INT. A FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

$\mathbb{R}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{C}$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \qquad\qquad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

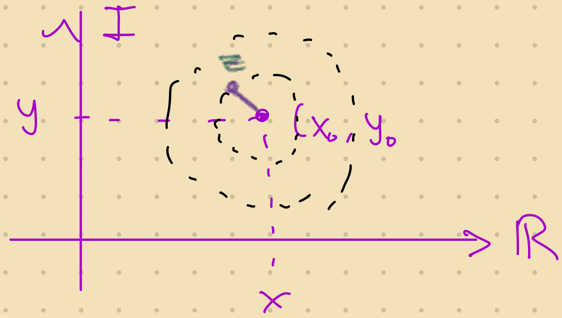
DERIVADA EN LOS COMPLEJ

f Es holeomurfa si y solo si

$f: G \to \mathbb{C}$ Sea G un conjunto $G \subset \mathbb{C}$

$f \in \mathrm{Hol}(G)$

$\exists\, f'(z) \ \forall z \in G$ existen todas sus derivadas



Dominio

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \approx f'(z_0)$$ es aproximadamente

Abusando de la notación

$$f(z) - f(z_0) = \left(f'(z_0) \right) (z - z_0)$$

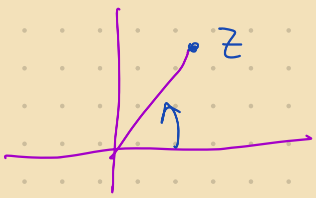
luego

$$|f(z) - f(z_0)| = |f'(z_0)|\,|z - z_0|$$

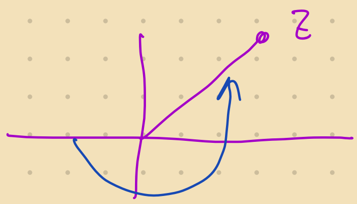
$z = a + ib$ [illegible] $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\|(a, b)\|$

$z = a + ib$ su norma $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \|(a,b)\|$

$|f'(z_0)| < 1$ contracción



$0 \leq \operatorname{Arg} z \; \pi$



$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$

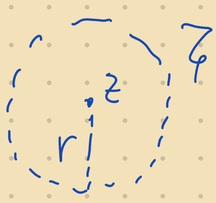
La minuscula nos advierte que posiblemente

$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \arg(zw)$

Una función es Holeomorfa si y solo si se puede desarrollar en series de potencias

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)$$

z_0 cualquier punto en el interior de la circunferencia
ξ cualquier punto en la circunferencia



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi)\, d\xi}{(z - \xi)}$$

$$|z - \xi| = r$$

Problema tipo dirichlet

Operador de Cauchy Rieman

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{2}(dx - i dy)$$

$$\frac{d}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}(dx + i dy)$$

$$Hol(G) = \ker\left(\frac{d}{d\bar{z}}\right)$$

Derivada fraccionaria Riemman-Louville

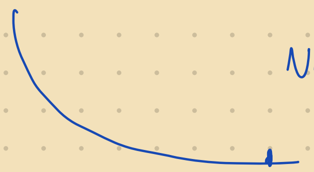
$$f^{\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\, dt$$

Derivada de orden fraccionario

En los reales

$0 < \alpha < 1$

Curva tautocrana encontrado por Leibniz mediante calculo fracciona



No importa el objeto todos llegan al mismo tiemo

Derivada Fractal

$$D^{\alpha} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x^{\alpha} - c^{\alpha}}$$

Sistemas dinámicos

Derivada paquete (Ramanujan)

$$f^{q}(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx}$$

$$\lim_{q \to 1} f^{q}(x) = f'(x)$$ derivada usual

esta contenido
en A

$x \in \mathring{A}$ $\quad B(x,r) \subset A$

$\mathbb{C} \setminus B(x,r) \supset \mathbb{C} \setminus A$

$\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$

Abiertos y cerrados en A $\longrightarrow \tau_A$

① A es un conjunto disconexo pues se separa

$A \subset \mathbb{C}$ disconexo $\exists B, C \subset \mathbb{C}$ B y C abiertos no vacios

$\iff$ si y solo si se cumple que:

- $(B \cap A) \cap (C \cap A) = \emptyset$
- $(B \cap A) \cup (C \cap A) = A$
- $B \cap A \neq \emptyset \quad C \cap A \neq \emptyset$

② Un conjunto es conexo si y solo si no es disconexo

Si los únicos subconjuntos de A que son abiertos y cerrados son A y $\emptyset$

③ Muestre que $A \subset \mathbb{C}$ es conexo si y solo si los únicos abiertos y cerrados en A son A y $\emptyset$

Hipotesis A es conexo

Sea $\underline{M \subset A}$ un conjunto abierto y cerrado además $M \neq \emptyset$ entonces

$\emptyset \subsetneq M \subset A$

Como M y $A \setminus M$ abiertos en A, existen

$B, C \subset \mathbb{C}$ abiertos tales que $M = B \cap A$

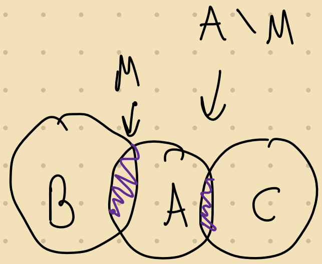
$A \setminus M = C \cap A$ vea que

Si $A \setminus M = C \cap A \neq \emptyset$ entonces (B, C) son disconexión de A, es decir A es disconexo. Lo cual es falso

Por lo tanto $A \setminus M = \emptyset$ y $A = M$

Por lo tanto $A \cap M = \emptyset$ y $A = A$

Suficiencia



Suponga que A es disconexo luego sean (B, C) la disconex. de A es decir $B, C \subset \mathbb{C}$ son abiertos tq

$$i)\ (A \cap B) \cap (A \cap C) = \emptyset$$

$$ii)\ A \cap B \neq \emptyset \quad A \cap C \neq \emptyset$$

Pero : $iii)\ (A \cap B) \cup (A \cap C) = A$

Pero de la propiedad ii) note que $A \cap B$ y $A \cap C$ son abiertos y cerrados en A diferentes de A y el vacío lo cual es falso

$(\mathbb{R}, \leq)$ Conjunto Ordenado

$(\mathbb{R}, d)$ Metrico completo

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ campo

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ campo

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{H}$ cuaterniones

$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\text{Hamilton}} \mathbb{H}$ semicampo

$\vdots$

$\mathbb{R}^n \longrightarrow Cl_{0,n}$ Algebra de Clifford

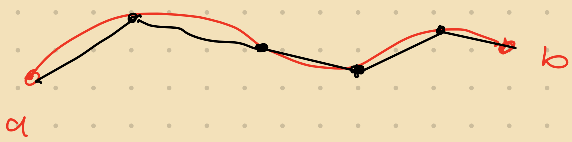
hay divisores de cero

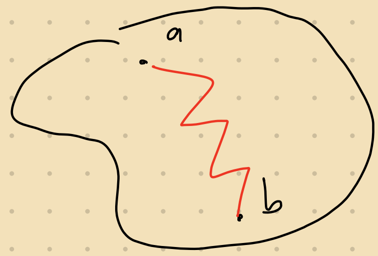
$\exists\ a \neq 0 \neq b \ \ \text{tq} \ \ ab = 0$

De $\mathbb{R}^5$ en adelante no se puede hablar de inverso multiplicativo

... no se puede hablar de inverso multiplic...

Todo poligonalmente conexo es arco conexo pero no necesariamente se cumple la viceversa





a) Demostración Si $A \subset \mathbb{C}$ es poligonalmente conexo entonces A es conexo

Materialismo dialéctico

Nada es personal todo es circunstancial	Pespectiva	¿En qué lugar quiero estar?

b) Si $A \subset \mathbb{C}$ es abierto y conexo entonces A es poligonalmente conexo

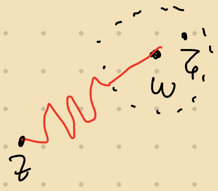
Sea $z \in A$

$D = \{ w \in A \mid$ existe una curva poligonal en A que une a z con $w \}$

$z \in D \neq \phi$

Sea $w \in D$ como $w \in A$ (abierto)

$\mathbb{B}(w, r) \subset A$



Si w se une en z cualquier elemento en $B(w,r)$

$B(w,r) \subset D$ (Abierto)

Probemos que D es cerrado

Sea $w_0 \in A \setminus D$ $\quad B(w_0, r) \subset A$

¿$B(w_0, r) \subset A\setminus D$?

Su complemento es abierto

7d) Cada $z \in A \subset \mathbb{C}$ está en una componente de A
Los componentes deben ser ajenas, si no lo son, son iguales.

7f) Si $A \subset \mathbb{C}$ es conexo y $A \subset B \subset \bar{A}$ entonces B es conexo
e) Componentes distintas de $A \subset \mathbb{C}$ son ajenas

B disconexo $\rightarrow (C, D)$ disconexion de A
los elementos de B esta muy pegado a A

C es una componente, un conexo maximal

$C \subset A \rightarrow C \subset \bar{C} \subset A$

6

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$4 \quad 1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1} = 1 - \alpha^n$$

$$\overline{1-\alpha}$$

$$(1+z+\cdots+z^{n-1})(1-z)=1-z^n$$

$$z^n=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right)^n=1 \quad \text{(Formula de moivre)}$$

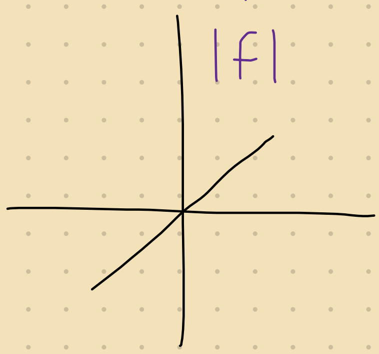
Tenemos

$$(1+z+\cdots+z^{n-1})(1-z)=0$$

Como $z\neq 1$ entonces

$$1+z+\cdots+z^{n-1}=0$$

$$z^n=(x+iy)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(iy)^k$$



Convergencia absoluta

$\rightarrow$ Radio de convergenci

Exponencial

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

1.2 Proyección Estereográfica

$z \mapsto [z]$ Todas las sucesiones que converge

$\infty \mapsto [\infty] = \{ (z_n) \mid \lim |z_n| = \infty \}$

(with "a z" written above (z_n))

Se define el plano extendido como $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{$

Dado $a \in \mathbb{C}$ $\quad a + \infty = \infty$

Si $a \neq 0$ entonces $(a)\infty = \infty(a) = \infty$

Si $a \neq \infty$ entonces

Dem (contradicción)

Existe una cubierta $\{B_i\}_{i\in I}$ de abierto de K tal K no esta contenido en una sub cubierta finita.

Se crea una sucesión de rectángulos

$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \ldots$ tales diam $R_n \to 0$ $(n \to \infty$
y $R_n \cap K$ no tiene una subc. finita de $\{B_i\}_{i\in I}$

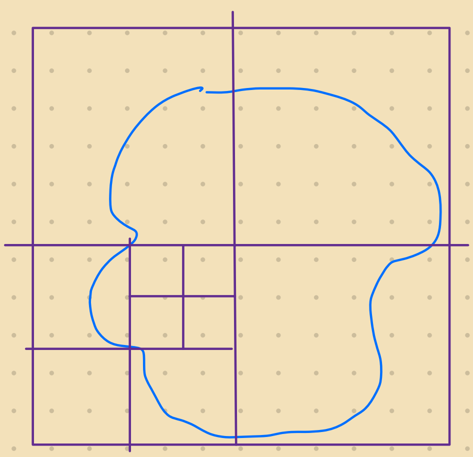
Sea $z_n \in R_n \cap K$ como $R_n \supset R_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
y diam $R_n \to 0$ $(n\to\infty)$ se tiene que (z_n) es de Cauchy como $\mathbb{C}$ completo existe $z^* \in \mathbb{C}$ tales que $\lim z_n = z^*$ Además, $\{z^*\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$ y z^* es punto de acumulación de K.
Así que $z^* \in K \subset \bigcup_{i=1} B_i$ y existe $i^* \in I$

$z^* \in B_{i^*}$ Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$z^* \in R_N \subset B_{i^*}$$

\# contradicción

Bolzano-Wiestrasss



Sea $F_1 \supset \ldots \supset F_n$ una sucesión decreciente de rectangulos cerrados tales que F_n contiene una cantidad infinita de elemen' de K.
diam $F_n \to 0$ $(n \to \infty)$ Por T. Cantor $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{z\}$ Sea
$z_n \in (F_n \cap K) \setminus \{z\}$
Por lo tanto $\lim z_n = z$

$z_n \to z \quad (n \to \infty)$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} \quad |z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\big| |z_n| - |z| \big| \leq |z_n - z| < 1 \quad \forall n \in N_1$

Acotada $\Rightarrow |z_n| \leq M \quad \forall\, n$

$|z_n| \leq \max\{ |z_1|, \ldots, |z_{n-1}|, 1 + |z| \}$

$|a+b| \leq |a| + |b|$ continuidad de la suma

$|ab| = |a||b|$ continuidad del producto

$|(z_n \pm w_n) - (z \pm w)| \leq |z_n - z| + |w_n - w|$

$$|z_n w_n - zw| \leq |z_n| |w_n - w| + |z_n - z||w| \leq M |w_n - w| + |z_n - z| |w|$$

$|z| = |\bar{z}| \Rightarrow \lim \bar{z}_n = \bar{z}$

$\frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}$ Como $w \neq 0$ sea $\varepsilon = \frac{|w|}{2}$

$|w_n - w| < \frac{|w|}{2} \quad \forall n \geq N$

$\frac{i}{0} = \infty \qquad (2+i) + \infty = \infty$

$[z] = \{ (z_n) \mid z_n \to z \, (n \to \infty) \}$

$\lim z_n = 1$ $\lim w_n = 0$

$\lim \frac{z_n}{w_n} = \infty$ Sea $M>0$

$M < \left| \frac{z_n}{w_n} \right| \quad \forall n \geq N$

Como $w_n \to w$

y $\varepsilon = \frac{|w|}{2}$

$|n| - |w_n| < \frac{|w|}{2} \Rightarrow \frac{|w|}{2} < |w_n| \quad \forall \geq N$

$|w_n - 0| < \frac{1}{2M} \quad \forall n \geq N_2$

$2M < \frac{1}{|w_n|}$

$P \Rightarrow Q \iff P \wedge Q^{\neg}$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0, z \in A \quad |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)-L| <$

$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0, \ |z-z_0| < \delta \wedge |f(z)-L| \geq \varepsilon_0$

$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad n \in \mathbb{N} \quad |z_n - z_0| < \frac{1}{n} \wedge |$

4 / Octubre / 2024

① $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n$

$f'(z) = a_1 + a_2 z + \dots a_n n z^{n-1}$

② $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ $g(z) = z^3$

Regla de la cadena $f \circ g$

③ $f(z) = |z|^2$ es dif solo en cero

④ $f(z)$ y $\overline{f(\bar{z})}$ son diferenciables simultaneamente.

Sea $f(z)$ diferenciable y digamos $z = x + iy$ tal que $\bar{z} = x - iy$ $f(\bar{z}) = f(x - iy)$ y digamos $f(z) = U(x+iy) + i V(x+iy)$ entonces

$\overline{f(\bar{z})} = U(x-iy) - i V(x-iy)$.

Ahora bien existe $f'(z)$ tal que

$$f'(z) = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{x}\right]_{x+iy} \quad \text{existe}$$

y $$\overline{f'(\bar{z})} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x-iy} \quad \text{¿existe?}$$

Luego para los terminos que dependen solo de y la derivada es cero

Respecto a x

$f'(z) = U'(x) + i V'(x)$ Existe

$\overline{f'(\bar{z})} = U'(x) - i V'(x)$

$\Rightarrow$ $u'(x)$ y $v'(x)$ existen

entonces $u'(x) - iv'(x)$ existe

Luego

$\overline{f(\bar{z})}$ es diferenciable

Respecto a y

$$f'(z) = u'(iy) + iv'(iy) \quad \text{existe}$$

$$\overline{f'(\bar{z})} = u'(-iy) - iv'(-iy) = -u'(iy) + iv'(iy)$$

$\Rightarrow$ $u'(iy)$ y $v'(iy)$ existen

$\overline{f(\bar{z})}$ es diferenciable $\blacksquare$

Algoritmo Degamal

p numero primo

① Escoger un no. primo

② Elegir un generador en $\{1, \dots, 17\} = \mathbb{Z}_{17}^{*} = \mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}$

$g = 3$ generador de $\{1, \dots, 17\}$

Llave $a \in \{1, \dots, p-1\}$

Clave pública

$(g, p, g^a \bmod p)$

ej. $(3, 17, 3^4 \bmod 7)$

Mensaje $m \in \{1, \dots, p-1\}$

$b \in \{2, \ldots, p-1\}$ texto (variable)

Mensaje cifrado

$(g^b, [(g^a \bmod p)^b m] \bmod p)$

$(10, (2197) 2 \bmod 17)$

$(10, 8)$

Texto decifrado (Teorema de Fermat) $g^{-a} = g^{p-1-a}$

$m = [(g^b \bmod p)^{-a} (g^a \bmod p)^b m] \bmod p$

$m = (10^{-4}) 8 \bmod 17 = (10)^{12} (8) \bmod 17 = 2$

Proposición

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ y $|z-z_0|<R$ (Radio de convergencia)

Entonces

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, n \, (z-z_0)^{n-1} \quad y \quad |z-z_0|<R \text{ (Radio de convergencia)}$$

Demostración:

...

Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \; ? \; \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z-z_0)^n$

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2$$

$$a_1 + a_2(z-z_0) + a_3(z-z_0)^3$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(z-z_0)^n\right)(z-z_0)$$

Las series tienen el mismo radio de convergencia por dicha igualdad

Siempre que las series converjan independientemente de términos extra que sean finitos si existe una igualdad entre ambas implica que ambas tienen el mismo radio de convergencia

$$\Rightarrow R = R'$$

Como $\sum^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}$ converge y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}\right| < \varepsilon$$

Sin embargo los residuos se van haciendo cada vez más pequeños por lo que después son despreciables, así entonces podemos obtener una suma finita de elementos, digamos N terminos.

$$\leq \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{(w-z_0)^n - (z-z_0)^n}{w-z} - \sum_{n=1}^{N} a_n n(z-z_0)^n\right| <<< 1$$

derivada

Residuo $\quad \lll 1$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n(w-z_0)^n - a_n(z-z_0)^n}{w-z}\right| + \cancel{\left|\sum_{n=N+1} a_n n (z-z_0)^{n-1}\right|}$$

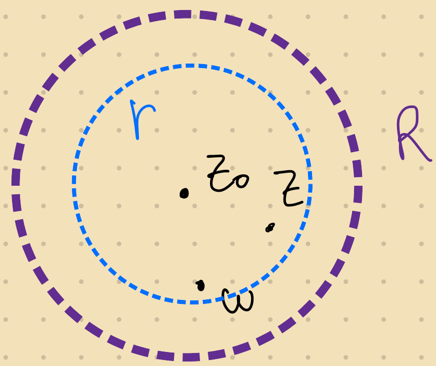
$$\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1}\right| = \left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}{w-z} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}\right|$$

Por último note

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\left[\frac{(w-z_0)^n-(z-z_0)^n}{w-z}\right]\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{|w-z_0|^n-(z-z_0)^n}{|w-z|}$$

$$\Rightarrow (w-z_0)^n-(z-z_0)^n = (w-z)\left[(w-z_0)^{n-1}+(w-z_0)^{n-2}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+(w-z_0)(z-z_0)^{n-2}+(z-z_0)^{n-1}\right]$$

$|z-z_0|, |w-z_0| < \gamma < R$



$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n(w-z_0)^n - a_n(z-z_0)^n}{w-z}\right|$$

$$\leq \sum |a_n| \left|(w-z_0)^{n-1}+(w-z_0)^{n-2}(z-z_0)+\dots + (z-z_0)^{n-1}\right|$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|a_n n \gamma^{n-1}\right|$$

(por desigualdad del triángulo)

No todo radio me da la convergencia absoluta

$|z - z_0| < R \quad z = z_0 + \gamma$

es arbitrario

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n n (z - z_0)^{n-1}| < \varepsilon$$

Como $\sum |a_n n (z - z_0)^{n-1}|$ converge y $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ tq.

$$\varepsilon > \left| \sum_{n=N+1} |a_n n (z - z_0)^{n-1}| \right|$$

$\vdots$

$\blacksquare$ QED

$$\Rightarrow \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1} \right|$$

$$\leq \left| \sum^{N} a_n \frac{(w - z_0)^n - (z - z_0)^n}{w - z} \right.$$

$$= \left. \sum^{N} a_n n (z - z_0)^n \right| + 2\varepsilon$$