Tarea 2

Autores: Andre Michel Marin Espinoza, Daniel Alejandro Ramírez Hernández, Luis Claudio Morales Delgadillo, Marcos Rodolfo Macías Mondragón

Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería
Campus Tlaxcala
Ecuaciones Diferenciales
Octubre 2024

Encuentra la solución al problema con valor inicial

a) $y'' + 8y' - 9y = 0$ $\quad y(1) = -3 \quad y'(1) = 4$

① Primero calculamos la ec. característica $= r^2 + 8r - 9 = 0$ $\quad r_1 = -9$

$(r+9)(r-1) = 0$ $\quad r_2 = 1$

② Como $r_1 \neq r_2$ son lin. Ind. $\therefore y_1(t) = e^{-9t}$, $y_2(t) = e^{t}$ soluciones de la ec. dif.

③ $\therefore$ La solución general al problema $y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-9t}$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

④ Condiciones Iniciales y Derivación de $y(t)$

$y'(t) = C_1 e^{t} - 9C_2 e^{-9t}$

$y(1) = -3$

$* \; -3 = y(1) = C_1 e^{1} + C_2 e^{-9}$

$y'(1) = 4 = C_1 e^{1} - 9C_2 e^{-9}$

$* \; 4 = C_1 e^{1} - 9C_2 e^{-9}$

Resolvemos por sistema de ecuaciones

$C_1 = \frac{-C_2 e^{-9} - 3}{e}$

$C_1 = -C_2 e^{-10} - \frac{3}{e}$

$4 = (-C_2 e^{-10} - \frac{3}{e})e - 9C_2 e^{-9}$

$4 = -C_2 e^{-9} - 3 - 9C_2 e^{-9}$

$7 = -10 C_2 e^{-9}$

$-\frac{7}{10} = C_2 e^{-9}$

$\boxed{C_2 = -\frac{7}{10 e^{-9}} = -\frac{7}{10} e^{9}}$

$C_1 = -(-\frac{7}{10} e^{9}) e^{-10} - 3/e$

$= \frac{7}{10} e^{-1} - 3/e = \frac{7}{10 e} - \frac{3}{e}$

$\boxed{C_1 = \frac{7}{10} e^{-1} - \frac{30}{10} e^{-1} = -\frac{23}{10} e^{-1}}$

$\therefore C_1 = -\frac{23}{10} e^{-1}$ y $C_2 = -\frac{7}{10} e^{9}$

⑤ Sustituimos C_1 y C_2 en la sol. gen.

$\therefore y(t) = (-\frac{23}{10} e^{-1}) e^{t} + (-\frac{7}{10} e^{9}) e^{-9t}$

$= -\frac{23}{10} e^{t-1} - \frac{7}{10} e^{9-9t}$

...lución al problema con valores iniciales

b) $y'' + 5y' + 3y = 0 \qquad y(0) = -2 \qquad y'(0) = 7.$

① Primero calculamos la ec. característica = $r^2 - 5r + 3 = 0$

$$\frac{-(+5) \pm \sqrt{-5^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2} \qquad \therefore r_1 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \neq r_2 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$$

Son distintas

② Como $r_1 \neq r_2$ son lin. Ind: $\therefore y_1(t) = e^{\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)t}$ $\quad y_2(t) = e^{\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)t}$ soluciones de la ec. dif.

③ $\therefore$ La solución general al problema es $\boxed{y(t) = C_1 e^{\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)t} + C_2 e^{\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)t}}$

④ Aplicamos las condiciones iniciales y derivamos $y(t)$:

$$y'(t) = \left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right) C_1 e^{r_1 t} + \left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right) C_2 e^{r_2 t}$$

Condiciones:

$$y(0) = -2 = C_1 e^{r_1 \cdot 0} + C_2 e^{r_2 \cdot 0} = C_1 + C_2$$

$$y'(0) = 7 = r_1 C_1 e^{r_1 \cdot 0} + r_2 C_2 e^{r_2 \cdot 0}$$

$$7 = \left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right) C_1 + \left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right) C_2$$

⑤ Sustituimos y obtenemos C_1 y C_2 = $C_1 = -C_2 - 2$

$$7 = \left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)(-C_2 - 2) + \left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right) C_2$$

$$= \frac{5C_2 - C_2\sqrt{13}}{2} + \left(\frac{10 - 2\sqrt{13}}{2}\right) + \left(\frac{-5C_2 - C_2\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$7 = \frac{-2C_2\sqrt{13} + 10 - 2\sqrt{13}}{2} = -C_2\sqrt{13} + 5 - \sqrt{13} =$$

$$C_2\sqrt{13} = -2 - \sqrt{13} \Rightarrow C_2 = \frac{-2}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \boxed{C_2 = \frac{-2}{\sqrt{13}} - 1}$$

$$\boxed{C_1 = -\left(-\frac{2}{\sqrt{13}} - 1\right) - 2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{13}} - 1} \qquad \boxed{\therefore C_1 = \frac{2}{\sqrt{13}} - 1 \qquad C_2 = -\frac{2}{\sqrt{13}} - 1}$$

⑥ Sustituimos C_1 y C_2 en la sol. gen.

$$\therefore y(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}} - 1\right) e^{\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)t} + \left(-\frac{2}{\sqrt{13}} - 1\right) e^{\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)t}$$

Solución al problema con valores iniciales

Si es posible, encuentra la solución a las siguientes ecuaciones diferenciales. Si no lo es, explica por qué.

a) $2y'' - 2y' + \frac{1}{2}y = 0$, $y(0) = 3$ $y'(0) = -4$

① Dividimos la ec. dif. para tener la forma estándar: $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$

② Calculamos la ec. característica: $r^2 - r + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1/4)}}{2} = \frac{1}{2}$

• Como las raíces son iguales multiplicamos K por t ; $r_1 = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $y_1(t) = e^{\frac{1}{2}t}$ $r_2 = \frac{1}{2}$

$y_2(t) = te^{\frac{1}{2}t}$

③ Solución general al problema es $y(t) = K_1 e^{\frac{1}{2}t} + K_2 t e^{\frac{1}{2}t}$ $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

④ Derivación de $y(t)$ y condiciones iniciales:

$$y'(t) = \tfrac{1}{2}K_1 e^{\frac{1}{2}t} + \left(K_2 e^{\frac{1}{2}t} + \tfrac{1}{2}K_2 t e^{\frac{1}{2}t}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}K_1 e^{\frac{1}{2}t} + \left(K_2 + \tfrac{1}{2}K_2 t\right)e^{\frac{1}{2}t}$$

$\boxed{K_1 = 3}$

$$y(0) = 3 = K_1 e^{\frac{1}{2}\cdot 0} + K_2 \cdot 0 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} = K_1 = 3$$
$$y'(0) = -4 = \tfrac{1}{2}K_1 e^{\frac{1}{2}\cdot 0} + \left(K_2 + \tfrac{1}{2}K_2 \cdot 0\right)e^{\frac{1}{2}\cdot 0}$$
$$= \tfrac{1}{2}K_1 + K_2$$
$$-4 = \tfrac{1}{2}(3) + K_2 \Rightarrow -4 - \tfrac{3}{2} = K_2$$
$$\boxed{K_2 = -\tfrac{11}{2}}$$

$\therefore$ $K_1 = 3$ y $K_2 = -\frac{11}{2}$

⑤ Sustituimos K_1 y K_2 en la sol. gen.

$\therefore$ $y(t) = 3e^{\frac{1}{2}t} - \frac{11}{2}te^{\frac{1}{2}t}$

Solución al problema con soluciones iniciales

$\therefore$ Si tiene solución ya que al tener raíces iguales ocupamos el método de D' Alambert

b) $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 6$ y $y'(0) = -5$.

① Calculamos la ec. característica; $r^2 + 6r + 9 = 0$ $r_1 = r_2 = -3$
las raíces son iguales $(r+3)(r+3)$

$\therefore$ $y_1(t) = e^{-3t}$
$y_2(t) = te^{-3t}$

② Solución general al problema es: $\boxed{y(t) = K_1 e^{-3t} + K_2 t e^{-3t}}$ $K_1, K_2 \in$

③ Derivación y condiciones iniciales:

$$y'(t) = -3K_1 e^{-3t} + (K_2 e^{-3t} - 3K_2 t e^{-3t})$$
$$= -3K_1 e^{-3t} + (K_2 - 3K_2 t) e^{-3t}$$

$$y(0) = 6 = K_1 e^{-3\cdot 0} + \cancel{K_2 \cdot 0 \cdot e^{-3\cdot 0}} \Rightarrow \boxed{K_1 = 6}$$

$$y'(0) = -5 = -3(6) e^{-3\cdot 0} + (K_2 - \cancel{3K_2 \cdot 0}) e^{-3\cdot 0}$$
$$= -5 = -18 + K_2$$
$$\boxed{K_2 = 13}$$

$\therefore$ $K_1 = 6$ $K_2 = 13$

⑤ Sustituimos K_1 y K_2 en la sol. gen.

$\therefore$ $y(t) = 6e^{-3t} + 13te^{-3t}$
Solución al problema con soluciones iniciales
$\therefore$ Sí tiene solución la ec. dif. ya que al tener raíces iguales ocupamos el método D' Alambert

Inciso 3

Recuerda que si $a>0$ entonces $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$, donde i es el número complejo tal que $i^2=-1$.
Encuentra la solución a las siguientes ecuaciones diferenciales. Si no tienen solución, explica por qué.

a) $y''-6y'+13y=0,\quad y(0)=-4 \quad y'(0)=\frac{3}{2}$

① Resolver la ec. característica $= r^2-6r+13=0$

$$r=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(13)}}{2(1)}=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16}\,i}{2}=\frac{6\pm 4i}{2}=3\pm 2i$$

$\lambda_1=r_1=3+2i \quad \lambda_2=r_2=3-2i$ raíces de la ec. característica

② dado que la ecuación diferencial tiene raíces de la forma $\lambda+\mu i, \lambda-\mu i$ la solución general sigue la estructura $y(t)=e^{\lambda t}[k_1\cos(\mu t)+k_2\operatorname{Sen}(\mu t)$ $k_1,k_2\in\mathbb{R}$

$3=\lambda \quad 2=\mu$

$\therefore y(t)=e^{3t}(k_1\cos(2t)+k_2\operatorname{Sen}(2t))$ $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ Solución General

③ Condiciones iniciales y derivación de $y(t)$

④ Evaluando $y(0)=-4$

$y(0)=e^{3(0)}(k_1\cos(2(0))+k_2\operatorname{Sen}(2(0)))=-4$

$1(k_1\cos(0)+k_2\operatorname{Sen}(0))=-4$

$\boxed{k_1=-4}$

⑤ Evaluación de $y'(0)=\frac{3}{2}$

$y'(t)=3e^{3t}(k_1\cos(2t)+k_2\operatorname{Sen}(2t))+e^{3t}(-2k_1\operatorname{Sen}(2t)+2k_2\cos(2t))$

$=e^{3t}(3k_1\cos(2t)+3k_2\operatorname{Sen}(2t))+e^{3t}(-2k_1\operatorname{Sen}(2t)+2k_2\cos(2t))$

$y'(0)=e^{3(0)}(3k_1\cos(2(0))+3k_2\operatorname{Sen}(2(0)))+e^{3(0)}(-2k_1\operatorname{Sen}(2(0))+2k_2\cos(2(0)))$

$=3k_1+2k_2=\frac{3}{2}$

$=3(-4)+2k_2=\frac{3}{2}$

$=-12+2k_2=\frac{3}{2}$

$=2k_2=\frac{27}{2}$

$2K_2 = \frac{27}{2}$

$\boxed{K_2 = \frac{27}{4}}$

6 Sustituimos K_1 y K_2 en la solución general

$K_1 = -4$, $K_2 = \frac{27}{4}$

$y(t) = e^{3t}(-4\cos(2t) + \frac{27}{4}\operatorname{Sen}(2t))$ Solución particular

b) $y'' + 25y = 0$, $y(0) = -\frac{3}{2}$ $y'(0) = \frac{5}{2}$

1 Resolver la ecuación característica $r^2 + 25 = 0$

$r^2 = -25$ $r_1 = 0 + 5i$ $\lambda = 0$

$r = \pm\sqrt{-25}$ $r_2 = 0 - 5i$ $\mu = 5$

$r = \pm\sqrt{25}\,i$

$r = \pm 5i$

2 Dado que la ecuación diferencial tiene raíces de la forma $\lambda + \mu i, \lambda - \mu i$ la solución general sigue la estructura $y(t) = e^{\lambda t}(K_1\cos(\mu t) + K_2\operatorname{Sen}(\mu t))$

$y(t) = e^{0t}(K_1\cos(5t) + K_2\operatorname{Sen}(5t))$ $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $y(t) = K_1\cos(5t) + K_2\operatorname{Sen}(5t)$ Solución general

3 Condiciones iniciales y derivación de $y(t)$

4 Evaluando $y(0) = -\frac{3}{2}$

$K_1\cos(5(0)) + K_2\operatorname{Sen}(5(0)) = -\frac{3}{2}$

$K_1\cos(0) + K_2\operatorname{Sen}(0) = -\frac{3}{2}$

$\boxed{K_1 = -\frac{3}{2}}$

5 Evaluando $y'(0) = \frac{5}{2}$

$y'(t) = -5K_1\operatorname{Sen}(5t) + 5K_2\cos(5t)$

$y'(0) = -5K_1\operatorname{Sen}(5(0)) + 5K_2\cos(5(0)) = \frac{5}{2}$

$-5K_1\operatorname{Sen}(0) + 5K_2\cos(0) = \frac{5}{2}$

$5K_2 = \frac{5}{2}$

$5k_2 = \frac{5}{2}$

$k_2 = \frac{5}{2 \cdot 5}$

$\boxed{k_2 = \frac{1}{2}}$

ⓒ Sustituyendo k_1 y k_2 en la solución general

$y(t) = -\frac{3}{2}\cos(5t) + \frac{1}{2}\operatorname{Sen}(5t)$ Solucion particular

Inciso 4

Nota: Cuando te pido encontrar una ecuación diferencial que cumple determinada propiedad, lo que se te pide es proporcionar dicha ecuación (tú la puedes inventar) y luego explicar por qué cumple esa propiedad

a) Encuentra una ecuación diferencial cuya sol. general sea $y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-5t}$, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

① Identificar la solución
Dada la solución propuesta, se puede observar que se trata de una ecuación con raíces reales y distintas, pues se parece a la forma $\underbrace{k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}}$

② Encontrar la ecuación ubicando las raíces comparando con la fórmula

$r_1 = 4$; $r_2 = -5$

$(r-4)(r+5) = 0$

$r^2 + 5r - 4r - 20 = 0$

$\boxed{r^2 + r - 20 = 0}$ Ecuación diferencial

b) Encuentra una ecuación diferencial cuya solución general sea
$y(t) = d_1 e^{t/3} + d_2 e^{-3t}$

① Identifica la ecuación
Dada la solución propuesta se puede observar que se trata de una ecuación con raíces reales o distintas, pues se parece a la forma $\boxed{k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}}$

② Encontrar raíces
Comparando con la formula y remplazando los valores se pueden obtener las raíces.

$k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$ obteniendo:

$d_1 e^{\frac{1}{3} t} + k_2 e^{-3t}$ $r_1 = \frac{1}{3}$ $r_2 = -3$

③ Calcular la ecuación

$(r - \frac{1}{3})(r + 3) = 0$

$r^2 + 3r - \frac{1}{3} r - 1 = 0$

$r^2 + \frac{8}{3} r - 1 = 0$ Ecuación diferencial

5. Para los siguientes pares de funciones, calcula su wronskiano.

a) $f(x) = 2x$ y $g(x) = xe^x$.

$f(x) = 2x \qquad f'(x) = 2$

$g(x) = xe^x \qquad g'(x) = e^x + xe^x$

$$W_{(f,g)}(x) = \det\begin{pmatrix} 2x & xe^x \\ 2 & e^x + xe^x \end{pmatrix} = [2x(e^x + xe^x)] - [2(xe^x)]$$

$$= \cancel{2xe^x} + 2x^2e^x - \cancel{2xe^x} = \underline{2x^2e^x}$$

b) $f(\theta) = \cos^2\theta$ y $g(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$.

$f(\theta) = \cos^2\theta \qquad f'(\theta) = 2\cos(\theta)\cdot(-\text{sen}\,\theta)$

$\qquad\qquad = -2\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta) = -\text{Sen}\,(2\theta)$

$g(\theta) = 1 + \cos(2\theta) \qquad g'(\theta) = 0 + (-\text{sen}\,(2\theta))\cdot 2$

$\qquad = 2\cos^2\theta$ (*) $\qquad = -2\,\text{sen}\,(2\theta)$

(*)

$1 + \cos(2\theta)$

$\Updownarrow$

$\cancel{1} + 2\cos^2\theta - \cancel{1}$

$\therefore 1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$

$$W_{(f,g)}(x) = \det\begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & 2\cos^2(\theta) \\ -\text{sen}\,(2\theta) & -2\,\text{sen}\,(2\theta) \end{pmatrix}$$

$$= [\cos^2(\theta)\cdot(-2\,\text{sen}(2\theta))] - [2\cos^2(\theta)\cdot(-\text{Sen}\,(2\theta))]$$

$$= \cancel{-2\,\text{sen}(2\theta)\cos^2(\theta)} + \cancel{2\,\text{sen}(2\theta)\cos^2(\theta)} = \underline{0}$$

6. En los siguientes incisos, encuentra el intervalo más largo en el cual el problema con valor inicial tiene solución (no intente encontrar la solución, basta con encontrar el intervalo que se te pide).

a) $(t-3)y'' - 3ty' + 4y = \sin t$ y $y(-2) = 2$ y $y'(-2) = 1$.

Sol.- Dividimos la ecu. de a) entre $(t-3)$, así obtenemos

$$y'' - \frac{3t}{t-3}y' + \frac{4}{t-3}y = \frac{\sin t}{t-3}$$

Ahora, encontraremos el intervalo I

$p(t) = \dfrac{3t}{t-3}$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$q(t) = \dfrac{4}{t-3}$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$g(t) = \dfrac{\sin t}{t-3}$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$\therefore$ son continuas en $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ y como $-2 \in (-\infty, 3) \Rightarrow$ el intervalo mas largo posible donde la solución existe es $\underline{(-\infty, 3)}$

$g(t) = \frac{\quad}{t-3}$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ más largo posible donde la solución existe es $(-\infty, 3)$

$t_0 = -2$

b) $ty'' + 3y = t$ y $y(-1) = 1$ y $y'(-1) = 2.$

Sol: Dividimos la ecu. L.I b) entre t para obtener

$$y'' + \frac{3}{t} y = 1$$

Ahora, encontraremos el intervalo I

$p(t) = 0$

$q(t) = \frac{3}{t}$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(t) = 1$ es constante contenida en $\mathbb{R}$

$t_0 = -1$

$\therefore$ son continuas en $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$ y como $-1 \in (-\infty, 0) \Rightarrow$ el intervalo más largo posible donde la solución existe es $(-\infty, 0)$

TEMA FECHA

8.- Usa el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución general a las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - 4y' + 2y = -6e^{-3t}$

Solución general

$y = y_h + y_p$

1.- Encontrar la solución homogenea (y_h)

$y'' - 4y' + 2y = 0 \rightarrow r^2 - 4r + 2 = 0$

$\rightarrow r = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4\cdot(1\cdot 2)}}{2\cdot 1} \rightarrow \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2}$

$\rightarrow \dfrac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \rightarrow 2 \pm \sqrt{2} \quad \therefore \quad r_1 = 2 + \sqrt{2} \quad r_2 = 2 - \sqrt{2}$

$\therefore y_h = C_1 e^{(2+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(2-\sqrt{2})t} \leftarrow$ Solución homogenea

2.- Proponer solución particular (y_p)

$A\cdot e^{-3t} = y_p$

Sustituimos

$y_p = -A\cdot e^{-3t}$

$y'_p = -3A\cdot e^{-3t} \qquad \longrightarrow \qquad 9A\cdot e^{-3t} - 4(3A\cdot e^{-3t}) + 2A\cdot e^{-3t} = -6e^{-3t}$

$y''_p = 9A\cdot e^{-3t}$

TEMA

FECHA

Simplificamos

$$9A\cdot e^{-3t} + 12A\cdot e^{-3t} + 2A\cdot e^{-3t} = -6e^{-3t}$$

$$\rightarrow (9A+12A+2A)e^{-3t} = -6e^{-3t}$$

$$\rightarrow 23Ae^{-3t} = -6e^{-3t} \rightarrow \frac{23Ae^{-3t}}{e^{-3t}} = \frac{-6e^{-3t}}{e^{-3t}}$$

$$\rightarrow A = -\frac{6}{23} \rightarrow y_p = -\frac{6}{23}e^{-3t}$$

$$\rightarrow y = y_h + y_p$$

$$\therefore y = C_1 e^{(2+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(2-\sqrt{2})t} - \frac{6}{23}e^{-3t}$$

TEMA FECHA

b) $3y'' + \frac{3}{2}y' = 2t^3 + 2t - 2$

Solucion homogenea (y_h)

$3y'' + \frac{3}{2}y' = 0 \rightarrow \frac{3y''}{3} + \frac{\frac{3}{2}y'}{3} = 0$

$\rightarrow y'' + \frac{1}{2}y = 0 \rightarrow r^2 + \frac{1}{2}r = 0 \rightarrow r(r + \frac{1}{2}) = 0$

$\therefore r_1 = 0$ y $r_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow C_1e^{0t} + C_2e^{-\frac{1}{2}t}$

$\therefore C_1 + C_2e^{-\frac{1}{2}t}$

Solución particular (y_p) $\quad y_p = At^3 + Bt^2 + Ct + D($

$y_p = t(At^3 + Bt^2 + Ct + D) = At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt$

$y'_p = 4At^3 + 3Bt^2 + 2Ct + D$

$y''_p = 12At^2 + 6Bt + 2C$

Sustitución

$3(12At^2 + 6Bt + 2C + \frac{3}{2}(4At^3 + 3Bt^2 + 2Ct + D)$

$36At^2 + 18Bt + 6C + 6At^3 + \frac{9}{2}Bt^2 + 3Ct + \frac{3}{2}D = 2t^3 + 2t - 2$

TEMA FECHA

$6A = 2 \longrightarrow A = 1/3$

$36A + \frac{9}{2}B = 0 \longrightarrow B = -8/3$

$18B + 3C = 2 \longrightarrow C = 50/3$

$6C + \frac{3}{2}D = -2 \longrightarrow D = -68$

$\therefore \; y_p = \frac{1}{3}t^4 - \frac{8}{3}t^3 + \frac{50}{3}t^2 - 68t$

Entonces la solución

$y(t) = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{3}t^4 - \frac{8}{3}t^3 + \frac{50}{3}t^2 - 68t$

TEMA

FECHA

Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

$x^2 y'' + 7xy' + 9y = 0$ $\quad x < -2 \quad$ $y = x^r$

$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$

$y' = r x^{r-1}$
$y'' = r(r-1) x^{r-2}$

Sustituimos

$x^2 \cdot r(r-1) x^{r-2} + 7x \cdot r x^{r-1} + 9x^r = 0$

$\rightarrow r(r-1) x^r + 7rx + 9x^r = 0$

$\rightarrow x^r (r(r-1) + 7r + 9) = 0$

$\rightarrow r(r-1) + 7r + 9 = 0 \rightarrow r^2 + 6r + 9 = 0 \rightarrow (r+3)^2 = 0$

$\rightarrow r_1 = -3 \;\; y \;\; r_2 = -3$

$\therefore y(x) = C_1 x^{-3} + C_2 x^{-3} \ln(x)$

TEMA FECHA

$4x^2y'' + 12xy + 8y = 0, \quad x > 2$

$y' = rx^{r-1}$
$y'' = r(r-1)x^{r-2}$

Sustitución

$4x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} + 12x \cdot rx^{r-1} + 8x^r = 0$

$\to 4r(r-1)x^r + 12rx^r + 8x^r = 0$

$\to x^r(4r(r-1) + 12r + 8) = 0$

Para $x > 2$ $\quad 4r(r-1) + 12r + 8 = 0$

$\to 4r^2 + 4r + 8 = 0 \quad \to \quad r^2 + r + 2 = 0$

$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$

$\to r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$

$\therefore \; y(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln(x)\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln(x)\right.\right.$