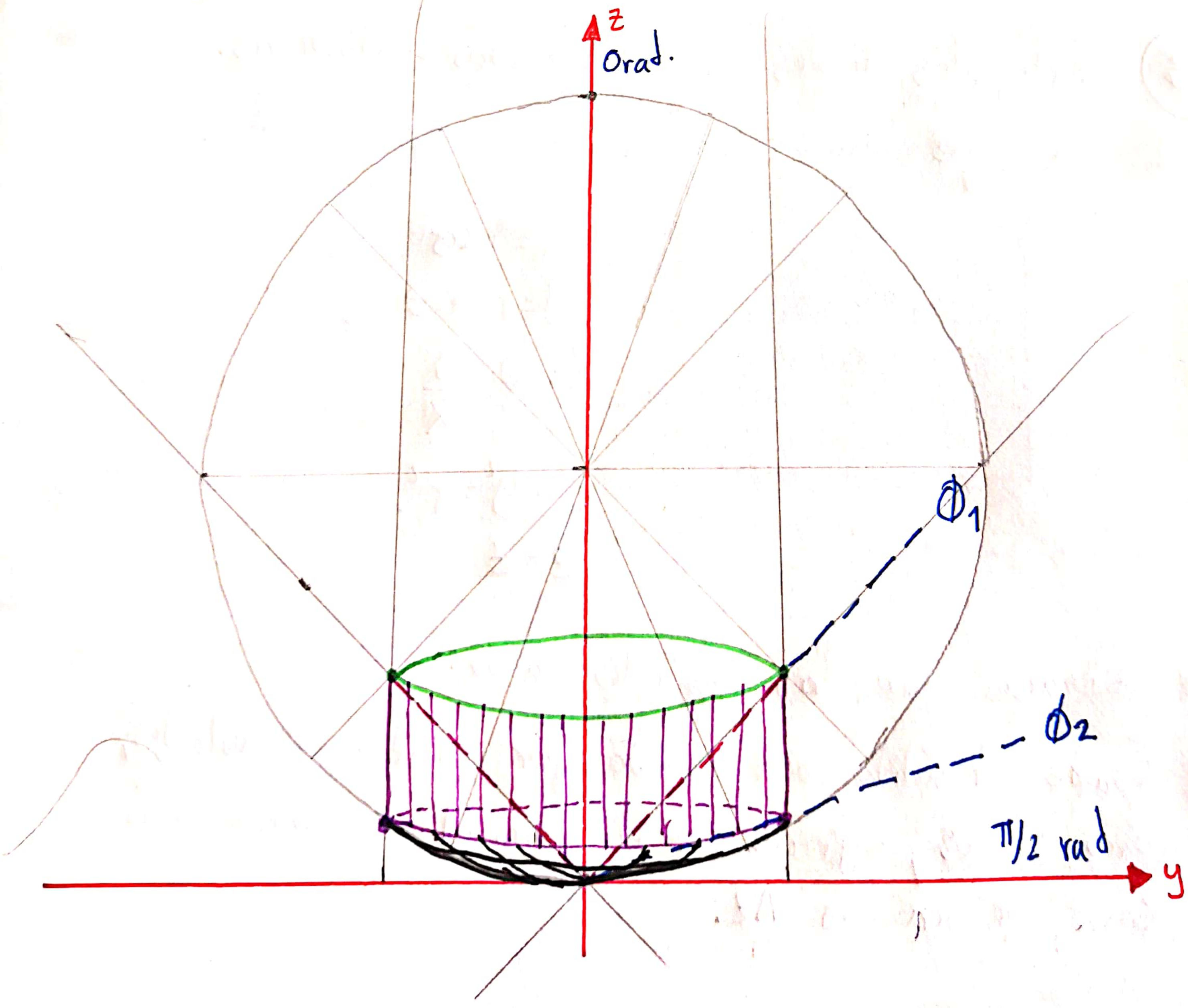
① Plantee en Integrales triples en coordenadas cilíndricas, esféricas y rectangulares, el volumen del solido formado por la región común fuera de $z^2=x^2+y^2$, dentro de $x^2+y^2=9$, dentro de $x^2+y^2+z^2-12z=0$. Resuelva en coord. cilíndricas.

$x^2+y^2+z^2-12z+36=36$

$x^2+y^2+(z-6)^2=6^2 \rightarrow$ esfera $C(0,0,6)$ $r=6$.

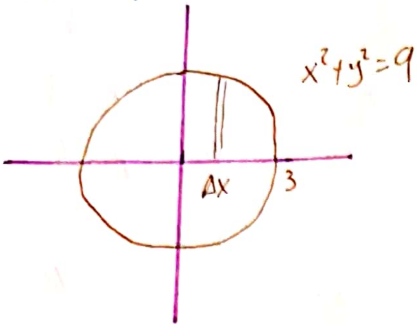
$z^2=x^2+y^2 \rightarrow \rho^2\cos^2\phi=\rho^2\sin^2\phi \rightarrow \tan^2\phi=1$. $\boxed{\phi=\pi/4}$

$x^2+y^2=9 \rightarrow$ Cilindro radio 3.



Coordenadas rectangulares:

Area plano xy



Volumen z

espera $\le z \le$ cono
parte
inferior.

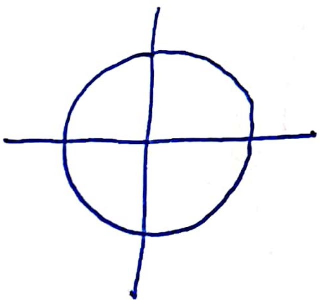
$$6-\sqrt{36-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{x^2+y^2}.$$

$$x^2+y^2+(z-6)^2=36$$
$$(z-6)^2=36-x^2-y^2$$
$$z-6=\pm\sqrt{36-x^2-y^2}$$
$$z=6\pm\sqrt{36-x^2-y^2}$$

$$V=4\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_{6-\sqrt{36-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dy\,dx.$$

Coordenadas cilíndricas:

Area en polares:



$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le r \le 3$

Volumen en z

$6-\sqrt{36-r^2} \le z \le r$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{6-\sqrt{36-r^2}}^{r} \overbrace{r\,dz\,dr\,d\theta}.$$

diferencial de
coord.
cilíndricas.

Coordenadas esféricas:

Para hallar ϕ_1

$P(0,3,3)$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{0^2+3^2+3^2}}\right)$$

$$\boxed{\phi_1 = \pi/4}$$

Para hallar ϕ_2.

$x^2+y^2+z^2-12z=0$ con $x^2+y^2=9$

$\rho^2 - 12\rho\cos\phi = 0$

$\boxed{\rho = 12\cos\phi}$

$\rho^2 \operatorname{Sen}^2\phi = 9$

$\rho \operatorname{Sen}\phi = 3$

$$\boxed{\rho = \frac{3}{\operatorname{Sen}\phi}}$$

$12 \operatorname{Sen}\phi \cos\phi = 3.$

$6 \operatorname{Sen}(2\phi) = 3.$

$\operatorname{Sen}(2\phi) = \frac{1}{2}.$

$2\phi = \operatorname{Sen}^{-1}(1/2)$

$\boxed{\phi_2 = \pi/12} \to \frac{\pi}{2} - \pi/12 = \boxed{5\pi/12}$

Entre ϕ_1 y ϕ_2.

$0 \leq \rho \leq$ cilindro

$0 \leq \rho \leq \frac{3}{\operatorname{Sen}\phi}$

Entre ϕ_2 y $\pi/2$

$0 \leq \rho \leq 12\cos\phi.$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{5\pi/12}\int_0^{\frac{3}{\operatorname{Sen}\phi}} \rho^2 \operatorname{Sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{5\pi/12}^{\pi/2}\int_0^{12\cos\phi} \rho^2 \operatorname{Sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{6-\sqrt{36-r^2}}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 rz\Big|_{6-\sqrt{36-r^2}}^{r} dr\,d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\cdot r - r(6-\sqrt{36-r^2})\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2 - 6r + r\sqrt{36-r^2}\,dr\,d\theta.$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\,dr\,d\theta - 6\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\,dr\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\sqrt{36-r^2}\,dr\,d\theta$$

$u = 36 - r^2$

$du = -2r\,dr$

$\frac{du}{-2} = r\,dr$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}r^3\Big|_0^3 d\theta - \frac{6}{2}\int_0^{2\pi} r^2\Big|_0^3 d\theta \cancel{+} -\frac{1}{2}\int\int u^{1/2}\,du\,d\theta$$

$$9\int_0^{2\pi} d\theta - 3(9)\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}(36-r^2)^{3/2}\Big|_0^3 d\theta$$

$$9\theta\Big|_0^{2\pi} - 27\theta\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(36-9)^{3/2} - (36)^{3/2}\,d\theta$$

$$(126 - 54\sqrt{3})\pi \approx \underline{102.005\ u^3}$$

Scanned by CamScanner