59. El desplazamiento vertical de una larga cuerda fija en el origen pero cayendo bajo su propio peso está dado por

$$u(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{g}{2a^2}(2axt - x^2), & 0 \le x \le at \\ -\frac{1}{2}gt^2, & x > at. \end{cases}$$

Vea la FIGURA 4.3.5.

a) Determine $\partial u/\partial t$. Interprete para $x > at$.

b) Determine $\partial u/\partial x$. Interprete para $x > at$.

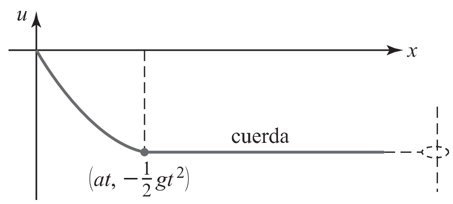

FIGURA 4.3.5 Cuerda que cae del problema 59

60. Para la función de área de la piel $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ que se discutió en el ejemplo 3 encuentre $\partial S/\partial h$ en $w = 60$, $h = 36$. Si una niña crece de 36 a 37 pulg, mientras su peso se mantiene en 60 lb, ¿cuál es el aumento aproximado en el área de la piel?

≡ Piense en ello

61. Formule una definición de límite que sea análoga a la definición 4.3.1 para las derivadas parciales de segundo orden

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ***b***) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ***c***) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$

62. Encuentre una función $z = f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + 2y + \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2x + 1.$$

63. ¿Es posible que una función $z = f(x, y)$, con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto, se encuentra de manera tal que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - y^2?$$

64. ***a***) Suponga que la función $w = f(x, y, z)$ tiene derivadas parciales de tercer orden continuas. ¿Cuántas derivadas parciales de tercer orden diferentes hay?

b) Suponga que la función $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas de n-ésimo orden. ¿Cuántas derivadas parciales diferentes de n-ésimo orden hay?

65. ***a***) Suponga que $z = f(x, y)$ tiene la propiedad de que $\partial z/\partial x = 0$ y $\partial z/\partial y = 0$ para todo (x, y). ¿Qué puede usted afirmar acerca de la forma de f?

b) Suponga que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $\partial^2 z/\partial x\,\partial y = 0$. ¿Qué puede usted afirmar acerca de la forma f?

66. Algunas curvas de nivel de una función $z = f(x, y)$ se muestran en la FIGURA 4.3.6. Emplee estas curvas de nivel para conjeturar respecto a los signos algebraicos de las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en el punto que se indica en la figura.

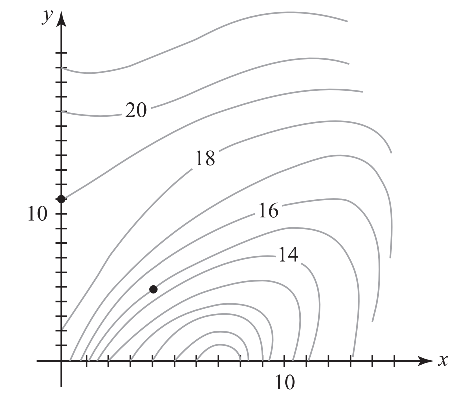

FIGURA 4.3.6 Curvas de nivel del problema 66

67. Un clásico matemático Una función $z = f(x, y)$ quizá no sea continua en un punto aunque es posible que siga teniendo derivadas parciales en ese punto. La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es continua en $(0, 0)$. (Vea el problema 38 en "Desarrolle su competencia 4.2".) Emplee (1) y (2) de la definición 4.3.1 para mostrar que

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0 \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0.$$

68. Un clásico matemático Considere la función $z = f(x, y)$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(y^2 - x^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Calcule $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,y)}$ y $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,0)}$.

b) Muestre que $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right|_{(0,0)} \ne \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{(0,0)}$.

4.4 Linealización y diferenciales

Introducción Una linealización $L(x)$ de una función de una sola variable $y = f(x)$ en un número x_0 está dada por $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Esta ecuación puede utilizarse para aproximar los valores de la función $f(x)$ en la vecindad de x_0, esto es, $L(x) \approx f(x)$ para valores de x cercanos a x_0. De manera similar puede definirse una linealización $L(x, y)$ de una función de dos variables en un punto (x_0, y_0). En el caso de una función de una sola variable se asumió que $y = f(x)$ era diferenciable en x_0, esto es,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

existe. Recuerde también que si f es diferenciable en x_0, también es continua en ese número. Al repetir la suposición en (1), deseamos que $z = f(x, y)$ sea diferenciable en un punto (x_0, y_0). Aunque hemos considerado lo que significa que $z = f(x, y)$ posea *derivadas parciales* en un punto, aún no formulamos una definición de *diferenciabilidad* de una función de dos variables f en un punto.

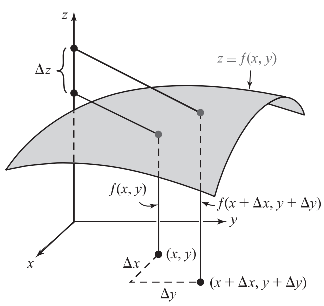

FIGURA 4.4.1 Incremento en z

Incremento de la variable dependiente La definición de diferenciabilidad de una función de cualquier número de variables independientes no depende de la noción de un cociente de diferencia como en (1), sino más bien de la noción de un *incremento* de la variable dependiente. Recuerde que para una función de una variable $y = f(x)$ el incremento en la variable dependiente está dado por

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

De manera análoga, para una función de dos variables $z = f(x, y)$, definimos el **incremento de la variable dependiente** z como

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{2}$$

La FIGURA 4.4.1 muestra que Δz produce la cantidad de cambio en la función cuando (x, y) cambia a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

EJEMPLO 1 Determinando Δz

Encuentre Δz para la función polinomial $z = x^2 - xy$. ¿Cuál es el cambio en la función de $(1, 1)$ a $(1.2, 0.7)$?

Solución De (2),

$$\begin{aligned} \Delta z &= [(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)] - (x^2 - xy) \\ &= (2x - y)\Delta x - x\Delta y + (\Delta x)^2 - \Delta x \Delta y. \end{aligned} \tag{3}$$

Con $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0.2$ y $\Delta y = -0.3$,

$$\Delta z = (1)(0.2) - (1)(-0.3) + (0.2)^2 - (0.2)(-0.3) = 0.6.$$

Una fórmula de incremento fundamental Una breve reinspección del incremento Δz en (3) muestra que en los primeros dos términos los coeficientes de Δx y Δy son $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, respectivamente. El importante teorema que sigue muestra que esto no es un accidente.

Teorema 4.4.1 Una fórmula del incremento

Considere que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ en una región rectangular abierta que está definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Si (x, y) es cualquier punto en esta región, entonces existen ε_1 y ε_2, las cuales son funciones de Δx y Δy, tales que

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \tag{4}$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

DEMOSTRACIÓN Al sumar y restar $f(x, y + \Delta y)$ en (2), tenemos,

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Al aplicar el teorema del valor medio a cada conjunto de corchetes, se llega a

$$\Delta z = f_x(x_0, y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y_0)\Delta y, \tag{5}$$

donde, como se muestra en la FIGURA 4.4.2, $x < x_0 < x + \Delta x$ y $y < y_0 < y + \Delta y$. En este caso, definimos

$$\varepsilon_1 = f_x(x_0, y + \Delta y) - f_x(x, y) \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_2 = f_y(x, y_0) - f_y(x, y). \tag{6}$$

Cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, entonces, como se ilustra en la figura, $P_2 \to P_1$ y $P_3 \to P_1$. Puesto que f_x y f_y se suponen continuas en la región, tenemos

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0.$$

Al resolver (6) para $f_x(x_0, y + \Delta y)$ y $f_y(x, y_0)$ y sustituir en (5), obtenemos (4). ■

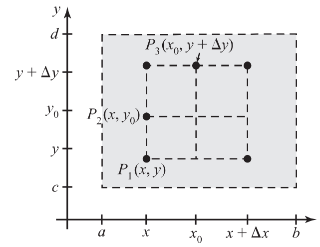

FIGURA 4.4.2 Región rectangular en el teorema 4.4.1

Diferenciabilidad: funciones de dos variables Ahora podemos definir la diferenciabilidad de una función $z = f(x, y)$ en un punto.

Definición 4.4.1 Función diferenciable

Una función $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (x_0, y_0) si el incremento Δz puede escribirse como

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Si la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en cada punto en una región R del plano xy, entonces se dice que f es **diferenciable en *R***. Si f es diferenciable sobre la región consistente en el plano xy completo, se afirma entonces que es **diferenciable en todas partes**.

Es interesante notar que las derivadas parciales f_x y f_y quizás existan en un punto (x_0, y_0) e incluso f no sea diferenciable en ese punto. Desde luego, si f_x y f_y no existen en un punto (x_0, y_0), entonces f no es diferenciable en ese punto. El siguiente teorema proporciona una condición suficiente bajo la cual la existencia de las derivadas parciales implica diferenciabilidad.

Teorema 4.4.2 Condición suficiente para la diferenciabilidad

Si las primeras derivadas parciales f_x y f_y son continuas en un punto en una región abierta R, entonces $z = f(x, y)$ es diferenciable sobre R.

El siguiente teorema establece que si $z = f(x, y)$ es diferenciable en un punto, entonces es continua en el punto.

Teorema 4.4.3 Diferenciabilidad implica continuidad

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

DEMOSTRACIÓN Suponga que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) y que

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Utilizando esta expresión en (4), obtenemos

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, se deduce de la última línea que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0).$$

Si se considera $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, entonces el último resultado es equivalente a

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Por (5) de la sección 4.2, f es continua en (x_0, y_0). ■

EJEMPLO 2 Diferenciabilidad

Si (3) del ejemplo 1 se escribe como

$$\Delta z = (\overbrace{2x - y}^{f_x})\Delta x + (\overbrace{-x}^{f_y})\Delta y + (\overbrace{\Delta x}^{\varepsilon_1})(\Delta x) + (\overbrace{-\Delta x}^{\varepsilon_2})\Delta y,$$

podemos identificar $\varepsilon_1 = \Delta x$ y $\varepsilon_2 = -\Delta x$. Puesto que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, la función $z = x^2 - xy$ es diferenciable en todo punto en el plano xy. ■

Como se advirtió en el ejemplo 2, la función dada es un polinomio. Cualquier función polinomial de dos o más variables es diferenciable en todas partes.

Linealización Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) y (x, y) es un punto muy cercano a (x_0, y_0), se deduce de la definición 4.4.1 que $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$ son ambas cercanas a cero, e igualmente lo son $\varepsilon_1 \Delta x$ y $\varepsilon_2 \Delta y$. En vista de (4) esto significa que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Empleando $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ la última línea es lo mismo que

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Esto nos lleva a definir la linealización de f en (x_0, y_0) de la siguiente manera.

Definición 4.4.2 Linealización

Si una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en un punto (x_0, y_0), entonces la función

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{7}$$

se dice que es una **linealización** de f en (x_0, y_0). Para un punto (x, y) cercano a (x_0, y_0), la aproximación

$$f(x, y) \approx L(x, y) \tag{8}$$

se denomina **aproximación lineal local** de f en (x_0, y_0).

EJEMPLO 3 Linealización

Encuentre una linealización de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $(4, 3)$.

Solución Las primeras derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Utilizando los valores $f(4, 3) = 5$, $f_x(4, 3) = \frac{4}{5}$ y $f_y(4, 3) = \frac{3}{5}$, se deduce de (7) que una linealización de f en $(4, 3)$ es

$$L(x, y) = 5 + \frac{4}{5}(x - 4) + \frac{3}{5}(y - 3). \tag{9}$$

La última ecuación es equivalente a $L(x, y) = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ pero con fines de cálculo (9) es más conveniente. ■

EJEMPLO 4 Aproximación lineal local

Utilice la aproximación lineal local para aproximar $\sqrt{(4.01)^2 + (2.98)^2}$.

Solución Primero observe que se está pidiendo una aproximación del valor de la función $f(4.01, 2.98)$, donde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Debido a que el punto $(4.01, 2.98)$ es razonablemente cercano al punto $(4, 3)$ es factible utilizar la linealización en (9) para formar una aproximación lineal local $f(x, y) \approx L(x, y)$. De

$$L(4.01, 2.98) = 5 + \frac{4}{5}(4.01 - 4) + \frac{3}{5}(2.98 - 3) = 4.996$$

se sigue que la aproximación deseada es $f(4.01, 2.98) \approx L(4.01, 2.98)$ o

$$\sqrt{(4.01)^2 + (2.98)^2} \approx 4.996.$$

Suponga que se deja $z = L(x, y)$ y se reescribe (7) como

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0. \tag{10}$$

Al relacionar (10) término a término con (2) de la sección 1.5 se demuestra que una linealización de una función $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) es una ecuación de un plano.

Plano tangente La linealización $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ de una función f de una sola variable en un número x_0 no es más que una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$. En tres dimensiones el análogo de una *recta tangente* a una curva es un *plano tangente* a una superficie. Veremos en la sección 4.7 que la fórmula de linealización $z = L(x, y)$ en (7) es una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Diferenciales Recuerde también que para una función f de una sola variable independiente hay dos diferenciales $\Delta x = dx$ y $dy = f'(x)\,dx$. La diferencial dx es simplemente el cambio en la variable independiente x. La diferencial dy es el cambio en la linealización $L(x)$; en el número x_0 tenemos

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x) - L(x_0)\\ &= [f(x_0) + f'(x_0)\Delta x] - [f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0]\\ &= f'(x_0)\,dx = dy.\end{aligned}$$

En el caso de una función f de dos variables tenemos naturalmente tres diferenciales. Los cambios en las variables independientes x y y son dx y dy; los cambios en la linealización $L(x, y)$ se denotan por medio de dz. En el punto (x_0, y_0) el cambio en la linealización es

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0)\\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x_0 + \Delta x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y_0 + \Delta y - y_0) - f(x_0, y_0)\\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.\end{aligned} \tag{11}$$

Empleando el resultado en (11) definimos a continuación la diferencial dz de una función f en un punto arbitrario en el plano xy. Si (x, y) denota el punto, entonces un punto cercano es $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ o $(x + dx, y + dy)$. La diferencial dz se llama comúnmente **diferencial total** de la función.

Definición 4.4.3 Diferenciales

Sea $z = f(x, y)$ una función para la cual las primeras derivadas parciales f_x y f_y existen. Entonces las **diferenciales de x y y** son $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$. La **diferencial de z**,

$$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy, \tag{12}$$

también se denomina **diferencial total de z**.

EJEMPLO 5 Diferencial total

Si $z = x^2 - xy$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x.$$

De (12) la diferencial total de la función es

$$dz = (2x - y)\,dx - x\,dy.$$

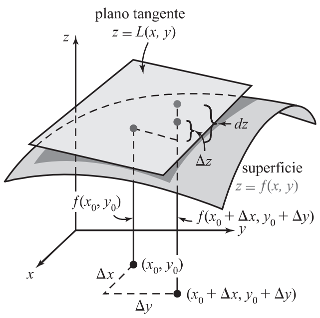

FIGURA 4.4.3 Interpretaciones geométricas de dx, dy, Δz y dz

Concluimos de inmediato de (4) del teorema 4.4.1 que cuando f_x y f_y son continuas y cuando Δx y Δy son cercanas a 0, entonces dz es una aproximación de Δz, esto es

$$dz \approx \Delta z. \tag{13}$$

La FIGURA 4.4.3 es una versión tridimensional del diferencial. Los puntos marcados son los mismos puntos que se muestran en la figura 4.4.1 y están sobre la superficie. El plano es tangente a la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y el punto marcado más alto de todos es un punto sobre el plano tangente.

EJEMPLO 6 Comparación de Δz y dz

En el ejemplo 1 vimos que la función $z = x^2 - xy$ cambió en la cantidad exacta $\Delta z = 0.6$ cuando hubo un desplazamiento del punto (1, 1) a (1.2, 0.7). Con las identificaciones $x = 1$, $y = 1$, $dx = 0.2$ y $dy = -0.3$, se observa de (12) y (13) y el resultado del ejemplo 5 que el cambio Δz de la función puede aproximarse por medio de los cambios en la linealización:

$$dz = (1)(0.2) - (1)(-0.3) = 0.5.$$

EJEMPLO 7 Una aproximación de un error

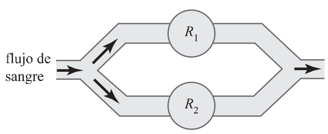

FIGURA 4.4.4 Flujo de sangre a través de las dos resistencias del ejemplo 7

El sistema cardiovascular humano es similar a circuitos eléctricos en serie y en paralelo. Por ejemplo, cuando la sangre circula a través de dos resistencias en paralelo, como se muestra en la FIGURA 4.4.4, entonces la resistencia equivalente R de la red es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{o} \quad R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Si los errores porcentuales en la medición de R_1 y R_2 son $\pm 0.2\%$ y $\pm 0.6\%$, respectivamente, encuentre el error porcentual máximo aproximado en R.

Solución Tenemos que $\Delta R_1 = \pm 0.002R_1$ y $\Delta R_2 = \pm 0.006R_2$. En este caso,

$$dR = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}\,dR_1 + \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}\,dR_2,$$

y por ello

$$\begin{aligned} |\Delta R| \approx |dR| &\le \left|\frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}(\pm 0.002R_1)\right| + \left|\frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}(\pm 0.006R_2)\right| \\ &= R\left[\frac{0.002R_2}{R_1 + R_2} + \frac{0.006R_1}{R_1 + R_2}\right] \\ &\le R\left[\frac{0.006R_2}{R_1 + R_2} + \frac{0.006R_1}{R_1 + R_2}\right] = (0.006)R. \end{aligned}$$

Entonces el error relativo máximo está dado por la aproximación $|dR|/R \approx 0.006$; por tanto, el error porcentual máximo es aproximadamente 0.6%.

Funciones de tres variables Las definiciones 4.4.1, 4.4.2 y 4.4.3, así como los teoremas 4.4.1, 4.4.2 y 4.4.3, se generalizan de la manera esperada a funciones de tres o más variables. A continuación se mencionan algunos puntos importantes. Si $w = f(x, y, z)$, entonces el **incremento** Δw está dado por

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z). \tag{14}$$

En este caso f es **diferenciable** en un punto (x_0, y_0, z_0) si Δw puede escribirse

$$\Delta w = f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \tag{15}$$

donde ε_1, ε_2 y $\varepsilon_3 \to 0$ cuando Δx, Δy y $\Delta z \to 0$. Si f es diferenciable en (x_0, y_0, z_0), entonces la **linealización** de f se define como

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0). \tag{16}$$

Por último, la **diferencial total** de f es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz. \tag{17}$$

EJEMPLO 8 Diferencial total: función de tres variables

Si $w = x^2 + 2y^3 + 3z^4$, entonces las tres primeras derivadas parciales son

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 6y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 12z^3.$$

Por (17) la diferencial total es

$$dw = 2x\,dx + 6y^2\,dy + 12z^3\,dz.$$

■

$\frac{\partial z}{\partial x}$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Puesto que $dy \approx \Delta y$ siempre que $f'(x)$ exista y Δx es cercana a 0, parece razonable esperar que $dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$ será una buena aproximación a Δz cuando Δx y Δy son ambas cercanas a 0. Pero la vida no es tan sencilla para funciones de varias variables. La garantía de que $dz \approx \Delta z$ para incrementos cercanos a 0 proviene de la continuidad de las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ y no simplemente de su existencia.

ii) Cuando trabaje en los problemas 27-30 en la sección "Desarrolle su competencia 4.4" descubrirá que las funciones ε_1 y ε_2 introducidas en (4) del teorema 4.4.1 no son únicas.

4.4 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-12.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre una linealización de la función dada en el punto indicado.

1. $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^3y$; $(1, 1)$
2. $f(x, y) = \sqrt{x^3y}$; $(2, 2)$
3. $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$; $(8, 15)$
4. $f(x, y) = 3\,\text{sen}\,x\cos y$; $(\pi/4, 3\pi/4)$
5. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^3)$; $(-1, 1)$
6. $f(x, y) = e^{-2y}\,\text{sen}\,3x$; $(0, \pi/3)$

En los problemas 7-10, emplee una aproximación lineal para aproximar la cantidad indicada.

7. $\sqrt{102} + \sqrt[4]{80}$
8. $\sqrt{\dfrac{35}{63}}$
9. $f(1.95, 2.01)$ para $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$
10. $f(0.52, 2.96)$ para $f(x, y) = \cos \pi xy$

En los problemas 11-22, calcule la diferencial total de la función dada.

11. $z = x^2\,\text{sen}\,4y$
12. $z = xe^{x^2-y^2}$
13. $z = \sqrt{2x^2 - 4y^3}$
14. $z = (5x^3y + 4y^5)^3$
15. $f(s, t) = \dfrac{2s - t}{s + 3t}$
16. $g(r, \theta) = r^2\cos 3\theta$
17. $w = x^2y^4z^{-5}$
18. $w = e^{-z^2}\cos(x^2 + y^4)$
19. $F(r, s, t) = r^3 + s^{-2} - 4t^{1/2}$
20. $G(\rho, \theta, \phi) = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta$
21. $w = \ln\left(\dfrac{uv}{st}\right)$
22. $w = \sqrt{u^2 + s^2t^2 - v^2}$

En los problemas 23-26, compare los valores de Δz y dz para la función dada cuando (x, y) varía del primero al segundo punto.

23. $z = 3x + 4y + 8$; $(2, 4), (2.2, 3.9)$
24. $z = 2x^2y + 5y + 8$; $(0, 0), (0.2, -0.1)$
25. $z = (x + y)^2$; $(3, 1), (3.1, 0.8)$
26. $z = x^2 + x^2y^2 + 2$; $(1, 1), (0.9, 1.1)$

En los problemas 27-30, encuentre funciones ε_1 y ε_2 de Δz como se define en (4) del teorema 4.4.1.

27. $z = 5x^2 + 3y - xy$
28. $z = 10y^2 + 3x - x^2$
29. $z = x^2y^2$
30. $z = x^3 - y^3$

≡ Aplicaciones

31. Cuando la sangre fluye a través de tres resistencias R_1, R_2, R_3, en paralelo, la resistencia equivalente R de la red es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Dado que el error porcentual en la medida de cada resistencia es $\pm 0.9\%$, calcule el error porcentual máximo aproximado en R.

32. La presión P de un gas ideal confinado está dada por $P = k(T/V)$, donde V es el volumen, T es la temperatura y k es una constante. Dado que los errores porcentuales al medir T y V son a lo sumo 0.6 y 0.8%, respectivamente, calcule el error porcentual máximo aproximado en P.

33. La tensión T en la cuerda del yo-yo que se muestra en la FIGURA 4.4.5 es

$$T = mg\frac{R}{2r^2 + R^2},$$

donde mg es su peso constante. Determine el cambio aproximado en la tensión si R y r se incrementan de 4 cm y 0.8 cm a 4.1 cm y 0.9 cm, respectivamente. ¿La tensión aumenta o disminuye?

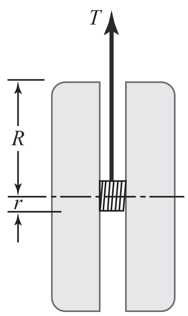

FIGURA 4.4.5 Yo-yo del problema 33

34. Determine el incremento aproximado en el volumen de un cilindro circular recto si su altura aumenta de 10 a 10.5 cm y su radio crece de 5 a 5.3 cm. ¿Cuál es el nuevo volumen aproximado?

35. Si la longitud, ancho y altura de una caja rectangular cerrada aumentan, respectivamente, en 2, 5 y 8%, ¿cuál es el incremento porcentual aproximado en el volumen?

36. En el problema 35, si la longitud, ancho y altura originales son, respectivamente, 3, 1 y 2 pies, ¿cuál es el incremento aproximado en el área de la superficie de la caja? ¿Cuál es la nueva área aproximada de la superficie?

37. La función $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ produce el área de la superficie del cuerpo de una persona en términos de su peso w y altura h. Si el error en la medición de w es a lo sumo 3% y el error en la medición de h es a lo sumo 5%, ¿cuál es el error porcentual máximo aproximado en la medición de S?

38. La impedancia Z del circuito en serie que se presenta en la FIGURA 4.4.6 es $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, donde R es la resistencia, $X = 1\,000L - 1/(1\,000C)$ es la reactancia neta, L es la inductancia y C es la capacitancia. Si los valores de R, L y C dados en la figura se incrementan, respectivamente, a 425 ohms, 0.45 henrys y 11.1×10^{-5} farads, ¿cuál es el cambio aproximado en la impedancia del circuito? ¿Cuál es el valor aproximado de la nueva impedancia?

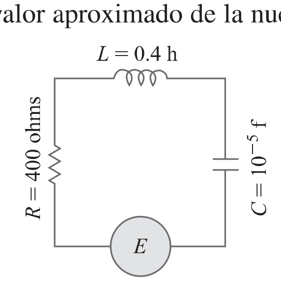

FIGURA 4.4.6 Circuito en serie del problema 38

≡ Piense en ello

39. ***a***) Dé una definición para la linealización de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$.
b) Emplee la linealización para encontrar una aproximación de $\sqrt{(9.1)^2 + (11.75)^2 + (19.98)^2}$.

40. En el problema 67 de "Desarrolle su competencia 4.3" se vio que para

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tanto $\partial z/\partial x$ como $\partial z/\partial y$ existen en (0, 0). Explique por qué f no es diferenciable en (0, 0).

41. ***a***) Dé una explicación intuitiva del porqué $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no es diferenciable en (0, 0).
b) Después de esto pruebe que f no es diferenciable en (0, 0).

42. La longitud de los lados de la caja rectangular que se muestra en la FIGURA 4.4.7 son x, y y z. Considere que el volumen de la caja es V. Cuando se incrementan los lados de la caja en las cantidades Δx, Δy y Δz obtenemos la caja rectangular que se ilustra en la figura. Dibuje o trace la figura 4.4.7 sobre un pedazo de papel. Identifique por medio de colores diferentes las cantidades Δx, Δy, Δz, ΔV, dV y $\Delta V - dV$.

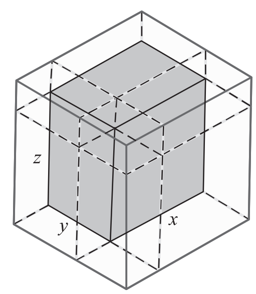

FIGURA 4.4.7 Caja del problema 42

≡ Proyectos

43. Brazo robótico Un brazo de robot bidimensional cuyo hombro está fijo en el origen sigue el rastro de su posición por medio de un ángulo del hombro θ y un ángulo del codo ϕ como se ilustra en la FIGURA 4.4.8. El ángulo del hombro se mide en el sentido contrario de las manecillas del reloj desde el eje x y el ángulo del codo se mide en esa misma dirección desde el brazo superior hasta el brazo inferior, los cuales tienen una longitud respectiva L y l.

a) La ubicación de la unión del codo está dada por (x_c, y_c), donde

$$x_c = L\cos\theta, \quad y_c = L\,\text{sen}\,\theta.$$

Encuentre fórmulas correspondientes para la ubicación (x_m, y_m) de la mano.

b) Muestre que las diferenciales totales de x_m y y_m pueden escribirse como

$$dx_m = -y_m d\theta + (y_c - y_m)\,d\phi$$
$$dy_m = x_m d\theta + (x_c - x_m)\,d\phi.$$

c) Suponga que $L = l$ y que el brazo está ubicado de manera que alcanza el punto (L, L). Suponga también que el error en la medición de cada uno de los ángulos θ y ϕ es a lo más de $\pm 1°$. Calcule el error máximo aproximado en la coordenada x de la ubicación de la mano para cada una de las dos posiciones posibles.

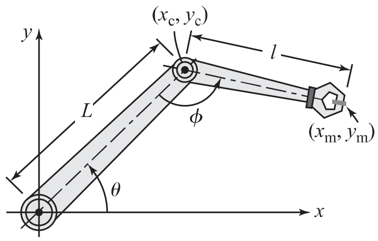

FIGURA 4.4.8 Brazo robótico del problema 43

44. Movimiento de proyectiles Se dispara un proyectil a un ángulo θ con velocidad v a través de un abismo de ancho D hacia el muro del acantilado vertical que es esencialmente infinito tanto en la altura como en profundidad. Vea la FIGURA 4.4.9.

***a*)** Si el proyectil sólo está sujeto a la fuerza de la gravedad, demuestre que la altura H a la cual golpea el muro del acantilado como una función de las variables v y θ está dada por

$$H = D\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{D^2}{v^2}\sec^2\theta.$$

[*Sugerencia*: Vea la sección 2.1.]

***b*)** Calcule la diferencial total de H.

***c*)** Suponga que $D = 100$ pies, $g = 32$ pies/s^2, $v = 100$ pies/s y $\theta = 45°$. Calcule H.

***d*)** Suponga, para los datos del inciso *c*), que el error en la medición de v es a lo sumo ± 1 pies/s y que el error en la medición de θ es a lo sumo $\pm 1°$. Calcule el error máximo aproximado en H.

***e*)** Al dejar que D varíe, H también puede considerarse como una función de tres variables. Encuentre la diferencial total de H. Empleando los datos de los incisos *c*) y *d*) y suponiendo que el error en la medición D es a lo sumo ± 2 pies/s, calcule el error máximo aproximado en H.

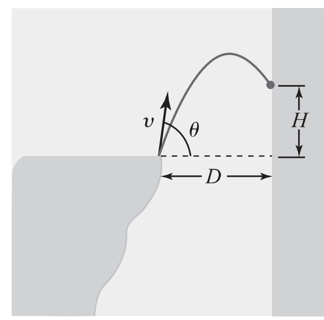

FIGURA 4.4.9 Abismo del problema 44

4.5 Regla de la cadena

Introducción La regla de la cadena para funciones de una sola variable indica que si $y = f(x)$ es una función diferenciable de x, y $x = g(t)$ es una función diferenciable de t, entonces la derivada de la función compuesta es

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

En esta sección se extiende la regla de la cadena a funciones de varias variables.

Regla de la cadena para derivadas ordinarias Si $z = f(x, y)$ y x y y son funciones de una sola variable t, entonces el siguiente teorema indica cómo calcular la derivada ordinaria dz/dt.

Teorema 4.5.1 Regla de la cadena

Suponga que $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x, y) y $x = g(t)$ y que $y = h(t)$ son funciones diferenciables en t. Entonces $z = f(g(t), h(t))$ es una función diferenciable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \quad (1)$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Si $z = x^3y - y^4$ y $x = 2t^2$, $y = 5t^2 - 6t$, calcule dz/dt en $t = 1$.

Solución De (1)

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= (3x^2y)(4t) + (x^3 - 4y^3)(10t - 6).\end{aligned}$$

En este caso, en $t = 1$, $x(1) = 2$ y $y(1) = -1$, por lo que

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = (3\cdot 4\cdot(-1))\cdot 4 + (8 + 4)\cdot 4 = 0.$$

■