INT. A RELATIVIDAD GENERAL

No.
Date.

Introduccion a la Relatividad General

A First Course in General Relativity Schutz

2º Edition

del 1-8 capitulos

alo.materias@gmail.com
Mandar correo electrónico institucional

Asunto: Relatividad general

3 examenes → Promedio

Tarea de cada capitulo

Se entregan tareas el dia del examen

6 (no tareas)
7 Tarea 1 de cada 3
8 Tareas al cien

sistema GPS ← Aplicación práctica de la RG

Si el Sol de pronto perdiera la mitad de su masa que pasaría con la Tierra
Dejaria de estar confinado a su órbita,
Un problema de la teoria de Newton es que el cambio seria instántaneo (Acción a distancia), es decir ocurriria al mismo tiempo el cambio en la Tierra, en saturno y urano, lo cual parece contraintuitivo y al mismo Newton le molestaba.

$$F_g = -\frac{GMm}{r^2}$$

No.
Date.

Postulados básicos de la Relatividad Especial

* La velocidad de la luz es constante en el vacío para todos los sistemas de Referencia Inerciales
* La velocidad de la luz es la velocidad máxima de las señales

Gravedad

* Atractiva
* Alcance infinito
* La produce la materia
* $1/r^2$

* Se propaga a la velocidad de la luz (en el vacío)
* Es universal
* No es apantallable

= La gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio tiempo (ET) =

↓ geometría

Relatividad Especial
(2 postulados)

* Dos observadores en movimiento relativo con velocidad constante, obtienen las mismas conclusiones sobre experimentos de física

En física existen un conjunto de observadores preferenciales en los cuales la descripción de los fenómenos es más simple

"Los observadores **inerciales** se mueven con velocidad constante"
("se mueve en línea recta y rapidez constante")

No.

Date.

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Suponga dos observadores inerciales con velocidad relativa $\vec{V}$ esto es $\vec{V} = cte.$

$$\vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{V}$$

Newton en su Principia supone que $t = t'$

$$\vec{a}\,' = \frac{d\vec{v}\,'}{dt'} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (t = t')$$

Luego

$$\vec{a}\,' = \vec{a} + \cancel{\vec{A}}^{\,0} \qquad (\vec{V}\ cte)$$

$$\vec{a}\,' = a \rightarrow \frac{\vec{F}\,'}{m} = \frac{\vec{F}}{m}$$

En ambos sistemas de referencia inerciales se cumple la ley de Newton

$$a' = \frac{\vec{F}\,'}{m} \longleftrightarrow a = \frac{\vec{F}}{m} \qquad \vec{a}\,' = \vec{a}$$

La esfera es invariante ante rotaciones

La forma de la 2da ley de Newton es invariante ante cambios de sistema de referencia inercial

2º postulado

toda la radiación EM

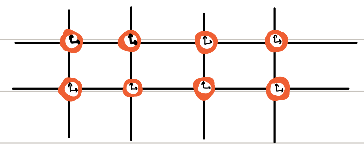
- La velocidad de la luz es constante con respecto a todos los observadores inerciales. También es la velocidad límite de las señales

¿Qué es un observador en RE?

Un observador es:

Conjunto de reglas y relojes, algo capaz de hacer mediciones de posición y de tiempo. Sinónimo de sistema de referencia

Las reglas forman una cuadrícula y hay un reloj en cada punto



"Los relojes están sincronizados y permanecen sincronizados"

¿Qué es un observador inercial en RE?

Observador inercial $\longrightarrow$ sistema de Referencia inercial

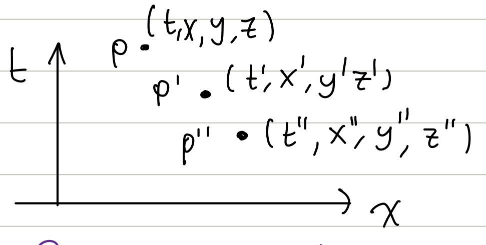
S.R.I

Un conjunto de reglas y relojes que satisfacen

* La distancia espacial entre dos puntos no cambian en el tiempo
* Los relojes estan sincronizados y permanecen así
* La geometría para cada t es Euclideana

} inválidos al agregar la gravedad

Espaciotiempo $\rightarrow$ Conjunto de todos los eventos



Evento $\rightarrow$ Punto del Espaciotiempo

Torres del castillo
Jersey plebansky

Sea p un evento

$$p \rightarrow (t,x,y,z)$$ **CONVENCIÓN**

$$\rightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$\rightarrow (x^\alpha) \qquad \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \mu, \nu$$

$$\rightarrow (x^\beta)$$

Indices griegos toman 4 valores (t,x,y,z), $(0,1,2,3)$

Unidades en MKS

$C = 3 \times 10^8 \, m/s$

En la mayoria de libros se usa un sistema de unidades diferente tal que se simplifica

$C = 1$ tal que

$3 \times 10^8 \, m/s = 1 \implies 3 \times 10^8 \, m = 1 \, s$ ← la distancia que recorre la luz en 1 segundo

Todo lo medimos con metros distancia y tiempo

$1m := \frac{1}{3 \times 10^8} s$ el tiempo que le toma a la luz recorrer 1 metro

tiempo y distancia tienen dimensiones equivalentes por lo que Las velocidades son adimensionales

$E = \frac{1}{2} M v^2$ ← adimensional

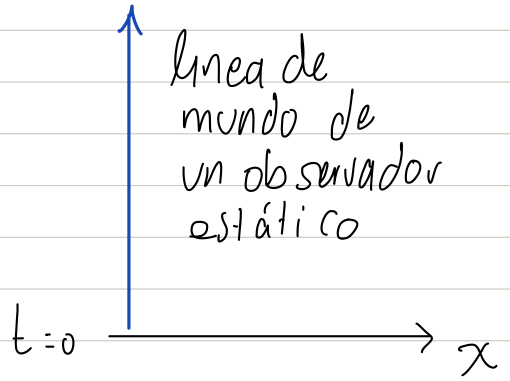
$[E] = [M] = kg$

$p = Mv \quad [p] = [M] = kg$

Longitud de cuerdas

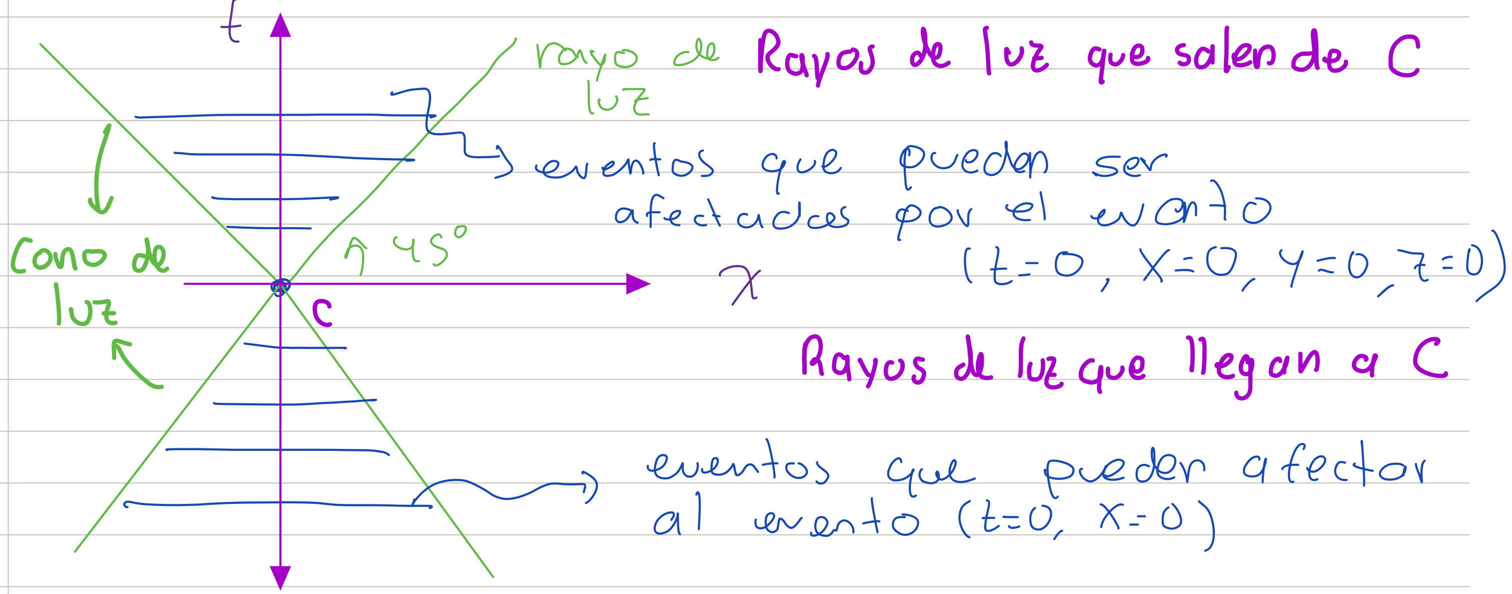
cuántica + relatividad + campo gravitacional intenso = Teoria cuántica de la gravedad

Teoria cuántica de campos



• Cada evento tiene su cono de luz

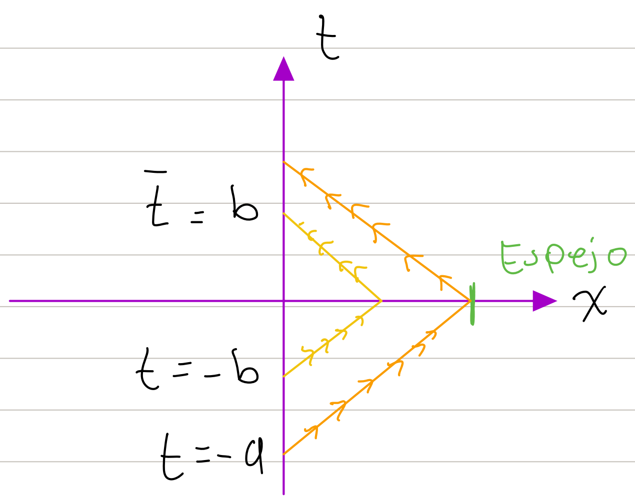
* La velocidad de la luz en el vacío es constante y es la velocidad límite

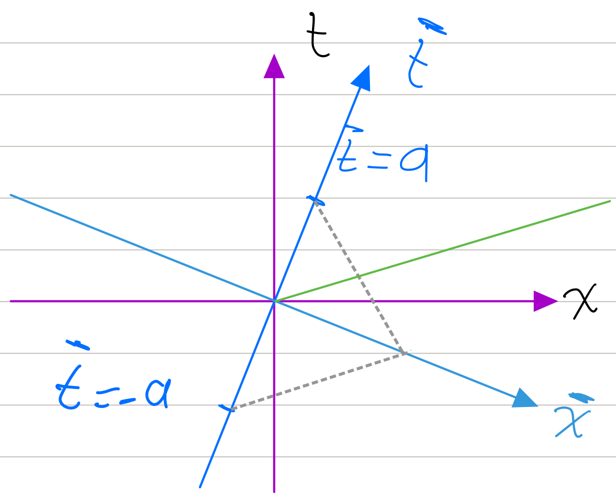


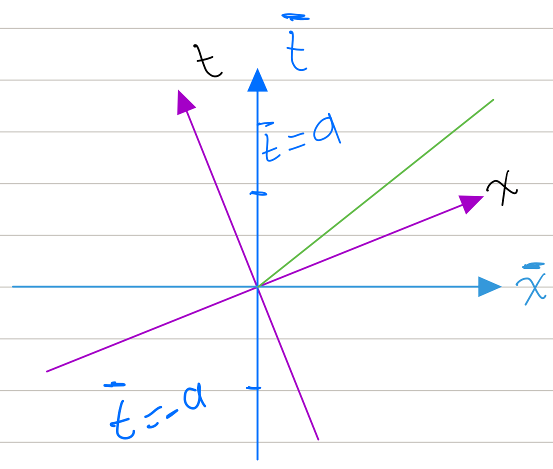
t, x son los ejes del observador O

Conf. usual $\begin{cases} t, x \text{ son los ejes del observador inercial } O \\ \text{sup. un observador inercial } \bar{O} \text{ que se mueve a lo largo de } +x \text{ con velocidad } v \end{cases}$

¿Que propiedad debe tener el eje x?







El cano de luz disecciona (divide a la mitad) el angulo en ambos S.R.I.

Definimos el intervalo entre dos eventos P y Q como

$$\Delta s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

$\Delta t = \bar{t} - t$

$\Delta x = \bar{x} - x$

$\Delta y = \bar{y} - y$

$\Delta z = \bar{z} - z$

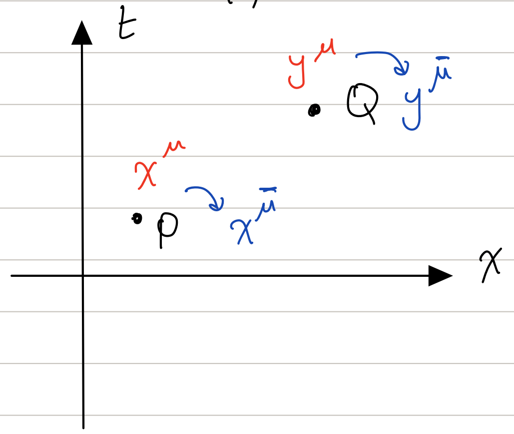
Note que $\Delta s^2 > 0$ Espacialoide (tipo esp)

$\Delta s^2 = 0$ Luxoide nulo (tipo luz)

$\Delta s^2 < 0$ Temporaloide (tipo tiempo)

Es invariante ante rotaciones pues el intevalo Δs^2 entre dos eventos es invariante ante cambios de observador inercial

Dos eventos P, Q



1.6 pag 9 hasta la formula 1.7

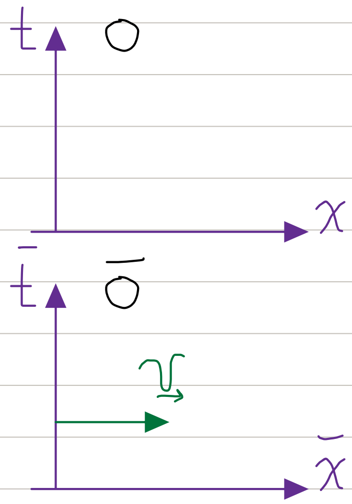
$$\Delta s^2 = -(y^0 - x^0)^2 + (y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + (y^3 - x^3)^2$$

Dos eventos están conectados causalmente si y solo si su intervalo entre ambos es temporaloide ($\Delta s < 0$) o luxoide ($\Delta s = 0$).

Además dos eventos con intervalo

TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Configuración usual – Dos sistemas de referencia O y $\bar{O}$ tal que $\bar{O}$ se mueve en $+x$ con $v = cte$



$$\bar{t} = \gamma(t - vx)$$
$$\bar{x} = \gamma(x - vt)$$
$$\left.\begin{aligned}\bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z\end{aligned}\right\}$$ Las coordenadas ortogonales no cambian

$$\left.\begin{aligned}\bar{t} &= \gamma t + (-\gamma v)x \\ \bar{x} &= \gamma t + (-\gamma v)t \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z\end{aligned}\right\}$$ Son transformaciones lineales

Si nos montamos en el observador $\bar{O}$ tenemos que debido a que los SRI son equivalentes, aplican las mismas transformadas.

$$t = \gamma(\bar{t} + v\bar{x})$$
$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$$
$$y = \bar{y}$$
$$z = \bar{z}$$

Si el mov. relativo es en la dirección $+y$ tenemos

$$\bar{x} = x$$
$$\bar{z} = z$$
$$\bar{t} = \gamma(t - vy)$$
$$\bar{y} = \gamma(y - vt)$$

Jackson cap. R.E. T. Lorentz en dirección arbitraria

$$\Delta t = \gamma(\Delta\bar{t} + v\Delta\bar{x})$$
$$\Delta x = \gamma(\Delta\bar{x} + v\Delta\bar{t})$$
$$\Delta y = \Delta\bar{y}$$
$$\Delta z = \Delta\bar{z}$$

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\cancel{\gamma}(\Delta\bar{x} + v\Delta\bar{t})}{\cancel{\gamma}(\Delta\bar{t} + v\Delta\bar{x})} = \frac{\cancel{\Delta\bar{t}}\left(\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta\bar{t}} + v\right)}{\cancel{\Delta\bar{t}}\left(1 + \frac{v\Delta\bar{x}}{\Delta\bar{t}}\right)} = \boxed{\frac{\bar{V} + v}{1 + v\bar{V}} = V}$$

para asegurarnos que cumpla con la cota de la velocidad de la luz

$$V = 1 = c$$

$$1 = \frac{\bar{V} + v}{1 + v\bar{V}}$$

$$1 + v\bar{V} - \bar{V} - v = 0$$

$$(1 - v) - \bar{V}(1 - v) = 0$$

$$(1 - v)(1 - \bar{V}) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{V} = 1$$

Para velocidades lejanas a la de la luz tenemos que

Cuando $|v| \ll 1 \quad |\bar{v}| \ll 1$

$$V = \frac{\bar{V} + v}{1 + v\bar{V}} \approx \frac{\bar{V} + v}{1} = \underline{\underline{\bar{V} + v}}$$ acorde a galileo

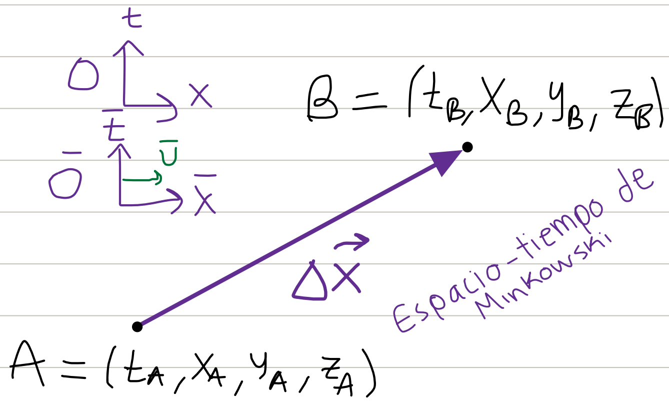
Vectores (cuadrivectores)
4-vectores

vector posición

$$\Delta\vec{X} \xrightarrow[O]{} (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$\Delta\vec{X} \xrightarrow[\bar{O}]{} (\Delta\bar{t}, \Delta\bar{x}, \Delta\bar{y}, \Delta\bar{z})$$

Mismo vector distintas mediciones



Una notación equivalente es

$\Delta\vec{x} \xrightarrow[O]{} \{\Delta x^{\alpha}\}$ $\Delta\vec{x} \xrightarrow[\bar{O}]{} \{\Delta x^{\bar{\alpha}}\}$

Los dos observadores O y $\bar{O}$ estan en la configuración usual

$$\Delta\bar{t} = \gamma(\Delta t - v\Delta x)$$
$$\Delta\bar{x} = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$
$$\Delta\bar{y} = \Delta y$$
$$\Delta\bar{z} = \Delta z$$

$\Longrightarrow$

$$\Delta X^{\bar{\alpha}} = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} \Delta X^{\beta}$$

determinante ± 1 en el examen

$$\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma- & \gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta}(\vec{v})$ solo depende de $\vec{v}$

$$\Delta x^{\bar{\alpha}} = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} \Delta X^{\beta} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} \Delta X^{\beta}$$

Convención de suma de Einstein

Siempre que aparezca un índice repetido, una como subíndice y otra como superíndice, se sobre entiende que hay una suma implícita sobre todos los valores del índice.

Vector (Cuadrivector)

Un vector es un objeto geométrico que cada observador le asocia un conjunto de 4 números y que bajo cambios de SR se transforma como $\Delta\vec{x}$

$$\vec{A} \xrightarrow[\mathcal{O}]{} (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

$$\vec{A} \xrightarrow[\bar{\mathcal{O}}]{} (A^{\bar{0}}, A^{\bar{1}}, A^{\bar{2}}, A^{\bar{3}})$$

$\mathcal{O}$ y $\bar{\mathcal{O}}$ están en la conf. usual

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta}$$

$\vec{A}$ es un conjunto de cuatro cantidades

No cualquier conjunto de 4 cantidades es un vector

Sean $\vec{A}, \vec{B}$ vectores

$$\vec{A} \xrightarrow[\mathcal{O}]{} (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

$$\vec{B} \xrightarrow[\mathcal{O}]{} (B^0, B^1, B^2, B^3)$$

$$\vec{A} + \vec{B} \xrightarrow[\mathcal{O}]{} (A^0 + B^0, A^1 + B^1, A^2 + B^2, A^3 + B^3)$$

$$aA \xrightarrow[\mathcal{O}]{} (aA^0, aA^1, aA^2, aA^3)$$

El conjunto de todos los vectores un espacio vectorial. (EV)

Si tenemos un EV existe una base

Vector $A^0\hat{e}_0 + A^1\hat{e}_1 + A^2\hat{e}_2 + A^3\hat{e}_3 = \vec{A}$

$\neq$

4 numeros $\vec{A} \xrightarrow[O]{} (A^0, A^1, A^2, A^3)$

Base canónica de O

$\{\hat{e}_\alpha\}$

$$(\hat{e}_\alpha)^\beta = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \text{los otros casos} \end{cases}$$

$$(e_1)^\beta = \delta_1^\beta$$

$$(e_1)^0 = \delta_1^0 = 0 \qquad \delta_\alpha^\beta \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e_1)^1 = \delta_1^1 = 1$$

$$(e_1)^2 = \delta_1^2 = 0$$

$$(e_1)^3 = \delta_1^3 = 0$$

$$A^\beta = \delta_\alpha^\beta A^\alpha \qquad \boxed{\hat{e}_\alpha = \delta_\alpha^\beta \hat{e}_\beta}$$

li de la base canónica

$$\hat{e}_0 = \delta_0^{\beta}\,\hat{e}_\beta = \delta_0^{0}\,\hat{e}_0 = \hat{e}_0$$

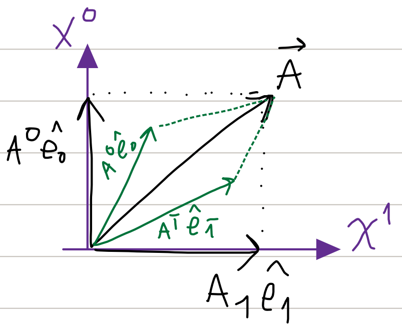
(No es valido con matrices)

$$\vec{A} = A^{\alpha}\hat{e}_\alpha$$

$$A^{\alpha} \sim \{A^0, A^1, A^2, A^3\}$$

$$O \to \{\hat{e}_\alpha\} \qquad \bar{O} \to \{\hat{e}_\alpha\}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{A} &= A^{\alpha}\hat{e}_\alpha \\ &= A^{\bar{\alpha}}\hat{e}_{\bar{\alpha}}\end{aligned}\right\} \quad A^{\alpha}\hat{e}_\alpha = A^{\bar{\alpha}}\hat{e}_{\bar{\alpha}}$$



$$A^{\bar{\alpha}}\hat{e}_{\bar{\alpha}} = A^{\alpha}\hat{e}_\alpha$$

$$\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta}A^{\beta}\hat{e}_{\bar{\alpha}} = A^{\beta}\hat{e}_\beta = 0$$

$$A^{\beta}\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta}\hat{e}_{\bar{\alpha}} - A^{\beta}\hat{e}_\beta = 0$$

$$A^{\beta}\left(\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta}\hat{e}_{\bar{\alpha}} - \hat{e}_\beta\right) = 0$$

$$= 0$$

A^{β} son arbitrarios

$$\hat{e}_\beta = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta}\hat{e}_{\bar{\alpha}}$$

$$A^{\bar{\beta}} = \Lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha}A^{\alpha}$$

Los vectores de O pueden expresarse como combinación lineal de los vectores de Ō

$$\hat{e}_{\beta} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}(\underrightarrow{v})\,\hat{e}_{\bar{\alpha}}$$

Por el principio de la relatividad de galileo, los vectores de Ō pueden expresarse como combinación lineal de los vectores de O

$$\hat{e}_{\bar{\beta}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}(-\underrightarrow{v})\,\hat{e}_{\alpha}$$

---

17 de Septiembre del 2024

$$x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}(\underrightarrow{v})\,x^{\beta}$$

Vector $\vec{A} \xrightarrow[O]{} \{A^{\alpha}\}$

$\vec{A} \xrightarrow[\bar{O}]{} \{A^{\bar{\alpha}}\}$

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\,A^{\beta}$$

$\{\hat{e}_{\alpha}\} \to$ Base del EV de vectores en el ET

$\{\hat{e}_{\bar{\alpha}}\} \to$ Base ...

$$\boxed{\hat{e}_{\alpha} = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(\underrightarrow{v})\,\hat{e}_{\bar{\beta}}}$$

$\longrightarrow$ El observador barrado se mueve respecto al observador sin barra con velocidad $\underrightarrow{v}$

$$\boxed{\hat{e}_{\bar{\mu}} = \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}}(-\underrightarrow{v})\,\hat{e}_{\nu}}$$

$$\hat{e}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha}\,\hat{e}_{\beta}$$

$$\hat{e}_{\alpha} = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(\underrightarrow{v})\,\hat{e}_{\bar{\beta}}$$

• índices mudos • índices libres

$$\hat{e}_{\alpha} = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(\underrightarrow{v})\,\hat{e}_{\bar{\beta}} = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(\underrightarrow{v})\,\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\beta}}(-\underrightarrow{v})\,\hat{e}_{\mu} = \delta^{\mu}_{\alpha}\,\hat{e}_{\mu}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Lambda^{\beta}{}_{\alpha}(\underset{\rightarrow}{v})}_{\text{Matriz}}\ \underbrace{\Lambda^{\mu}{}_{\beta}(-\underset{\rightarrow}{v})}_{\text{Matriz inversa}} = \delta^{\mu}{}_{\alpha}$$

↙ Identidad

Análogamente se puede encontrar que

$$\boxed{\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(\underset{\rightarrow}{v})\ \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}}(-\underset{\rightarrow}{v}) = \delta^{\bar{\beta}}{}_{\bar{\gamma}}}$$

$$\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\vec{A} \xrightarrow[O]{} (5,0,0,2)$$

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{0} A^{0} + \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{3} A^{3}$$

$$A^{\bar{0}} = \Lambda^{\bar{0}}{}_{0} A^{0} + \overset{0}{\cancel{\Lambda^{\bar{0}}{}_{3}}} A^{3} = \gamma 5$$

$$A^{\bar{1}} = -v\gamma 5$$
$$A^{\bar{2}} = 0$$
$$A^{\bar{3}} = 2$$

NOTA

La notacion matricial depende de si consideramos al vector como vector fila o como vector columna.

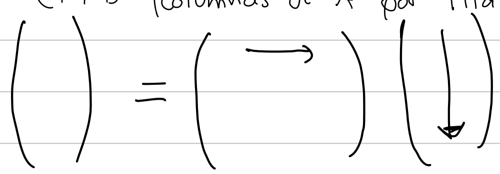
$$A^{\beta} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} A^{0} \\ A^{1} \\ A^{2} \\ A^{3} \end{pmatrix}$$

↙ filas (on β)

$$A^{\bar{\beta}} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha} A^{\alpha}$$

↙ filas (on β) ↘ columnas (on α)

CAFB (columnas de A por Filas de B)



$$\hat{e}_\alpha = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_\alpha \, \hat{e}_{\bar{\beta}}$$

$$\hat{e}_0 = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_0 \, \hat{e}_{\bar{\beta}}$$

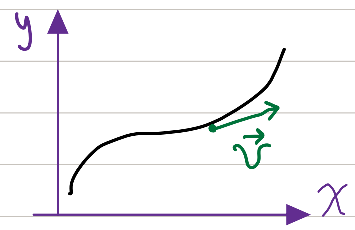
$$\hat{e}_0 = \Lambda^{\bar{0}}{}_0 \, \hat{e}_{\bar{0}} + \Lambda^{\bar{1}}{}_0 \, \hat{e}_{\bar{1}} = \gamma \hat{e}_{\bar{0}} - v\gamma \hat{e}_{\bar{1}}$$

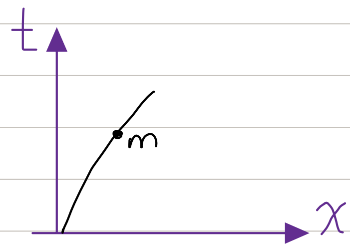
$$\hat{e}_1 = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_1 \, \hat{e}_{\bar{\beta}} = \Lambda^{\bar{0}}{}_1 \, \hat{e}_{\bar{0}} + \Lambda^{\bar{1}}{}_1 \, \hat{e}_{\bar{1}} = -v\gamma \hat{e}_{\bar{0}} + \gamma \hat{e}_{\bar{1}}$$

$$\hat{e}_2 = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_2 \, \hat{e}_{\bar{\beta}} = \hat{e}_{\bar{2}}$$

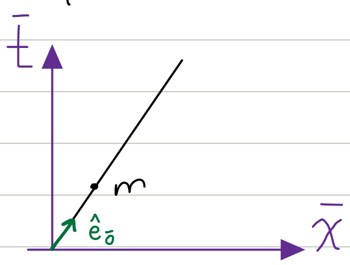
$$\hat{e}_3 = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_3 \, \hat{e}_3 = \hat{e}_{\bar{3}}$$

Cuadrivelocidad (4-velocidad)





* La partícula se mueve uniformemente ($v = cte.$)
  Seleccionamos el SRI $\bar{O}$ tal que su origen coincida con la partícula



La cuadrivelocidad de m es $\hat{e}_{\bar{0}}$ en el sistema de referencia $\bar{O}$ en el cual la partícula está en reposo

* Partícula en movimiento arbitrario

Puedo encontrar un SRI en el cual la particula esta en reposo durante un instante.

Para una particula en mov. arbitrario, definimos su cuadriveclocidad como el vector base $\hat{e}_{\bar{0}}$ en el SRLI.

- Mov. Uniforme

Sea $\{\hat{e}_{\bar{\alpha}}\}$ la base de $\bar{O}$

$$\hat{e}_{\bar{0}} \xrightarrow[\bar{O}]{} (1,0,0,0)$$

$$\hat{e}_{\bar{0}} = (\hat{e}_{\bar{0}})^{\bar{\beta}} \hat{e}_{\bar{\beta}}$$

Cuales son las componentes de $\hat{e}_{\bar{0}}$ en O?

La cuadrivelocidad la denotamos con $\vec{U}$

En $\bar{O}$: $\vec{U} = \hat{e}_{\bar{0}}$

$$\vec{U} \xrightarrow[\bar{O}]{} (1,0,0,0)$$

¿ U^{α} ? $\quad U^{\bar{0}} = 1 \quad U^{\bar{i}} = 0$

Luego $U^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}} U^{\bar{\beta}}$

$$= \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}} (-\underset{\rightarrow}{v})^{\bar{\beta}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{0}} (-\underset{\rightarrow}{v}) U^{\bar{0}}$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^0 = \gamma$$
$$U^1 = v\gamma$$
$$U^2 = 0$$
$$U^3 = 0$$

$$\vec{U} \xrightarrow[O]{} (\gamma, \gamma v, 0, 0)$$

Cuando $|v| <<< c = 1$

$$\gamma = (1 - v^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{v^2}{2} + \cdots \approx 1$$

$$\vec{U}_0 \rightarrow (1, v, 0, 0) \quad \text{para} \quad |v| <<< c$$

Cuadrimomento

$\vec{p} = m\vec{U}$ Para una partícula en mov. uniforme

m es la masa medida con el SR de la partícula (donde la partícula está en reposo)

$\vec{U} = \hat{e}_{\bar{0}}$ en el SRLI

$$\vec{U} \underset{\bar{0}}{\rightarrow} (1, 0, 0, 0)$$

$$\vec{p} \underset{\bar{0}}{\longrightarrow} (m, 0, 0, 0)$$

$$\vec{p} \underset{0}{\longrightarrow} (m\gamma, m\gamma v, 0, 0)$$

Para $|v| << 1$

$$\vec{p} = (\underbrace{m}_{mc^2} + \frac{mv^2}{2}, mv + \ldots, 0, 0)$$

$$\vec{p} = (E, p^x, 0, 0)$$

Nota: Todas las m son la masa medida desde el SR donde la partícula está en reposo

$$\vec{p} \longrightarrow (p^0, p^1, p^2, p^3)$$

$$\longrightarrow (E, p^1, p^2, p^3)$$

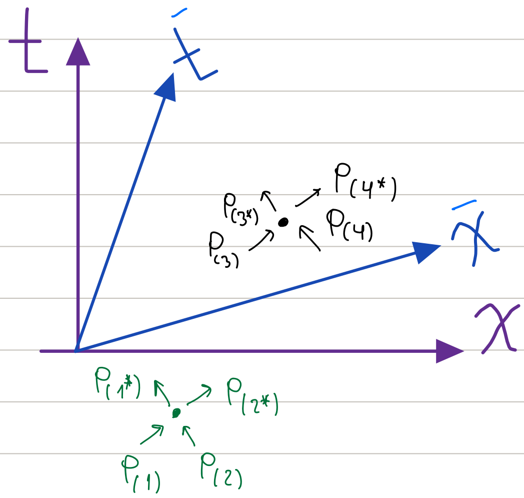
No.

Date.

El momento en relatividad General

En mecánica newtoniana el momento se conserva.

En RE un hecho experimental es que la suma de los cuadrimomwnfos de un sistema aislado de partículas es conservado.



$$P_T = P_I + P_{II}$$

Producto Escalar

Sea $\vec{A}$ un cuadrivector su magnitud es el número

$$\vec{A}^2 \underset{0}{=} -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2$$

$$\vec{\bar{A}}^2 \underset{\bar{0}}{=} -(A^{\bar{0}})^2 + (A^{\bar{1}})^2 + (A^{\bar{2}})^2 + (A^{\bar{3}})^2$$

$$\Delta \bar{s}^2 = \Delta s^2$$

Del hecho que Δs^2 es invariante, $\vec{A}^2$ es un invariante

$$\vec{\bar{A}}^2 = \vec{A}^2$$

Para $\vec{B}$, su magnitud es

$$\vec{B}^2 \underset{0}{=} -(B^0)^2 + (B^1)^2 + (B^2)^2 + (B^3)^2$$

Sean $\vec{A}, \vec{B}$ vectores su producto escala es

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} \qquad \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C}$$

El producto escalar en el esp. de Minkowsky **no** es definido positivo

$$\vec{A} \xrightarrow[O]{} (2,0,0,0)$$

$$\vec{B} \longrightarrow (1,2,3,4)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = -2$$

$$\vec{A}^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = -A^0A^0 + A^1A^1 + A^2A^2 + A^3A^3$$

Puesto que $\vec{A}^2$ es invariante, tiene sentido decir que

$\vec{A}^2 > 0 \qquad \vec{A}$ es espacioloide

$\vec{A}^2 = 0 \qquad \vec{A}$ es nulo luxoide

$\vec{A}^2 < 0 \qquad \vec{A}$ es temporaloide

Dem. $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es un invariante

$$\underbrace{(\vec{A}+\vec{B})^2}_{\text{inv.}} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$= \underbrace{\vec{A}\cdot\vec{A}}_{\text{inv.}} + \underbrace{\vec{B}\cdot\vec{B}}_{\text{inv.}} + 2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} \text{ es invariante}$$

$\blacksquare$

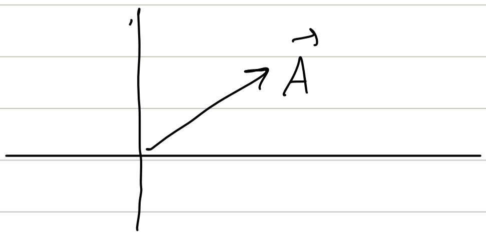
Decimos que dos vectores en el ET $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son ortogonales si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

Un vector nulo es ortogonal a sí mismo

$$\vec{A} = (a, a, 0, 0)$$

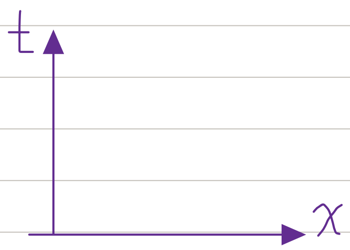
$$\vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = -(a)^2 + (a)^2 = 0$$

Aquí los vectores ortogonales no necesariamente forman ángulos de $90°$.



$$\vec{A} = (a, b, c, d)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2$$



$$\vec{A} = (A^0, A^1, 0, 0)$$

$$\vec{B} = (B^0, B^1, 0, 0)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -A^0 B^0 + A^1 B^1$$

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son ortogonales

$$A^0 B^0 = A^1 B^1$$

$$\frac{A^0}{A^1} = \frac{B^1}{B^0}$$

Ejercicio

Los vectores hacen ángulos iguales con el cono de luz (checar las tangentes)

Ortogonalidad

$\hat{e}_0 \cdot \hat{e}_0 = -1$

$\hat{e}_0 \rightarrow (1,0,0,0)$

$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1 = \hat{e}_2 \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \hat{e}_3$

$\hat{e}_0 \cdot \hat{e}_i = 0 \qquad \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0$ para $i \neq j$

$\hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \qquad \hat{e}_{\bar{\alpha}} \cdot \hat{e}_{\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$

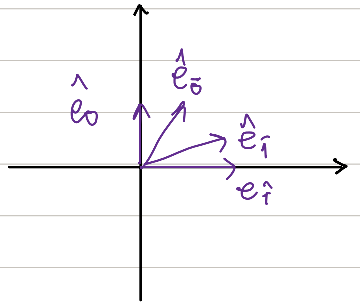
$$(\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = (\eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}})$$

Solo para minkowsky y en coordenadas cartesianas es invariante

$\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$

Cero en todos los otros casos

Una imagen de $\mathbb{R}^2$



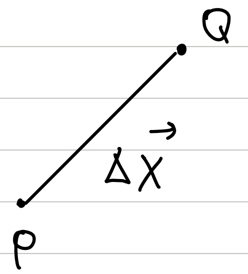
SRLI = Sistema de referencia Localmente Inercial

$\boxed{\vec{U} \cdot \vec{U} = -1}$

Cuadrivelocidad

$\vec{U} \underset{SRLI}{=} \hat{e}_{\bar{0}} \qquad \vec{U} \cdot \vec{U} \underset{SRLI}{=} \hat{e}_{\bar{0}} \cdot \hat{e}_{\bar{0}} = -1$

La cuadrivelocidad



$$\Delta \vec{x} = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$$

$$\Delta s^2_{P \to Q} = ¿?$$

$$\Delta s^2 = \Delta\vec{x} \cdot \Delta\vec{x} = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^3$$

$$\Delta \tau^2 = -\Delta s^2 \qquad -\Delta\tau^2 = +\Delta\vec{x} \cdot \Delta\vec{x} \qquad -1 = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\tau} \cdot \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\tau}$$

Partícula en el SRLI

$$\Delta\vec{x} \underset{SRLI}{=} (\Delta t, 0, 0, 0)$$

$$\underset{SRLI}{=} (\Delta\tau, 0, 0, 0)$$

$$\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\tau} \underset{SRLI}{=} (1,0,0,0) = \hat{e}_0 = \vec{U}$$

$$\vec{U} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\tau} \Rightarrow \vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

La derivada se hace mediante el tiempo propio, el tiempo medido en los dos eventos por un observador que pasa por los dos eventos

$$\vec{x} = (t, x, y, z)$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$$

26 de Septiembre 2024

$\vec{A}$ $\qquad\qquad$ $\vec{A} \underset{O}{\longrightarrow} \underbrace{(A^0, A^1, A^2, A^3)}_{\text{componentes}}$

Para los tensores tipo $\binom{0}{N}$ definimos sus componentes como la evaluación del tensor en los vectores de la base $\{\hat{e}_\alpha\}$

Caso i) Tensor métrico. Tensor $\binom{0}{2}$

caso minkowski

$$\overleftrightarrow{g}(\vec{A},\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} \qquad \overleftrightarrow{g}(\hat{e}_\alpha,\hat{e}_\beta) = \hat{e}_\alpha\cdot\hat{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}\,(= g_{\alpha\beta})$$

Por lo cual, $\eta_{\alpha\beta}$ son las compones del tensor métrico $\overleftrightarrow{g}$

ii) Sea $\overleftrightarrow{T}$ un tensor $\binom{0}{3}$ las componentes de $\overleftrightarrow{T}$ son

$$\overleftrightarrow{T}(\hat{e}_\alpha,\hat{e}_\beta,\hat{e}_\gamma) = T_{\alpha\beta\gamma} \neq T_{\beta\alpha\gamma}$$

Tensor $\binom{0}{N}$, $\overleftrightarrow{S}$

$$\overleftrightarrow{S}(\underbrace{\hat{e}_\alpha,\hat{e}_\beta,\ldots\hat{e}_0}_{N}) = T_{\underbrace{\alpha\beta\ldots 0}_{N\ \text{índices}}}$$

iii) Tensores $\binom{0}{1}$

Es un objeto tal que

* Tiene un argumento
* Es lineal en ese argumento
* Evaluado en un vector produce un número.

Tensores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \boxed{\text{Covectores}} \quad \text{(1-formas)} \\ \boxed{\text{Vectores duales}} \\ \text{funcionales lineales } \times \\ \text{Vectores covariantes } \times \end{cases}$

Componentes de un covector

Vamos a denotar a los covectores como

$\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s}, \tilde{t} \qquad (\vec{A})$

Componentes de $\tilde{p}$ ($\tilde{p}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensor)

$p(\hat{e}_\alpha) = p_\alpha \qquad \vec{A} \rightarrow \{A^\alpha\}$

Sea $\vec{A}$ vector, $\vec{p}$ un covector

$$\vec{A} = A^\alpha \hat{e}_\alpha$$

$$\tilde{p}(\vec{A}) = \tilde{p}(A^\alpha \hat{e}_\alpha) = A^\alpha \tilde{p}(\hat{e}_\alpha) = A^\alpha p_\alpha = p_\alpha A^\alpha$$

$$\vec{A} \underset{O}{\longrightarrow} \underbrace{\{A^\alpha\}}_{\text{componentes}}$$

Todo covector es un tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y se aloja en el EV dual

$\times$ Los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ no son matrices viven en su propio Espacio vectorial de tensores $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\tilde{p}(\vec{V}) \in \mathbb{R}$$

Al covector p, el observador O le asocia los sig. componentes

$$O: \; p_\alpha = \tilde{p}(\hat{e}_\alpha)$$

Análogamente el observador $\bar{O}$ le asocia las componentes

$$\bar{O}: p_{\bar{\alpha}} = \tilde{p}(\hat{e}_{\bar{\alpha}})$$

De manera similar como ocurre para las componentes vectoriales

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta}$$

$$p_{\bar{\alpha}} = \tilde{p}(\hat{e}_{\bar{\alpha}}) = \tilde{p}(\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}} \hat{e}_{\beta})$$

$$= \Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}} \tilde{p}(\hat{e}_{\beta})$$

$$p_{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}} p_{\beta} \longleftrightarrow \hat{e}_{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}} \hat{e}_{\beta}$$

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta}$$

Para construir un invariante no debe haber índices libres