14.4 Centro de masa y momentos de inercia

- Hallar la masa de una lámina plana utilizando una integral doble.
- Hallar el centro de masa de una lámina plana utilizando integrales dobles.
- Hallar los momentos de inercia utilizando integrales dobles.

Masa

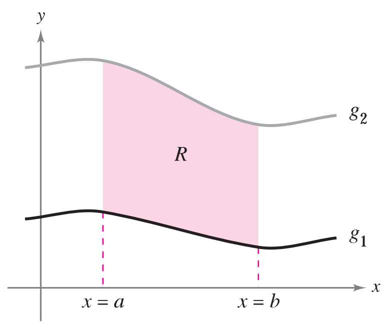


Lámina de densidad constante ρ
Figura 14.34

En la sección 7.6 se analizaron varias aplicaciones de la integración en las que se tenía una lámina plana de densidad *constante* ρ. Por ejemplo, si la lámina que corresponde a la región R, que se muestra en la figura 14.34, tiene una densidad constante ρ, entonces la masa de la lámina está dada por

$$\text{Masa} = \rho A = \rho \int_R \int dA = \int_R \int \rho \, dA. \qquad \text{Densidad constante.}$$

Si no se especifica otra cosa, se supone que una lámina tiene densidad constante. En esta sección, se extiende la definición del término *lámina* para abarcar también placas delgadas de densidad *variable*. Las integrales dobles pueden usarse para calcular la masa de una lámina de densidad variable, donde la densidad en (x, y) está dada por la **función de densidad ρ**.

DEFINICIÓN DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Si ρ es una función de densidad continua sobre la lámina que corresponde a una región plana R, entonces la masa m de la lámina está dada por

$$m = \int_R \int \rho(x, y) \, dA. \qquad \text{Densidad variable.}$$

NOTA La densidad se expresa normalmente como masa por unidad de volumen. Sin embargo, en una lámina plana la densidad es masa por unidad de área de superficie.

EJEMPLO 1 Hallar la masa de una lámina plana

Hallar la masa de la lámina triangular con vértices (0, 0), (0, 3) y (2, 3), dado que la densidad en (x, y) es $\rho(x, y) = 2x + y$.

Solución Como se muestra en la figura 14.35, la región R tiene como fronteras $x = 0$, $y = 3$ y $y = 3x/2$ (o $x = 2y/3$). Por consiguiente, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m = \int_R \int (2x + y) \, dA &= \int_0^3 \int_0^{2y/3} (2x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \Big[x^2 + xy \Big]_0^{2y/3} dy \\ &= \frac{10}{9} \int_0^3 y^2 \, dy \\ &= \frac{10}{9} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^3 \\ &= 10. \end{aligned}$$

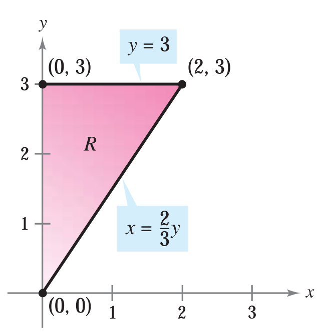
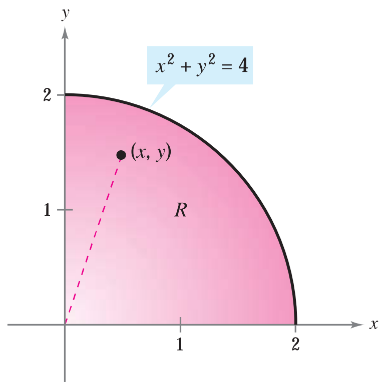


Lámina de densidad variable
$\rho(x, y) = 2x + y$
Figura 14.35

NOTA En la figura 14.35, nótese que la lámina plana está sombreada; el sombreado más oscuro corresponde a la parte más densa.

EJEMPLO 2 Hallar la masa empleando coordenadas polares



Densidad en (x, y): $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$
Figura 14.36

Hallar la masa de la lámina correspondiente a la porción en el primer cuadrante del círculo

$$x^2 + y^2 = 4$$

donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre el punto y el origen, como se muestra en la figura 14.36.

Solución En todo punto (x, y), la densidad de la lámina es

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= k\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}\\ &= k\sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Como $0 \le x \le 2$ y $0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$, la masa está dada por

$$\begin{aligned}m &= \iint_R k\sqrt{x^2 + y^2}\,dA\\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Para simplificar la integración, se puede convertir a coordenadas polares, utilizando los límites o cotas $0 \le \theta \le \pi/2$ y $0 \le r \le 2$. Por tanto, la masa es

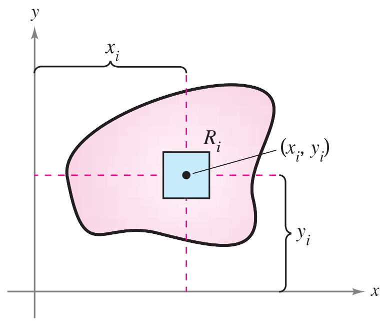
$$\begin{aligned}m = \iint_R k\sqrt{x^2 + y^2}\,dA &= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 k\sqrt{r^2}\,r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 kr^2\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{kr^3}{3}\Big]_0^2\,d\theta\\ &= \frac{8k}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta\\ &= \frac{8k}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{4\pi k}{3}.\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA En muchas ocasiones, en este texto, se han mencionado las ventajas de utilizar programas de computación que realizan integración simbólica. Aun cuando se utilicen tales programas con regularidad, hay que recordar que sus mejores ventajas sólo son aprovechables en manos de un usuario conocedor. Por ejemplo, nótese la simplificación de la integral del ejemplo 2 cuando se convierte a la forma polar.

Forma rectangular	*Forma polar*
$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$	$\int_0^{\pi/2}\int_0^2 kr^2\,dr\,d\theta$

Si se tiene acceso a programas que realicen integración simbólica, se recomienda utilizarlos para evaluar ambas integrales. Algunos programas no pueden manejar la primera integral, pero cualquier programa que calcule integrales dobles puede evaluar la segunda integral.

Momentos y centros de masa



$M_x = (\text{masa})(y_i)$
$M_y = (\text{masa})(x_i)$
Figura 14.37

En láminas de densidad variable, los momentos de masa se definen de manera similar a la empleada en el caso de densidad uniforme. Dada una partición Δ de una lámina, correspondiente a una región plana R, considerar el rectángulo i-ésimo R_i de área ΔA_i, como se muestra en la figura 14.37. Suponer que la masa de R_i se concentra en uno de sus puntos interiores (x_i, y_i). El momento de masa de R_i respecto al eje x puede aproximarse por medio de

$$(\text{Masa})(y_i) \approx [\rho(x_i, y_i)\,\Delta A_i](y_i).$$

De manera similar, el momento de masa con respecto al eje y puede aproximarse por medio de

$$(\text{Masa})(x_i) \approx [\rho(x_i, y_i)\,\Delta A_i](x_i).$$

Formando la suma de Riemann de todos estos productos y tomando límites cuando la norma de Δ se aproxima a 0, se obtienen las definiciones siguientes de momentos de masa con respecto a los ejes x y y.

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Sea ρ una función de densidad continua sobre la lámina plana R. Los **momentos de masa** con respecto a los ejes x y y son

$$M_x = \int_R\int y\rho(x, y)\,dA \quad \text{y} \quad M_y = \int_R\int x\rho(x, y)\,dA.$$

Si m es la masa de la lámina, entonces el **centro de masa** es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right).$$

Si R representa una región plana simple en lugar de una lámina, el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama el **centroide** de la región.

En algunas láminas planas con densidad constante ρ, se puede determinar el centro de masa (o una de sus coordenadas) utilizando la simetría en lugar de usar integración. Por ejemplo, considerar las láminas de densidad constante mostradas en la figura 14.38. Utilizando la simetría, se puede ver que $\bar{y} = 0$ en la primera lámina y $\bar{x} = 0$ en la segunda lámina.

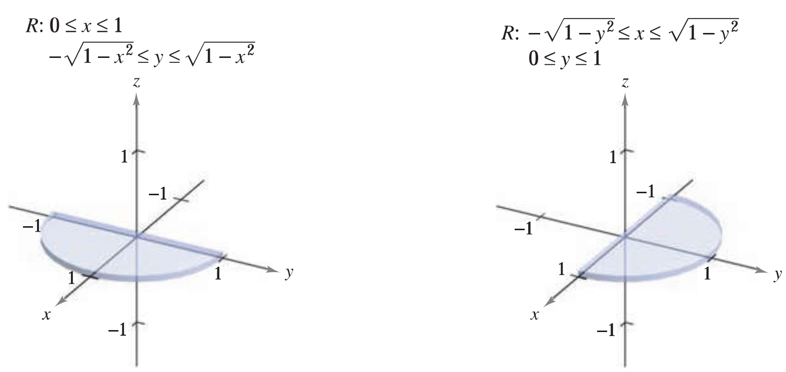
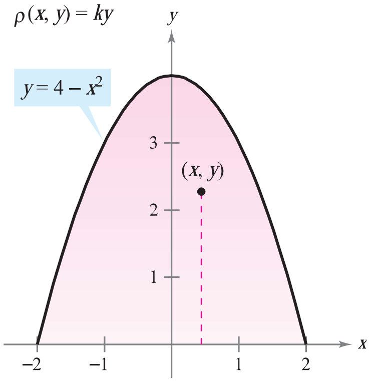


Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje x

Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje y

Figura 14.38



Región parabólica de densidad variable
Figura 14.39

EJEMPLO 3 Hallar el centro de masa

Hallar el centro de masa de la lámina que corresponde a la región parabólica

$$0 \le y \le 4 - x^2 \qquad \text{Región parabólica.}$$

donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre (x, y) y el eje x, como se muestra en la figura 14.39.

Solución Como la lámina es simétrica con respecto al eje y y

$$\rho(x, y) = ky$$

el centro de masa está en el eje y. Así, $\bar{x} = 0$. Para hallar $\bar{y}$, primero calcular la masa de la lámina.

$$\begin{aligned}
\text{Masa} = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} ky\,dy\,dx &= \frac{k}{2}\int_{-2}^{2} y^2\Big]_0^{4-x^2}\,dx \\
&= \frac{k}{2}\int_{-2}^{2}(16 - 8x^2 + x^4)\,dx \\
&= \frac{k}{2}\left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} \\
&= k\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{256k}{15}
\end{aligned}$$

Después se halla el momento con respecto al eje x.

$$\begin{aligned}
M_x = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} (y)(ky)\,dy\,dx &= \frac{k}{3}\int_{-2}^{2} y^3\Big]_0^{4-x^2}\,dx \\
&= \frac{k}{3}\int_{-2}^{2}(64 - 48x^2 + 12x^4 - x^6)\,dx \\
&= \frac{k}{3}\left[64x - 16x^3 + \frac{12x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{4\,096k}{105}
\end{aligned}$$

Así,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4\,096k/105}{256k/15} = \frac{16}{7}$$

y el centro de masa es $\left(0, \frac{16}{7}\right)$.

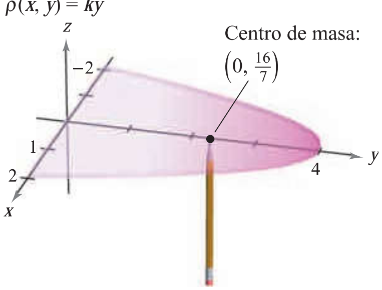


Figura 14.40

Aunque los momentos M_x y M_y se pueden interpretar como una medida de la tendencia a girar en torno a los ejes x o y, el cálculo de los momentos normalmente es un paso intermedio hacia una meta más tangible. El uso de los momentos M_x y M_y es encontrar el centro de masa. La determinación del centro de masa es útil en muchas aplicaciones, ya que permite tratar una lámina como si su masa se concentrara en un solo punto. Intuitivamente, se puede concebir el centro de masa como el punto de equilibrio de la lámina. Por ejemplo, la lámina del ejemplo 3 se mantendrá en equilibrio sobre la punta de un lápiz colocado en $\left(0, \frac{16}{7}\right)$, como se muestra en la figura 14.40.