

# Final Oral Métodos Numéricos

Fernando Nicolás Frassia

Diciembre 2022

## 1 Sistemas de Ecuaciones

- EG:  $O(n^3)$ , en matriz ya triangulada  $O(n^2)$
- Diagonal:  $O(n)$
- LU:  $O(n^3)$  calcularla. Luego  $O(n^2)$  calcular cualquier solución nueva. (Ly=b  $O(n^2)$  y Ux=y  $O(n^2)$ )
- PLU: Técnicamente  $O(n^3)$ , pero podemos escribirla compacta en  $O(n)$
- QR:  $O(n^3)$ . Luego  $O(n^2)$  calcular cualquier solución nueva.

## 2 Factorización LU

### 2.1 Toda matriz tiene LU?, de qué depende?

No, por ejemplo:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

**Condición necesaria:**

- No tener un 0 en la diagonal. Si hay, no existe multiplicador posible para poner 0s en esa columna usando el algoritmo de **EG sin pivoteo**.

(DISCLAIMER: esto se puede relajar si hay un 0 en la diagonal pero todos los elementos de esa columna debajo de la diagonal son 0 también, porque se saltea ese paso).

El ejemplo no cumple esta condición, por eso no tiene factorización LU. La factorización se obtiene considerando como U a la matriz ya triangulada; y considerando a L a partir de los multiplicadores usados en el proceso (con 1s en la diagonal).

**Condiciones suficientes:**

- Si A tiene todas sus submatrices inversibles  $\implies$  tiene fact. LU (y además es única).

- Si  $A$  es SDP, entonces  $A$  es inversible y todas sus submatrices principales son SDP. Entonces vale lo anterior, entonces tiene fact LU.
- Si  $A$  es EDD, entonces  $A$  inversible, y todas sus submatrices principales son EDD. Entonces vale lo primero, entonces tiene fact LU. Ésta es la menos costosa de chequear.

## 2.2 Conocés alguna condición si y sólo si para que tenga LU (aparte de la de eliminación Gaussiana)?

- Todas las anteriores.

## 2.3 Qué problema tengo si hago eliminación gaussiana con pivoteo para conseguir LU?

Que después vas a tener que aplicar la matriz de permutación  $P$  a cada  $b$  que quieras encontrarle solución.

## 2.4 Cuando la factorización LU es única?

Si una matriz es inversible y tiene fact. LU  $\implies$  fact. LU es única.  
Considerás  $L_1 U_1 = L_2 U_2$  y con ciertos juegos llegarás a una igualdad entre dos matrices que tienen que ser diagonales ( $t_s * t_s = t_i * t_i$ ), que, como  $L$  tiene 1s en la diagonal sólo pueden ser la identidad.

## 2.5 ¿Por qué queremos pivotar en EG aunque no tengamos necesidad?

Cuando se busca implementar la Eliminación Gaussiana, hay que tener en cuenta que en la computadora se trabaja con **aritmética finita**.

Cuando se trabaja con aritmética finita, las operaciones elementales pueden presentar errores. Entonces, es deseable que el algoritmo trate de evitar algunos errores que pueden ser significativos, propiedad que se conoce como estabilidad numérica. Por ejemplo, en aritmética finita, si se divide por un número chico, se incrementa el error absoluto en las operaciones, lo cual no es deseable. Entonces quiero que mi pivote (elemento de la diagonal sobre el cual estamos trabajando) sea el más grande posible.

# 3 Número de condición y normas

## 3.1 Qué es el número de condición? Intuición y definición.

- **Definición:**  $k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$
- **Intuición:** Da una idea de qué tan bien o mal condicionado está el sistema.  $k(A)$  grande  $\implies$  pequeños cambios en el vector imagen causan grandes cambios en el vector origen.

## 4 Factorización Cholesky

### 4.1 Para qué sirve?

Para resolver sistemas de ecuaciones.

### 4.2 Si una matriz es SDP) ¿cómo te conviene resolver un sistema lineal?

Si el uso de banca un *epsilon* de error, por Gauss-Sidel (porque la convergencia está asegurada). Si no, por Cholesky.

### 4.3 Ventajas de tener la factorización de Cholesky contra LU?

- Temporalmente: El algoritmo para obtener la Cholesky es  $O(n^3)$ , igual complejidad asintótica que obtener LU. Pero las constantes son mejores, así que en la práctica, es más rápido Cholesky.
- Espacialmente: Sólo guardo la matriz  $\mathbf{L}$ , entonces ocupa la mitad de espacio que la factorización LU.

### 4.4 La Factorización Cholesky es única?

Sí. Si los pasos se siguen en orden, en cada uno de ellos sólo se utilizan elementos de  $\mathbf{L}$  que ya fueron calculados previamente. Por lo tanto, tenemos un algoritmo bien definido para obtener la factorización de Cholesky de cualquier matriz SDP. Además el algoritmo determina  $\mathbf{L}$  de forma unívoca partiendo de una ecuación que debe ser satisfecha por toda factorización Cholesky de  $\mathbf{A}$ . Entonces la factorización de Cholesky es única.

## 5 Factorización QR

### 5.1 Toda matriz tiene factorización QR? Nombrar un método

Sí, incluso para matrices no cuadradas, y se pueden encontrar por Householder o Givens. Sólo se podría romper cuando  $\|x - y\|_2 = 0$ , pero entonces no hay que hacer nada en este paso porque ya tengo 0s donde los quiero.

### 5.2 Es única? Bajo qué condiciones lo es?

Si  $\mathbf{A}$  es inversible y los elementos de la diagonal de  $\mathbf{R}$  son positivos, entonces sí.

### 5.3 Para qué sirve?

- Para resolver sistemas de ecuaciones.
- QR es más estable que LU, porque  $K(Q) = 1$ .
- Si ya tengo la QR el costo es  $O(n^2)$ , menor que LU. ( $Rx = Q^t b$ )

### 5.4 Idea de cómo se obtiene con rotaciones y reflexiones

Givens:

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , elegimos  $x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix}$  e  $y = \begin{pmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego elegimos  $W = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\|x\|_2} & \frac{x_2}{\|x\|_2} \\ \frac{-x_2}{\|x\|_2} & \frac{x_1}{\|x\|_2} \end{bmatrix}$

y completamos con la identidad:

$$W_{12} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ w_{21} & w_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego } W_{12}A = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ \textcolor{red}{0} & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & \cdots & a_{3n}^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}^1 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nn}^1 \end{bmatrix}$$

Elegimos  $x = \begin{pmatrix} a_{11}^1 \\ a_{31}^1 \end{pmatrix}$  e  $y = \begin{pmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{y hacemos lo mismo: } W_{13} = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & w_{13} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ w_{31} & 0 & w_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego, } W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2 \\ \textcolor{red}{0} & a_{22}^2 & \cdots & a_{2n}^2 \\ \textcolor{red}{0} & a_{32}^2 & \cdots & a_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}^2 & a_{n2}^2 & \cdots & a_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

Luego, para  $i = 1, \dots, n-1, j = i+1, \dots, n$  sea  $W_{ij} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & w_{ii} & \dots & w_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & w_{ji} & \dots & w_{jj} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces,  $W_{n-1n}W_{n-2n}W_{n-2n-1}\dots W_{1n}\dots W_{12}A = R$   
 $A = W_{12}^t \dots W_{1n}^t \dots W_{n-2n-1}^t W_{n-2n}^t W_{n-1n}^t R$

Entonces,  $A = QR$

Costo total =  $O(\frac{4}{3}n^3)$

Propiedades:  $G$  es simétrica y ortogonal

**Householder:**

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , elegimos  $x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$  e  $y = \begin{pmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Elegimos  $u_1 = \frac{x-y}{\|x-y\|_2}$  y  $H_1 = I - 2u_1u_1^t$

Luego,  $H_1A = \begin{bmatrix} \|x\|_2 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ \textcolor{red}{0} & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \textcolor{red}{0} & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{bmatrix}$

Luego, elegimos  $x = \begin{pmatrix} a_{22}^1 \\ a_{32}^1 \\ \vdots \\ a_{n2}^1 \end{pmatrix}$  e  $y = \begin{pmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Elegimos  $u_2 = \frac{x-y}{\|x-y\|_2}$  y  $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I - 2u_2u_2^t \end{bmatrix}$

Luego,  $H_2H_1A = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ \textcolor{red}{0} & \|x\|_2 & a_{23}^2 & \dots & a_{2n}^2 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & a_{33}^2 & \dots & a_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & a_{n3}^2 & \dots & a_{nn}^2 \end{bmatrix}$

Finalmente:

$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$

$A = H_1^t \dots H_{n-2}^t H_{n-1}^t R$

$A = QR$

Costo total =  $O(\frac{2}{3}n^3)$

Propiedades:  $H$  es simétrica y ortogonal

## 5.5 Cuál conviene mejor, Givens o Householder?

- En el caso general: Householder porque tiene una constante más baja. Además en cada paso pone todos los 0s de la columna de una, eso puede ser útil en algunos contextos.
- En matrices ralas: Givens, porque puede saltarse los pasos que ya son 0, Householder es ciego respecto a esto.

## 6 Autovalores

### 6.1 Cuántos autovalores tiene una matriz?

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \implies$  tiene  $n$  autovalores (contándolos con su multiplicidad) porque son las raíces del polinomio característico, de grado  $n$ .

### 6.2 Si para cada autovalor hay un autovector, tengo $n$ autovectores?

No necesariamente.

Si tengo  $n$  autovalores distintos sí, cada autovalor tiene multiplicidad 1, entonces cada uno tiene un autovector asociado, éstos son ortogonales entre sí entonces forman una base. Si hay al menos 1 con multiplicidad mayor a 1, puede que haya  $n$  autovectores como no. Porque para cada autovalor, su multiplicidad algebraica es mayor o igual que su multiplicidad geométrica.

### 6.3 Dar alguna condición para afirmar que tenemos una base de autovectores.

- Tener  $n$  autovalores distintos  $\implies$  tener  $n$  autovectores distintos linealmente independientes  $\implies$  tener base de autovectores.
- Si  $A$  es **simétrica**  $\implies A$  tiene base ortonormal de autovectores. (Porque  $A$  es ortogonalmente diagonalizable. Osea  $\exists Q$  ortogonal y  $D$  diagonal tal que  $Q^t A Q = D$ . Y como las columnas de  $Q$  son los autovectores de  $A$ , y las columnas de  $Q$  son LI, entonces  $A$  tiene base de autovectores).
- $A$  es diagonalizable por semejanza  $\iff A$  tiene base de autovectores. Osea  $\exists S$  inversible y  $D$  diagonal tal que  $A = SDS^{-1}$ .

### 6.4 Algún método para encontrar el autovalor más grande de una matriz

- **Método de la potencia:** Es una sucesión que converge al autovalor más grande. El truco es escribir a  $x_0$  como combinación lineal de los autovectores (esto se puede porque son base), con la particularidad de que el escalar que multiplica al primer autovector sea no nulo. Luego es ir

multiplicando por A en cada iteración. El criterio de parada puede ser el coseno del ángulo, o la norma de la resta entre cada nuevo vector y el anterior.

- **Método de la deflación:** Sirve para encontrar el resto de los autovalores. La idea es considerar la H de Householder tal que  $Hv_1 = e_1$ .

$$HAH^t = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a^t \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Entonces, como A y B son semejantes, tienen los mismos autovalores. Entonces B tiene los autovalores  $\lambda_2 \cdots \lambda_n$ . Aplicando el método de la potencia en B encontramos  $\lambda_2$ . Luego repetimos hasta encontrar todos.

## 6.5 Qué condiciones son necesarias para que el método de la potencia converja?

1. Base de autovectores.
2. Que haya un autovalor dominante en módulo.
3. Que el  $x_0$  inicial que elegimos se escriba como combinación lineal de la base de autovectores con un escalar no nulo multiplicando el primer autovector. A priori no hay forma de saber si el  $x_0$  lo cumple, lo que hacemos es darle un par de iteraciones, y si no anda tirarlo y agarrar otro.

## 6.6 Qué condiciones son necesarias para aplicar el método de deflación?

Los mismos que el de la potencia, agregando que si se quieren los encontrar k autovalores más grandes, éstos deben ser todos distintos en módulo y mayores estrictos que los demás. Si busco n, que los n autovalores sean distintos en módulo.

# 7 Descomposición en valores singulares.

## 7.1 Qué tamaño tiene cada matriz en la descomposición?

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

## 7.2 Qué son los valores singulares?

- Son la raíz de los autovalores de  $A^t A$ . Están en la diagonal de la matriz  $\Sigma$ .

## 7.3 Cómo sé que los puedo obtener?

Porque  $A^t A$  es semi-definida positiva, entonces todos sus autovalores son reales positivos y tomarle raíz a un número positivo es positivo.

## 7.4 Qué son las columnas de U y las columnas de V?

- Las columnas de U son los autovectores de  $AA^t$ .
- Las columnas de V son los autovectores de  $A^tA$ .

## 7.5 Por qué podemos asegurar que $AA^t$ y $A^tA$ tienen base de autovectores?

Porque son simétricas.

# 8 Métodos iterativos

## 8.1 Por qué usaría métodos iterativos si tengo métodos exactos?

Porque si la matriz del sistema que quiero resolver tiene un  $n$  muy grande, los métodos exactos tardan  $O(n^3)$  y eso es muy alto. Ahí los iterativos pueden tardar menos, porque su costo es  $O(k \cdot n^2)$  siendo  $k$  la cantidad de iteraciones. Todo esto depende de la relación entre  $k$  y  $n$ .

## 8.2 Explicar Jacobi:

Condiciones:

- No hay 0s en la diagonal.

Algoritmo:

- Tomar un vector cualquiera
- Escribimos a  $x_1^1$  en función de  $x_2^0, x_3^0, \dots, b_1$ .
- Escribimos a  $x_2^1$  en función de  $x_1^0, x_3^0, \dots, b_2$ .
- Así con todos. Y luego volvemos a iterar.
- Criterio de parada 1: Restar el nuevo vector calculado y el anterior, y tomarle norma. Si eso es menor a un epsilon, paro.
- Criterio de parada 2: Tomar coseno del ángulo entre el nuevo vector y el vector anterior. Si eso es menor a un epsilon, paro.

Matemáticamente:

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^k) / a_{ii}$$

Matricialmente:

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$Dx - (L + U)x = b$$



$$\begin{aligned}
Dx &= (L + U)x + b \\
x &= D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \\
x^{k+1} &= D^{-1}(L + U)x^k + D^{-1}b
\end{aligned}$$

### 8.3 Explicar Gauss-Sidel:

Condiciones:

- No hay 0s en la diagonal

Algoritmo:

- Tomar un vector cualquiera
- Escribimos a  $x_1^1$  en función de  $x_2^0, x_3^0, \dots, b_1$ .
- Usamos lo ya calculado: y escribimos a  $x_2^1$  en función de  $x_1^1, x_3^0, \dots, b_2$ .
- Así con todos. Y luego volvemos a iterar.
- Criterio de parada 1: Restar el nuevo vector calculado y el anterior, y tomarle norma. Si eso es menor a un epsilon, paro.
- Criterio de parada 2: Tomar coseno del ángulo entre el nuevo vector y el vector anterior. Si eso es menor a un epsilon, paro.

Matricialmente:

$$\begin{aligned}
Ax &= b \\
(D - L - U)x &= b \\
(D - L)x - Ux &= b \\
(D - L)x &= Ux + b \\
x &= (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b \\
x^{k+1} &= (D - L)^{-1}Ux^k + (D - L)^{-1}b
\end{aligned}$$

### 8.4 Cuándo convergen? Condiciones necesarias y suficientes.

Condiciones necesarias:

- Diagonal no nula.

Condiciones suficientes:

- Que la matriz de iteración tenga radio espectral  $< 1$ .
- EDD  $\implies$  ambos métodos convergen.
- SDP  $\implies$  Gauss-Sidel converge.

## 8.5 Características de algún método iterativo que te sirva si A es SDP

. Gauss-Sidel tiene asegurada la convergencia en este caso. Además converge antes que Jacobi.

## 8.6 Qué es el radio espectral?

Es el máximo autovalor en módulo de una matriz.

# 9 Cuadrados mínimos

## 9.1 Qué problema resuelve?

Tengo un conjunto de pares ordenados  $(x_i, y_i)$  para  $i = 1, \dots, m$ , busco una función  $f(x)$  perteneciente a una familia  $F$  que "mejor aproxime" a los datos.

Qué entendemos por "mejor aproxime"?

$$\min_{f \in F} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

Sirve porque no es tan susceptible a outliers como las otras, y se lleva bien para derivarla.

Dado un conjunto de funciones  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  linealmente independientes. Definimos:  $F = \{ f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x) \}$

Entonces:

$$\begin{aligned} & \min_{f \in F} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \\ = & \min_{c_1, \dots, c_n} \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x_i) - y_i \right)^2 \end{aligned}$$

Las funciones  $\phi_i$  del conjunto son dato, y no tienen por qué ser lineales, eso deja de importar porque una vez aplicadas a  $x_i$  dan un número, no importa cómo lo dan. Lo que quiero encontrar son los  $c_1, \dots, c_n$  que minimicen eso, y esos sí son lineales entre sí.

## 9.2 Cómo llevo este problema a una representación matricial?

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Definidos como:

$$A = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_m) & \phi_2(x_m) & \cdots & \phi_n(x_m) \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Entonces el problema de CML es:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$$

Esto es equivalente a la fórmula anterior que habla de  $c_1, \dots, c_n$ .

### 9.3 Por qué está bueno cuadrados mínimos lineales en relación a cuadrados mínimos no lineales?

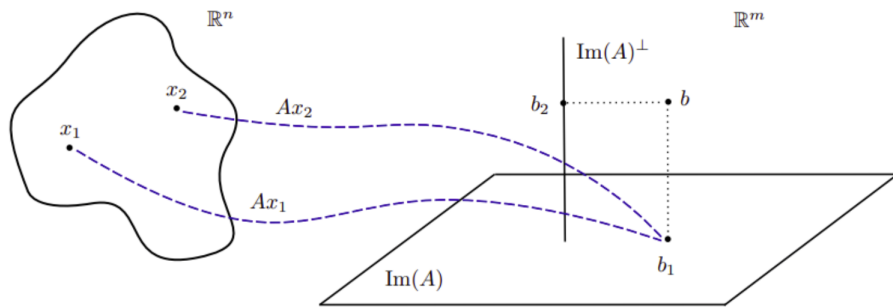
Porque es más fácil

### 9.4 Por qué decimos que CML es lineal? ¿Por qué está bueno usar CML en comparación a no lineales?

Misma respuesta. Porque los coeficientes que quiero encontrar se relacionan linealmente entre ellos.

### 9.5 Interpretación geométrica?

Si  $Ax = b$  no tiene solución, entonces es evidente que el mínimo es mayor que 0. Para entender cómo elegir un vector  $x$  que lo realice, pensemos en  $Ax$  y  $b$  como vectores en  $\mathbb{R}^m$ . El mínimo se alcanza cuando la distancia euclídea entre estos dos vectores es mínima. Pero el único de estos dos vectores que se mueve es  $Ax$ , con lo cual hay que elegirlo de modo tal que esté lo más cerca posible de  $b$ . Recordemos que el conjunto de valores que puede tomar  $Ax$  es el subespacio  $\text{Im}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ . Luego, queremos encontrar la distancia del punto  $b$  al subespacio  $\text{Im}(A)$ , y es sabido que el punto sobre el subespacio que realiza la distancia es la proyección ortogonal de  $b$  sobre  $\text{Im}(A)$ .



En la figura,  $b_1 = \text{proy}_{\text{Im}(A)}(b)$  es el punto que realiza la distancia,  $b_2 = \text{proy}_{\text{Im}(A)^\perp}(b)$ , y  $x_1$  y  $x_2$  son soluciones.

## 9.6 Tengo un problema de cuadrados mínimos, siempre tiene solución? ¿Es única?

Sí. La solución es única  $\iff$  A es inversible.

La idea es escribir  $\min Ax=b$ , como  $\min y=b$ . Separar b en  $b_1 \in \text{Im}(A)$  y  $b_2 \in \text{Nu}(A^t)$ . Luego es elegir  $y = b_1$ . Entonces siempre existe solución.

## 9.7 Qué métodos conocés para resolver cuadrados mínimos?

Ecuaciones normales:

1.  $A^t r = 0$ , con  $r = b - Ax$
2.  $A^t Ax^* = A^t b$

## 9.8 Interpolar vs Aproximar

Cuadrados mínimos lineales no pasa necesariamente por los puntos, interpolación sí.

Cuando tenemos mediciones del mundo real, siempre tienen error, con lo cual no tiene mucho sentido usar interpolación.

Interpolación la usaría para agregar resolución a imágenes, como en el taller.

## 9.9 Criterios para definir mejor aproxima

- maximo error
- suma de errores en modulo
- suma de errores al cuadrado

# 10 Interpolación

## 10.1 Quiero dar un polinomio interpolador. ¿Siempre existe? ¿Es único? ¿Qué algoritmos conoces para calcularlo?

Sí, siempre **existe**, porque siempre existe polinomio de Lagrange de grado menor o igual a n.

$$L_{nk}(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

Luego,

$$y_k * L_{nk}(x) = \begin{cases} 0 & x = x_i, i \neq k \\ y_k & x = x_k \end{cases}$$

Finalmente:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_{nk}(x)$$

Esto cumple  $P(x_i) = y_i$

Y sí, es **único** (esto se demuestra con la fórmula del error).

## 10.2 Qué problemas trae tener un polinomio interpolante de grado muy alto? ¿Solución?

Mientras más datos considero, más alto es el grado del polinomio interpolante.

Grado más alto trae más oscilaciones, esto agrega ruido y se aleja de lo que queremos.

Elegimos un compromiso entre esas dos cosas: **interpolación segmentaria**. Esto es interpolar entre pares de puntos adyacentes y luego definir la función de a intervalos.

### Tipos:

- Lineal, considero polinomios de grado 1 para interpolar (problema para derivar).
- Cuadrática, considero polinomios de grado 2 para interpolar. Pido que las derivadas sean continuas.
- Cúbica, considero polinomios de grado 3 para interpolar. Pido que las derivadas segundas sean continuas. **Siempre existe**. Ésta es la que más se usa.

## 10.3 Qué es un polinomio interpolador?

Es un polinomio de grado menor o igual a  $n$  que pasa por los datos. Es decir, cumple  $P(x_i) = y_i$

## 10.4 Fórmula del error

Sea  $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ ,  $(x_i, f(x_i))$ ,  $x_i \in [a,b]$  para  $i = 0, \dots, n$ .

Consideremos  $P(x)$  el polinomio interpolador de grado  $\leq n$  y  $\bar{x} \in [a,b]$ . Existe  $\xi(\bar{x})$  tal que:

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(\bar{x}))}{(n+1)!} (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_n)$$

## 10.5 Cómo demostrás que el polinomio interpolador es único?

Supongamos que hay dos polinomios interpolantes distintos:  $P_1(x) \neq P_2(x)$ , para los datos  $x_0, \dots, x_n$ .

$P_2(x)$  interpola a  $P_1(x)$ , porque pasa por los mismos puntos en los datos. Entonces escribamos la fórmula del error:

$$P_1(x) = P_2(x) + \frac{P_1^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Ahora, como  $P_1(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , la derivada  $n+1$  es 0. Entonces:

$$P_1(x) = P_2(x)$$

Absurdo, porque dijimos que eran distintos.

## 11 Existencia y Unicidad

Cosa	Siempre existe/se puede hacer?	Es único?
EG	si no hay 0s en la diagonal	no
LU	no, ver página 1	si A es inversible y tiene fact LU
PLU	sí	no
Cholesky	si A es SDP	sí
QR	sí	si A es inversible y R tiene diagonal positiva
Givens	sí	sí
Householder	sí	sí
Potencia	anexo1	-
Deflación	anexo2	-
SVD	sí	no, con una SVD puedo armar otra
Jacobi	si no hay 0s en la diagonal	-
Gauss-Sidel	si no hay 0s en la diagonal	-
CML	sí	si A es inversible
Interpolación	sí	sí

Anexo1:

1. Base de autovectores.
2. Un autovalor dominante.
3. Que el  $x_0$  que elegimos se escriba como combinaci'ón lineal de la base de autovectores con un escalar no nulo multiplicando el primer autovector.

Anexo2:

1. Todas las condiciones del anexo1.
2. Que haya una relación de orden (sin igual) entre los módulos de los autovalores.