Notas de Aula

Álgebra Linear

Fernando R. L. Contreras
Núcleo de Tecnologia
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

September 3, 2018

1 Revisão de Matrizes

Definição 1. *Uma matriz $m \times n$ é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas denotado por:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Usaremos sempre letras maiúsculas (por exemplo: A) para denotar matrizes, e quando quisermos especificar a ordem de uma matriz **A**, escreveremos $\mathbf{A}_{m\times n}$.

Exemplo 1. *Seja a matriz*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

cuja ordem é 2×4. *O elemento da primeira linha é* $a_{13} = -4$.

Definição 2. *Duas matrizes $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{r\times s}$ são iguais ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$), se elas tem o mesmo número de filas $m = r$ e o mesmo número de colunas $n = s$ e todos os elementos correspondentes são iguais $a_{ij} = b_{ij}$.*

Exemplo 2. *Seja a matriz*

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log(1) \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \sin(90°) & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

cuja ordem é 2×4. *O elemento da primeira linha é* $a_{13} = -4$.

1.1 Tipos especiais de matrizes

Definição 3. *Uma matriz quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 3. *Sejam as matrizes quadradas:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

No caso de matrizes quadradas $A_{n\times n}$, acostumamos dizer que A é uma matriz quadrada de ordem n.

Definição 4. *A matriz nula é aquela que $a_{ij} = 0$ para todo i e j.*

Exemplo 4. *Sejam as matrizes nulas:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Definição 5. *A matriz coluna é aquela que possui uma única coluna ($n = 1$).*

Exemplo 5. *Sejam as matrizes coluna:*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Definição 6. *A matriz fila é aquela que possui uma única linha ($m = 1$).*

Exemplo 6. *Sejam as matrizes fila:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

Definição 7. *Matriz diagonal é uma matriz quadrada $m = n$ onde $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na "diagonal" são nulos.*

Exemplo 7. *Sejam as matrizes diagonais:*

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Definição 8. *A matriz identidade quadrada é aquela matriz em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.*

Exemplo 8. *Sejam as matrizes:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 9. *A matriz triangular superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$ para $i > j$.*

Exemplo 9. *Sejam as matrizes triangular superior:*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

De maneira análoga podemos definir a matriz triangular inferior.

Definição 10. *A matriz triangular inferior é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$ para $i < j$.*

Exemplo 10. *Sejam as matrizes triangular inferior:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Definição 11. *Matriz simétrica é aquela onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e j.*

Exemplo 11. *Sejam as matrizes simétricas:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

Observe que no caso da matriz simétrica a parte superior é uma reflexão da parte inferior em relação a diagonal.

1.2 Operações com matrizes

Definição 12. *A soma de duas matrizes $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$ resulta outra matriz de ordem $m \times n$ que denotamos por $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Isto é, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$.*

Exemplo 12. *Sejam as matrizes:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de C a soma das duas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, então

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -1+4 \\ 4-2 & 0+5 \\ 2+1 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Dadas as matrizes **A**, **B** e **C** da mesma ordem $m \times n$ temos:

(a). $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (comutatividade) (Prove...!)

(b). $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$ (Associatividade)

(c). $\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$, onde $\mathbf{0}$ denota a matriz nula de ordem $m \times n$.

Definição 13. *A multiplicação de uma matriz $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ por um escalar (qualquer numero real) $\alpha \in \mathbb{R}$ resulta em outra matriz $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]_{m\times n}$, denotado por $\boldsymbol{C}=\alpha\boldsymbol{A}=\alpha[a_{ij}]_{m\times n}=[\alpha a_{ij}]_{m\times n}$, onde $c_{ij}=\alpha a_{ij}$.*

Neste caso podemos dizer que C é um múltiplo escalar da matriz A.

Exemplo 13. *Seja a matriz:*

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$$

Se chamamos de $\boldsymbol{C}$ é a multiplicação escalar de $\alpha=2$ por $\boldsymbol{A}$, então

$$\boldsymbol{C}=2\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 1 & 2\times(-1)\\ 2\times 4 & 2\times 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 8 & 0\end{bmatrix}$$

Propriedades

Dadas duas matrizes **A** e **B** da mesma ordem $m \times n$ e números α_1, α_2 e α_3 temos:

(a). $\alpha_1(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha_1\mathbf{A}+\alpha_1\mathbf{B}$

(b). $(\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{A}=\alpha_1\mathbf{A}+\alpha_2\mathbf{A}$

(c). $0A=0$, onde 0 é o número zero.

(d). $\alpha_1(\alpha_2\mathbf{A})=(\alpha_1\alpha_2)\mathbf{A}$

Definição 14. *O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times r}$ e $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{r\times n}$ é definido pela matriz de ordem $m\times n$:*

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$$

obtida da seguinte forma:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ir}b_{rj}$$

para todo $i=1,...,m$ e $j=1,...,n$.

Exemplo 14. *Sejam as matrizes:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de $\boldsymbol{C}$ *a soma das duas matrizes* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$*, então*

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1+1\times 0 & 2\times(-1)+1\times 4 \\ 4\times 1+2\times 0 & 4\times(-1)+2\times 4 \\ 5\times 1+3\times 0 & 5\times(-1)+3\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Propriedades

(a). Em geral $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

(b). $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$ ($\mathbf{I}$ matriz identidade de ordem $n \times n$).

(c). $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$, onde a matriz $\mathbf{A}$ é de ordem $m \times r$ e as matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são de ordem $r \times n$.

(d). $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$, onde a matriz $\mathbf{C}$ é de ordem $r \times n$ e as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são de ordem $m \times r$.

(e). $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$, em geral as matrizes $\mathbf{A}$ pode-se considerar de ordem $m \times r$, $\mathbf{B}$ de ordem $r \times s$ e $\mathbf{C}$ de ordem $s \times n$.

(d). $\mathbf{0A} = \mathbf{A0} = \mathbf{0}$.

Definição 15. *A transposta de uma matriz* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ *é definida por:*

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^t$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji}$$

para todo $i = 1,...,m$ *e* $j = 1,...,n$*.*

Exemplo 15. *Sejam as matrizes:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

A matriz transposta de $\boldsymbol{A}$ *é dada por:*

$$\boldsymbol{A}^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Consideremos duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de ordem $m \times n$:

(a). Dizemos que uma matriz é simétrica se, e somente se, ela é igual à sua transposta ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$).

(b). $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$, isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

(c). $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$ sempre que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

(d). $(\alpha\mathbf{A})^t = \alpha\mathbf{A}^t$, onde α é qualquer escalar.

(e). $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$, para $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times r}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{r\times n}$.

1.3 Exercícios

1. Dada as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

   Calcule $(\mathbf{B}^t\mathbf{A})^t$

   Rpta: $(\mathbf{B}^t\mathbf{A})^t = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \end{bmatrix}$

2. Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Calcule $\mathbf{AB} - \mathbf{I}$.

2. Mostre que:

   2.1. $\mathbf{AA}^t$ é simétrica.

   2.2. $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$ é simétrica.

   2.3. $\mathbf{A} - \mathbf{A}^t$ é anti-simétrica.

3. Mostre que toda matriz quadrada é a soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica. *Sugestão.* $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^t)$ é simétrica e $\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^t)$ é anti-simétrica a soma dos dois é uma matriz quadrada $\mathbf{A}$.

2 Sistemas lineares

Definição 16. *Dados os números reais* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta$ $(n \geqslant 1)$*, à equação:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \beta$$

damos o nome de ***equação linear*** *sobre* $\mathbb{R}$ *nas incógnitas* $x_1, x_2, ...x_n$*, onde cada* x_i *são variáveis em* $\mathbb{R}$

Uma ***solução*** dessa equação é uma sequência de n números reais (não necessariamente distintos entre si), indicada por $(b_1, ..., b_n)$, tal que:

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n = \beta$$

é uma frase verdadeira.

Exemplo 16. *Dada a equação:* $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$*, a terna ordenada* $(1,1,0)$ *é uma solução dessa equação pois* $2 \cdot 1 - 1 + 0 = 1$ *é verdadeira.*

Definição 17. *Um sistema de m equações lineares com n incógnitas* $(m, n \geqslant 1)$ *é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente. Um sistema linear se apresenta do seguinte modo:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = \beta_2 \\ ...... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Uma solução do sistema acima é uma n-upla $(b_1, ..., b_n)$ de números reais que é solução de cada uma das equações do sistema.

Se, num sistema, tivermos $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$, o sistema será homogêneo. A n-upla $(0,0,...,0)$ é solução do sistema neste caso e por isso todo sistema homogêneo é compatível, de acordo com a definição anterior. A solução $(0,0,...,0)$ chama-se solução trivial do sistema homogêneo.

Exemplo 17. *Dado o sistema:*

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

Uma solução do sistema é $(0,3,4)$. Notemos que essa solução não é única: a terna $(\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, 0)$ também é solução do sistema.

Definição 18. *Dizemos que um sistema S linear é **incompatível** se S não admite nenhuma solução. Um sistema linear que admite uma única solução é chamado **compatível determinado**. Se o sistema linear S admitir mais do que uma solução então ele recebe o nome de **compatível indeterminado**.*

Exemplo 18. *O sistema:*

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+3y=3 \end{cases}$$

Possui exatamente uma única solução o qual é $(3,2)$ (fazer o gráfico).

Exemplo 19. *O sistema:*

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+2y=3 \end{cases}$$

Não possui nenhuma solução (fazer o gráfico).

Exemplo 20. *O sistema:*

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$$

Possui infinitas soluções (fazer o gráfico).

Dadas as retas:

$$\begin{cases} r: ax+by+c=0 \\ s: a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$$

Temos os seguintes casos:
a) se $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$, então as retas r e s são coincidentes

b) se $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}\neq\frac{c}{c_1}$, então as retas r e s são paralelas

b) se $\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$, então as retas r e s são concorrentes

3 Sistemas equivalentes

Seja S um sistema linear de m equações com n incógnitas. Interessa-nos considerar os sistemas que podem ser obtidos de S de uma das seguintes maneiras:

I. *Permutar* duas das equações de S. É evidente que se S_1 indicar o sistema assim obtido, então toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

II. *Multiplicar* uma das equações S por um número real $\lambda \neq 0$. Indicamos por S_1 o sistema assim obtido, então toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

III. *Somar* a uma das equações do sistema uma outra equação desse sistema multiplicada por um número real, ou seja

$$S_1 : \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n = \beta_i \\ (\lambda\alpha_{i1} + \alpha_{j1})x_1 + \ldots + (\lambda\alpha_{in} + \alpha_{jn})x_n = \lambda\beta_i + \beta_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

O sistema obtido S_1 e o sistema S ou são ambos incompatíveis ou admitem ambos as mesmas soluções.

Definição 19. *Dado um sistema linear S, qualquer das modificações explicadas acima em (I), (II) e (III) que se faça com esse sistema S recebe o nome de <u>operação elementar com S</u>. Se um sistema linear S_1 foi obtido de um sistema linear S através de um número finito de operações elementares, dizemos que S_1 é equivalente a S e denotaremos por $S_1 \equiv S$.*

Propriedades

(a). $S \equiv S$ (reflexiva)

(b). $S_1 \equiv S$, então $S \equiv S_1$ (simétrica)

(c). $S_1 \equiv S$ e $S \equiv S_2$, então $S_1 \equiv S_2$ (transitiva)

Desta forma criamos um mecanismo extremamente util para a procura de soluções de um sistema linear S. Então, procuramos sempre encontrar um sistema linear equivalente a S e que seja <u>mais simples</u>.

Exemplo 21. *Analise o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=4 \\ x-2y+2z=0 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=4 \\ x-2y+2z=0 \end{cases} \quad \equiv (*) \begin{cases} x-y+z=1 \\ y-z=2 \\ -y+z=-1 \end{cases} \quad \equiv (**) \begin{cases} x-y+z=1 \\ y-z=2 \\ 0=1 \end{cases}$$

$(*)$ Multiplicamos por -2 a primeira equação e somamos o resultado com a segunda equação; multiplicamos a primeira equação por -1 e somamos com a terceira.
$(**)$ Somamos a segunda equação com a terceira.

4 Sistemas escalonados

Consideramos um sistema linear de m equações com n incógnitas que tem o seguinte aspecto:

$$\begin{cases} \alpha_{1r_1}x_{r_1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{2r_2}x_{r_2} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{kr_k}x_{r_k} + \ldots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k \\ 0x_n = \beta_{k+1} \end{cases}$$

onde $\alpha_{1r_1} \neq 0$, $\alpha_{2r_2} \neq 0$, ..., $\alpha_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geq 1$.
Se tivermos $1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_k \leq n$ diremos que S é um sistema linear escalonado.

Exemplo 22. *Exemplo de sistema escalonado:*

$$\begin{cases} 2x - y - z - 3t = 0 \\ z - t = 1 \\ 2t = 2 \end{cases}$$

Teorema 1. *Todo sistema linear S é equivalente a um sistema escalonado.*

Exemplo 23. *Escalonar o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ -z + 3x + 2y + 2t = 1 \\ -z + 2x - y - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ 4x - 2y - 2t = 4 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$$

$$\equiv \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}t = 1 \\ 4x - 2y - 2t = 4 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}t = 1 \\ \frac{7}{10}y + \frac{7}{10}t = 0 \\ y - t = 4 \end{cases} \equiv \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ y + t = 0 \\ y - t = 4 \end{cases} \equiv \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ y + t = 0 \\ -2t = 4 \end{cases}$$

$$\equiv \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ y + t = 0 \\ -2t = 4 \end{cases}$$

Exemplo 24. *Discutir e resolver o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

Resposta: O sistema é compatível determinado e $(0, -2/3, 1/3)$ é sua solução.

5 Matrizes Inversíveis

Definição 20. *Uma matriz A de ordem n se diz inversível se, e somente se, existe uma matriz B, também de ordem n, de modo que:*

$$AB = BA = I$$

Esta matriz B, caso existe, é única e chama-se inversa de A, indica-se por A^{-1}.

Observação.
(a) Se uma linha (ou coluna) de uma matriz A é nula, então A não é invertível.
(b) Se A e B são matrizes de ordem n, ambas inversíveis, então AB também é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(c) Se A é invertível, então A^{-1} também e $(A^{-1})^{-1} = A$.

Teorema 2. *Uma matriz A é inversível se, e somente se, $I \equiv A$. Neste caso, a mesma sequencia de operações elementares que transforma A em I, transforma I em A^{-1}.*

Exemplo 25. *Verificar se a matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

É inversível e determinar A^{-1}, caso esta matriz exista.

Sistemas de Cramer

A regra do Cramer somente é aplicado a sistemas cujo, número de incógnitas é igual ao número de equações do sistema. Seja:

$$S : \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + ... + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ .... \\ \alpha_{m1}x_1 + ... + \alpha_{mn}x_n = \beta_n \end{cases}$$

Um sistema linear de m equações com n incógnitas sobre o conjunto dos números reais. Se formamos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & ... & \alpha_{2n} \\ .... & .... & .... \\ \alpha_{m1} & ... & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \\ .... \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

de tipos $m \times n$, $n \times 1$ e $m \times 1$, respectivamente, então S poderá ser escrito sob a forma matricial

$$AX = B$$

onde A recebe o nome de matriz dos coeficientes de S.

Um sistema de Cramer é um sistema linear de n equações com n incógnitas cuja matriz dos coeficientes é inversível. Se $AX = B$ é um sistema de Cramer, como:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Então, esse sistema é compatível determinado e sua única solução é dada por $A^{-1}B$. Em particular um sistema quadrado e homogêneo cuja matriz dos coeficientes é inversível só admite a solução trivial.

Exemplo 26. *Verificar se a matriz:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que já vimos ser inversível; já determinamos também

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Logo:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema é $(0,1,0)$.

6 Espaços Vetoriais

Definição 21. *Dizemos que um conjunto V não vazio é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ quando e somente quando:*
***I**. Existe uma adição $(u,v) \mapsto u+v$ em V, com as seguinte propriedades:*

- *u+v=v+u, $\forall u, v \in V$ (comutativa);*
- *u+(v+w)=(u+v)+w, $\forall u, v, w \in V$ (associativa);*
- *Existe em V um elemento neutro para essa adição o qual será simbolizado genericamente por* 0. *Ou seja:*
  $\exists 0 \in V | u+0=u$, $\forall u \in V$;
- *Para todo elemento u de V existe o oposto; indicaremos por $(-u)$ esse é oposto. Assim:*
  $\forall u \in V$, $\exists 0 \in V | u+(-u)=0$;

***II**. esta definida uma multiplicação de $\mathbb{R} \times V$ em V, o que significa que a cada par (α, u) de $\mathbb{R} \times V$ esta associado um único elemento de V que se indica por αu, e para essa multiplicação tem-se o seguinte:*

- $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
- $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
- $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$;
- $1u = u$, *para quaisquer u, v de V e α, β de $\mathbb{R}$.*

Exemplo 27. *Para todo número natural n, o simbolo $\mathbb{R}^n$ representa o espaço vetorial euclidiano n-dimensional. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são as listas ordenadas $u = (x_1, ..., x_n)$ e $v = (y_1, ..., y_n)$ de números reais.*

As equações do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ são definidas pondo:
$u+v = (x_1+y_1, ..., x_n+y_n)$
$\alpha u = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$.

O vetor zero é, por definição, aquela cujas coordenadas são todos iguais a zero, $0 = (0, ..., 0)$. O inverso aditivo de $u = (x_1, ..., x_n)$ é $-u = (-x_1 ...., -x_n)$ verifica-se, sem dificuldade que estas definições fazem $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial.

Exemplo 28. *Uma matriz (real) $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ é uma lista de números reais a_{ij} com indices duplos, onde $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant i \leqslant n$, podemos representar a matriz A como:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O conjunto $M(m\times n)$ de todas as matrizes $m\times n$ torna-se um espaço vetorial quando nele se define a soma das matrizes $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$ como $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$ e o produto da matriz A pelo numero real α como $\alpha A=[\alpha a_{ij}]$.

A matriz nula $0\in M(m\times n)$ é aquela formada por zeros e o inverso aditivo da matriz $A=[a_{ij}]$ é $-A=[-a_{ij}]$.

Exemplo 29. *Em $\mathbb{R}^2$, mantenhamos a definição do produto αv de um número por um vetor mas modifiquemos, de 3 maneiras diferentes, a definição da soma $u=(x,y)$ e $v=\left(x^{'},y^{'}\right)$. Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados:*

a) $u+v=\left(x+y^{'},x^{'}+y\right)$

b) $u+v=\left(xx^{'},yy^{'}\right)$

c) $u+v=\left(3x+3x^{'},5x+5x^{'}\right)$

Escrevemos $u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2)$ e $w=(x_3,y_3)$ no que se segue. Em todos os itens funcionam os axiomas da associatividade do produto e da multiplicação por 1, que não tem nada ver com a adição.

a) Para $u+v=(x_1+y_2,x_2+y_1)$.

Verificamos a comutatividade:
$u+v=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+y_2,x_2+y_1)$ e $v+u=(x_2,y_2)+(x_1,y_1)=(x_2+y_1,x_1+y_1)$. São diferentes em geral. FALHA!!

Agora verificamos a associatividade:
$(u+v)+w=(x_1+y_2,x_2+y_1)+(x_3,y_3)=(x_1+y_2+y_3,x_3+x_2+y_1)$ e
$u+(v+w)=(x_1,y_1)+(x_2+y_3,x_3+y_2)=(x_1+x_3+y_2,x_2+y_3+y_1)$. São diferentes em geral. FALHA!!

Verificamos o vetor nulo:
$O+u=(a,b)+(x_1,y_1)=(a+y_1,x_1+b)=(x_1,y_1)$ logo $a=x_1-y_1$ e $b=y_1-x_1$, assim concluímos que o suposto vetor nulo $O=(a,b)$ não é único. Consequentemente não faz sentido falar do inverso aditivo.

Verificamos a distributividade:
sejam $\alpha u+\beta u=(\alpha x_1+\beta y_1,\beta x_1+\alpha y_1)$ e $(\alpha+\beta)u=((\alpha+\beta)x_1,(\alpha+\beta)y_1)$. São diferentes em geral. FALHA!!

De outra parte temos:
$\alpha(u+v)=(\alpha(x_1+y_2),\alpha(x_2+y_1))$ e $\alpha u+\alpha v=(\alpha x_1,\alpha y_1)+(\alpha x_2,\alpha y_2)=(\alpha(x_1+y_2),\alpha(x_2+y_1))$. Funciona!!

Deixar como tarefa o **b)** e **c)**.

6.1 Subespaço vetorial

Definição 22. *Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se:*

i. $0 \in W$;

ii. Para quaisquer u, v, então $u + v \in W$;

iii. Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W$, *tivermos* $\alpha u \in W$

<u>*Note*</u>. Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços vetoriais (que são chamados subespaços triviais), o conjunto somente formado pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial.

Exemplo 30. *Seja* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $W \subset V$, *um plano passando pela origen.*

Exemplo 31. *Seja* $V = \mathbb{R}^5$ *e* $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i \in \mathbb{R}\}$, *um plano que não passa pela origem.*

W não é subespaço de V, pois existem u e $v \in W$ tal que $u + v \notin W$.

Exemplo 32. *Seja* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $W = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. *Se escolhermos* $u = (1,1)$ *e* $v = (2,4)$ *temos que* $u + v = (3,5) \notin W$. *Assim W não é subespaço vetorial de V.*

Teorema 3. *(Interseção de subconjuntos): Dados W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V, a interseção $W_1 \cap W_2$ ainda é subespaço vetorial.*

Exemplo 33. *Seja* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $W_1 \cap W_2$ *é a reta de interseção dos planos W_1 e W_2.*

Teorema 4. *(Soma de subespaços): Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Então, o conjunto* $W_1 + W_2 = \{v \in V : v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1 e w_2 \in W_2\}$ *é subespaço de V.*

Quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, então $W_1 + W_2$ é chamado de soma direta de W_1 e W_2, denotado por $W_1 \oplus W_2$. Todo vetor $w \in W_1 \oplus W_2$ se escreve, de modo único, como a soma $w = w_1 + w_2$ onde W_1 e W_2.

6.2 Combinação Linear

Vamos comentar, agora, uma das características mais importantes de um espaço vetorial, que é a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados.

Definição 23. *Sejam V um espaço vetorial real e sejam* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *e* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. *Então, o vetor* $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ *é um elemento de V ao que chamaremos combinação linear de* $v_1, \ldots, v_n$.

Exemplo 34. *No espaço vetorial P_2 dos polinômios de grau* $\leqslant 2$, *o polinômio* $v = 7x^2 + 11x - 26$ *é uma combinação linear dos polinômios* $v_1 = 5x^2 - 3x + 2$ *e* $v_2 = -2x^2 + 5x - 8$*?.*

Seja $v = \alpha v_1 + \beta v_2$, devemos calcular α e β, caso eles existam e sejam números reais, então podemos conclui que v pode-se escrever como combinação linear de v_1 e v_2.

Em efeito:
$7x^2 + 11x - 26 = \alpha(5x^2 - 3x + 2) + \beta(-2x^2 + 5x - 8) = (5\alpha - 2\beta)x^2 + (-3\alpha + 5\beta)x + (2\alpha - 8\beta)$

Logo resolvendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 5\alpha - 2\beta = 7 \\ -3\alpha + 5\beta = 11 \\ 2\alpha - 8\beta = -26 \end{cases}$$

obtemos o valor de $\alpha = 3$ e $\beta = 4$. Portanto, v pode-se escrever como combinação linear de v_1 e v_2.

Exemplo 35. *Sejam os vetores* $v_1 = (1, -3, 2)$ *e* $v_2 = (2, 4, -1)$. *Escreva o vetor* $v = (-4, -18, 7)$ *como combinação linear dos vetores* v_1 *e* v_2.

Pretende-se que: $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$, sendo a_1 e a_2 escalares a determinar. Então, devemos ter: $(-4, -18, 7) = a_1(1, -3, 2) + a_2(2, 4, -1) = (a_1 + 2a_2, -3a_1 + 4a_2, 2a_1 - a_2)$ logo

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -3a_1 + 4a_2 = -18 \\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{cases}$$

Cuja solução do sistema de equações lineares anterior é $a_1 = 2$ e $a_2 = -3$. Portanto, $v = 2v_1 - 3v_2$.

6.2.1 Subespaços gerados

Uma vez fixados os vetores $v_1, ..., v_n \in V$, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes, é chamado de subespaço gerado por $v_1, ..., v_n$ e usamos a notação

$W = [v_1, ..., v_n] = \{v \in V : v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n, \alpha_i \in \mathbb{R}, \leqslant i \leqslant n\}$.

Uma outra caracterização de subespaço gerado é a seguinte: $W = [v_1, ..., v_n]$ é o menor subespaço de V que contem o conjunto de vetores $\{v_1, ..., v_n\}$, no sentido de que qualquer outro subespaço W' de V que contenha $\{v_1, ..., v_n\}$ satisfará $W \subset W'$. (TAREFA-PROVE!!!)

Exemplo 36. *Mostre que o subconjunto* $W = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\right\}$ *é gerado pelo conjunto* $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ *do* $\mathbb{R}^3$.

Seja $(x, y, 0) \in W$ tal que $(x, y, 0) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0)$, logo:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$$

, então qualquer vetor $(x,y,0) \in W$ pode ser escrito como combinação linear de $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Exemplo 37. *Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determine o subespaço gerado pelo vetor $v_1 = (1,2,3)$.*

Temos $[v_1] = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(1,2,3), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ logo $(x,y,z) = \alpha(1,2,3)$, então $x = \alpha$, $y = 2\alpha$ e $z = 3\alpha$. Assim $[v_1] = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \quad \text{e} \quad z = 3x\right\}$. onde $[v_1]$ é subespaço gerado de $v_1 \in \mathbb{R}^3$ (particularmente é uma reta que passa pela origem).

O subespaço gerado por um vetor $v_1 \in \mathbb{R}^3$, $v_1 \neq 0$ é uma reta que passa pela origem. Se a esse vetor acrescentamos $v_2, v_3, \ldots$ todos colineares entre si, o subespaço gerado por $v_2, v_3, \ldots$ vetores continuará sendo a mesma reta: $[v_1] = [v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3] = \ldots$, por exemplo o vetor $(7,14,21)$ posso escrever como combinação linear de $(1,2,3)$ e $(2,4,6)$, ou seja, $(7,14,21) = 1(1,2,3) + 3(2,4,6)$.

Exemplo 38. *Determine o subespaço gerado pelo conjunto $A = \{(1,-2,-1),(2,1,1)\}$.*

Temos $[v_1, v_2] = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(1,-2,-1) + \beta(2,1,1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$. Da desigualdade acima, temos:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ -2\alpha + \beta = y \\ -\alpha + \beta = z \end{cases}$$

, então

$$\begin{cases} \beta = \frac{x+z}{3} \\ \alpha = \frac{x-2z}{3} \end{cases}$$

Substituindo na equação (II) do primeiro sistema de eqs. lineares temos: $x + 3y - 5z = 0$.

Logo, $[v_1, v_2] = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - 5z = 0\right\}$ (FAZER O GRÁFICO)

O subespaço gerado pelos vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, não colineares, é um plano P que passa pela origem. Se esses dois vetores acrescentamos $v_3, v_4, \ldots$ todos coplanares, ao subespaço gerado por $v_3, v_4, \ldots$ vetores continuará sendo o mesmo plano P: $[v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3, v_4] = \ldots$

6.3 Dependência e independência linear

Definição 24. *Seja V um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LI, se a equação:*

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

Implica $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. No caso que exista algum $\alpha_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente (LD), ou que os vetores são $v_1, \ldots, v_n$ são LD.

Teorema 5. *$\{v_1,...,v_n\}$ é LD se, e somente se, um desses vetores for uma combinação linear dos outros.*

Exemplo 39. *No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^4$, os vetores $v_1 = (2,2,3,4)$, $v_2 = (0,5,-3,1)$ e $v_3 = (0,0,4,-2)$ são linearmente independentes?*

De fato: a partir de $a(2,2,3,4)+b(0,5,-3,1)+c(0,0,4,-2) = (0,0,0,0)$ temos: $(2a, 2a+5b, 3a-3b+4c, 4a+b-2c) = (0,0,0,0)$, isto é,

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ 2a+5b = 0 \\ 3a-3b+4c = 0 \\ 4a+b-2c = 0 \end{cases}$$

O sistema admite unicamente a solução $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0$.

Exemplo 40. *No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, os vetores $v_1 = (2,-1,3)$, $v_2 = (-1,0,-2)$ e $v_3 = (2,-3,1)$ formam um conjunto LI? (TAREFA !!!!)*

6.4 Base de um espaço vetorial

Agora estamos interessados em encontrar, dentro de um espaço vetorial V, um conjunto finito de vetores, tais que qualquer outro vetor V seja uma combinação linear deles. Denominaremos um conjunto de vetores desse tipo de base.

Definição 25. *Um conjunto de vetores de V será uma base se:*

i. $\{v_1,...,v_n\}$ *é LI*

ii. $[v_1,...,v_n] = V$

Exemplo 41.

a. *Se $V = \mathbb{R}^2$ e sejam $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. O conjunto $\{e_1, e_2\}$ é uma base de V, conhecida como base canônica de $\mathbb{R}^2$.*

b. *O conjunto $\{(1,1),(0,1)\}$ também é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.*

De fato: Se $(0,0) = a(1,1)+b(0,1)$, então $a = 0$ e $b = 0$. Isto é, $\{(1,1),(0,1)\}$ é LI. E ainda $[(1,1),(0,1)] = V$ pois dado $v = (x,y) \in V$, temos $(x,y) = x(1,1)+(y-x)(0,1)$.

Ou seja todo vetor de V é combinação linear dos vetores $\{(1,1),(0,1)\}$.

c. *O conjunto $\{(0,1),(0,2)\}$ não é uma base $\mathbb{R}^2$, pois é um conjunto LD. Se $(0,0) = a(0,1)+b(0,2)$, $a = -2b$ logo a e b são necessariamente zero.*

d. *O conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$ mesmo sendo LI, já que não gera tudo o $\mathbb{R}^3$, isto é, $[(1,0,0),(0,1,0)] \neq \mathbb{R}^3$.*

Teorema 6. *Sejam $v_1,...,v_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.*

Teorema 7. *Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finitos de vetores $\{v_1,...,v_n\}$. Então, qualquer conjunto de mais de n vetores em V é necessariamente LD (e portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).*

Note-se. Se o espaço vetorial V admite uma base $\{v_1,...,v_n\}$ com n elementos, qualquer outra base de V possui n elementos. Concluímos, portanto, que qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado dimensão de V, e é denotado $dim(V)$.

Exemplo 42. *Se $V=\mathbb{R}^2$, os conjuntos $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(1,1),(0,1)\}$ são bases de V, então $dim(V)=2$.*

Exemplo 43. *Se $V=M(2,2)$, uma base tem 4 elementos, então $dim(V)=4$.*

Teorema 8. *Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base em V (por exemplo, $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ é LI logo $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$).*

Note-se. Se $dim(V)=n$, qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V.

Teorema 9. *Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $dim(U) \leqslant dim(V)$ e $dim(W) \leqslant dim(V)$. Além disso,*

$$dim(U+W)=dim(U)+dim(W)-dim(U\cap W)$$

Teorema 10. *Dada uma base $\{v_1,...,v_n\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear de $v_1,...,v_n$.*

Definição 26. *Sejam $\beta=\{v_1,...,v_n\}$ base de V e $v\in V$ onde $v=a_1v_1+...+a_nv_n$. Chamamos estes números $a_1,...,a_n$ de coordenadas de v em relação a base β e denotamos por:*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 44. *Calcule as coordenadas do vetor $(4,3)$ nas bases $\beta=\{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta^{'}=\{(1,1),(0,1)\}$.*

O coordenadas do vetor $(4,3)=4(1,0)+3(0,1)$ na base β são 4 e 3, ou seja,

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O coordenadas do vetor $(4,3) = 4(1,1) - 1(0,1)$ na base β' são 4 e -1, ou seja,

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

<u>Note-se</u>. Que a ordem dos elementos de uma base também influi na matriz das coordenadas de um vetor em relação a base. Isto é,

$\beta_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta_2 = \{(0,1),(1,0)\}$, então

$$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

, respectivamente.

Exemplo 45. *Considere $U = \{(x,y,z) : x+y-z = 0\}$ e $W = \{(x,y,z) : x = y\}$. Determine $U+W$*

Observe que $U = [(1,0,1),(0,1,1)]$ e $W = [(1,1,0),(0,0,1)]$, então
$V+W = [(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1)]$ como $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever
$(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,0) + \theta(0,0,1)$ com
$\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = 0$ e $\theta = z-x-y$. Portanto, $U+W = \mathbb{R}^3$.

Logo $dim(U+W) = dim(\mathbb{R}^3) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cup W)$ e temos que $dim(U \cap W) = 1$ já que $V \cap W = \{(x,y,z) : x+y-z = 0ex = y\} = \left\{(x,y,z) : x = y = \frac{z}{2}\right\} = [(1,1,1/2)]$.

Exemplo 46. *Prove que os polinômios seguintes são LI $p(x) = x^3 - 5x^2 + 1$, $q(x) = 2x^4 + 5x - 6$ e $r(x) = x^2 - 5x + 2$.*

Exemplo 47. *Exiba uma base para cada um dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ listados a seguir:*

$F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$
$G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$
$H = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = x_2 = x_3\}$
$K = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

Exemplo 48. *Mostre que os polinômios 1, $x-1$ e $x^2 - 3x + 1$ formam uma base de P_2. Exprima os polinômio $2x^2 - 5x + 6$ como combinação linear dos elementos dessa base.*

Exemplo 49. *Dados $u = (1,2)$ e $v = (-1,2)$, sejam F_1 e F_2 respectivamente as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^2$ e contem u e v. Mostre que $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$.*