Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Tecnologia
Lista 3 de Álgebra Linear
Prof. Fernando RL Contreras

Sejam os seguintes problemas

1. Sendo $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ são vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$, definamos $< u, v >= \frac{x_1 y_1}{a^2} + \frac{x_2 y_2}{b^2}$ com $a, b \in \mathbb{R}$ fixos e não nulos. Provar que $< u, v >$ define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.

2. Em $P_2(\mathbb{R})$ com produto interno dado por $< f(t), g(t) >= \int_0^1 dt$ calcule a norma de $f(t)$ nos seguintes casos:

   - $f(t) = t$.
   - $f(t) = -t^2 + 1$.

3. Em $P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno definido por: $< f(t), g(t) >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$

   - Ortonormalize a base $\{1, 1+t, 2t^2\}$.
   - Ache o complemento ortogonal do sub-espaço $W = [5, 1+t]$

4. Sejam U e V sub-espaços vetoriais de um espaço euclidiano de dimensão finita. Prove que $(U \cap V)^{\perp} = U^{\perp} + V^{\perp}$.

5. Consideremos o $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e seja $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \quad x + y = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y + z = 0\}$. Determine uma base ortonormal de W e uma base ortonormal de $W^{\perp}$.

6. Considere a seguinte transformação linear do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^2$: $F(x, y, z) = (x - y - z, 2z - x)$. Determine uma base ortonormal de $Ker(F)$ em relação ao produto interno usual.

7. Achar a projeção ortogonal de $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ sobre o subespaço $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$, usando o produto interno usual do $\mathbb{R}^4$.

8. Seja V um espaço euclidiano. Demostrar que a função $N : V \to \mathbb{R}$ definida por $N(u) =< u, u >$. Verifica que:

   - $N(\alpha u) = \alpha^2 N(u)$.
   - $N(u + v) - N(u) - N(v) = 2 < u, v >$.
   - $\frac{1}{4} N(u + v) - \frac{1}{4} N(u - v) =< u, v >$.

9. Considere o subespaço W de $\mathbb{R}^3$ gerado por $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, -1, -1)$. Sendo $<, >$ o produto interno usual (a) Ache $W^{\perp}$; (b) Exiba uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = W$ e $Ker(T) = W^{\perp}$.

10. Podemos definir uma "distancia" entre dois ponto $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ do plano por $d(P, Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Verifique se a aplicação dada por $< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= d(P, Q)$ define um produto interno no plano.

11. Seja E um espaço vetorial com produto interno. Prove que para quaisquer $u, v \in E$, tem-se $| \|u\| - \|v\| | \leq \|u - v\|$.

12. Seja $<,>$ um produto interno no espaço vetorial F. Dado um isomorfismo $A : E \to F$, ponha $[u,v] = <A(u),A(v)>$ para quaisquer $u,v \in E$. Prove que $[,]$ é um produto interno em E.

13. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $P(X) = X^2 - 1$. Diagonalizar $P(A)$, se possível.

14. Seja $T : V \longrightarrow V$ a) Se $\lambda = 0$ é autovalor de T, mostre que T não é injetora. b) A reciproca é verdadeira? Ou seja, se T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T.

15. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ a) Ache os autovalores de A e A^{-1}. b) Quais são os autovetores correspondentes?

16. Suponha que $v \in V$ seja autovetor de $T : V \longrightarrow V$e $S : V \longrightarrow V$, ao mesmo tempo com autovalores λ_1 e λ_2 respectivamente. Ache os autovalores e autovetores de a) $S+T$ e b) $S \circ T$.

17. Ache os autovalores e autovetores correspondentes das transformações lineares dadas:

    - $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(ax^2+bx+c) = ax^2+cx+b$.
    - $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z,w) = (x,x+y,x+y+z,x+y+z+w)$.

18. Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é idempotente se $T^2 = T$ (isto é, se $T \circ T(v) = T(v)$ para todo $v \in V$). a) Seja T idenpotente. Ache seus autovalores. b) Mostre que um operador linear idenpotente é diagonalizável.

19. Seja A matriz $3X3$ triangular superior, com todos os seus elementos acima da diagonal distintos e não nulos. $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ Quais são os autovalores e autovetores de A?.

20. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

21. Utilize a forma diagonal para encontrar A^n no seguinte caso $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.