

# AGUJEROS NEGROS

INTERIOR Y EXTERIOR

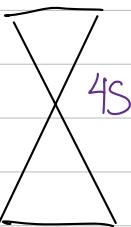
# Agujeros negros interior y exterior

La información que tiene es la misma

Estructura Gaussiana

$$g_{\mu\nu}(x) x^\mu x^\nu = 0$$

Al añadir la relatividad general añadimos las extravagancias causales y por tanto un agujero negro

  
Relatividad  
Especial



$$g_{\mu\nu}(x) =$$



Conos  
deformados

Relatividad  
General

Soluciones de Schwarzschild (1916)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$d\Omega^2 = dt^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \quad -\infty < t < \infty \quad 0 < r < \infty$$
$$0 < \theta < \pi \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

Tiene una métrica esférica, asumié una simetría esférica.

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M}{r}\right] \left[ dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \right] +$$
$$= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt^2 - dr^2) +$$

$$r^* = r - 2M \ln \left| \frac{r-2M}{2M} \right|$$

$2M \leftarrow r \rightarrow \infty$   
 $-\infty \leftarrow r^* \rightarrow \infty$   
Coordenada  
tortuga

## Tiempo Adelantado coordenadas en fronte

\*  $V = t + r^*$  coordenadas de Eddington - Finkelstein

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv (dv - 2dr^*) + r^2 d\Omega^2 \quad -\infty < V < \infty$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dr^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$$

Tiene problemas en  $r=2M$  y  $r=0$

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r^2 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad g = -r^2 \sin^2 \theta$$

No hay problema en  $2M$  por lo que sólo es una singularidad coordinada

$$V = t^* + r$$

$$ds^2 = [dt^* + dr] \left[ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^* + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr \right] +$$

$$g_{\mu,\nu} \frac{dx^\mu}{dv} \frac{dx^\nu}{dv} = 0 \quad \text{Geodésicas radiales} \quad \theta = \text{const} \\ \mu = \text{const}$$

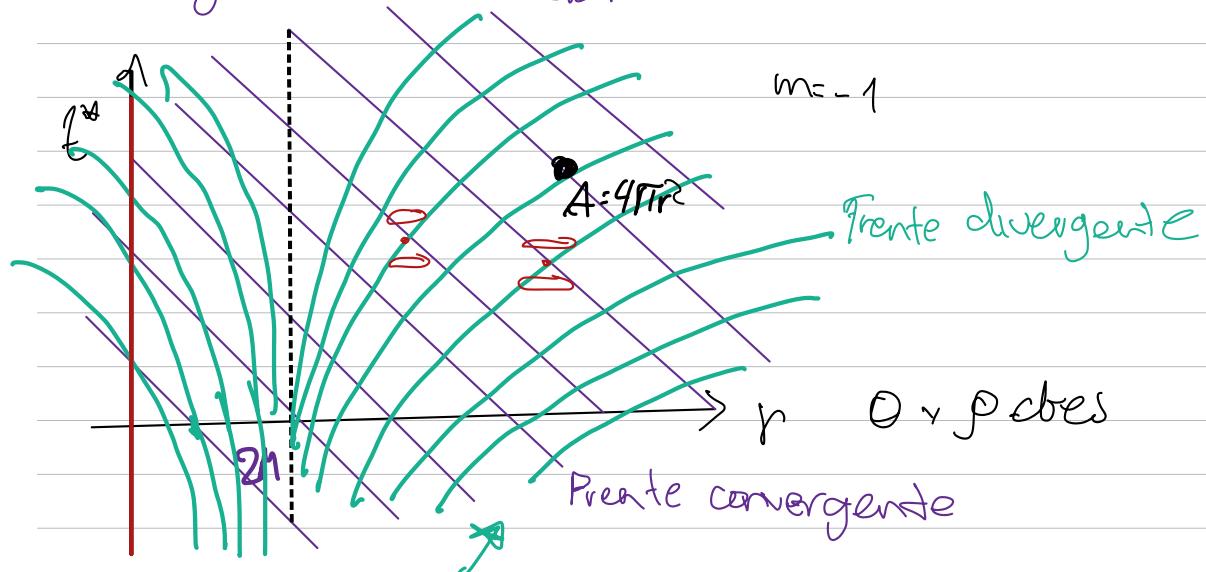
$$\frac{dt^*}{dr} = -1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Geodésicas} \\ \text{radiales} \\ \text{Nulas} \\ (\text{Gros de luz}) \end{array} \right\}$$

$$\frac{dt^*}{dr} = \frac{r+2M}{r-2M}$$

Estudiar cuáles son los vectores nulos

$$g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 0$$

## Diagrama de Finkelstein



Si me acerco a  $2M$  por la derecha  $\rightarrow \infty$

Cada punto en el plano representa una esfera

No se puede escapar de  $r=2M$  una vez dentro del cono  
A  $r=2M$  se le llama horizonte de eventos

La solución de Schwarzschild es un agujero negro

A.N. La gravedad es tan fuerte que no puede escapar a infinito

En  $r=0$  existe una singularidad que no se toma en cuenta  
Es decir, no forma parte del espacio-tiempo. Por lo que cualquier curva que toque la región se interrumpe

$$V = t^* - r = \text{constante en } r=0$$

Si se contrae consigo mismo  $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \propto \frac{1}{r^2}$

la curvatura depende de la 2da derivada de la métrica  
Las ecuaciones de Einstein son invariantes ante inversiones temporales

Pidir que si definimos una coordenada saliente  
 $U = t^* - r^*$  definir la métrica y  $U = t^* - r$

Pintar la estructura causal de la invención temporal  
(repetir desde \*)

Lo que va a provocar un Agujero Blanco

$$ds' = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt dr + r^2 d\Omega^2$$

### Coordenadas de Kruskal

Reescribiendo el logaritmo

$$\frac{r^* - r}{2M} = \ln \left| \frac{r}{2M} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right| \Rightarrow 1 - \frac{2M}{r} = \frac{2M}{r} e^{-\frac{r}{2M}} e^{\frac{V-U}{2M}}$$

$r^{**} = \frac{V-U}{2M}$  restando en la expresión anterior

$$ds' = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} d\left(e^{\frac{V}{2M}}\right) d\left(-e^{\frac{U}{2M}}\right) + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV + r^2 d\Omega^2$$

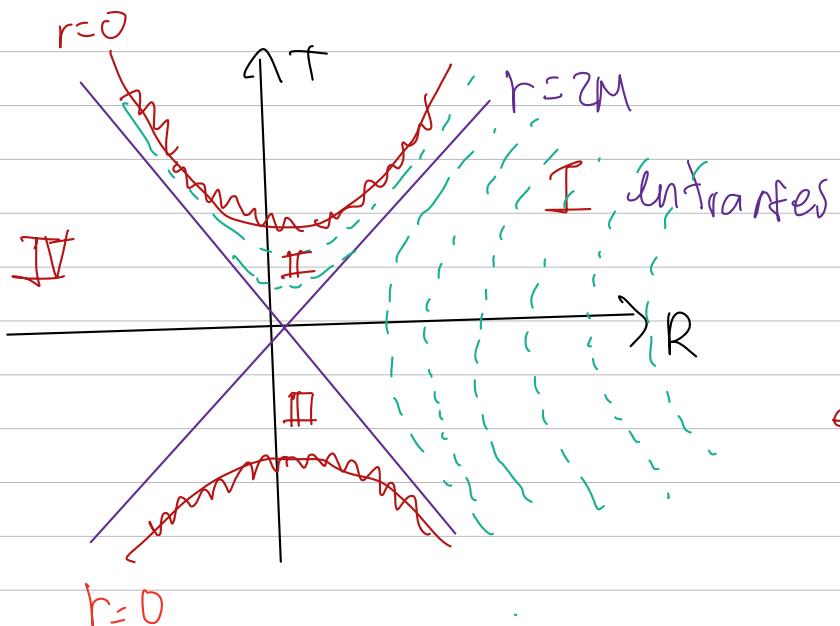
$$\text{Donde } UV = -e^{\frac{r^*}{2M}} = -\frac{(r-2M)}{2M} e^{\frac{r}{2M}}$$

$$U < 0, V > 0 \quad T = V - U \quad R = V + U$$

### Diagramas de Kruskal

$$-\infty < U < \infty \quad \infty < V < \infty$$

$$|UV| = 1$$



Espacio-tiempo de Kruskal es la extensión maximal de la sol. de Schwarzschild

Si tuvieramos un colapso estérico suponiendo A.N como es el estado final

¿Qué es el infinito?

compactificación conforme

Diagrama de Penrose

Estructura Causal

**Agujero Negro** Es una región del espacio-tiempo donde el campo gravitacional es tan fuerte que ni la luz puede escapar al **infinito**

## Transformaciones conformes

No CAMBIA LA ESTRUCTURA CAUSAL

$$ds^2 \mapsto d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2$$

$$g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 0 \mapsto \tilde{g}_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 0 \quad \Omega^2 g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 0$$

Necesitamos un nuevo espacio-tiempo auxiliar  $\rightarrow$  Factor conforme

$$(M, g) \mapsto (\tilde{M}, \tilde{g}) \text{ COMPACTIFICACIÓN CONFORME} \quad t \rightarrow \pm\infty$$

$$\Omega(t, r) = 0 \leftrightarrow |\nabla^2| \rightarrow \infty$$

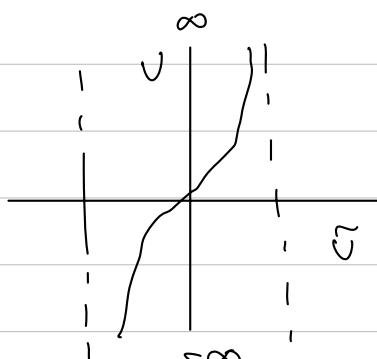
cuando nos alejamos lo suficiente ese objeto se encuentra en un plano

¿Cómo es en infinito el plano?

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 & u = t - r & v = t + r \\ &= -(dt - dr)(dt + dr) + r^2 d\Omega^2 \\ &= du dv + \frac{(v-u)^2}{4} d\Omega^2 \end{aligned}$$

Definimos una nueva coordenada para compactificar

$$u = L \tan \zeta \quad v = L \tan \tilde{\zeta}$$



Sustituyendo valores

$$ds^2 = \frac{L^2}{4\cos^2 \tilde{v} \cos^2 \tilde{v}} [-4d\tilde{v}d\tilde{v} + \sin^2(\tilde{v} - \tilde{v})d\Omega^2]$$

$$\Omega = \frac{2\cos \tilde{v} \cos \tilde{v}}{L} = \underline{\cos T + \cos X}$$

compactificación  
conforme

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2 = -4d\tilde{v}d\tilde{v} + \sin^2(\tilde{v} - \tilde{v})d\Omega^2$$

$$r = v - \tilde{v} \geq 0 \quad v = v - 2r = 2t - v \quad v = v + 2r = 2t - u$$

Ahora tenemos varias opciones

$$\tilde{v} = -\frac{\pi}{2} \quad \tilde{v} = +\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \begin{cases} v \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow +\infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r \rightarrow \infty \\ t \text{ finito} \end{cases} \stackrel{?}{=} \begin{cases} \infty \text{ temporales} \\ \text{FUTURO Y PASADO} \end{cases}$$

$$\tilde{v} = \pm \frac{\pi}{2} \quad \tilde{v} = \mp \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \begin{cases} v \rightarrow \pm \infty \\ v \rightarrow \pm \infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r \text{ finito} \\ t \rightarrow \pm \infty \end{cases} \stackrel{?}{=} \begin{cases} \infty \text{ nulo} \\ \text{PASADO} \end{cases}$$

$$\tilde{v} = \frac{\pi}{2} \quad \tilde{v} \neq \pm \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \begin{cases} v \rightarrow -\infty \\ v \text{ finito} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r \rightarrow \infty \\ t \rightarrow -\infty \\ t+r \text{ finito} \end{cases} \stackrel{?}{=} \begin{cases} \infty \text{ nulo} \\ \text{PASADO} \end{cases}$$

$$\tilde{v} \neq \pm \frac{\pi}{2} \quad \tilde{v} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \begin{cases} v \text{ finito} \\ v \rightarrow \pm \infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty \\ t-r \text{ finito} \end{cases} \stackrel{?}{=} \begin{cases} \infty \text{ nulo} \\ \text{futuro} \end{cases}$$

$$\tilde{v} = \frac{T - X}{2} \quad \tilde{v} = \frac{T + X}{2}$$

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + \sin^2 x d\Omega^2$$

La cual es la métrica de la  
3-cífero

IR

$$\text{Schwarzschild} \rightarrow g_{\mu\nu} = 0 \leftarrow S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R$$

Einstein-Hilbert  
Funcional

Hay una única solución a las ecs. de Einstein electromagnéticas

$$\text{Reissner-Nordström} \quad G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} = 4\pi (F_\mu^\nu F_\nu^\mu - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu})$$

$$S[g_{\mu\nu} A_\mu] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$F = F_{tr} = \frac{q}{r^2}$$

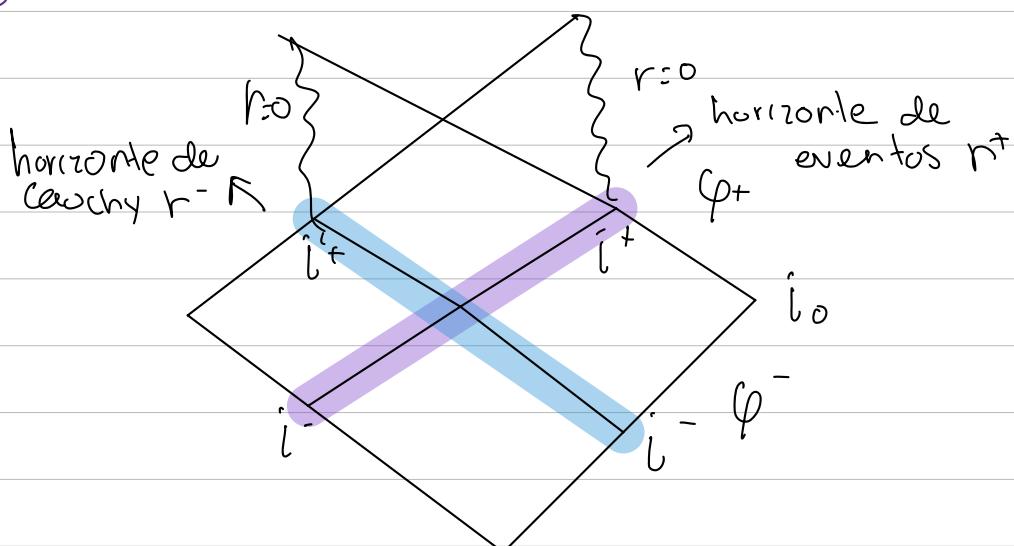
Tarea dibujar el diagrama de Penrose de esta solución  $m=Q$

Seguir el procedimiento de Schwarzschild

TAREA: Obtenga el diagrama de Penrose de la sol. R-N

$$Q^2 < M^2, Q^2 = M^2, Q^2 > M^2$$

Agujero negro



# Teorema de Penrose (1965)

## HIPÓTESIS

Densidad de energía positiva

- CONDICIÓN DE ENERGÍA NULA

Agujero Negro

$\Rightarrow$  INCOMPLETITUD GEODÉSICA

-  $\exists$  UNA SUPERFICIE CERRADA ATRAPADA

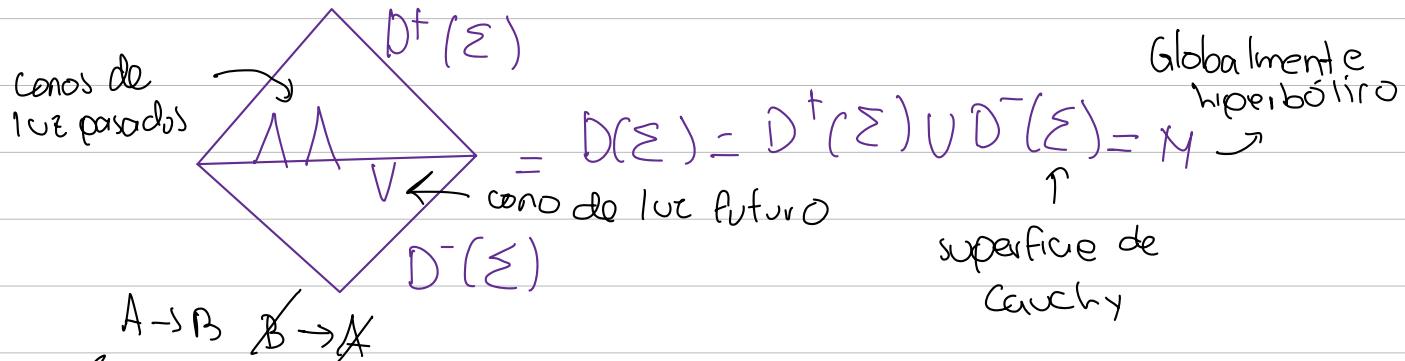
Globalmente hiperbólico

NULA

SINGULARIDAD

-  $\exists$  UNA SUPERFICIE DE CAUCHY NO-COMPLETA

Quiere decir que los haz de luz convergen como en el interior de un agujero negro



Espacio-tiempo regular

$\rightarrow$

- dens energía posit.
- Agujero negro
- No es globalmente hiperbólico

$$S[g_{\mu\nu}, A, \rho^{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{2} \rho^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - H[\rho] \right) \right] \quad \rho = \frac{1}{4} \rho_{\mu\nu} \rho^{\mu\nu}$$

$\oint A \rightarrow \nabla_\mu \Phi^{\mu\nu} = 0$  cuando  $H = \Phi$  obtendremos la ecuación de Maxwell

$$\oint P \rightarrow F_{\mu\nu} H \rho P_{\mu\nu}$$

$$H(\rho) = \frac{\rho(1 - (\beta + 1)\sqrt{-2L^2\rho})}{(1 + \sqrt{-2L^2\rho})^{\beta + 1}} - \frac{\alpha \left( \sqrt{-2L^2\rho} \right)^{\frac{s}{2}}}{{2L^2}^{\frac{3}{2}} (1 + \sqrt{-2L^2\rho})^{\frac{L+1}{2}}}$$

$$S = \frac{16\pi}{2M} \quad \text{rho}$$

$$H \approx \Phi \quad \alpha = 0 = \beta \quad L = 0$$

$$T_{\mu\nu} = H_\mu \rho_{\nu\lambda} \Phi^\lambda - g_{\mu\nu} (R^\lambda_\mu H_\lambda - H)$$

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$F(r) = 1 - \frac{2Mr^{\alpha-1}}{(r^2 + L|q|)^{\alpha/2}} + \frac{q^2 r^{\beta-2}}{(r^2 + L|q|)^{\beta/2}} \approx 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \dots$$

$E(r)$  = regular  $\alpha \geq 3, \beta \geq 4$   
 densidad positiva  $\alpha = 3, \beta \geq 4$

$\alpha = 3, \beta = 4$

A-B Alberto García Phys Rev Lett 80, 5856 (1998)  
 inspire 769

SINGULARIDADES SIN HISTO DE EVENTOS  $\rightarrow$  singularidad desnuda

Conjetura de censura cósmica

Todos los Agujeros negros tienen solución a la ecuación de Einstein del tipo

Solución de Kerr

Generalización rotante de Schwarzschild

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 + \Sigma \left( \frac{dr^2}{\lambda} + d\theta^2 \right)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \Delta = r^2 - 2Mr^2 + a^2 + \alpha^2 + \rho^2 \rightarrow \text{Kerr-Newman}$$

$$A = \frac{1}{\Sigma} [ar(dt + \sin^2 \theta d\varphi) + \rho \cos \theta (adt - (r^2 + a^2) d\varphi)]$$

Estacionaria  $k = \partial_t$  la única componente es la  $t$ , es axisimétrico  
 $m = 2a$

Derivada de Lee

$$\alpha_X g_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu = 0$$

Es una solución de Einstein-Maxwell

$$S[g, A] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})$$

$$t = \cos \theta, \theta = 0 \quad S_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\frac{\Delta}{\Sigma} (\dot{t})^2 + \frac{\Sigma}{a} (\dot{r})^2 = 0 \quad \text{Aguero negro}$$

$M, J \equiv aM, Q, P$  cargas globales

Para recordar

La corriente se conserva

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \leftarrow \nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

$$0 = \int dV \nabla_\mu J^\mu = \left[ \int_{\Sigma} - \int_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} \right] dS_\mu J^\mu$$

$$J^\mu|_{\partial\Sigma} = 0 \Rightarrow \tilde{Q} = \int_{\Sigma} dS_\mu J^\mu = \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma} dS_{\mu\nu} \tilde{P}^{\mu\nu}$$

Cargas

Gaussianas

Conservada

Si tengo un vector de kilos voy a definir una corriente asociada con cada vector. Integrales de corriente

$$J_x^n = C \left( T_v^n - \frac{1}{2} \delta_v^n T \right) X^v \Rightarrow \nabla_\mu J_\mu^n |_x \leq 0$$

$$Q_x = \int_{\Sigma} dS_\mu |_x^n = \frac{C}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} dS_\mu R_\nu X^\nu = \frac{C}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} dS_\mu \nabla_\nu T^\nu X^\nu$$

$$= \frac{C}{8\pi} \int_{S_\infty} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu X^\nu$$

$$x = k = \partial_t, \therefore -2 \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu k^\nu = M$$

Tarea hacer el cálculo

$$X = m = \partial p \quad ( = 1 ) \quad \frac{1}{16\pi} \int_{S_\infty} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu m^\nu = J$$

momento angular

El momento angular y la masa se conserva y son una propiedad global del espacio-tiempo

La masa no está localizada

## Conjetura de no-pelo

Trata de discernir cual es el estado final del colapso gravitacional

“Todo lo que puede ser radiado será radiado”

Para campos bosónicos de spin  $S$ , al final solo quedrán multipolos radioactivos  $\ell \geq S$  sin masa

Gravedad  $S=2 \Rightarrow S=0$  (masa),  $S=1$  (momento angular)

Electro  $S=1 \Rightarrow S=0$  (carga)

Escalar  $S=0 \Rightarrow \exists$  momentos multipolares no radioactivos

El estado final debe estar caracterizado por masa, momento angular y carga.

### VERSIÓN 1 DE LA CONJETURA

Un agujero negro estacionario es únicamente descrito por cargas globales.

En los 80's Gibbons y Marder encontraron otra solución de describir un agujero negro,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r\left(r - \frac{Q^2}{M}\right)d\Omega^2$$

$$F = e^{2\phi} \frac{Q}{r^2} dt \wedge dr \quad e^{2\phi} = 1 - \frac{Q^2}{Mr}$$

La cual es solución de la gravedad dilatónica

$$S(g, A, \phi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left( R - e^{2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right)$$

VERSIÓN 2: Depende de la teoría dada.

Einstein-Maxwell  $\xrightarrow[\text{no } \mathcal{C}^1]{\text{teorema de}}$  Israel (60's)  $\xrightarrow[\text{Carter}]{}$  Robinson  
60-80

Todos los agujeros negros están descritos por la métrica de Kerr.

Einstein-Yangs-Mills No se satisfacen  $\rightarrow$  Pelos de color  
~~son inestables~~

VERSIÓN 3: Para agujeros negros estacionarios estables depende de la teoría dada

Einstein-Skyrmme No Pelos Skyrme estables topológicos

Escalares no estacionarios ni axisimétricos No No se ha probado la estabilidad

Escuela de Gravitación Playa del carmen

¿Qué pasa en más dimensiones? No Myers - Perry  $M_{dS}$   
Black ring ( $d=5$ )

Entonces ¿Cuál es el estado final?

Agueros Negros de lichis

## Referencias

- Carter Gargese lectures
- Townsend on arxiv
- Bizon arxiv
- Penrose Differential