Matrices

إعداد :

١. فراس سمير سليم

System of linear equations
نظام المعادلات الخطية

7x + 5y – 3z = 16

3x – 5y + 2z = -8

5x + 3y – 7z = 0

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & -3 & 16 \\ 3 & -5 & 2 & -8 \\ 5 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Augmented matrix

المصفوفة المعززة

Matrices

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & -3 & 16 \\ 3 & -5 & 2 & -8 \\ 5 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

We can manipulate this in order to solve the system

يمكننا التلاعب بهذا من أجل حل النظام

Matrices

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & -3 & 16 \\ 3 & -5 & 2 & -8 \\ 5 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Terminology

المصطلح

Operations

عمليات

1) Addition

١) الإضافة

Matrices

$$A_{m\,x\,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & a_{ij} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{ij} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Types of Matrices
أنواع المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

m = number of rows عدد الصفوف

n = number of columns عدد الأعمدة

when m x n the matrix is a

square matrix

عندما م x ن المصفوفة هي

مصفوفة مربعة

Types of Matrices
أنواع المصفوفات

square matrix مصفوفة مربعة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

These numbers comprise the main diagonal

تشكل هذه الأرقام القطر الرئيسي

Types of Matrices

diagonal matrix   مصفوفة قطرية

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

All the entries off the main diagonal are **zero**

كافة الإدخالات خارج القطر الرئيسي هي **صفر**

Types of Matrices

augmented matrix مصفوفة موسعة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

All the entries off the main diagonal are **zero**

كافة الإدخالات خارج القطر الرئيسي هي **صفر**

This situation is the goal of

Gauss-Jordan elimination

وهذا الوضع هو هدف القضاء على

جاوس-جوردان

Types of Matrices

diagonal matrix مصفوفة قطرية

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

This is also called an

identity matrix

وهذا ما يسمى أيضًا **بمصفوفة**

identity

Types of Matrices

Upper triangular matrix
المصفوفة الثلاثية العليا

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Entries **below** the main diagonal are all zero

الإدخالات الموجودة **أسفل** القطر الرئيسي كلها صفر

Lower triangular matrix
مصفوفة مثلثية سفلية

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Entries **above** the main diagonal are all zero

الإدخالات الموجودة **فوق** القطر الرئيسي كلها صفر

Types of Matrices

vector

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Matrix consisting of just **one column**

مصفوفة تتكون من عمود واحد فقط

The more common usage of "vector"

الاستخدام الأكثر شيوعًا لكلمة "vector"

Row vector

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

Matrix consisting of just **one row**

مصفوفة تتكون من صف واحد فقط

Types of Matrices

vector

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

We can list system solutions
as a vector
يمكننا سرد حلول النظام كمتجه

Types of Matrices

$$3x + y = 7$$
$$X + 2y = 4$$

Systems of linear equations can be represented with vectors

يمكن تمثيل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المتجهات

$$\begin{bmatrix} 3x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Types of Matrices

$$3x + y = 7$$
$$X + 2y = 4$$

Systems of linear equations can be represented with vectors

يمكن تمثيل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المتجهات

$$x\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$$

Types of Matrices

$$3x + y = 7$$
$$X + 2y = 4$$

Systems of linear equations can be represented with vectors

يمكن تمثيل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المتجهات

$$x\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$$

Types of Matrices

$$3x + y = 7$$
$$X + 2y = 4$$

This is the vector form of the linear system

هذا هو الشكل المتجه للنظام الخطي

$$\boxed{x\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}}$$

Scalar Multiplication With Matrices

الضرب العددي مع المصفوفات

$$2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

when multiplying a matrix by a scalar we multiply each entry by the scalar

عند ضرب مصفوفة في عددية، فإننا نضرب كل إدخال في العددية

$$\begin{array}{ccc} 2 \times 1 & & 2 \times 2 \\ & \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix} & \\ 2 \times 3 & & 2 \times 4 \end{array}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

تنفيذ عملية جمع المصفوفات وطرحها

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

For matrices to be added together they must have identical dimensions

لكي يتم جمع المصفوفات معًا، يجب أن تكون لها أبعاد متماثلة

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Each entry in the new matrix is the sum of the corresponding entries

كل إدخال في المصفوفة الجديدة هو مجموع الإدخالات المقابلة

$$= \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Each entry in the new matrix is the sum of the corresponding entries

كل إدخال في المصفوفة الجديدة هو مجموع الإدخالات المقابلة

$$= \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Each entry in the new matrix is the sum of the corresponding entries

كل إدخال في المصفوفة الجديدة هو مجموع الإدخالات المقابلة

$$= \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Each entry in the new matrix is the sum of the corresponding entries

كل إدخال في المصفوفة الجديدة هو مجموع الإدخالات المقابلة

$$= \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Each entry in the new matrix is the sum of the corresponding entries

كل إدخال في المصفوفة الجديدة هو مجموع الإدخالات المقابلة

$$= \begin{bmatrix} 8 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Each entry in the new matrix is the sum of the corresponding entries

كل إدخال في المصفوفة الجديدة هو مجموع الإدخالات المقابلة

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 & \\ & & \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Each entry in the new matrix is the sum of the corresponding entries

كل إدخال في المصفوفة الجديدة هو مجموع الإدخالات المقابلة

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ & & \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Each entry in the new matrix is the sum of the corresponding entries

كل إدخال في المصفوفة الجديدة هو مجموع الإدخالات المقابلة

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & & \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Each entry in the new matrix is the sum of the corresponding entries

كل إدخال في المصفوفة الجديدة هو مجموع الإدخالات المقابلة

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Each entry in the new matrix is the sum of the corresponding entries

كل إدخال في المصفوفة الجديدة هو مجموع الإدخالات المقابلة

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Each entry in the new matrix is the sum of the corresponding entries

كل إدخال في المصفوفة الجديدة هو مجموع الإدخالات المقابلة

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

These had to have identical dimensions for the addition to work properly

ويجب أن تكون لها أبعاد متطابقة حتى تعمل الإضافة بشكل صحيح

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrix subtraction is very similar to matrix addition

طرح المصفوفة يشبه إلى حد كبير جمع المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} -6 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Addition and Subtracting

Matrix addition is commutative

إضافة المصفوفة هي عملية تبادلية

$$A + B = B + A$$

Matrix subtraction is **NOT** commutative

طرح المصفوفة **ليس** تبادليًا

$$A - B \neq B - A$$

Checking Comprehension

التحقق من الفهم

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -5 \\ 7 & 1 & -8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 11 & 5 \\ -3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Find $A + B$:

Find A - B :

Checking Comprehension

التحقق من الفهم

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -5 \\ 7 & 1 & -8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 11 & 5 \\ -3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Find A + B:

Find A - B :

A + B =

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 2 & 17 & 0 \\ 4 & 3 & -15 \end{bmatrix}$$

A – B =

$$\begin{bmatrix} 2 & -11 & -5 \\ 2 & -5 & -10 \\ 10 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplication

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

AB

For this multiplication to work these matrices must have specific dimensions

لكي ينجح هذا الضرب، يجب أن تكون لهذه المصفوفات أبعاد محددة

(not necessarily identical)

(ليست بالضرورة متطابقة)

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

AB

For this multiplication to work A must have the same number of columns as B has rows

لكي ينجح هذا الضرب، يجب أن يكون لدى A نفس عدد الأعمدة مثل عدد الصفوف في B

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

AB

For this multiplication to work A must have the same number of columns as B has rows

لكي ينجح هذا الضرب، يجب أن يكون لدى Aنفس عدد
الأعمدة مثل عدد الصفوف في B

$n \times A = m$ $p \times B = q$

n must equal q

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

Performing Matrix Multiplication

تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$a = [(1)(5) \times (2)(7)] = 5 + 14 = 19$$

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 19 & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication

تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [(1)(6) \times (2)(8)] = 6 + 16 = 22$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ c & d \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$c = [(3)(5) \times (4)(7)] = 15 + 28 = 43$$

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & d \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$d = [(3)(6) \times (4)(8)] = 18 + 32 = 50$$

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

This is the **algorithm** for matrix multiplication

هذه هي **خوارزمية** ضرب المصفوفات

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

This is the **algorithm** for matrix multiplication

هذه هي **خوارزمية** ضرب المصفوفات

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

This is the **algorithm** for matrix multiplication

هذه هي **خوارزمية** ضرب المصفوفات

$$AB = \begin{bmatrix} (ae + bg) & (af + bh) \\ (ce + dg) & (cf + dh) \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication

تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Columns in A must equal **rows in B**

$$AB = \begin{bmatrix} (ae + bg) & (af + bh) \\ (ce + dg) & (cf + dh) \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$1 + 6 + 15 = 22$$

$$AB = \begin{bmatrix} 22 & \\ & \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2 + 8 + 18 = 28$$

$$AB = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ & \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication

تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$4 + 15 + 30 = 49$$

$$AB = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$8 + 20 + 36 = 64$$

$$AB = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2 matrix×The product is a **2**

المنتج عبارة عن **مصفوفة ٢ × ٢**

$$AB = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \overbrace{\begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}}^{\#\ of\ columns\ as\ B} \Big\}\ \#\ of\ rows\ as\ A$$

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Number multiplication is commutative

ضرب الأرقام هو عملية تبادلية

ab = ba

matrix multiplication is **NOT** commutative

ضرب المصفوفة **ليس** تبادليًا

AB ≠ BA

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{bmatrix}$$

Performing Matrix Multiplication

تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

3 columns

$$BA = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{bmatrix}$$ 3 rows

Performing Matrix Multiplication

تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

matrix multiplication is **NOT** commutative

ضرب المصفوفة **ليس** تبادليًا

AB ≠ BA

matrix multiplication is associative

ضرب المصفوفة هو ترابطي

(AB)C = A(BC)

matrix multiplication can be **distributive**

يمكن أن يكون ضرب المصفوفة **توزيعيًا**

p matrices**×n** matrices and C and D are **n×**If A and B are **m**

A(C + D) = AC + AD and (A + B)C = AC + BC

Performing Matrix Multiplication
تنفيذ عملية ضرب المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

This is the **algorithm** for matrix multiplication

هذه هي **خوارزمية** ضرب المصفوفات

$$AB = \begin{bmatrix} (ae+bg) & (af+bh) \\ (ce+dg) & (cf+dh) \end{bmatrix}$$

Checking Comprehension

التحقق من الفهم

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -5 \\ 7 & 1 & -8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 11 & 5 \\ -3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Find AB:

Find BA :

Checking Comprehension

التحقق من الفهم

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -5 \\ 7 & 1 & -8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 11 & 5 \\ -3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Find AB:

=AB

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 17 & 74 & 73 \\ 31 & 58 & 89 \end{bmatrix}$$

Find BA :

BA =

$$\begin{bmatrix} 49 & 56 & -78 \\ 57 & 71 & -95 \\ -54 & 11 & 49 \end{bmatrix}$$

Determinant

Matrix addition إضافة مصفوفة

Matrix subtraction طرح المصفوفة

Matrix multiplication ضرب المصفوفة

Finding the determinant of square matrix

إيجاد محدد المصفوفة المربعة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$(m = n)$

Finding the Determinant of a Two-By-Two Matrix

إيجاد محدد مصفوفة اثنين في اثنين

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$$

$$\text{Det (A) or } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Finding the Determinant of a Two-By-Two Matrix

إيجاد محدد مصفوفة اثنين في اثنين

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Det (A)} = [(2)(4)] - [(1)(-6)]$$

$$= 8 - (-6)$$

$$= 14$$

Finding the Determinant of a Three-By-Three Matrix

إيجاد محدد مصفوفة ذات ثلاثة في ثلاثة

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det (A)} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Finding the Determinant of a Three-By-Three Matrix

إيجاد محدد مصفوفة ذات ثلاثة في ثلاثة

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det (A)} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

Finding the Determinant of a Three-By-Three Matrix

إيجاد محدد مصفوفة ذات ثلاثة في ثلاثة

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}\,(A) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Finding the Determinant of a Three-By-Three Matrix

إيجاد محدد مصفوفة ذات ثلاثة في ثلاثة

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\,(A) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + (b_1c_2 - b_2c_1)$$

Finding the Determinant of a Three-By-Three Matrix

إيجاد محدد مصفوفة ذات ثلاثة في ثلاثة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Det\,(A) = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1[(0)(2) - (1)(4)]$$

$$0 \quad - \quad 4$$

Finding the Determinant of a Three-By-Three Matrix
إيجاد محدد مصفوفة ذات ثلاثة في ثلاثة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Det\,(A) = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-4) - 2[(3)(2) - (1)(-5)]$$

$$6 \quad - \quad -5$$

Finding the Determinant of a Three-By-Three Matrix

إيجاد محدد مصفوفة ذات ثلاثة في ثلاثة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Det\,(A) = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-4) - 2(11) + (-1)[(3)(4) - (0)(-5)]$$

$$12 \quad - \quad 0$$

Finding the Determinant of a Three-By-Three Matrix

إيجاد محدد مصفوفة ذات ثلاثة في ثلاثة

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Det\,(A) = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-4) - 2(11) + (-1)(12)$$

$$= (-4) - (22) + (-12) = -38$$

Finding the Determinant of Larger Matrices

إيجاد محدد المصفوفات الأكبر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

As matrices get bigger finding the determinant requires **many more steps**

مع زيادة حجم المصفوفات، يتطلب العثور على المحدد **العديد من الخطوات**

Finding the Determinant of Larger Matrices

إيجاد محدد المصفوفات الأكبر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}$$

Finding the Determinant of Larger Matrices
إيجاد محدد المصفوفات الأكبر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\text{Det(A)} = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix}$$

Finding the Determinant of Larger Matrices

إيجاد محدد المصفوفات الأكبر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\text{Det(A)} = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

Finding the Determinant of Larger Matrices

إيجاد محدد المصفوفات الأكبر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\text{Det(A)} = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Finding the Determinant of Larger Matrices

إيجاد محدد المصفوفات الأكبر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

This is the same algorithm we already know

هذه هي نفس الخوارزمية التي نعرفها بالفعل

Finding the Determinant of Larger Matrices

إيجاد محدد المصفوفات الأكبر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Make sure to **alternate signs** on these terms

تأكد من **تبديل العلامات** على هذه الشروط

Finding the Determinant of Larger Matrices

إيجاد محدد المصفوفات الأكبر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

We have to find these four determinants

علينا إيجاد هذه المحددات الأربعة

Finding the Determinant of Larger Matrices

إيجاد محدد المصفوفات الأكبر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\text{Det(A)} = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

three 2×2 determinants | three 2×2 determinants | three 2×2 determinants | three 2×2 determinants

Finding the Determinant of Larger Matrices

إيجاد محدد المصفوفات الأكبر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Just stay organized and perform careful arithmetic!

فقط ابق منظمًا وقم بإجراء عمليات حسابية دقيقة!

Checking Comprehension

التحقق من الفهم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Find determinant A :

Checking Comprehension

التحقق من الفهم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Find determinant A :

= -338

Inverse

Inverse functions
وظائف عكسية
$$f^{-1}(x)$$

Inverse functions وظائف عكسية

$$f(x) = 2x + 3$$

$$y = 2x + 3$$

$$x = 2y + 3$$

Solve for y حل لـ

$$y = (x - 3) / 2$$

$$f^{-1}(x) = (x - 3) / 2$$

Defining the Inverse Matrix
تعريف المصفوفة العكسية

$\mathbf{A} \rightarrow A^{-1}$

matrix inverse *matrix*

$$A^{-1} \neq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{A}}$$

This does **NOT** mean reciprocal

وهذا **لا** يعني المعاملة بالمثل

Defining the Inverse Matrix
تعريف المصفوفة العكسية

numbers

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

matrices

$$AA^{-1} = I$$

$$A^{-1}A = I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Identity matrix

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix
إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = I$$

What will this be?

ماذا سيكون هذا؟

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix
إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

١) a and d swap positions مواقع مبادلة

٢) b and c switch their sign تبديل علامتهم

٣) divide by the determinant القسمة على المحدد

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix

إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{ad-bc}\underbrace{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & ad-bc \end{bmatrix}}$$

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix
إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix
إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

١) a and d swap positions مواقع مبادلة

٢) b and c switch their sign تبديل علامتهم

٣) divide by the determinant القسمة على المحدد

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix
إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}$$

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix

إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix
إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix}$$

$-8 + 9 = 1$

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix

إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \end{bmatrix}$$

12 - 12 = 0

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix

إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

-6 + 6 = 0

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix
إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$9 - 8 = 1$$

Finding the Inverse of a Two-By-Two Matrix

إيجاد معكوس المصفوفة ذات الرتبة اثنين في اثنين

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The **identity matrix** confirms this inverse relationship

تؤكد **identity matrix** هذه العلاقة العكسية

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

Solving equations with matrices
حل المعادلات مع المصفوفات

(inverse matrices act as matrix division)

(المصفوفات العكسية بمثابة تقسيم المصفوفات)

$$\frac{XA}{A} = \frac{B}{A}$$

this is not possible

هذا غير ممكن

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

Solving equations with matrices
حل المعادلات مع المصفوفات

(inverse matrices act as matrix division)

(المصفوفات العكسية بمثابة تقسيم المصفوفات)

$$\mathbf{X}AA^{-1} = \mathbf{B}A^{-1}$$

a matrix times its inverse yields an identity matrix

مصفوفة مضروبة في معكوسها تنتج identity matrix

(like cancelling out the matrix)

(مثل إلغاء المصفوفة)

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

Solving equations with matrices
حل المعادلات مع المصفوفات

(inverse matrices act as matrix division)
(المصفوفات العكسية بمثابة تقسيم المصفوفات)

$$\mathbf{XI} = \mathbf{B}A^{-1}$$

a matrix times its inverse yields an identity matrix

مصفوفة مضروبة في معكوسها تنتج identity matrix

(like cancelling out the matrix)
(مثل إلغاء المصفوفة)

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

Solving equations with matrices
حل المعادلات مع المصفوفات

(inverse matrices act as matrix division)

(المصفوفات العكسية بمثابة تقسيم المصفوفات)

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}A^{-1}$$

a matrix times its inverse yields an identity matrix

identity matrix مصفوفة مضروبة في معكوسها تنتج

(like cancelling out the matrix)

(مثل إلغاء المصفوفة)

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

Solving equations with matrices
حل المعادلات مع المصفوفات

(inverse matrices act as matrix division)

(المصفوفات العكسية بمثابة تقسيم المصفوفات)

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}A^{-1}$$

this is only possible if the two matrices have appropriate dimensions

وهذا ممكن فقط إذا كانت المصفوفتان لهما **أبعاد مناسبة**

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

Solving equations with matrices
حل المعادلات مع المصفوفات

(inverse matrices act as matrix division)

(المصفوفات العكسية بمثابة تقسيم المصفوفات)

$$\mathbf{X}AA^{-1} = \mathbf{B}A^{-1}$$

matrix multiplication is **NOT** commutative

ضرب المصفوفة **ليس** تبادليًا

(place inverse matrix in same position on both sides)

(ضع المصفوفة العكسية في نفس الموضع على كلا الجانبين)

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

Solving equations with matrices
حل المعادلات مع المصفوفات

(inverse matrices act as matrix division)

(المصفوفات العكسية بمثابة تقسيم المصفوفات)

$$A^{-1}\boldsymbol{AX} = A^{-1}\ \mathbf{B}$$

matrix multiplication is **NOT** commutative

ضرب المصفوفة **ليس** تبادليًا

(place inverse matrix in same position on both sides)

(ضع المصفوفة العكسية في نفس الموضع على كلا الجانبين)

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

Solving equations with matrices
حل المعادلات مع المصفوفات

(inverse matrices act as matrix division)

(المصفوفات العكسية بمثابة تقسيم المصفوفات)

$$A^{-1}\boldsymbol{AX} = A^{-1}\,\mathbf{B}$$

matrix multiplication is **NOT** commutative

ضرب المصفوفة **ليس** تبادليًا

(place inverse matrix in same position on both sides)

(ضع المصفوفة العكسية في نفس الموضع على كلا الجانبين)

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

Solving equations with matrices
حل المعادلات مع المصفوفات

(inverse matrices act as matrix division)

(المصفوفات العكسية بمثابة تقسيم المصفوفات)

$$\mathbf{IX} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$$

matrix multiplication is **NOT** commutative

ضرب المصفوفة **ليس** تبادليًا

(place inverse matrix in same position on both sides)

(ضع المصفوفة العكسية في نفس الموضع على كلا الجانبين)

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

Solving equations with matrices
حل المعادلات مع المصفوفات

(inverse matrices act as matrix division)
(المصفوفات العكسية بمثابة تقسيم المصفوفات)

$$\mathbf{X} = A^{-1}\mathbf{B}$$

matrix multiplication is **NOT** commutative
ضرب المصفوفة **ليس** تبادليًا
(place inverse matrix in same position on both sides)
(ضع المصفوفة العكسية في نفس الموضع على كلا الجانبين)

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

taking the inverse of a product of matrices

أخذ معكوس منتج المصفوفات

$$(\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}^{-1}$$

Utilizing Inverse Matrices

استخدام المصفوفات العكسية

Not every matrix will have an inverse

لن يكون لكل مصفوفة معكوس

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

If det(A) = 0 then:

$$A^{-1} = \frac{1}{0}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = undefined$$

غير معرف

Utilizing Inverse Matrices
استخدام المصفوفات العكسية

Not every matrix will have an inverse

لن يكون لكل مصفوفة معكوس

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

If det(A) = 0 then:

A is a **singular matrix**

A هي **مصفوفة مفردة**

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 1: Generate the Matrix of Minors

الخطوة ١: إنشاء مصفوفة القصر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -24 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$(1)(0) - (4)(6) = -24$$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix
إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 1: Generate the Matrix of Minors
الخطوة ١: إنشاء مصفوفة القصر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -24 & -20 & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$(0)(0) - (4)(5) = -20$$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 1: Generate the Matrix of Minors

الخطوة ١: إنشاء مصفوفة القصر

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{4} \\ 5 & 6 & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$(0)(6) - (1)(5) = -5$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 1: Generate the Matrix of Minors

الخطوة ١: إنشاء مصفوفة القصر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$(2)(0) - (3)(6) = -18$$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 1: Generate the Matrix of Minors

الخطوة ١: إنشاء مصفوفة القصر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ & & \end{bmatrix}$$

$$(1)(6) - (2)(5) = -4$$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 1: Generate the Matrix of Minors

الخطوة ١: إنشاء مصفوفة القصر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ 5 & & \end{bmatrix}$$

$$(2)(4) - (3)(1) = 5$$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 1: Generate the Matrix of Minors

الخطوة ١: إنشاء مصفوفة القصر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & \end{bmatrix}$$

$$(1)(4) - (3)(0) = 4$$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 1: Generate the Matrix of Minors

الخطوة ١: إنشاء مصفوفة القصر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1)(1) - (2)(0) = 1$$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 1: Generate the Matrix of Minors

الخطوة ١: إنشاء مصفوفة القصر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix of minors

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix
إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 2: Generate the Matrix of Cofactors
الخطوة ٢: إنشاء مصفوفة العوامل المساعدة

$$\begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Matrix of minors

Matrix of cofactors

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix
إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 2: Generate the Matrix of Cofactors
الخطوة ٢: إنشاء مصفوفة العوامل المساعدة

$$\begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -24 & - & -5 \\ - & -15 & - \\ 5 & - & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix of minors — Matrix of cofactors

corner and center entries

مداخل الزاوية والوسط

will remain as they are

سيبقون كما هم

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 2: Generate the Matrix of Cofactors

الخطوة ٢: إنشاء مصفوفة العوامل المساعدة

$$\begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix of minors — Matrix of cofactors

the other four entries will have their signs inverted

الإدخالات الأربعة الأخرى ستكون علاماتها مقلوبة

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 3: Find the Adjugate/Adjoint

الخطوة ٣: ابحث عن المساعد/المجاور

$$\begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -24 & & \\ & -15 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix of cofactors

adjugate/adjoint

we must reflect entries across the main diagonal

يجب علينا أن نعكس الإدخالات عبر القطر الرئيسي

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 3: Find the Adjugate/Adjoint

الخطوة ٣: ابحث عن المساعد/المجاور

$$\begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 & 18 & \\ 20 & -15 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix of cofactors

adjugate/adjoint

we must reflect entries across the main diagonal

يجب علينا أن نعكس الإدخالات عبر القطر الرئيسي

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 3: Find the Adjugate/Adjoint

الخطوة ٣: ابحث عن المساعد/المجاور

$$\begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & \\ -5 & & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix of cofactors   adjugate/adjoint

we must reflect entries across the main diagonal

يجب علينا أن نعكس الإدخالات عبر القطر الرئيسي

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 3: Find the Adjugate/Adjoint

الخطوة ٣: ابحث عن المساعد/المجاور

$$\begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix of cofactors

adjugate/adjoint

we must reflect entries across the main diagonal

يجب علينا أن نعكس الإدخالات عبر القطر الرئيسي

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 4: Divide Adjugate by Determinant

الخطوة ٤: قسمة المساعد على المحدد

$$\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

adjugate/adjoint

Original matrix

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 4: Divide Adjugate by Determinant

الخطوة ٤: قسمة المساعد على المحدد

$$\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

adjugate/adjoint

$$1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -24 + 40 - 15$$

$$= 1$$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 4: Divide Adjugate by Determinant

الخطوة ٤: قسمة المساعد على المحدد

$$\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

adjugate/adjoint

$$1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -24 + 40 - 15$$

$$= 1$$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 4: Divide Adjugate by Determinant

الخطوة ٤: قسمة المساعد على المحدد

$$\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

adjugate/adjoint

$$1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -24 + 40 - 15$$

$$= 1$$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 4: Divide Adjugate by Determinant

الخطوة ٤: قسمة المساعد على المحدد

$$\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \div 1$$

adjugate/adjoint

$$1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -24 + 40 - 15$$

$$= 1$$

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 4: Divide Adjugate by Determinant

الخطوة ٤: قسمة المساعد على المحدد

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{adjugate/adjoint}} \div 1$$

Divide every entry in the adjugate by this determinant

قم بتقسيم كل إدخال في المساعد على هذا المحدد

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 4: Divide Adjugate by Determinant

الخطوة ٤: قسمة المساعد على المحدد

$$\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

This is our final answer for the inverse matrix

هذه هي الإجابة النهائية للمصفوفة العكسية

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix
إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

Step 1: Find the Matrix of Minors
الخطوة ١: ابحث عن مصفوفة القصر
(each entry is a particular determinant)
(كل إدخال هو محدد معين)
Step 2: Find the Matrix of Cofactors
الخطوة ٢: العثور على مصفوفة العوامل المساعدة
(follow the plus/minus checkerboard)
(اتبع رقعة الشطرنج زائد/ناقص)
Step 3: Find the Adjugate
الخطوة ٣: ابحث عن المساعد
(transpose entries across the main diagonal)
(تبديل الإدخالات عبر القطر الرئيسي)
Step 4: Divide by Determinant
الخطوة ٤: القسمة على المحدد
(divide each entry by determinant of original matrix)
(اقسم كل إدخال على محدد المصفوفة الأصلية)

Finding the Inverse of a Three-By-Three Matrix

إيجاد معكوس مصفوفة ثلاثة في ثلاثة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Finding the inverse of this matrix was rather laborious

كان العثور على معكوس هذه المصفوفة أمرًا شاقًا إلى حد ما

Finding the Inverse of Larger Matrices

إيجاد معكوس المصفوفات الأكبر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Finding the inverse of this matrix would require an incredible number of steps

يتطلب العثور على معكوس هذه المصفوفة عددًا لا يصدق من الخطوات

Finding the Inverse of Larger Matrices
إيجاد معكوس المصفوفات الأكبر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

We would use a
matrix calculator

سوف نستخدم حاسبة
المصفوفات

Inverse matrices
المصفوفات العكسية

Matricesالمصفوفات

Additionإضافة

Subtractionالطرح

Multiplicationالضرب

Determinantsالمحددات

Inversesمعكوس

Checking Comprehension
التحقق من الفهم

Find the inverse of the following matrix:

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Checking Comprehension

التحقق من الفهم

Find the inverse of the following matrix:

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 3 & -6 \\ -6 & 3 & -7 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$