1

4.8 DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-13.

Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre los extremos relativos de la función indicada.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5$
2. $f(x, y) = 4x^2 + 8y^2$
3. $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 8x + 6y$
4. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y$
5. $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + 40$
6. $f(x, y) = -4x^2 - 2y^2 - 8x + 12y + 5$
7. $f(x, y) = 4x^3 + y^3 - 12x - 3y$
8. $f(x, y) = -x^3 + 2y^3 + 27x - 24y + 3$
9. $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 2xy - 10x - 2y + 2$
10. $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 5xy - 10x - 5y + 18$
11. $f(x, y) = (2x - 5)(y - 4)$
12. $f(x, y) = (x + 5)(2y + 6)$
13. $f(x, y) = -2x^3 - 2y^3 + 6xy + 10$
14. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy + 27$
15. $f(x, y) = xy - \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + 8$
16. $f(x, y) = -3x^2y - 3xy^2 + 36xy$
17. $f(x, y) = xe^x \operatorname{sen} y$
18. $f(x, y) = e^{y^2 - 3y + x^2 + 4x}$
19. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$
20. $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$
21. Determine tres números positivos cuya suma sea 21, tal que su producto P sea un máximo. [*Sugerencia*: Exprese P como una función de sólo dos variables.]
22. Determine las dimensiones de una caja rectangular con un volumen de 1 pie^3 que tiene un área superficial mínima S.
23. Encuentre el punto sobre el plano $x + 2y + z = 1$ más cercano al origen. [*Sugerencia*: Considere el cuadrado de la distancia.]
24. Encuentre la distancia mínima entre el punto $(2, 3, 1)$ y el plano $x + y + z = 1$.
25. Encuentre todos los puntos sobre la superficie $xyz = 8$ que son los más cercanos al origen. Determine la distancia mínima.
26. Encuentre la distancia más corta entre las rectas cuyas ecuaciones paramétricas son

$$L_1: x = t, y = 4 - 2t, z = 1 + t,$$
$$L_2: x = 3 + 2s, y = 6 + 2s, z = 8 - 2s.$$

¿En qué puntos sobre las rectas ocurre el mínimo?

27. Determine el volumen máximo de una caja rectangular con lados paralelos a los planos de coordenadas que puede ser inscrito en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

28. El volumen de un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

es $V = \frac{4}{3}\pi abc$. Muestre que el elipsoide de mayor volumen que satisface $a + b + c =$ constante es una esfera.

29. El pentágono que se muestra en la FIGURA 4.8.7, formado por un triángulo isósceles sobrepuesto sobre un rectángulo, tiene un perímetro fijo P. Calcule x, y y θ de manera que el área del pentágono sea un máximo.

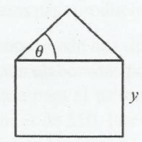

FIGURA 4.8.7 Pentágono del problema 29

30. Un pedazo de latón de 24 pulg de ancho se dobla de manera tal que su sección transversal es un trapezoide isósceles. Vea la FIGURA 4.8.8. Calcule x y θ de manera que el área de la sección transversal sea un máximo. ¿Cuál es el área máxima?

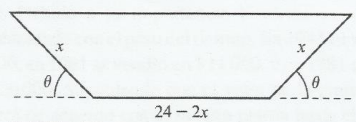

FIGURA 4.8.8 Sección transversal trapezoidal del problema 30

En los problemas 31-34, muestre que la función dada tiene un extremo absoluto pero que el teorema 4.8.2 no es aplicable.

31. $f(x, y) = 16 - x^{2/3} - y^{2/3}$
32. $f(x, y) = 1 - x^4y^2$
33. $f(x, y) = 5x^2 + y^4 - 8$
34. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

En los problemas 35-38, encuentre los extremos absolutos de la función continua dada sobre la región cerrada R definida por $x^2 + y^2 \leq 1$.

35. $f(x, y) = x + \sqrt{3}y$
36. $f(x, y) = xy$
37. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
38. $f(x, y) = -x^2 - 3y^2 + 4y + 1$
39. Encuentre los extremos absolutos de $f(x, y) = 4x - 6y$ sobre la región cerrada R definida por $\frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1$.
40. Encuentre los extremos absolutos de $f(x, y) = xy - 2x - y + 6$ sobre la región triangular cerrada R con vértices $(0, 0)$, $(0, 8)$ y $(4, 0)$.
41. La función $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$ es continua sobre la región rectangular cerrada R definida por $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$.
    a) Encuentre los puntos críticos en la región.
    b) Determine los puntos donde f tiene un extremo absoluto.
    c) Grafique la función sobre la región rectangular.

 2

20. La función del ejercicio 4; R es la región triangular cuyos lados son el eje x, el eje y y la recta $x + y = 5$.

21. $f(x, y) = 3x^2 + xy$; R es la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

22. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$; R es la región acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje x.

23. $f(x, y) = y^3 + x^2 - 3y$; R es la región limitada por la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

24. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$; R es la región acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ y (π, π).

25. Determine los tres números positivos cuya suma sea 24 de modo que su producto sea el mayor posible.

26. Obtenga tres números positivos cuyo producto sea 24 de manera que su suma sea lo más pequeña posible.

27. Encuentre el punto del plano $3x + 2y - z = 5$ que esté más cerca al punto $(1, -2, 3)$, y calcule la distancia mínima.

28. Determine los puntos de la superficie $y^2 - xz = 4$ que estén más cerca al origen, y calcule la distancia mínima.

29. Obtenga los puntos de la curva de intersección del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ y el plano $x - 4y - z = 0$ que estén más cerca del origen, y calcule la distancia mínima.

30. En una fábrica, los trabajadores se han clasificado en dos maneras: A y B. Los trabajadores tipo A ganan \$14 por jornada, mientras que los del tipo B ganan \$13. Para alcanzar cierta producción en una jornada, se ha determinado aumentar los salarios de los trabajadores, si se emplean x trabajadores del tipo A y y del tipo B, entonces el número de dólares del costo de la jornada es $y^3 + x^2 - 8xy + 600$. ¿Cuántos trabajadores de cada tipo deben emplearse a fin de que el costo de la jornada sea un mínimo si se requieren por lo menos tres trabajadores de cada tipo para una jornada?

31. Una inyección de x miligramos de cierto medicamento A y y miligramos del medicamento B produce una respuesta de R unidades, y $R = x^2y^3(c - x - y)$, donde c es una constante positiva. ¿Qué dosis de cada medicamento ocasionarán la respuesta máxima?

32. Suponga que t horas después de la inyección de x miligramos de adrenalina la respuesta es de R unidades, y $R = te^{-t}(c - x)x$, donde c es una constante positiva. ¿Qué valores de x y t producirán la respuesta máxima?

33. Calcule el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que pueda inscribirse en el elipsoide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ si las aristas deben ser paralelas a los ejes coordenados.

34. Se elabora una caja rectangular sin tapa con un costo de material de \$10. Si el material para el fondo de la caja cuesta \$0.15 por pie cuadrado y el material para los lados cuesta \$0.30 por pie cuadrado, determine las dimensiones de la caja de mayor volumen que pueda elaborarse.

35. Se construye una caja rectangular cerrada con un volumen de 16 pie^3 empleando tres tipos de materiales. El costo del material para el fondo y la tapa es de \$0.18 por pie cuadrado, el costo del material para el frente y la parte trasera es de \$0.16 por pie cuadrado, y el costo del material para los otros dos lados es de \$0.12 por pie cuadrado. Calcule las dimensiones de la caja de modo que el costo de los materiales sea un mínimo.

36. Suponga que T grados es la temperatura en cualquier punto (x, y, z) de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, y $T = 100xy^2z$. Obtenga los puntos de la esfera donde la temperatura es la máxima y también los puntos donde es mínima. Además, calcule la temperatura en estos puntos.

37. Suponga que en la producción de cierto artículo se requieren x horas–máquina y y horas–persona, y que el costo de producción está dado por $f(x, y)$, donde

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 500$$

Determine los números de horas-máquina y de horas-persona necesarios para producir el artículo al costo mínimo.

38. Una tienda de ropa vende dos tipos de camisa que son similares pero que son elaboradas por diferentes fabricantes. El costo de la tienda para el primer tipo es de \$40 y el costo del segundo tipo es de \$50. Por medio de la experiencia, se ha determinado que si el precio de venta del primer tipo es de x dólares y el precio de venta para el segundo tipo es de y dólares, entonces el número de camisas del primer tipo que se venden mensualmente es $3\,200 - 50x + 25y$, y el de las del segundo tipo es $25x - 25y$. ¿Cuál debe ser el precio de venta de cada tipo de camisa a fin de obtener la máxima utilidad?

39. En 1921, el autor de una pintura abstracta la vendió por \$100. Debido a su importancia histórica su valor se ha incrementado con el paso del tiempo. En 1941 su valor fue de \$4 600, en 1961 se vendió en \$11 000, y en 1981 su valor fue de \$20 000. Suponiendo que el valor de la pintura se establecerá de acuerdo con el mismo patrón hasta el año 2001, utilice el método de mínimos cuadrados para estimar su valor para ese año.

40. Un automóvil modelo 1991 se vendió como un carro usado en 1992 por \$6 800. Su valor fue de \$6 200 en 1993, en 1994 su valor fue de \$5 700, y en 1996 su precio fue de \$4 800. Utilice el método de mínimos cuadrados para estimar el valor del carro en 1995.

41. En el *Cinema Uno* se ha exhibido una película durante cinco semanas, y la asistencia semanal (con aproximación de cientos) para cada semana está dada en la tabla siguiente.

Semana No.	1	2	3	4	5
Asistencia	5 000	4 500	4 100	3 900	3 500

Suponga que la asistencia semanal continuará reduciéndose de acuerdo con el mismo patrón hasta llagar a 1 500. **(a)** Utilice la recta de regresión para los datos de la tabla a fin de determinar la asistencia esperada para la sexta semana. **(b)** La película se cambiará al *Cinema Dos*, que es más pequeño, cuando la asistencia semanal esté por debajo 2 250. ¿Cuántas semanas estará exhibiéndose la película en el *Cinema Uno*?

42. Se analiza la savia de cinco árboles a fin de determinar la cantidad de la hormona vegetal que causa la caída de las hojas. En el caso de los árboles de la tabla siguiente, cuando se

3

UNIVERSIDAD DON BOSCO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MATEMÁTICA III ING.

GUIA DE EJERCICIOS 3 PARTE I

1. Encontrar los extremos absolutos dentro de la región R.

a) $f(x,y)= x^2+4y^2-2x^2y+4$ en el cuadrado $-1 \leq x \leq 1 \quad -1 \leq y \leq 1$

R/ 9 puntos, mín. abs 4 , máx. abs 11.

b) $f(x,y)=2x^2-y^2+6y$ dentro del circulo con centro en el origen y radio 4.

R/ 4 puntos, mín. abs. -40, máx. abs. 35.

c) $f(x,y)=192x^3+y^2-4xy^2$ en el triángulo de vértices (0,0) (4,2)

(-2,2) **R/ 6 puntos, mín. abs. -1500, máx. abs. 12,228.**

d) $f(x,y)=(9x^2-1)(1+4y)$ en el rectángulo $-2 \leq x \leq 3 \; -1 \leq y \leq 4$

R/ 6 puntos, mín. abs. -240, máx. abs. 1360.

e) $f(x,y)=18x^2+4y^2-y^2x-2$ en el triángulo de vértices (-1,-1) (5,-1) (5,17)

f) $f(x,y)=2x^3-4y^3+24xy$, en el rectángulo dado por $0 \leq x \leq 5 \quad -3 \leq y \leq -1$

g) $f(x,y)=x^2-y^2+xy-5x$ en la región encerrado por $y = 5 - x^2$ y el eje x.

2. Utilice multiplicadores de Lagrange para resolver los siguientes problemas:

a) Encuentre las dimensiones de la caja con el volumen más grande si el área superficial es 64 cm^2. **R/ 3.27 cada dimensión**

b) Encuentre el mínimo y el máximo de la función $f(x,y)=5x-3y$ sujeto a la restricción $x^2+y^2=136$. **R/ Valor máximo 68, valor mínimo -68.**

c) Encuentre los extremos de $f(x,y)=4x^2+10y^2$ dentro del circulo $x^2+y^2=4$. **R/ mín. abs. 0, máx. abs. 40.**

d) Encuentre los extremos de $f(x,y,z)=4y-2z$, sujeto a las restricciones $2x-y-z=2$, $x^2+y^2=1$.

R/ máx. abs. 11.2111, mín. abs. -3.2111

4

f) Encuentre los extremos de $f(x,y,z)=y^2-10z$ sujeto a la restricción $x^2+y^2+z^2=36$. **R/ mín. abs. -60, máx. abx. 61.**

g) Encuentre los extremos de $f(x,y,z)=xyz$ sujeto a la restricción $x+9y^2+z^2=4$. Asumir que $x\geq 0$.

R/ mín. abs. -2/3. máx. abs 2/3.

h) Encuentre los extremos de $f(x,y,z)= 3x^2+y$. sujeto a las restricciones $4x-3y=9$, $x^2+z^2=9$. R/ mín. abs. -85/27, máx. abs. 28.

i) Hallar los máximos y mínimos de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeto a las restricciones $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$, $x+y=z$

R/ máx. 8.33, mín. 4.44

— — —

En los ejercicios 33 a 42, usar los multiplicadores de Lagrange para resolver el ejercicio indicado en la sección 13.9.

33. Ejercicio 1 **34.** Ejercicio 2
35. Ejercicio 5 **36.** Ejercicio 6
37. Ejercicio 9 **38.** Ejercicio 10
39. Ejercicio 11 **40.** Ejercicio 12
41. Ejercicio 17 **42.** Ejercicio 18

43. ***Volumen máximo*** Utilizar multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo que puede ser inscrita (con los bordes paralelos a los ejes de coordenadas) en el elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$.

Para discusión

44. La suma de las longitudes y el tamaño (perímetro de una sección transversal) de un paquete llevado por un servicio de entrega a domicilio no puede exceder 108 pulgadas.

a) Determinar si los multiplicadores de Lagrange se pueden usar para encontrar las dimensiones del paquete rectangular de más grande volumen que puede ser enviado. Explicar el razonamiento.

b) Si se pueden usar los multiplicadores de Lagrange, encontrar las dimensiones. Comparar su respuesta con la obtenida en el ejercicio 38, sección 13.9.

45. ***Costo mínimo*** Un contenedor de carga (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. La parte inferior costará \$5 por pie cuadrado para construir, y los lados y la parte superior costarán \$3 por pie cuadrado para construcción. Usar los multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones del contenedor de este tamaño que tiene costo mínimo.

46. ***Medias geométrica y aritmética***

a) Utilizar los multiplicadores de Lagrange para demostrar que el producto de tres números positivos x, y y z cuya suma tiene un valor constante S, es máximo cuando los tres números son iguales. Utilizar este resultado para demostrar que

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

b) Generalizar el resultado del inciso *a*) para demostrar que el producto $x_1x_2x_3 \cdot \cdot \cdot x_n$ es máximo cuando $x_1 = x_2 = x_3 = \cdot \cdot \cdot = x_n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = S$, y todo $x_i \geq 0$. Después, demostrar que

$$\sqrt[n]{x_1x_2x_3 \cdot \cdot \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot + x_n}{n}.$$

Esto demuestra que la media geométrica nunca es mayor que la media aritmética.

47. ***Superficie mínima*** Utilizar multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones de un cilindro circular recto con volumen de V_0 unidades cúbicas y superficie mínima.

48. ***Distribución de temperatura*** Sea $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ la temperatura en cada punto sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hallar la temperatura máxima en la curva formada por la intersección de la esfera y el plano $x - z = 0$.

49. ***Refracción de la luz*** Cuando las ondas de luz que viajan en un medio transparente atraviesan la superficie de un segundo medio transparente, tienden a "desviarse" para seguir la trayectoria de tiempo mínimo. Esta tendencia se llama refracción y está descrita por la **ley de refracción de Snell**, según la cual

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2}$$

donde θ_1 y θ_2 son las magnitudes de los ángulos mostrados en la figura, y v_1 y v_2 son las velocidades de la luz en los dos medios. Utilizar los multiplicadores de Lagrange para deducir esta ley usando $x + y = a$.

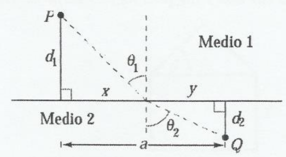

Figura para 49

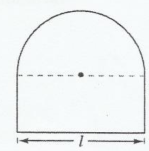

Figura para 50

50. ***Área y perímetro*** Un semicírculo está sobre un rectángulo (ver la figura). Si el área es fija y el perímetro es un mínimo, o si el perímetro es fijo y el área es un máximo, utilizar multiplicadores de Lagrange para verificar que la longitud del rectángulo es el doble de su altura.

Nivel de producción **En los ejercicios 51 y 52, hallar el máximo nivel de producción P si el costo total de trabajo (a \$72 por unidad) y capital (a \$60 por unidad) está restringido a \$250 000, donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital.**

51. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$ **52.** $P(x, y) = 100x^{0.4}y^{0.6}$

Costo **En los ejercicios 53 y 54, hallar el costo mínimo para producir 50 000 unidades de un producto donde x es el número de unidades de trabajo (a \$72 por unidad) y y es el número de unidades de capital (a \$60 por unidad).**

53. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$ **54.** $P(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$

55. ***Investigación*** Considerar la función objetivo $g(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ sujeta a la restricción o ligadura de que α, β y γ sean los ángulos de un triángulo.

a) Utilizar los multiplicadores de Lagrange para maximizar g.

CAS *b*) Utilizar la restricción o ligadura para reducir la función g a una función de dos variables independientes. Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie definida por g. Identificar en la gráfica los valores máximos.

Preparación del examen Putman

56. Una boya está hecha de tres piezas, a saber, un cilindro y dos conos iguales, la altura de cada uno de los conos es igual a la altura del cilindro. Para una superficie dada, ¿con qué forma se tendrá el volumen máximo?