

# Algoritmos y Estructuras de Datos II

## Trabajo Práctico 2

Departamento de Computación,  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
Universidad de Buenos Aires

Segundo Cuatrimestre de 2014

### Grupo 16

Apellido y Nombre	LU	E-mail
Juan Ernesto Rinaudo	864/13	jangamesdev@hotmail.com
Mauro Cherubini	835/13	cheru.mf@gmail.com
Federico Beuter	827/13	federicobeuter@gmail.com
Fernando Frassia	340/13	ferfrassia@gmail.com

Reservado para la cátedra

Instancia	Docente que corrigió	Calificación
Primera Entrega		
Recuperatorio		

# Índice

<b>1. TAD Extendidos</b>	<b>3</b>
1.1. $\text{Secu}(\alpha)$	3
1.2. Mapa	3
<b>2. Mapa</b>	<b>4</b>
2.1. Representacion	4
2.2. InvRep y Abs	5
2.3. Algoritmos	5
<b>3. Ciudad Robótica</b>	<b>7</b>
3.1. Representacion	8
3.2. InvRep y Abs	8
3.3. Algoritmos	10
<b>4. Diccionario <math>\text{String}(\alpha)</math></b>	<b>13</b>
4.1. Representacion	13
4.2. InvRep y Abs	14
4.3. Algoritmos	14
<b>5. Cola Prioritaria</b>	<b>16</b>
5.1. TAD COLAPRIORITARIA	16
5.2. Representacion	17
5.3. InvRep y Abs	18
5.4. Algoritmos	19

## 1. Tad Extendidos

### 1.1. Secu( $\alpha$ )

#### otras operaciones

elemDeSecu : Secu( $\alpha$ )  $s \times \text{Nat } n \longrightarrow \text{RUR}$

$\{n < \text{long}(s)\}$

#### axiomas

elemDeSecu( $s, n$ )  $\equiv$  **if**  $n = 0$  **then**  $\text{prim}(s)$  **else**  $\text{elemDeSecu}(\text{fin}(s), n-1)$  **fi**

### 1.2. Mapa

#### observadores básicos

restricciones : Mapa  $m \longrightarrow \text{secu}(\text{restriccion})$

nroConexion : estacion  $e_1 \times \text{estacion } e_2 \times \text{Mapa } m \longrightarrow \text{nat}\{e_1, e_2 \subset \text{estaciones}(m) \wedge_L \text{conectadas?}(e_1, e_2, m)\}$

#### axiomas

restricciones(vacio)  $\equiv \langle \rangle$

restricciones(agregar( $e, m$ ))  $\equiv \text{restricciones}(m)$

restricciones(conectar( $e_1, e_2, r, m$ ))  $\equiv \text{restricciones}(m) \circ r$

nroConexion( $e_1, e_2, \text{conectar}(e_3, e_4, m)$ )  $\equiv$  **if**  $((e_1 = e_3 \wedge e_2 = e_4) \vee (e_1 = e_4 \wedge e_2 = e_3))$  **then**  
long(restricciones( $m$ )) - 1

**else**

nroConexion( $e_1, e_2, m$ ) - 1

**fi**

nroConexion( $e_1, e_2, \text{agregar}(e, m)$ )  $\equiv \text{nroConexion}(e_1, e_2, m)$

## 2. Mapa

### Interfaz

se explica con:  $\text{RED, ITERADOR UNIDIRECCIONAL}(\alpha)$ .

géneros:  $\text{red, itConj(Compu)}$ .

### Operaciones básicas de Red

$\text{COMPUTADORAS}(\text{in } r : \text{red}) \rightarrow res : \text{itConj(Compu)}$

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{crearIt}(\text{computadoras}(r))\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Devuelve las computadoras de red.

$\text{CONECTADAS?}(\text{in } r : \text{red, in } c_1 : \text{compu, in } c_2 : \text{compu}) \rightarrow res : \text{bool}$

**Pre**  $\equiv \{\{c_1, c_2\} \subseteq \text{computadoras}(r)\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{conectadas?}(r, c_1, c_2)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|c_1| + |c_2|)$

**Descripción:** Devuelve el valor de verdad indicado por la conexión o desconexión de dos computadoras.

$\text{INTERFAZUSADA}(\text{in } r : \text{red, in } c_1 : \text{compu, in } c_2 : \text{compu}) \rightarrow res : \text{interfaz}$

**Pre**  $\equiv \{\{c_1, c_2\} \subseteq \text{computadoras}(r) \wedge_L \text{conectadas?}(r, c_1, c_2)\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{interfazUsada}(r, c_1, c_2)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|c_1| + |c_2|)$

**Descripción:** Devuelve la interfaz que  $c_1$  usa para conectarse con  $c_2$

$\text{INICIARRED}() \rightarrow res : \text{red}$

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{iniciarRed}()\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Crea una red sin computadoras.

$\text{AGREGARCOMPUTADORA}(\text{in/out } r : \text{red, in } c : \text{compu})$

**Pre**  $\equiv \{r_0 =_{\text{obs}} r \wedge \neg(c \in \text{computadoras}(r))\}$

**Post**  $\equiv \{r =_{\text{obs}} \text{agregarComputadora}(r_0, c)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|c|)$

**Descripción:** Agrega una computadora a la red.

$\text{CONECTAR}(\text{in/out } r : \text{red, in } c_1 : \text{compu, in } i_1 : \text{interfaz, in } c_2 : \text{compu, in } i_2 : \text{interfaz})$

**Pre**  $\equiv \{r_0 =_{\text{obs}} r \wedge \{c_1, c_2\} \subseteq \text{computadoras}(r) \wedge \text{ip}(c_1) \neq \text{ip}(c_2) \wedge_L \neg \text{conectadas?}(r, c_1, c_2) \wedge \neg \text{usaInterfaz?}(r, c_1, i_1) \wedge \neg \text{usaInterfaz?}(r, c_2, i_2)\}$

**Post**  $\equiv \{r =_{\text{obs}} \text{conectar}(r, c_1, i_1, c_2, i_2)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|c_1| + |c_2|)$

**Descripción:** Conecta dos computadoras y les añade la interfaz correspondiente.

### 2.1. Representacionrepresentacionn

### Representación

red se representa con  $\text{e\_red}$

donde  $\text{e\_red}$  es  $\text{tupla}(\text{vecinosEInterfaces: diccString(compu: string, diccString(compu: string, interfaz: nat))}, \text{deOrigenADestino: diccString(compu: string, diccString(compu: string, secu(compu): secu(string)))}, \text{computadoras: conj(compu)})$

## 2.2. InvRep y Abs

1. El conjunto de claves de "uniones" es igual al conjunto de estaciones "estaciones".
2. "#sendas" es igual a la mitad de las horas de "uniones".
3. Todo valor que se obtiene de buscar el significado del significado de cada clave de "uniones", es igual el valor hallado tras buscar en "uniones" con el significado de la clave como clave y la clave como significado de esta nueva clave, y no hay otras hojas ademas de estas dos, con el mismo valor.
4. Todas las hojas de "uniones" son mayores o iguales a cero y menores a "#sendas".
5. La longitud de "sendas" es mayor o igual a "#sendas".

Rep : e\_mapa  $\rightarrow$  bool

Rep(*m*)  $\equiv$  true  $\iff$

- m.estaciones = claves(m.uniones)  $\wedge$  1.
- m.#sendas = #sendasPorDos(m.estaciones, m.uniones) / 2  $\wedge$  m.#sendas  $\leq$  long(m.sendas)  $\wedge_L$  2. 5.
- ( $\forall$  e1, e2: string)(e1  $\in$  claves(m.uniones)  $\wedge_L$  e2  $\in$  claves(obtener(e1, m.uniones))  $\Rightarrow_L$  e2  $\in$  claves(m.uniones)  $\wedge_L$  e1  $\in$  claves(obtener(e2, m.uniones))  $\wedge_L$  obtener(e2, obtener(e1, m.uniones)) = obtener(e1, obtener(e2, m.uniones))  $\wedge$  3. 4.
- obtener(e2, obtener(e1, m.uniones)) < m.#sendas)  $\wedge$
- ( $\forall$  e1, e2, e3, e4: string)((e1  $\in$  claves(m.uniones)  $\wedge_L$  e2  $\in$  claves(obtener(e1, m.uniones))  $\wedge_L$  e3  $\in$  claves(m.uniones)  $\wedge_L$  e4  $\in$  claves(obtener(e3, m.uniones)))  $\Rightarrow_L$  (obtener(e2, obtener(e1, m.uniones)) = obtener(e4, obtener(e3, m.uniones))  $\iff$  (e1 = e3  $\wedge$  e2 = e4)  $\vee$  (e1 = e4  $\wedge$  e2 = e3)))) 3.

#sendasPorDos : conj( $\alpha$ ) c  $\times$  dicc( $\alpha \times$  dicc( $\alpha \times \beta$ )) d  $\rightarrow$  nat {c  $\subset$  claves(d)}

#sendasPorDos(c, d)  $\equiv$  **if**  $\emptyset?(c)$  **then**  
 0  
**else**  
 #claves(obtener(dameUno(c), d)) + #sendasPorDos(sinUno(c), d)  
**fi**

Abs : e\_mapa *m*  $\rightarrow$  mapa

{Rep(*m*)}

Abs(*m*) =<sub>obs</sub> p: mapa |

m.estaciones = estaciones(p)  $\wedge_L$   
 ( $\forall$  e1, e2: string)((e1  $\in$  estaciones(p)  $\wedge$  e2  $\in$  estaciones(p))  $\Rightarrow_L$   
 (conectadas?(e1, e2, p)  $\iff$   
 e1  $\in$  claves(m.uniones)  $\wedge$  e2  $\in$  claves(obtener(e2, m.uniones))))  $\wedge_L$   
 ( $\forall$  e1, e2: string)((e1  $\in$  estaciones(p)  $\wedge$  e2  $\in$  estaciones(p))  $\wedge_L$   
 conectadas?(e1, e2, p)  $\Rightarrow_L$   
 (restriccion(e1, e2, p) = m.sendas[obtener(e2, obtener(e1, m.uniones))]  $\wedge$  nroConexion(e1, e2, m) = obtener(e2, obtener(e1, m.uniones)))  $\wedge$  long(restricciones(p)) = m.#sendas  $\wedge_L$  ( $\forall$  n:nat) (n < m.#sendas  $\Rightarrow_L$  m.sendas[n] = ElemDeSecu(restricciones(p), n)))

## 2.3. Algoritmos

### Algoritmos

ICOMPUTADORAS(in *r* : red)  $\rightarrow$  res : itConj(Compu)

1: res  $\leftarrow$  CrearIt(*r.computadoras*)

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

ICONECTADAS?(**in**  $r : \text{red}$ , **in**  $c_1 : \text{compu}$ , **in**  $c_2 : \text{compu}$ )  $\rightarrow res : \text{bool}$

1:  $res \leftarrow \text{Definido?}(\text{Significado}(r.\text{vecinosEInterfaces}, c_1), c_2)$

$\mathcal{O}(|c_1| + |c_2|)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|c_1| + |c_2|)$

IINTERFAZUSADA(**in**  $r : \text{red}$ , **in**  $c_1 : \text{compu}$ , **in**  $c_2 : \text{compu}$ )  $\rightarrow res : \text{interfaz}$

1:  $res \leftarrow \text{Significado}(\text{Significado}(r.\text{vecinosEInterfaces}, c_1), c_2)$

$\mathcal{O}(|c_1| + |c_2|)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|c_1| + |c_2|)$

INICIARRED()  $\rightarrow res : \text{red}$

1:  $res \leftarrow \text{tupla}(\text{vecinosEInterfaces: Vacío}(), \text{deOrigenADestino: Vacío}(), \text{computadoras: Vacío}())$   $\mathcal{O}(1+1+1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) =$

$3 * \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)$

IAGREGARCOMPUTADORA(**in/out**  $r : \text{red}$ , **in**  $c : \text{compu}$ )

1:  $\text{Agregar}(r.\text{computadoras}, c)$

$\mathcal{O}(1)$

2:  $\text{Definir}(r.\text{vecinosEInterfaces}, c, \text{Vacío}())$

$\mathcal{O}(|c|)$

3:  $\text{Definir}(r.\text{deOrigenADestino}, c, \text{Vacío}())$

$\mathcal{O}(|c|)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|c|)$

$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(|c|) + \mathcal{O}(|c|) =$

$2 * \mathcal{O}(|c|) = \mathcal{O}(|c|)$

ICONECTAR(**in/out**  $r : \text{red}$ , **in**  $c_1 : \text{compu}$ , **in**  $i_1 : \text{interfaz}$ , **in**  $c_2 : \text{compu}$ , **in**  $i_2 : \text{interfaz}$ )

1:  $\text{Definir}(\text{Significado}(r.\text{vecinosEInterfaces}, c_1), c_2, i_1)$

$\mathcal{O}(|c_1| + |c_2| + 1)$

2:  $\text{Definir}(\text{Significado}(r.\text{vecinosEInterfaces}, c_2), c_1, i_2)$

$\mathcal{O}(|c_2| + |c_1| + 1)$

3:

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|e_1| + |e_2|)$

$\mathcal{O}(|e_1| + |e_2|) + \mathcal{O}(|e_1| + |e_2|) + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) =$

$2 * \mathcal{O}(1) + 2 * \mathcal{O}(|e_1| + |e_2|) =$

$2 * \mathcal{O}(|e_1| + |e_2|) = \mathcal{O}(|e_1| + |e_2|)$

### 3. Ciudad Robótica

#### Interfaz

se explica con: CIUDAD ROBÓTICA, ITERADOR UNIDIRECCIONAL( $\alpha$ ).

géneros: ciudad, itRURs.

#### Operaciones básicas de Ciudad Robótica

PRÓXIMORUR(**in**  $c$ : ciudad)  $\rightarrow res$  : rur

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{próximoRUR}(c)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Devuelve el PróximoRUR de una ciudad, esto es, de añadirse un robot se le asignaría este RUR.

MAPA(**in**  $c$ : ciudad)  $\rightarrow res$  : mapa

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{mapa}(c)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Devuelve el mapa de la ciudad.

ROBOTS(**in**  $c$ : ciudad)  $\rightarrow res$  : itRURs

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{crearIt}(\text{robots}(c))\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Devuelve un iterador de los robots de la ciudad.

ESTACIÓN(**in**  $u$ : rur, **in**  $c$ : ciudad)  $\rightarrow res$  : estacion

**Pre**  $\equiv \{u \in \text{robots}(c)\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{estación}(u, c)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Devuelve la estación en la cual está el robot.

TAGS(**in**  $u$ : rur, **in**  $c$ : ciudad)  $\rightarrow res$  : conj(tags)

**Pre**  $\equiv \{u \in \text{robots}(c)\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{tags}(u, c)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Devuelve los tags del robot.

#INFRACCIONES(**in**  $u$ : rur, **in**  $c$ : ciudad)  $\rightarrow res$  : nat

**Pre**  $\equiv \{u \in \text{robots}(c)\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \# \text{infracciones}(u, c)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Devuelve la cantidad de infracciones cometidas por el robot.

CREAR(**in**  $m$ : mapa)  $\rightarrow res$  : ciudad

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{crear}(m)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(\text{Cardinal}(\text{Estaciones}(m)) * |e_m|)$

**Descripción:** Crea una ciudad con un mapa y sin robots.

ENTRAR(**in**  $ts$ : conj(tags), **in**  $e$ : estación, **in/out**  $c$ : ciudad)

**Pre**  $\equiv \{c_0 \equiv c \wedge e \in \text{estaciones}(c_0)\}$

**Post**  $\equiv \{c =_{\text{obs}} \text{entrar}(ts, e, c_0)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(\log_2 N + |e| + S * R)$

**Descripción:** Añade un robot a la ciudad, le asigna el próximoRUR y sus infracciones son nulas.

MOVER(**in**  $u$ : rur, **in**  $e$ : estación, **in/out**  $c$ : ciudad)

**Pre**  $\equiv \{(c_0 \equiv c \wedge u \in \text{robots}(c_0)) \wedge e \in \text{estaciones}(c_0)\} \wedge_L \text{conectadas?}(\text{estación}(u, c_0), e \text{ mapa}(c_0))\}$

**Post**  $\equiv \{c =_{\text{obs}} \text{mover}(u, e, c_0)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|e| + |e_0| + \log_2 N_e + \log_2 N_{e_0})$

**Descripción:** Mueve un robot desde donde está a la estación indicada.

INSPECCIÓN(**in**  $e$ : estación, **in/out**  $c$ : ciudad)

**Pre**  $\equiv \{c_0 \equiv c \wedge e \in \text{estaciones}(c_0)\}$

**Post**  $\equiv \{c =_{\text{obs}} \text{inspeccion}(e, c_0)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(\log_2 N)$

**Descripción:** Realiza la inspección de la estación indicada, remueve el robot con mayor cantidad de infracciones.

## Operaciones del iterador

CREARIT(**in**  $c$ : ciudad)  $\rightarrow res$  : itRURs

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{CrearItUni}(\text{robots}(c))\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Crea el iterador de robots.

ACTUAL(**in**  $it$ : itRURs)  $\rightarrow res$  : rur

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{Actual}(it)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Devuelve el actual del iterador de robots.

AVANZAR(**in**  $it$ : itRURs)  $\rightarrow res$  : itRURs

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{Avanzar}(it)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Avanza el iterador de robots.

HAYMAS?(**in**  $it$ : itRURs)  $\rightarrow res$  : bool

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{HayMas?}(it)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Se fija si hay mas elementos en el iterador de robots.

### 3.1. Representacion

## Representación

ciudad se representa con  $e\_cr$

donde  $e\_cr$  es  $\text{tupla}(\text{mapa: mapa}, \text{RUREnEst: diccString}(\text{estacion: string}, \text{robs: colaP}(\text{id: nat}, \text{inf: nat})),$   
 $\text{RURs: vector de tupla}(\text{id: nat}, \text{esta?: bool}, \text{e: string}, \text{inf: nat}, \text{carac: conj(string)},$   
 $\text{sendEv: arreglo_dimensionable de bool}, \text{\#RURHistoricos: nat})$

### 3.2. InvRep y Abs

1. El conjunto de estaciones de 'mapa' es igual al conjunto con todas las claves de 'RUREnEst'.
2. La longitud de 'RURs' es mayor o igual a '#RURHistoricos'.
3. Todos los elementos de 'RURs' cumplen que su primer componente ('id') corresponde con su posicion en 'RURs'. Su Componente 'e' es una de las estaciones de 'mapa', su componente 'esta?' es true si y solo si hay estaciones tales que su valor asignado en 'uniones' es igual a su indice en 'RURs'. Su Componente 'inf' puede ser mayor a cero solamente si hay algun elemento en 'sendEv' tal que sea false. Cada elemento de 'sendEv' es igual a verificar 'carac' con la estriccion obtenida al buscar el elemento con la misma posicion en la secuencia de restricciones de 'mapa'.



4. Cada valor contenido en la cola del significado de cada estacion de las claves de 'uniones' pertenecen unicamente a la cola asociada a dicha estacion y a ninguna otra de las colas asociadas a otras estaciones. Y cada uno de estos valores es menor a '#RURHistoricos' y mayor o igual a cero. Ademas la componente 'e' del elemento de la posicion igual a cada valor de las colas asociadas a cada estacion, es igual a la estacion asociada a la cola a la que pertenece el valor.

```

Rep : e_cr → bool
Rep(c) ≡ true ⇔ claves(c.RUEnEst) = estaciones(c.mapa) ∧ 1
    #RURHistoricos ≤ Long(c.RURs) ∧L (∀ i:Nat, t:<id:Nat, esta?:Bool, e:String, 2
    inf:Nat, carac:Conj(Tag), sendEv: ad(Bool)>)
    (i<#RURHistoricos ∧L ElemDeSecu(c.RURs, i) = t ⇒L (t.e ∈ estaciones(c.mapa) 3
    ∧ t.id = i ∧ tam(t.sendEv) = long(Restricciones(c.mapa)) ∧
    (t.inf > 0 ⇒ (∃ j:Nat) (j < tam(t.sendEv) ∧L ¬ (t.sendEv[j]))) ∧
    (t.esta? ⇔ (∃ e1: String) (e1 ∈ claves(c.RUEnEst) ∧L estaEnColaP?(obtener(e1, c.RUEnEst), t.id)))
    ∧ (∀ h : Nat) (h < tam(t.sendEv) ⇒L
    t.sendEv[h] = verifica?(t.carac, ElemDeSecu(Restricciones(c.mapa), h)))) ∧L
    (∀ e1, e2: String)(e1 ∈ claves(c.RUEnEst) ∧ e2 ∈ claves(c.RUEnEst) ∧ e1 ≠ e2 ⇒L 4
    (∀ n:Nat)(estaEnColaP?(obtener(e1, c.RUEnEst), n) ⇒ ¬ estaEnColaP?(obtener(e2, c.RUEnEst), n)
    ∧ n < #RURHistoricos ∧L ElemDeSecu(c.RURs, n).e = e1))

```

estaEnColaP? : ColaPri × Nat → Bool

```

estaEnColaP?(cp, n) ≡ if vacia?(cp) then
    false
else
    if desencolar(cp) = n then
        true
    else
        estaEnColaP?(Eliminar(cp, desencolar(cp)), n)
fi

```

```

Abs : e_cr c → ciudad {Rep(c)}
Abs(c) =obs u: ciudad |
    c.#RURHistoricos = ProximoRUR(U) ∧ c.mapa = mapa(u) ∧L
    robots(u) = RURQueEstan(c.RURs) ∧L
    (∀ n:Nat) (n ∈ robots(u) ⇒L estacion(n,u) = c.RURs[n].e ∧
    tags(n,u) = c.RURs[n].carac ∧ #infracciones(n,u) = c.RURs[n].inf)

```

RURQueEstan : secu(tupla) → Conj(RUR)

tupla es <id:Nat, esta?:Bool, inf:Nat, carac:Conj(tag), sendEv:arreglo dimensionable(bool)>

```

RURQueEstan(s) ≡ if vacia?(s) then
    ∅
else
    if Π2(prim(fin(s))) then
        Π1(prim(fin(s))) ∪ RURQueEstan(fin(s))
    else
        RURQueEstan(fin(s))
fi

```

it se representa con  $e\_it$

donde  $e\_it$  es  $tupla(i: nat, maxI: nat, ciudad: puntero(ciudad))$

$Rep : e\_it \rightarrow bool$

$Rep(it) \equiv true \iff it.i \leq it.maxI \wedge maxI = ciudad.\#RURHistoricos$

$Abs : e\_it\ u \rightarrow itUni(\alpha)$

$\{Rep(u)\}$

$Abs(u) =_{obs} it: itUni(\alpha) \mid (HayMas?(u) \wedge_L Actual(u) = ciudad.RURs[it.i] \wedge Siguienes(u, \emptyset) = VSiguienes(ciudad, it.i++, \emptyset) \vee (\neg HayMas?(u)))$

$Siguienes : itUniu \times conj(RURs)cr \rightarrow conj(RURs)$

$Siguienes(u, cr) \equiv \text{if } HayMas(u)? \text{ then } Ag(Actual(Avanzar(u)), Siguienes(Avanzar(u), cr)) \text{ else } Ag(\emptyset, cr) \text{ fi}$

$VSiguienes : ciudadc \times Nati \times conj(RURs)cr \rightarrow conj(RURs)$

$VSiguienes(u, i, cr) \equiv \text{if } i < c.\#RURHistoricos \text{ then } Ag(c.RURs[i], VSiguienes(u, i++, cr)) \text{ else } Ag(\emptyset, cr) \text{ fi}$

### 3.3. Algoritmos

## Algoritmos

**IPRÓXIMORUR**(in  $c: ciudad$ )  $\rightarrow res: rur$

1:  $res \leftarrow (c.\#RURHistoricos)$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**IMAPA**(in  $c: ciudad$ )  $\rightarrow res: mapa$

1:  $res \leftarrow c.mapa$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**IROBOTS**(in  $c: ciudad$ )  $\rightarrow res: itRobots$

1:  $res \leftarrow CrearIt(c.RURs)$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**IESTACIÓN**(in  $u: rur$ , in  $c: ciudad$ )  $\rightarrow res: estación$

1:  $res \leftarrow (c.RURs[u]).estacion$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**ITAGS**(in  $u: rur$ , in  $c: ciudad$ )  $\rightarrow res: conj(tags)$

1:  $res \leftarrow (c.RURs[u]).carac$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

I#INFRACCIONES(in  $u$ : rur, in  $c$ : ciudad)  $\rightarrow res$ : nat

1:  $res \leftarrow (c.RURs[u]).inf$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

ICREAR(in  $m$ : mapa)  $\rightarrow res$ : ciudad

1:  $res \leftarrow \text{tupla}(\text{mapa}: m, RUREnEst: \text{Vacío}(), RURs: \text{Vacía}(), \#RURHistoricos: 0)$

$\mathcal{O}(1)$

2: var  $it$ : itConj(Estacion)  $\leftarrow$  Estaciones( $m$ )

$\mathcal{O}(1)$

3: while HaySiguiente( $it$ ) do

$\mathcal{O}(1)$

4: Definir( $res.RUREnEst$ , Siguiente( $it$ ), Vacío())

$\mathcal{O}(|e_m|)$

5: Avanzar( $it$ )

$\mathcal{O}(1)$

6: end while

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(\text{Cardinal}(\text{Estaciones}(m)) * |e_m|)$

$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) + \sum_{i=1}^{\text{Cardinal}(\text{Estaciones}(m))} (\mathcal{O}(|e_m|) + \mathcal{O}(1)) =$

$2 * \mathcal{O}(1) + \text{Cardinal}(\text{Estaciones}(m)) * (\mathcal{O}(|e_m|) + \mathcal{O}(1)) =$

$\text{Cardinal}(\text{Estaciones}(m)) * (\mathcal{O}(|e_m|))$

IENTRAR(in  $ts$ : conj(tags), in  $e$ : string, in/out  $c$ : ciudad)

1: Agregar(Significado( $c.RUREnEst$ ,  $e$ ), 0,  $c.\#RURHistoricos$ )

$\mathcal{O}(\log_2 n + |e|)$

2: Agregar( $c.RURs$ ,  $c.\#RURHistoricos$ , tupla( $id$ :  $c.\#RURHistoricos$ ,  $esta?$ : true,  $estacion$ :  $e$ ,  $inf$ : 0,  $carac$ :  $ts$ ,  $sendEv$ : EvaluarSendas( $ts$ ,  $c.mapa$ )))

$\mathcal{O}(1 + S * R)$

3:  $c.\#RURHistoricos++$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(\log_2 n + |e| + S * R)$

$\mathcal{O}(\log_2 n + |e|) + \mathcal{O}(1 + S * R) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\log_2 n + |e| + S * R)$

IMOVER(in  $u$ : rur, in  $e$ : estación, in/out  $c$ : ciudad)

1: Eliminar(Significado( $c.RUREnEst$ ,  $c.RURs[u].estacion$ ),  $c.RURs[u].inf$ ,  $u$ )

$\mathcal{O}(|e| + \log_2 N_{e0})$

2: Agregar(Significado( $c.RUREnEst$ ,  $e$ ),  $c.RURs[u].inf$ ,  $u$ )

$\mathcal{O}(|e| + \log_2 N_e)$

3: if  $\neg(c.RURs[u].sendEv[\text{NroConexion}(c.RURs[u].estacion, e, c.mapa)])$  then

$\mathcal{O}(|e_0| + |e|)$

4:  $c.RURs[u].inf++$

$\mathcal{O}(1)$

5: end if

6:  $c.RURs[u].estacion \leftarrow e$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|e| + \log_2 N_e)$

$\mathcal{O}(|e| + \log_2 N_{e0}) + \mathcal{O}(|e| + \log_2 N_e) + \mathcal{O}(|e_0|, |e|) + \max(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(0)) + \mathcal{O}(1) =$

$\mathcal{O}(2 * |e| + \log_2 N_e + \log_2 N_{e0}) + \mathcal{O}(|e_0| + |e|) + 2 * \mathcal{O}(1) =$

$\mathcal{O}(|e| + \log_2 N_e + \log_2 N_{e0}) + \mathcal{O}(|e_0| + |e|) =$

$\mathcal{O}(2 * |e| + |e_0| + \log_2 N_e + \log_2 N_{e0}) = \mathcal{O}(|e| + |e_0| + \log_2 N_e + \log_2 N_{e0})$  Donde  $e_0$  es  $c.RURs[u].estacion$  antes de modificar el valor

IINSPECCIÓN(in  $e$ : estación, in/out  $c$ : ciudad)

1: var  $rur$ : nat  $\leftarrow$  Desencolar(Significado( $c.RUREnEst$ ,  $e$ ))

$\mathcal{O}(\log_2 N)$

2:  $c.RURs[rur].esta? \leftarrow false$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(\log_2 N)$

$\mathcal{O}(\log_2 N) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\log_2 N)$

ICREARIT(**in**  $c : \text{ciudad}$ )  $\rightarrow res : \text{itRURs}$

1:  $itRURS \leftarrow \text{tupla}(i : 0, maxI : c.\#RURHistoricos, ciudad : \&c)$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

IACTUAL(**in**  $it : \text{itRURs}$ )  $\rightarrow res : \text{rur}$

1:  $res \leftarrow (it.ciudad \rightarrow RURs)[it.i]$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

IAVANZAR(**in**  $it : \text{itRURs}$ )  $\rightarrow res : \text{itRURs}$

1:  $it.i++$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

IHAYMAS?(**in**  $it : \text{itRURs}$ )  $\rightarrow res : \text{bool}$

1:  $res \leftarrow (it.i < it.maxI)$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

## 4. Diccionario String( $\alpha$ )

### Interfaz

**parámetros formales**

**géneros**

**función** COPIA(**in**  $d : \alpha$ )  $\rightarrow res : \alpha$   
**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$   
**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} a\}$   
**Complejidad:**  $\Theta(\text{copy}(a))$   
**Descripción:** función de copia de  $\alpha$ 's

**se explica con:** DICCIONARIO(String,  $\alpha$ ).

**géneros:** diccString( $\alpha$ ).

### Operaciones básicas de Restricción

VACÍO()  $\rightarrow res : \text{diccString}(\alpha)$

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{vacío}()\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Crea nuevo diccionario vacío.

DEFINIR(**in/out**  $d : \text{diccString}(\alpha)$ , **in**  $clv : \text{string}$ , **in**  $def : \alpha$ )

**Pre**  $\equiv \{d_0 =_{\text{obs}} d\}$

**Post**  $\equiv \{d =_{\text{obs}} \text{definir}(clv, def, d)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|clv|)$

**Descripción:** Agrega una nueva definición.

DEFINIDO?(**in**  $d : \text{diccString}(\alpha)$ , **in**  $clv : \text{string}$ )  $\rightarrow res : \text{bool}$

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{def?}(clv, d)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|clv|)$

**Descripción:** Revisa si la clave ingresada se encuentra definida en el Diccionario.

SIGNIFICADO(**in**  $d : \text{diccString}(\alpha)$ , **in**  $clv : \text{string}$ )  $\rightarrow res : \text{diccString}(\alpha)$

**Pre**  $\equiv \{\text{def?}(d, clv)\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{obtener}(clv, d)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(|clv|)$

**Descripción:** Devuelve la definición correspondiente a la clave.

#### 4.1. Representación

### Representación

Esta no es la versión posta de la descripción, es solo un boceto.

Para representar el diccionario de Trie vamos a utilizar una estructura que contiene el primer Nodo y la cantidad de Claves en el diccionario. Para los nodos se utilizó una estructura formada por una tupla, el primer elemento es el significado de la clave y el segundo es un arreglo de 256 elementos que contiene punteros a los hijos del nodo (por todos los posibles caracteres ASCII).

Para conseguir el número de orden de un char tengo las funciones ord.

`diccString( $\alpha$ )` se representa con `e_nodo`

donde `e_nodo` es `tupla(definicion: puntero( $\alpha$ ), hijos: arreglo[256] de puntero(e_nodo))`

## 4.2. InvRep y Abs

1. Para cada nodo del arbol, cada uno de sus hijos que apunta a otro nodo no nulo, apunta a un nodo diferente de los apuntados por sus hermanos
2. A donde apunta el significado de cada nodo es distinto de a donde apunta el significado del resto de los nodos, con la excepcion que el significado apunta a "null"
3. No pueden haber ciclos, es decir, que todos los nodos son apuntados por un unico nodo del arbol, con la excepcion de la raiz, este no es apuntado por ninguno de los nodos del arbol
4. Debe existir aunque sea un nodo en el ultimo nivel, tal que su significado no apunta a "null"

$Abs : e\_nodo \ d \longrightarrow diccString \quad \{Rep(d)\}$   
 $Abs(d) =_{obs} n : diccString \mid$   
 $(\forall n : e\_nodo) \ Abs(n) =_{obs} d : diccString \mid (\forall s : string) \ (def?(s, d) \Rightarrow_L ((obtenerDelArbol(s, n) \neq NULL \wedge_L *(obtenerDelArbol(s, n) = obtener(s, d)))) \wedge_L$

$obtenerDelArbol : strings \times e\_nodo \longrightarrow puntero(\alpha)$

$obtenerDelArbol(s, n) \equiv$  **if** Vacía?(s) **then**  
 $\quad n.significado$   
**else**  
 $\quad$  **if** n.hijos[ord(prim(s)) = NULL **then**  
 $\quad \quad NULL$   
 $\quad$  **else**  
 $\quad \quad obtenerDelArbol(fin(s), n.hijos[ord(prim(s))])$   
 $\quad$  **fi**  
**fi**

## 4.3. Algoritmos

### Algoritmos

$iVACÍO() \rightarrow res : diccString(\alpha)$

1:  $res \leftarrow iNodoVacío()$

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

$iNODOVACÍO() \rightarrow res : e\_nodo$

1:  $res \leftarrow tupla(definición : NULL, hijos : arreglo[256] \text{ de } puntero(e\_nodo))$

$\mathcal{O}(1)$

2: **for** var  $i : nat \leftarrow 0$  to 255 **do**

$\mathcal{O}(1)$

3:  $res.hijos[i] \leftarrow NULL;$

$\mathcal{O}(1)$

4: **end for**

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

$\mathcal{O}(1) + \sum_{i=1}^{255} * \mathcal{O}(1) =$

$\mathcal{O}(1) + 255 * \mathcal{O}(1) =$

$256 * \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)$

$iDEFINIR(in/out \ d : diccString(\alpha), in \ clv : string, in \ def : \alpha)$

1: var  $actual : puntero(e\_nodo) \leftarrow \&(d)$

$\mathcal{O}(1)$

2: **for** var  $i : nat \leftarrow 0$  to  $LONGITUD(clv)$  **do**

$\mathcal{O}(1)$

3: **if**  $actual \rightarrow hijos[ord(clv[i])] =_{obs} NULL$  **then**

$\mathcal{O}(1)$

4:  $actual \rightarrow (hijos[ord(clv[i])] \leftarrow \&(iNodoVacío()))$

$\mathcal{O}(1)$

5: <b>end if</b>	$\mathcal{O}(1)$
6: $actual \leftarrow (actual \rightarrow hijos[ord(clv[i])])$	$\mathcal{O}(1)$
7: <b>end for</b>	
8: $(actual \rightarrow definicion) \leftarrow \&(Copiar(def))$	$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $|clv|$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(1) + \sum_{i=1}^{|clv|} \max(\sum_{i=1}^2 \mathcal{O}(1), \sum_{i=1}^3 \mathcal{O}(1)) + \mathcal{O}(1) = \\
&2 * \mathcal{O}(1) + |clv| * \max(2 * \mathcal{O}(1), 3 * \mathcal{O}(1)) = \\
&2 * \mathcal{O}(1) + |clv| * 3 * \mathcal{O}(1) = \\
&2 * \mathcal{O}(1) + 3 * \mathcal{O}(|clv|) = \\
&3 * \mathcal{O}(|clv|) = \mathcal{O}(|clv|)
\end{aligned}$$

IDEFINIDO?( <b>in</b> $d: diccString(\alpha)$ , <b>in</b> $def: \alpha \rightarrow res: bool$ )	
1: var $actual: puntero(e\_nodo) \leftarrow \&(d)$	$\mathcal{O}(1)$
2: var $i: nat \leftarrow 0$	$\mathcal{O}(1)$
3: $res \leftarrow true$	$\mathcal{O}(1)$
4: <b>while</b> $i < LONGITUD(clv) \wedge res =_{obs} true$ <b>do</b>	$\mathcal{O}(1)$
5: <b>if</b> $actual \rightarrow hijos[ord(clv[i])] =_{obs} NULL$ <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
6: $res \leftarrow false$	$\mathcal{O}(1)$
7: <b>else</b> $actual \leftarrow (actual \rightarrow hijos[ord(clv[i])])$	$\mathcal{O}(1)$
8: <b>end if</b>	
9: <b>end while</b>	
10: <b>if</b> $actual \rightarrow definicion =_{obs} NULL$ <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
11: $res \leftarrow false$	$\mathcal{O}(1)$
12: <b>end if</b>	

**Complejidad:**  $|clv|$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) + \sum_{i=1}^{|clv|} (\mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1))) + \mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1), 0) = \\
&4 * \mathcal{O}(1) + \sum_{i=1}^{|clv|} (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)) + \mathcal{O}(1) = \\
&5 * \mathcal{O}(1) + |clv| * 2 * \mathcal{O}(1) = \\
&5 * \mathcal{O}(1) + 2 * \mathcal{O}(|clv|) = \\
&2 * \mathcal{O}(|clv|) = \mathcal{O}(|clv|)
\end{aligned}$$

ISIGNIFICADO( <b>in</b> $d: diccString(\alpha)$ , <b>in</b> $clv: string$ ) $\rightarrow res: diccString(\alpha)$ )	
1: var $actual: puntero(e\_nodo) \leftarrow \&(d)$	$\mathcal{O}(1)$
2: <b>for</b> var $i: nat \leftarrow 0$ to $LONGITUD(clv)$ <b>do</b>	$\mathcal{O}(1)$
3: $actual \leftarrow (actual \rightarrow hijos[ord(clv[i])])$	$\mathcal{O}(1)$
4: <b>end for</b>	
5: $res \leftarrow (actual \rightarrow definicion)$	$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $|clv|$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) + \sum_{i=1}^{|clv|} \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = \\
&3 * \mathcal{O}(1) + |clv| * \mathcal{O}(1) = \\
&3 * \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(|clv|) = \mathcal{O}(|clv|)
\end{aligned}$$

## 5. Cola Prioritaria

### 5.1. TAD COLAPRIORITARIA

**TAD COLAPRIORITARIA**

**igualdad observacional**

$$(\forall c_1, c_2 : \text{colaP}(\text{Paquete})) \left( c_1 =_{\text{obs}} c_2 \iff \left( \begin{array}{l} \text{vacía?}(c_1) =_{\text{obs}} \text{vacía?}(c_2) \wedge_L \\ (\neg \text{vacía}(c_1) \Rightarrow_L \\ (\text{próximo}(c_1) =_{\text{obs}} \text{próximo}(c_2) \wedge \\ \text{suCamino}(\text{próximo}(c_1)) \\ \text{suCamino}(\text{próximo}(c_2)) \wedge \\ \text{desencolar}(c_1) =_{\text{obs}} \text{desencolar}(c_2))) \end{array} \right) =_{\text{obs}} \right)$$

**géneros** colaP(Paquete)

**exporta** colaP(Paquete), generadores, observadores

**usa** BOOL, NAT, PAQUETE, SECU( $\alpha$ ), COMPU

**observadores básicos**

vacía?	: colaP(Paquete)	→ Bool	
próximo	: colaP(Paquete) cp	→ Paquete	{¬vacía?(cp)}
desencolar	: colaP(Paquete) cp	→ colaP(Paquete)	{¬vacía?(cp)}
suCamino	: Paquete p × colaP(Paquete) cp	→ Secu(Compu)	{está?(p, cp)}

**generadores**

vacía	:	→ colaP(Paquete)	
encolar	: Paquete p × colaP(Paquete) cp	→ colaP(Paquete)	{¬está?(p, cp)}
agCompu	Paquete p × Compu c × colaP(Paquete) cp	→ colaP(Paquete)	{está?(p, cp)}

**otras operaciones**

está?	: Paquete p × colaP(Paquete) cp	→ Bool
-------	---------------------------------	--------

**axiomas**  $\forall p, p_1, p_2$ : Paquete,  $\forall c$ : Compu,  $\forall cp$ : colaP(Paquete)

vacía?(vacía)	≡ true
vacía?(encolar(p, cp))	≡ false
vacía?(agCompu(p, c, cp))	≡ false
próximo(encolar(p, cp))	≡ <b>if</b> vacía?(cp) <b>then</b> p <b>else</b> if prioridad(p) < prioridad(próximo(cp)) <b>then</b> p <b>else</b> próximo(cp) <b>fi</b> <b>fi</b>
próximo(agCompu(p, c, cp))	≡ próximo(cp)
desencolar(encolar(p, cp))	≡ <b>if</b> vacía?(cp) <b>then</b> cp <b>else</b> if prioridad(p) < prioridad(próximo(cp)) <b>then</b> cp <b>else</b> encolar(p, desencolar(cp)) <b>fi</b> <b>fi</b>
desencolar(agCompu(p, c, cp))	≡ desencolar(cp)
suCamino(p <sub>1</sub> , encolar(p <sub>2</sub> , cp))	≡ <b>if</b> p <sub>1</sub> = p <sub>2</sub> <b>then</b> <> <b>else</b> suCamino(p, cp) <b>fi</b>
suCamino(p <sub>1</sub> , agCompu(p <sub>2</sub> , c, cp))	≡ <b>if</b> p <sub>1</sub> = p <sub>2</sub> <b>then</b> suCamino(p, cp) o c <b>else</b> suCamino(p, cp) <b>fi</b>



```

está(p, cp)                                ≡ if vacía?(cp) then
                                             false
                                             else
                                             if p = próximo(cp) then true else está?(p, desencolar(cp)) fi

```

**Fin TAD**

## Interfaz

**se explica con:** COLAPRIORITARIA.

**géneros:** colaP(Paquete).

## Operaciones básicas de Restricción

VACÍO()  $\rightarrow res : \text{colaP(Paquete)}$

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{vacío}()\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Crea una nueva cola.

AGREGAR(**in/out**  $c : \text{colaP(Paquete)}$ , **in**  $a : \text{nat}$ , **in**  $b : \text{nat}$ )

**Pre**  $\equiv \{c_t =_{\text{obs}} c\}$

**Post**  $\equiv \{c =_{\text{obs}} \text{encolar}(a, b, c\_t)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(\log_2 N)$  con  $N$  siendo la cantidad total de elementos en la cola.

**Descripción:** Agrega dos nuevos numeros a la cola.

VACIA?(**in**  $c : \text{colaP(Paquete)}$ )  $\rightarrow res : \text{bool}$

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{vacía}()\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Revisa si la cola contiene por lo menos algun elemento.

DESENCOLAR(**in/out**  $c : \text{colaP(Paquete)}$ )  $\rightarrow res : \text{tupla}(a : \text{nat}, b : \text{nat})$

**Pre**  $\equiv \{c =_{\text{obs}} c_t \wedge \neg(\text{vacía}(c))\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{próximo}(c\_t) \wedge c =_{\text{obs}} \text{desencolar}(c\_t)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(\log_2 N)$  con  $N$  siendo la cantidad total de elementos en la cola.

**Descripción:** Devuelve la tupla de numeros mas grande y la quita de la cola.

TAMAÑO(**in/out**  $c : \text{colaP(Paquete)}$ )  $\rightarrow res : \text{nat}$

**Pre**  $\equiv \{\text{true}\}$

**Post**  $\equiv \{res =_{\text{obs}} \text{tamaño}(c)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

**Descripción:** Devuelve la cantidad total de elementos.

ELIMINAR(**in/out**  $c : \text{colaP(Paquete)}$ , **in**  $a : \text{nat}$ , **in**  $b : \text{nat}$ )

**Pre**  $\equiv \{c = c_0\}$

**Post**  $\equiv \{c =_{\text{obs}} \text{borrar}(c_0, k)\}$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(\log_2 N)$  con  $N$  siendo la cantidad total de elementos en la cola.

**Descripción:** Si  $a$  y  $b$  se encuentran en la cola, los quita de la misma.

## 5.2. Representacion

### Representación

Para representar la cola elegimos hacerla sobre un arbol AVL.

colaP(Paquete) **se representa con** eCola

donde eCola es  $\text{tupla}(\text{raiz} : \text{puntero(nodo)}, \text{tam} : \text{nat})$

donde `nodo` es `tupla(pri: nat, seg: nat, padre: puntero(nodo), izq: puntero(nodo), der: puntero(nodo), alt: nat)`

### 5.3. InvRep y Abs

#### InvRep en lenguaje coloquial:

1. La componente "tam" de `eCola` es igual a la cantidad de nodos en el arbol.
2. Todo nodo en el arbol tiene un unico padre, con excepcion de la raiz, que no tiene padre.
3. La relacion de orden es total.
4. Un nodo es mayor a otro si la componente "pri" del primero es mayor que la del segundo.
5. Un nodo es menor a otro si la componente "pri" del primero es menor que la del segundo.
6. No pueden haber dos nodos en el arbol que tengan el mismo numero en la componente "seg".
7. Si dos nodos tienen el mismo numero en la componente "pri", se procede a verificar la componente "seg" de ambos. El que tiene el mayor numero en dicha componente es el mayor, mientras que el otro es el menor.
8. Para cada nodo, todos los elementos del subarbol que se encuentra a la derecha de la raiz son mayores que la misma.
9. Para cada nodo, todos los elementos del subarbol que se encuentra a la izquierda de la raiz son menores que la misma.
10. La componente "alt" de cada nodo es igual a la cantidad de niveles que hay que recorrer para llegar a la hoja mas lejana.
11. Para cada nodo, la diferencia en modulo de la altura entre los dos subarboles del mismo no puede diferir en mas de 1.

#### Abs:

$\text{Abs} : \text{colaP}(\text{Paquete})\ c \longrightarrow \text{colaP}(\text{Paquete}) \quad \{\text{Rep}(c)\}$   
 $\text{Abs}(c) =_{\text{obs}} p : \text{colaP}(\text{Paquete}) \mid \text{mismosProximos}(c, p)$

$\text{mismosProximos} : \langle \text{puntero}(\text{nodo}) \times \text{nat} \rangle \longrightarrow \text{bool}$

```

mismosProximos(c, p)  $\equiv$  if  $\pi_1(c) = \text{NULL} \wedge \text{vacía?}(p)$  then
    true
else
    if  $(\pi_1(c) = \text{NULL} \wedge \neg \text{vacía?}(p)) \vee (\pi_1(c) \neq \text{NULL} \wedge \text{vacía?}(p))$  then
        false
    else
        if  $\text{maxElem}(*(\pi_1(c))) = \text{proximo}(p)$  then
             $\text{mismosProximos}(\text{borrarMax}(*(\pi_1(c))), \text{borrar}(\pi_1(\text{proximo}(p))), \pi_2(\text{proximo}(p)), p)$ 
        else
            false
        fi
    fi
fi

```

Las funciones "maxElem" y "borrarMax" no han sido axiomatizadas. Ya que estamos trabajando con Arboles Binarios de Búsqueda (en nuestro caso AVL) la logica de ambas funciones es la misma que esta expresada en el pseudocodigo del modulo. En particular "maxElem" se limita a buscar el nodo mas a la derecha del arbol, mientras que "borrarMax" una vez encontrado el maximo, procede a eliminarlo y reordenar el arbol.

## 5.4. Algoritmos

### Algoritmos

IVACIO()  $\rightarrow res : colaP(Paquete)$

1: var res: colaP(Paquete)  $\leftarrow$  tupla(NULL, 0)

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

IAGREGAR(in/out  $c : colaP(Paquete)$ , in  $a : nat$ , in  $b : nat$ )

```

1: if c.raiz == NULL then
2:   c.raiz  $\leftarrow$  &(tupla(a, b, NULL, NULL, NULL, 1))
3:   c.tam  $\leftarrow$  1
4: else
5:   var seguir: bool  $\leftarrow$  true
6:   var pNodo: puntero(nodo)  $\leftarrow$  c.raiz
7:   var camino: arreglo[ $\lfloor \log_2(c.tam) \rfloor + 1$ ] de puntero(nodo)
8:   var nroCamino: nat
9:   camino[0]  $\leftarrow$  pNodo
10:  nroCamino  $\leftarrow$  0
11:  while seguir == true do
12:    if  $a \geq *(pNodo).pri$  then
13:      if  $a == *(pNodo).pri$  then
14:        if  $b > *(pNodo).seg$  then
15:          if  $*(pNodo).der \neq NULL$  then
16:            pNodo  $\leftarrow$   $*(pNodo).der$ 
17:            nroCamino  $\leftarrow$  nroCamino + 1
18:            camino[nroCamino]  $\leftarrow$  pNodo
19:          else
20:             $*(pNodo).der \leftarrow$  &(tupla(a, b, pNodo, NULL, NULL, 1))
21:            nroCamino  $\leftarrow$  nroCamino + 1
22:            camino[nroCamino]  $\leftarrow$   $*(pNodo).der$ 
23:            seguir  $\leftarrow$  false
24:          end if
25:        else
26:          if  $*(pNodo).izq \neq NULL$  then
27:            pNodo  $\leftarrow$   $*(pNodo).izq$ 
28:            nroCamino  $\leftarrow$  nroCamino + 1
29:            camino[nroCamino]  $\leftarrow$  pNodo
30:          else
31:             $*(pNodo).izq \leftarrow$  &(tupla(a, b, pNodo, NULL, NULL, 1))
32:            nroCamino  $\leftarrow$  nroCamino + 1
33:            camino[nroCamino]  $\leftarrow$   $*(pNodo).izq$ 
34:            seguir  $\leftarrow$  false
35:          end if
36:        end if
37:      else
38:        if  $*(pNodo).der \neq NULL$  then
39:          pNodo  $\leftarrow$   $*(pNodo).der$ 
40:          nroCamino  $\leftarrow$  nroCamino + 1
41:          camino[nroCamino]  $\leftarrow$  pNodo
42:        else
43:           $*(pNodo).der \leftarrow$  &(tupla(a, b, pNodo, NULL, NULL, 1))
44:          nroCamino  $\leftarrow$  nroCamino + 1
45:          camino[nroCamino]  $\leftarrow$   $*(pNodo).der$ 

```

46:	seguir $\leftarrow$ false	$\mathcal{O}(1)$
47:	end if	
48:	end if	
49:	else	
50:	if $*(pNodo).izq \neq \text{NULL}$ then	$\mathcal{O}(1)$
51:	pNodo $\leftarrow$ $*(pNodo).izq$	$\mathcal{O}(1)$
52:	nroCamino $\leftarrow$ nroCamino + 1	$\mathcal{O}(1)$
53:	camino[nroCamino] $\leftarrow$ pNodo	$\mathcal{O}(1)$
54:	else	
55:	$*(pNodo).izq \leftarrow \&(tupla(a, b, pNodo, \text{NULL}, \text{NULL}, 1))$	$\mathcal{O}(1)$
56:	nroCamino $\leftarrow$ nroCamino + 1	$\mathcal{O}(1)$
57:	camino[nroCamino] $\leftarrow$ $*(pNodo).izq$	$\mathcal{O}(1)$
58:	seguir $\leftarrow$ false	$\mathcal{O}(1)$
59:	end if	
60:	end if	
61:	end while	
62:	c.tam $\leftarrow$ c.tam + 1	$\mathcal{O}(1)$
63:	seguir $\leftarrow$ true	$\mathcal{O}(1)$
64:	while nroCamino $\geq 0 \wedge$ seguir == true do	$\mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor + 1)$
65:	pNodo $\leftarrow$ camino[nroCamino]	$\mathcal{O}(1)$
66:	$*(pNodo).alt \leftarrow \text{ALTURA}(pNodo) \vee$	
67:	if $ \text{FACTORDESBALANCE}(\text{camino}[\text{nroCamino}])  > 1$ then	$\mathcal{O}(1)$
68:	pNodo $\leftarrow \text{ROTAR}(\text{HIJOMASALTO}(\text{HIJOMASALTO}(pNodo)), \text{HijoMasAlto}(pNodo), pNodo)$	$\mathcal{O}(1)$
69:	$*(pNodo).izq.alt \leftarrow \text{ALTURA}(*(pNodo).izq)$	$\mathcal{O}(1)$
70:	$*(pNodo).der.alt \leftarrow \text{ALTURA}(*(pNodo).der)$	$\mathcal{O}(1)$
71:	$*(pNodo).alt \leftarrow \text{ALTURA}(*(pNodo))$	$\mathcal{O}(1)$
72:	seguir $\leftarrow$ false	$\mathcal{O}(1)$
73:	end if	
74:	nroCamino $\leftarrow$ nroCamino - 1	$\mathcal{O}(1)$
75:	end while	
76:	end if	

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

Debido a la longitud del pseudocódigo, vamos a ignorar todas las condicionales y las asignaciones en la justificación, ya que se realizan en tiempo constante. Solo nos vamos a centrar en dos puntos, la creación del arreglo "camino" y el último ciclo.

Para el arreglo asignamos esa cantidad de nodos ya que contamos con un Árbol balanceado, el cual como mucho puede necesitar de  $\lfloor \log_2 N \rfloor + 1$  niveles para almacenar  $N$  nodos. Esta misma lógica la utilizamos en el último ciclo, en el cual para restaurar el balance del Árbol recorreremos el mismo desde el último nodo agregado (el cual es una hoja) hasta la raíz en el peor caso, corrigiendo cualquier desbalance en el camino.

Esto resulta en la siguiente suma:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor + 1) + \mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor + 1) = \\
&2 * \mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor + 1) = \\
&\mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor + 1) = \\
&\mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor) = \mathcal{O}(\log_2 N)
\end{aligned}$$

IELIMINAR(in/out c: colaP(Paquete), in a: nat, in b: nat)

1:	var pNodo: puntero(nodo) $\leftarrow$ c.raiz	$\mathcal{O}(1)$
2:	ver seguir: bool $\leftarrow$ true	$\mathcal{O}(1)$
3:	while pNodo $\neq$ NULL $\wedge$ seguir == true do	$\mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor + 1)$
4:	if $*(pNodo).pri == a \wedge *(pNodo).seg == b$ then	$\mathcal{O}(1)$
5:	seguir $\leftarrow$ false	$\mathcal{O}(1)$
6:	else	
7:	if $a \geq *(pNodo).pri$ then	$\mathcal{O}(1)$
8:	if $a == *(pNodo).pri$ then	$\mathcal{O}(1)$
9:	if $b > *(pNodo).seg$ then	$\mathcal{O}(1)$

10:	pNodo $\leftarrow$ *(pNodo).der	$\mathcal{O}(1)$
11:	else	
12:	pNodo $\leftarrow$ *(pNodo).izq	$\mathcal{O}(1)$
13:	end if	
14:	else	
15:	pNodo $\leftarrow$ *(pNodo).der	$\mathcal{O}(1)$
16:	end if	
17:	else	
18:	pNodo $\leftarrow$ *(pNodo).izq	$\mathcal{O}(1)$
19:	end if	
20:	end if	
21:	end while	
22:	if pNodo != NULL then	$\mathcal{O}(1)$
23:	bNodo: puntero(nodo) $\leftarrow$ NULL	$\mathcal{O}(1)$
24:	if pNodo == c.raiz then	$\mathcal{O}(1)$
25:	if *(pNodo).izq == NULL $\wedge$ *(pNodo).der == NULL then	$\mathcal{O}(1)$
26:	c.raiz $\leftarrow$ NULL	$\mathcal{O}(1)$
27:	delete pNodo	$\mathcal{O}(1)$
28:	end if	
29:	if *(pNodo).izq != NULL $\wedge$ *(pNodo).der == NULL then	$\mathcal{O}(1)$
30:	c.raiz $\leftarrow$ *(pNodo).izq	$\mathcal{O}(1)$
31:	*(*(pNodo).izq).padre $\leftarrow$ NULL	$\mathcal{O}(1)$
32:	delete pNodo	$\mathcal{O}(1)$
33:	end if	
34:	if *(pNodo).izq == NULL $\wedge$ *(pNodo).der != NULL then	$\mathcal{O}(1)$
35:	c.raiz $\leftarrow$ *(pNodo).der	$\mathcal{O}(1)$
36:	*(*(pNodo).der).padre $\leftarrow$ NULL	$\mathcal{O}(1)$
37:	delete pNodo	$\mathcal{O}(1)$
38:	end if	
39:	if *(pNodo).izq != NULL $\wedge$ *(pNodo).der != NULL then	$\mathcal{O}(1)$
40:	var tNodo: puntero(nodo) $\leftarrow$ pNodo.der	$\mathcal{O}(1)$
41:	while *(tNodo).izq != NULL do	$\mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor + 1)$
42:	tNodo $\leftarrow$ tNodo.izq	$\mathcal{O}(1)$
43:	end while	
44:	bNodo $\leftarrow$ *(tNodo).padre	$\mathcal{O}(1)$
45:	if *(tNodo).der != NULL then	$\mathcal{O}(1)$
46:	*(*(tNodo).der).padre $\leftarrow$ *(tNodo).padre	$\mathcal{O}(1)$
47:	end if	
48:	if *(*(tNodo).padre).izq == tNodo then	$\mathcal{O}(1)$
49:	*(*(tNodo).padre).izq $\leftarrow$ *(tNodo).der	$\mathcal{O}(1)$
50:	else	
51:	*(*(tNodo).padre).der $\leftarrow$ *(tNodo).der	$\mathcal{O}(1)$
52:	end if	
53:	*(tNodo).padre $\leftarrow$ *(pNodo).padre	$\mathcal{O}(1)$
54:	*(tNodo).izq $\leftarrow$ *(pNodo).izq	$\mathcal{O}(1)$
55:	*(tNodo).der $\leftarrow$ *(pNodo).der	$\mathcal{O}(1)$
56:	*(*(pNodo).izq).padre $\leftarrow$ tNodo	$\mathcal{O}(1)$
57:	*(*(pNodo).der).padre $\leftarrow$ tNodo	$\mathcal{O}(1)$
58:	delete pNodo	$\mathcal{O}(1)$
59:	end if	
60:	else	
61:	if *(pNodo).izq == NULL $\wedge$ *(pNodo).der == NULL then	$\mathcal{O}(1)$
62:	if *(*(pNodo).padre).izq == pNodo then	$\mathcal{O}(1)$
63:	*(*(pNodo).padre).izq $\leftarrow$ NULL	$\mathcal{O}(1)$
64:	bNodo $\leftarrow$ *(pNodo).padre	$\mathcal{O}(1)$
65:	delete pNodo	$\mathcal{O}(1)$
66:	else	

67:	$*(pNodo).padre.der \leftarrow NULL$	$\mathcal{O}(1)$
68:	$bNodo \leftarrow *(pNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
69:	$delete\ pNodo$	$\mathcal{O}(1)$
70:	<b>end if</b>	
71:	<b>end if</b>	
72:	<b>if</b> $*(pNodo).izq \neq NULL \wedge *(pNodo).der == NULL$ <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
73:	<b>if</b> $*(pNodo).padre.izq == pNodo$ <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
74:	$*(pNodo).padre.izq \leftarrow *(pNodo).izq$	$\mathcal{O}(1)$
75:	$*(pNodo).izq.padre \leftarrow *(pNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
76:	$bNodo \leftarrow *(pNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
77:	$delete\ pNodo$	$\mathcal{O}(1)$
78:	<b>else</b>	
79:	$*(pNodo).padre.der \leftarrow *(pNodo).izq$	$\mathcal{O}(1)$
80:	$*(pNodo).izq.padre \leftarrow *(pNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
81:	$bNodo \leftarrow *(pNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
82:	$delete\ pNodo$	$\mathcal{O}(1)$
83:	<b>end if</b>	
84:	<b>end if</b>	
85:	<b>if</b> $*(pNodo).izq == NULL \wedge *(pNodo).der \neq NULL$ <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
86:	<b>if</b> $*(pNodo).padre.izq == pNodo$ <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
87:	$*(pNodo).padre.izq \leftarrow *(pNodo).der$	$\mathcal{O}(1)$
88:	$*(pNodo).der.padre \leftarrow *(pNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
89:	$bNodo \leftarrow *(pNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
90:	$delete\ pNodo$	$\mathcal{O}(1)$
91:	<b>else</b>	
92:	$*(pNodo).padre.der \leftarrow *(pNodo).der$	$\mathcal{O}(1)$
93:	$*(pNodo).der.padre \leftarrow *(pNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
94:	$bNodo \leftarrow *(pNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
95:	$delete\ pNodo$	$\mathcal{O}(1)$
96:	<b>end if</b>	
97:	<b>end if</b>	
98:	<b>if</b> $*(pNodo).izq \neq NULL \wedge *(pNodo).der \neq NULL$ <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
99:	$var\ tNodo: puntero(nodo) \leftarrow pNodo.der$	$\mathcal{O}(1)$
100:	<b>while</b> $*(tNodo).izq \neq NULL$ <b>do</b>	$\mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor + 1)$
101:	$tNodo \leftarrow tNodo.izq$	$\mathcal{O}(1)$
102:	<b>end while</b>	
103:	$bNodo \leftarrow *(tNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
104:	<b>if</b> $*(tNodo).der \neq NULL$ <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
105:	$*(tNodo).der.padre \leftarrow *(tNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
106:	<b>end if</b>	
107:	<b>if</b> $*(tNodo).padre.izq == tNodo$ <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
108:	$*(tNodo).padre.izq \leftarrow *(tNodo).der$	$\mathcal{O}(1)$
109:	<b>else</b>	
110:	$*(tNodo).padre.der \leftarrow *(tNodo).der$	$\mathcal{O}(1)$
111:	<b>end if</b>	
112:	<b>if</b> $*(pNodo).padre.izq == pNodo$ <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
113:	$*(tNodo).padre.izq \leftarrow tNodo$	$\mathcal{O}(1)$
114:	<b>else</b>	
115:	$*(tNodo).padre.der \leftarrow pNodo$	$\mathcal{O}(1)$
116:	<b>end if</b>	
117:	$*(tNodo).padre \leftarrow *(pNodo).padre$	$\mathcal{O}(1)$
118:	$*(tNodo).izq \leftarrow *(pNodo).izq$	$\mathcal{O}(1)$
119:	$*(tNodo).der \leftarrow *(pNodo).der$	$\mathcal{O}(1)$
120:	$*(pNodo).izq.padre \leftarrow tNodo$	$\mathcal{O}(1)$
121:	$*(pNodo).der.padre \leftarrow tNodo$	$\mathcal{O}(1)$
122:	$delete\ pNodo$	$\mathcal{O}(1)$
123:	<b>end if</b>	

124:	c.tam $\leftarrow$ c.tam + 1	
125:	<b>while</b> b $\neq$ NULL <b>do</b>	$\mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor + 1)$
126:	*(b).alt $\leftarrow$ SETALTURA(b)	$\mathcal{O}(1)$
127:	<b>if</b>  FACTORDEDESBALANCE(b)  > 1 <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
128:	*(b).alt $\leftarrow$ ROTAR(HIJOMASALTO (HIJOMASALTO(b)), HIJOMASALTO(b), b)	$\mathcal{O}(1)$
129:	*(*(b).izq).alt $\leftarrow$ SETALTURA(*(b).izq)	$\mathcal{O}(1)$
130:	*(*(b).der).alt $\leftarrow$ SETALTURA(*(b).der)	$\mathcal{O}(1)$
131:	*(b).alt $\leftarrow$ SETALTURA(*(b))	$\mathcal{O}(1)$
132:	<b>end if</b>	
133:	b $\leftarrow$ *(b).padre	$\mathcal{O}(1)$
134:	<b>end while</b>	
135:	<b>end if</b>	
136:	<b>end if</b>	

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(\log_2 N)$

Para la complejidad de este algoritmo nos vamos a remitir al mismo proceso que en el caso anterior, vamos a ignorar los condicionales y las asignaciones ya que estas se realizan en tiempo constante para centrarnos unicamente en los ciclos cuya complejidad depende de algun parametro.

En este algoritmo contamos con 4 ciclos que dependen de alguna variable, ninguno esta anidado con ningun otro ciclo, y en el peor caso solo recorreremos 3 de ellos.

Esto nos da la siguiente suma:

$$3 * \mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor + 1) =$$

$$\mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor + 1) =$$

$$\mathcal{O}(\lfloor \log_2 N \rfloor) = \mathcal{O}(\log_2 N)$$

IROSTAR(in/out c: colaP(Paquete), in p1: puntero(nodo), in p2: puntero(nodo), in p3: puntero(nodo)) $\rightarrow$		
res : puntero(nodo)		
1:	var t1: puntero(nodo) $\leftarrow$ NULL	$\mathcal{O}(1)$
2:	var t2: puntero(nodo) $\leftarrow$ NULL	$\mathcal{O}(1)$
3:	var t2: puntero(nodo) $\leftarrow$ NULL v	
4:	<b>if</b> (*(p3).pri $\leq$ *(p1).pri $\wedge$ *(p3).seg < *(p1).seg) $\wedge$	
5:	(*(p1).pri $\leq$ *(p2).pri $\wedge$ *(p1).pri < *(p2).pri) <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
6:	t1 $\leftarrow$ p3	$\mathcal{O}(1)$
7:	t2 $\leftarrow$ p1	$\mathcal{O}(1)$
8:	t3 $\leftarrow$ p2	$\mathcal{O}(1)$
9:	<b>end if</b>	
10:	<b>if</b> (*(p3).pri $\geq$ *(p1).pri $\wedge$ *(p3).seg > *(p1).seg) $\wedge$	
11:	(*(p1).pri $\geq$ *(p2).pri $\wedge$ *(p1).pri > *(p2).pri) <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
12:	t1 $\leftarrow$ p2	$\mathcal{O}(1)$
13:	t2 $\leftarrow$ p1	$\mathcal{O}(1)$
14:	t3 $\leftarrow$ p3	$\mathcal{O}(1)$
15:	<b>end if</b>	
16:	<b>if</b> (*(p3).pri $\leq$ *(p2).pri $\wedge$ *(p3).seg < *(p2).seg) $\wedge$	
17:	(*(p2).pri $\geq$ *(p1).pri $\wedge$ *(p2).pri < *(p1).pri) <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
18:	t1 $\leftarrow$ p3	$\mathcal{O}(1)$
19:	t2 $\leftarrow$ p2	$\mathcal{O}(1)$
20:	t3 $\leftarrow$ p1	$\mathcal{O}(1)$
21:	<b>end if</b>	
22:	<b>if</b> (*(p3).pri $\geq$ *(p2).pri $\wedge$ *(p3).seg > *(p2).seg) $\wedge$	
23:	(*(p2).pri $\geq$ *(p3).pri $\wedge$ *(p2).pri > *(p3).pri) <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
24:	t1 $\leftarrow$ p1	$\mathcal{O}(1)$
25:	t2 $\leftarrow$ p2	$\mathcal{O}(1)$
26:	t3 $\leftarrow$ p3	$\mathcal{O}(1)$
27:	<b>end if</b>	
28:	<b>if</b> c.raiz == p3 <b>then</b>	
29:	c.raiz $\leftarrow$ p3	$\mathcal{O}(1)$

30:   *(p3).padre ← NULL	$\mathcal{O}(1)$
31: <b>else</b>	
32: <b>if</b> (*(p3).padre).izq = p3 <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
33:       CIZQ(*(p3).padre, t2)	$\mathcal{O}(1)$
34: <b>else</b>	
35:       CDER(*(p3).padre, t2)	$\mathcal{O}(1)$
36: <b>end if</b>	
37: <b>end if</b>	
38: <b>if</b> *(t2).izq != p1 ∧ *(t2).izq != p2 ∧ *(t2).izq != p3 <b>then</b>	
39:   CDER(t1, *(t2).izq)	$\mathcal{O}(1)$
40: <b>end if</b>	
41: <b>if</b> *(t2).der != p1 ∧ *(t2).der != p2 ∧ *(t2).der != p3 <b>then</b>	
42:   CDER(t3, *(t2).der)	$\mathcal{O}(1)$
43: <b>end if</b>	
44: CIZQ(t2, t1)	$\mathcal{O}(1)$
45: CDER(t2, t3)	$\mathcal{O}(1)$
46: res ← t2	$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

Al igual que en los dos casos anteriores, debido a la longitud del pseudocodigo, vamos a ignorar los condicionales y las asignaciones ya que se realizan en tiempo constante.

Como todas las ejecuciones del codigo se efectuan en tiempo constante, podemos ver de manera trivial que la complejidad es  $\mathcal{O}(1)$ .

ICIZQ(in a: puntero(nodo), in b: puntero(nodo))

1: *(a).izq = b	$\mathcal{O}(1)$
2: *(b).padre = a	$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) =$

$2 * \mathcal{O}(1) =$

$\mathcal{O}(1)$

ICDER(in a: puntero(nodo), in b: puntero(nodo))

1: *(a).der = b	$\mathcal{O}(1)$
2: *(b).padre = a	$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) =$

$2 * \mathcal{O}(1) =$

$\mathcal{O}(1)$

ISEALTURA(in a: puntero(nodo)) → res : nat

1: <b>if</b> *(a).izq == NULL <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
2: <b>if</b> *(a).der == NULL <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
3:       res ← 1	$\mathcal{O}(1)$
4: <b>else</b>	
5:       res ← 1 + (*(a).der).alt	$\mathcal{O}(1)$
6: <b>end if</b>	
7: <b>else</b>	
8: <b>if</b> *(a).der == NULL <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
9:       res ← 1 + (*(a).izq).alt	$\mathcal{O}(1)$
10: <b>else</b>	
11: <b>if</b> (*(a).izq).alt > (*(a).der).alt <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$



12:           res ← 1 + *(*a).izq).alt	$\mathcal{O}(1)$
13: <b>else</b>	
14:           res ← 1 + *(*a).der).alt	$\mathcal{O}(1)$
15: <b>end if</b>	
16: <b>end if</b>	
17: <b>end if</b>	

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1)), \mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1)))) = \\
&\mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1)), \mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1))) = \\
&\mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1), 2 * \mathcal{O}(1))) = \\
&\mathcal{O}(1) + \max(2 * \mathcal{O}(1), 3 * \mathcal{O}(1)) = \\
&\mathcal{O}(1) + 3 * \mathcal{O}(1) = 4 * \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

IFACTORDESBALANCE(**in** a : puntero(nodo)) → res : int

1: <b>if</b> *(a).izq == NULL <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
2: <b>if</b> *(a).der == NULL <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
3:       res ← 0	$\mathcal{O}(1)$
4: <b>else</b>	
5:       res ← -(*(*a).der).alt	$\mathcal{O}(1)$
6: <b>end if</b>	
7: <b>else</b>	
8: <b>if</b> *(a).der == NULL <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
9:       res ← *(*a).izq).alt	$\mathcal{O}(1)$
10: <b>else</b>	
11:       res ← *(*a).izq).alt - *(*a).der).alt	$\mathcal{O}(1)$
12: <b>end if</b>	
13: <b>end if</b>	

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1) + (\max(\mathcal{O}(1)), \max(\mathcal{O}(1))), \mathcal{O}(1) + (\max(\mathcal{O}(1)), \max(\mathcal{O}(1)))) = \\
&\mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)) = \\
&\mathcal{O}(1) + \max(2 * \mathcal{O}(1), 2 * \mathcal{O}(1)) = \\
&\mathcal{O}(1) + 2 * \mathcal{O}(1) = \\
&3 * \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

IHIJOMASALTO(**in** a : puntero(nodo)) → res : puntero(nodo)

1: <b>if</b> *(*a).izq).alt > *(*a).der).alt <b>then</b>	$\mathcal{O}(1)$
2:   res ← *(a).der	$\mathcal{O}(1)$
3: <b>else</b>	
4:   res ← *(a).izq	$\mathcal{O}(1)$
5: <b>end if</b>	

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(1) + \max(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1)) = \\
&\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = \\
&2 * \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

IVACIA?(**in** c : colaP(Paquete)) → res : bool

1: res ← c.raiz != NULL	$\mathcal{O}(1)$
-------------------------	------------------

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$

IDESENCOLAR(**in/out**  $c$ : colaP(Paquete))  $\rightarrow res$  : tupla(a: nat, b: nat)

1: var pNodo: puntero(nodo)  $\leftarrow$  c.raiz

$\mathcal{O}(1)$

2: **while** pNodo.der  $\neq$  NULL **do**

$\mathcal{O}(\log_2 N)$

3:     pNodo  $\leftarrow$  pNodo.der

$\mathcal{O}(1)$

4: **end while**

5: ELIMINAR(c, \*(pNodo).pri, \*(pNodo).seg)

$\mathcal{O}(\log_2 N)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(\log_2 N)$

$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\log_2 N) * \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\log_2 N) =$

$2 * \mathcal{O}(\log_2 N) = \mathcal{O}(\log_2 N)$

ITAMAÑO(**in/out**  $c$ : colaP(Paquete))  $\rightarrow res$  : nat

1: res  $\leftarrow$  c.tam

$\mathcal{O}(1)$

**Complejidad:**  $\mathcal{O}(1)$