UNIVERSIDAD DON BOSCO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MATEMÁTICA III ING.

## GUIA DE EJERCICIOS 2

1. Evalue los siguientes limites, si existen, utilice los métodos de sustitución, factorización o racionalización:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \frac{xy-3y}{x^2+y^2-6y+9}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,\frac{\pi}{4})} \cos(3x+y)$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^4}{x+y^2}$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1-cos^2(3x^2+3y^2)}}{x+y^2}$ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. Usando el método de los caminos, determine si los siguientes límites existen o no, en caso de existir, escriba el valor del límite

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2+xy-2}{x^2y+xy^2-x-y}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2x^2+y^2}}$

3.Determine si la función es continua en el punto (0,0), en caso de no serlo, y si es posible, reescriba para que sea continua.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y^2+xy^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+6xy^2-3x^2-3y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4. Determine y grafique el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x,y)=\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2-16}}}{\arccos(x+y)}+\frac{sen(x^2+y^2)}{\ln(y^2-x^2+1)}$$

$$f(x,y,z)=\ln(x^2-y^2-4)$$

$$g(x,z)=\frac{\log_4(z^2-4z)}{\sqrt[3]{4x^2+64z^2-16}}+\frac{x^2+z^2-6}{\sqrt{x^2-z^2-4}}$$

$$w=\frac{\sqrt{4z^2-x^2-y^2+16}}{arcsen(z)}$$

$$f(y,z)=(-3)^{\sqrt{4z^2+y^2-16}}+\frac{log_2(16-4z^2+y^2)}{\sqrt[4]{9-y^2}}$$

$$f(x,y,z)=\text{arcsec}(\frac{1}{x+z})$$

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2-y^2-z^2-2x-2y+2z-1}$$

5. Grafique las siguientes curvas o superficies de nivel, según sea el caso. Encuentre también la **formula general** para las **curvas de nivel**, en caso de ser posible.

$$f(x,y)=\frac{x+2y+1}{x^2-y^2}\,para\; k=-\frac{3}{2},1$$

$$f(x,y)=x^3-x \quad k=0,\;\; 6$$

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{x+y}{y^2}}\quad para\; k=\frac{1}{2},\qquad 1$$

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2\;\; para\; k=-16,0,4$$

$$f(x,y,z)=e^{4x^2-9y^2+16x+36y+36z}\; para\; k=e^{20}$$

$$f(x,y,z)=\tan(z^2+y^2+6z-6y-x+18)\; para\; k=0,\;\; 1$$

$$f(x,y)=3^{\frac{x^2+y^2}{2x-2y}}\quad para\; k=\frac{1}{81},1,81$$

$$f(x,y,z)=log_2(x^2+4x-y^2-2y+z+3)\; para\; k=0,2$$

$$f(x,y,z)=\operatorname{arccsc}\left(\frac{y^2-x^2-4y+4x}{z-4}\right)para\; k=\pi/2$$

$$f(x,y)=\sqrt[3]{\frac{x-y}{x^2+y^2}}\; para\; k=0,\frac{1}{2}$$

6. Encuentre las primeras derivadas parciales, usando la definición de derivada parcial. Compruebe derivando usando los teoremas de derivación.

$$f(x,y)=\sqrt{2x^2-3y^3}\quad f(x,y)=\frac{x-3y}{\sqrt{3x+y}}\; f(x,y)=(x-3y+1)^2$$

$$f(x,y,z)=\frac{z^2}{x+y^2}$$

7. Calcule las primeras y segundas derivadas parciales para las siguientes funciones, usando los teoremas de derivación. Simplifique la respuesta a la mínima expresión.

$$f(x,y)=\frac{2x}{xy+3y}\; f(x,y)=\sqrt{\frac{sen(xy)}{x+3y^2}}\quad f(x,y)=\ln\left(\frac{4x^2}{x+y}\right)$$

8. Calcule las derivadas de orden superior, que se piden a continuación. Simplifique a la mínima expresión.

$$f(x,y,z)=\ln\left(\frac{xz}{xy+yz}\right)\text{ Hallar } D_{1133}$$

$$f(x,y,z)=\operatorname{arccot}\left(\frac{xz}{xy+yz}\right)\text{ Hallar } \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$$

$f(x,y,z)=\sqrt{\left(\frac{xy+z}{yz-x}\right)}+3x$ Hallar $f_{xxyz}$

9. Hallar las siguientes derivadas

$$xy^2z^3+2xz=6x^3y^2-yz \quad hallar\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$\ln\left(\frac{x^2+yz}{xy+z^2}\right)=20\ hallar\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\operatorname{arccot}(xy^2)=xe^z+ycos(2z)\ \ hallar\ \ \frac{\partial^2 y}{\partial z\partial x}$$

10. Hallar la pendiente, en la dirección y punto indicados, usando derivada direccional:

$f(x,y)=\sqrt[3]{\frac{x^2+8}{2xy+27}}$ *en la dirección del vector que va de* $(4,2)$ *a* $(6,9)$ *y evaluado en* $\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$

$f(x,y,z)=e^{\cos(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}$ En la dirección del vector que va de A(1,0,3) a B(-2,6,5) y evaluado en (1,1,1)

$f(x,y)=\ln\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)$ *en la dirección de un vector que forma un ángulo de* $30°$ *con el eje y positivo.*

*Y evaluado en el punto (1,1)*

11. Encuentre las siguientes derivadas:

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{y^3z}+\frac{y^2}{xz^3}+\frac{z^3}{x^3y}\ hallar\frac{\partial f}{\partial s}, simplifique.$$

Donde: $x=e^{rst}$ $\ y=\ln(rst)$ $\ z=rst$

$$f(x,y,z)=\arctan\left(\frac{x}{2+z^2}\right)+x*arcsen\left(\sqrt{1-y}\right)\ \ hallar\ \frac{\partial f}{\partial w}$$

Donde: $x=2^{\csc(u+v+3)}$ $\quad y=4w*\ln\left(\frac{u^2}{1-v^2}\right)$ $\ z=u*e^{5w}$

Hallar $\frac{dw}{dt}$ de $w=\frac{xz}{xy+yz}$ donde $x=\sqrt{arcsen(\frac{t^2}{1-t^2})}$, $y=t^2log_2(te^t)$, $z=\sqrt[3]{\frac{t}{2+t}}$

12. Determine si las siguientes funciones son diferenciables en (0,0) :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

13. Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27$$
$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$
$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$$
$$f(x,y) = -4y^4 + 8x^2y^2 - \frac{x^2}{32} + 3$$
$$f(x,y) = y^3 - 3x^2y - 3y^2 - 3x^2 + 8$$
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$
$$f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$$
$$f(x,y,z) = z^2 + \frac{y^2}{2} + 3xy + xz - 20y - 26z + 22x$$

$f(x,y)=(9x+12x^3)(2y^2+4y)$

14. Resolver los siguientes problemas de aplicación:

DERIVADAS PARCIALES:

a) Suponga que 10,000x dólares es el inventario de un almacén que tiene ***y*** empleados. P es la utilidad semanal del almacén. Cuya ecuación es:
$$P(x,y) = 3000 + 240y + 20y(x-2y) - 10(x-12)^2$$
Actualmente el inventario es de \$180,000 y hay 8 empleados. Calcule la tasa de variación de P por unidad de variación de *x* si *y* permanece fija en 8.

b) Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie con el plano x=1, en el punto (1,0,1) $f(x,y) = \frac{x^3+xy^2}{(xy^3-x^2)^2}$

DIFERENCIALES:

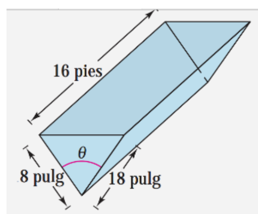
c) La resistencia total R de tres resistencias conectadas en paralelo es : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Aproximar el cambio en R cuando R1 incrementa de 10 ohm a 10.5 ohm , R2 decrece de 15 ohm a 13 ohm y R3 incrementa de 25 a 25.5 ohm

d) Un tanque industrial tiene forma cilíndrica con extremos hemisféricos, como se muestra en la figura.
Hallar una fórmula para calcular el área superficial del tanque.

El diámetro del tanque es de 20 metros y la longitud del tanque es de 50 mts. Con un error de hasta el 1% en cada medición. Calcule el error porcentual en el cálculo del área superficial del tanque.


e) Una compañía tiene un contrato para la elaboración de 10,000 cajas de madera cerradas cuyas dimensiones serán de 3m, 4m y 5m. El costo de la madera que se empleará es de $3 por metro cuadrado. Si las máquinas para cortar las piezas de madera tienen un error posible de 0.5 cm en cada dimensión. Calcular el mayor error posible en la estimación del costo de la madera. Calcule además el porcentaje de error de la estimación.

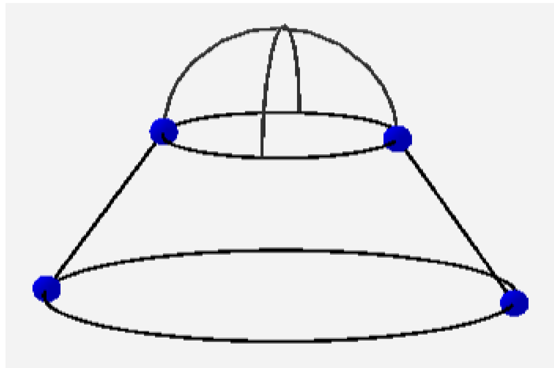
f) Un abrevadero tiene 16 pies de largo. Sus secciones transversales son triángulos isósceles en los que los dos lados iguales miden 18 pulgadas. El ángulo entre los dos lados iguales es Ɵ.




*Expresar el volumen del abrevadero en función de Ɵ para el que el volumen es máximo

*El error máximo en las mediciones es de media pulgada y el error máximo en la medida del ángulo es de 2°. Aproximar el cambio a partir del volumen máximo.

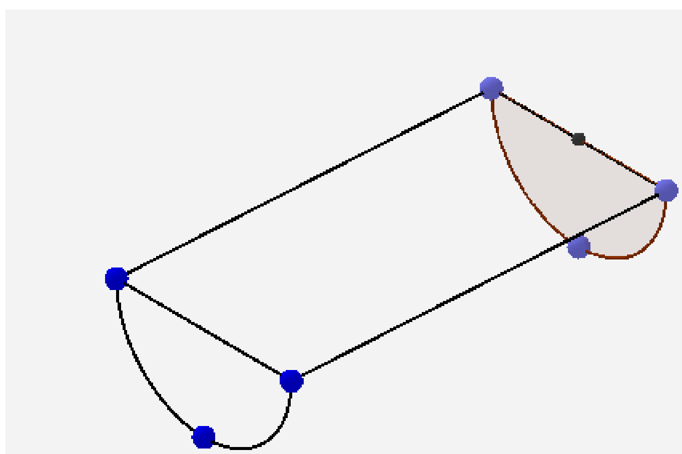
g) Un tanque cerrado tiene la forma que se muestra en la figura.
El diámetro de la base mayor es de 12 mts. El diámetro de la base superior es de 6mts.
El tanque tiene una altura de 4mts.



* Hallar una fórmula para encontrar el área superficial del tanque. (Use las variables r, R, h)

*El error en las mediciones es de hasta 2 cms. Hallar el máximo error posible al calcular el área superficial del tanque.

h) Un tanque abierto por su parte superior tiene la forma que se muestra en la figura (diámetro: 2m, largo 5m).



Expresar el **área superficial** y el **volumen** del tanque.
El máximo error al medir el radio es de 0.02m y el error máximo al medir la altura es de 0.1 m. Hallar el error máximo al calcular el área superficial.

Hallar el error porcentual al calcular el volumen del tanque.

REGLA DE LA CADENA Y RAZONES DE CAMBIO EN EL TIEMPO:

i)

La temperatura **T en un punto (x,y,z)** en el espacio es inversamente proporcional **al cuadrado de la distancia de (x,y,z) al origen**.
a) Encuentre la **fórmula de la temperatura** sabiendo que **T(3,4,0)=50**

b) Si las coordenadas de una partícula cambian en función del tiempo, donde x=3*cos(t), y=4*sen(t+π/2), z=t. Encuentre **la velocidad a la que cambia la temperatura en el instante en que t=π/2**.

j) Un pequeño automóvil de carreras consume gasolina en **Galones por hora (G)** en función de una formula **G(d,v)** donde **d es la distancia recorrida en millas** y **v es la velocidad en mph(millas por hora)**, ambas variables **dependen del tiempo**.
El fabricante del automóvil da las siguientes especificaciones sobre su rendimiento:
En el instante en el que **d=8,000 millas y v=120 mph**, el consumo es de **-2x10$^{-4}$ G /milla** y también de **0.13 G/mph**.
Si el automóvil comienza a correr cuando **d=8,000 millas y v=120 mph**, sus indicadores en el tablero marcan que su distancia recorrida cambia a **5 millas por minuto** y su **velocidad cambia a 1 mph por min**.
Encuentre el **consumo de gasolina en G/ minuto**.

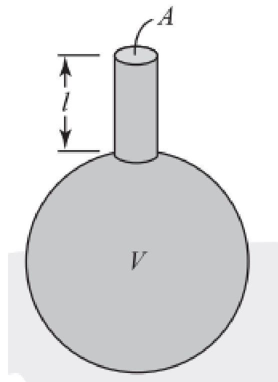
k) El radio de un cono circular recto se incrementa a razón de 6 pulg/min y la altura decrece a razón de 4 pulg/min. ¿Cuál es la razón de cambio del área superficial cuando el radio es de 12 pulg y la altura de 36 pulg? (Suponga que el cono es **cerrado**).

l) Una pared de retención forma un ángulo de 3π/4 con el suelo. Una escalera de 25 pies de longitud está recargada contra la pared y su parte superior se desliza hacia abajo sobre la pared a una tasa de 4pie/s. ¿Qué tan rápido varía el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el piso, cuando la escalera forma un ángulo de π/6 con el suelo?

m) La manecilla de hora de un reloj mide 2cm y la del minutero, 4cm. Calcular la velocidad con que los extremos de las agujas se acercan entre sí a las tres horas en punto.

n) Un resonador de Helmholtz es cualquier recipiente con un cuello y una abertura (tal como se observa en la figura). Cuando se sopla el aire a través de la abertura, el resonador produce un sonido característico cuya frecuencia, en ciclos por segundo, es: $f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{lV}}$ donde A es el área de la sección transversal de la abertura, l es la longitud del cuello, V es el volumen del recipiente (sin contar el cuello) y c es la velocidad del sonido (aprox 330m/s).
La botella tiene una abertura circular de 2cm de diámetro, un cuello de 6 cm de largo, y el diámetro del recipiente esférico es de 8 cm. Suponga que el volumen de la botella está disminuyendo a una tasa de 10 cm$^3$/s, mientras que su cuello se adelgaza a una tasa de 1cm/s. Calcule la velocidad a la que cambia la frecuencia en el instante en el que la botella tiene las dimensiones ya especificadas.

UNIVERSIDAD DON BOSCO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MATEMÁTICA III ING.




DERIVADAS DIRECCIONALES, RECTA NORMAL Y PLANO TANGENTE:

o) La temperatura T en un punto (x,y,z) en el espacio es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de (x,y,z) al origen. Sabemos que T(0,0,1)=500. Encuentre la tasa de cambio de la temperatura T en P(2,3,3) en la dirección de un vector que va del punto P al punto Q(1,2,6). ¿En cuál dirección a partir de (2,3,3), la temperatura aumenta con mayor rapidez?

p) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección entre las superficies: $x^2-3xy+y^2=z$ ; $2x^2+y^2-3z+27=0$ en el punto (1,-2,11)

q) Hallar una función f tal que: $\nabla f= (3x^2+y^3+y*e^{xy})$ **i** + $(-2y^2+3xy^2+x*e^{xy})$**j** y comprobarlo.

r) Suponga que $\nabla f(a,b)=4$**i** + 3**j**. Hallar un vector unitario **u** tal que: $D_U f(a,b)=0$.

s) Determine si hay algunos puntos sobre la superficie $z^2+xy-2x-y^2=1$ en los cuales el plano tangente es paralelo a $z=2$

t) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z=\sqrt{x^2+4y^2}$ con el plano x=-√5 en el punto (-√5, 1,3)

u) Hallar **la dirección** en la que la derivada direccional sea mínima de $f(x,y,z)=\arctan\left(\frac{x^2+yz}{2xy+z^2}\right)$ en el punto (1,0,1). (Debe simplificar a la mínima expresión cada derivada y dejar constancia de todo procedimiento)

v) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies: $z= x^2 + y^2$ ; x+y+6z=33 , en el punto (1,2,5)

w) Para la función: $f(x,y)=\frac{4xy}{(x^2+1)(y^2+1)}$ hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta normal y una ecuación general del plano tangente en el punto (-1, 2,4/5). Simplificar a la mínima expresión cada derivada y detallar cada paso del procedimiento.

x)

$$f(x,y) = \frac{8y}{1+x^2+y^2}$$

*Encontrar la ecuación general de la curva de nivel
*Dibujar la curva de nivel para k=2
*En el punto $(\sqrt{3},2)$ sobre la curva de nivel para la cual k=2, dibujar el vector que apunta en la dirección de la mayor tasa o ritmo de incremento de la función.
* En el punto $(\sqrt{3},2)$ sobre la curva de nivel, dibujar el vector cuya derivada direccional sea cero.

y) La temperatura en el punto (x,y) de una placa metálica se modela mediante: $T(x,y) = 400e^{-\frac{x^2+y}{2}}$, con x≥0, y≥0. Hallar las direcciones sobre la placa en el punto (3,5) en las que no hay cambio de calor. Encuentre también la dirección de mayor y menor incremento en el punto anterior.

z) Encontrar un punto sobre el elipsoide $x^2+4y^2+z^2=9$ donde el plano tangente es perpendicular a la recta: $x=2-4t, y=1+8t, z=3-2t$

aa) Demostrar que las superficies tienen planos tangentes perpendiculares en el punto (1,-2,1): $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4z-12=0, 4x^2+y^2+16z^2=24$

bb) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies:
* $z= x^2 + y^2$ ; x+y+6z=33 , en el punto (1,2,5)
* $z= (x^2 + y^2)^{1/2}$ ; 5x-2y+3z=22, en el punto (3,4,5)

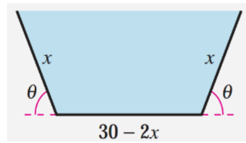
EXTREMOS RELATIVOS:

cc) Hallar tres números positivos, *x, y* y *z* que cumplan las condiciones dadas:
*El producto es 27 y la suma de los cuadrados es mínima.
*La suma es 32 y $P=x^2yz$ es máxima.

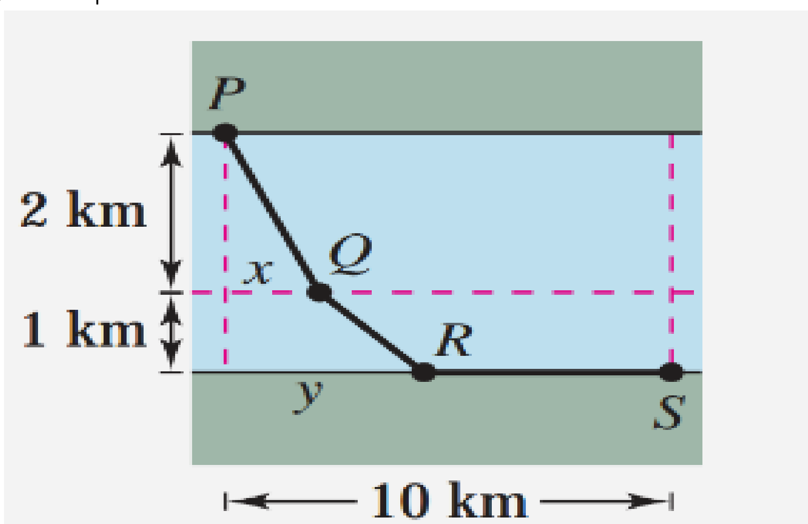
dd) Hallar la distancia mínima desde el punto (0,0,2) hasta la superficie $z = \sqrt{1-2x-2y}$

ee) Un contratista de mejoras caseras está pintando las paredes y el techo de una habitación rectangular. El volumen de la habitación es de 668.25 pies cúbicos. El costo de pintura de pared es de $0.06 por pie cuadrado y el costo de pintura de techo es de $0.11 por pie cuadrado. Encontrar las dimensiones de la habitación que den por resultado un mínimo costo de la pintura.

ff) Un comedero de secciones transversales en forma de trapecio se forma doblando los extremos de una lámina de aluminio de 30 pulgadas de ancho (ver la figura). Hallar la sección transversal de área máxima.




gg) Hay que construir un acueducto para agua desde el punto P al punto S y debe atravesar diferentes regiones donde los costos de construcción difieren (ver la figura). El costo por kilómetro en dólares es 3k de P a Q , 2k de Q a R, y k de R a S. Hallar *x* y *y* tales que el costo total C se minimice.




hh) La suma de la longitud de una cara más su cara transversal de un paquete a entregar no puede pasar de 108 cm. Hallar las dimensiones del paquete de volumen máximo que se puede enviar.

ii) Utilizando extremos relativos. Encontrar la distancia más corta entre las rectas:

L1. X=t, Y=4-2t, Z=1+t

L2. X=3 + 2s, Y= 6+2s, Z= 8-2s

¿En qué puntos sobre las rectas ocurre el mínimo?

jj) Encontrar tres números positivos x, y, z que cumplan con la restricción

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ y que el producto de ellos sea el máximo. Hallar también el producto máximo.