

Notas de Aula

Álgebra Linear

Fernando R. L. Contreras

Núcleo de Tecnologia

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

August 19, 2018

1 Revisão de Matrizes

Definição 1. Uma matriz $m \times n$ é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas denotado por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Usaremos sempre letras maiúsculas (por exemplo: \mathbf{A}) para denotar matrizes, e quando quisermos especificar a ordem de uma matriz \mathbf{A} , escreveremos $\mathbf{A}_{m \times n}$.

Exemplo 1. Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

cuja ordem é 2×4 . O elemento da primeira linha é $a_{13} = -4$.

Definição 2. Duas matrizes $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{r \times s}$ são iguais ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$), se elas tem o mesmo número de filas $m = r$ e o mesmo número de colunas $n = s$ e todos os elementos correspondentes são iguais $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo 2. Seja a matriz

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log(1) \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

cuja ordem é 2×4 . O elemento da primeira linha é $a_{13} = -4$.

1.1 Tipos especiais de matrizes

Definição 3. Uma matriz quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 3. *Sejam as matrizes quadradas:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad e \quad [1]$$

No caso de matrizes quadradas $A_{n \times n}$, acostumamos dizer que A é uma matriz quadrada de ordem n .

Definição 4. *A matriz nula é aquela que $a_{ij} = 0$ para todo i e j .*

Exemplo 4. *Sejam as matrizes nulas:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad [0]$$

Definição 5. *A matriz coluna é aquela que possui uma única coluna ($n = 1$).*

Exemplo 5. *Sejam as matrizes coluna:*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Definição 6. *A matriz fila é aquela que possui uma única linha ($m = 1$).*

Exemplo 6. *Sejam as matrizes fila:*

$$[1 \quad 0 \quad -1] \quad e \quad [x \quad y]$$

Definição 7. *Matriz diagonal é uma matriz quadrada $m = n$ onde $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na "diagonal" são nulos.*

Exemplo 7. *Sejam as matrizes diagonais:*

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Definição 8. *A matriz identidade quadrada é aquela matriz em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.*

Exemplo 8. *Sejam as matrizes:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 9. A matriz triangular superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Exemplo 9. Sejam as matrizes triangular superior:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

De maneira análoga podemos definir a matriz triangular inferior.

Definição 10. A matriz triangular inferior é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Exemplo 10. Sejam as matrizes triangular inferior:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Definição 11. Matriz simétrica é aquela onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e j .

Exemplo 11. Sejam as matrizes simétricas:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

Observe que no caso da matriz simétrica a parte superior é uma reflexão da parte inferior em relação a diagonal.

1.2 Operações com matrizes

Definição 12. A soma de duas matrizes $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$ resulta outra matriz de ordem $m \times n$ que denotamos por $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de \mathbf{A} e \mathbf{B} . Isto é, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$.

Exemplo 12. Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de \mathbf{C} a soma das duas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} , então

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -1+4 \\ 4-2 & 0+5 \\ 2+3 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Dadas as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} da mesma ordem $m \times n$ temos:

- (a). $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (comutatividade) (Prove...!)
- (b). $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (Associatividade)
- (c). $\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, onde $\mathbf{0}$ denota a matriz nula de ordem $m \times n$.

Definição 13. A multiplicação de uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ por um escalar (qualquer numero real) $\alpha \in \mathbb{R}$ resulta em outra matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n}$, denotado por $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{A} = \alpha [a_{ij}]_{m \times n} = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}$, onde $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Neste caso podemos dizer que \mathbf{C} é um múltiplo escalar da matriz \mathbf{A} .

Exemplo 13. Seja a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de \mathbf{C} é a multiplicação escalar de $\alpha = 2$ por \mathbf{A} , então

$$\mathbf{C} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 & 2 \times (-1) \\ 2 \times 4 & 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Dadas duas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} da mesma ordem $m \times n$ e números α_1 , α_2 e α_3 temos:

- (a). $\alpha_1 (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{B}$
- (b). $(\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}$
- (c). $0 \mathbf{A} = \mathbf{0}$, onde 0 é o número zero.
- (d). $\alpha_1 (\alpha_2 \mathbf{A}) = (\alpha_1 \alpha_2) \mathbf{A}$

Definição 14. O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times r}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{r \times n}$ é definido pela matriz de ordem $m \times n$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

obtida da seguinte forma:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Exemplo 14. *Sejam as matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de C a soma das duas matrizes A e B , então

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 0 & 2 \times (-1) + 1 \times 4 \\ 4 \times 1 + 2 \times 0 & 4 \times (-1) + 2 \times 4 \\ 5 \times 1 + 3 \times 0 & 5 \times (-1) + 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Propriedades

- (a). Em geral $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.
- (b). $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$ (\mathbf{I} matriz identidade de ordem $n \times n$).
- (c). $\mathbf{A(B+C)} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, onde a matriz \mathbf{A} é de ordem $m \times r$ e as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} são de ordem $r \times n$.
- (d). $(\mathbf{A+B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$, onde a matriz \mathbf{C} é de ordem $r \times n$ e as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são de ordem $m \times r$.
- (e). $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A(BC)}$, em geral as matrizes \mathbf{A} pode-se considerar de ordem $m \times r$, \mathbf{B} de ordem $r \times s$ e \mathbf{C} de ordem $s \times n$.
- (d). $\mathbf{0A} = \mathbf{A0} = \mathbf{0}$.

Definição 15. *A transposta de uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ é definida por:*

$$B = A^t$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji}$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Exemplo 15. *Sejam as matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

A matriz transposta de A é dada por:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Consideremos duas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} de ordem $m \times n$:

- (a). Dizemos que uma matriz é simétrica se, e somente se, ela é igual à sua transposta ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$).
- (b). $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$, isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.
- (c). $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$ sempre que \mathbf{A} e \mathbf{B} .
- (d). $(\alpha \mathbf{A})^t = \alpha \mathbf{A}^t$, onde α é qualquer escalar.
- (e). $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$, para $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times r}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{r \times n}$.

1.3 Exercícios

1. Dada as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Calcule $(\mathbf{B}^t \mathbf{A})^t$

Rpta: $(\mathbf{B}^t \mathbf{A})^t = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \end{bmatrix}$

2. Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $\mathbf{AB} - \mathbf{I}$.

2. Mostre que:

- 2.1. \mathbf{AA}^t é simétrica.
- 2.2. $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$ é simétrica.
- 2.3. $\mathbf{A} - \mathbf{A}^t$ é anti-simétrica.

3. Mostre que toda matriz quadrada é a soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica.
Sugestão. $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)$ é simétrica e $\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^t)$ é anti-simétrica a soma dos dois é uma matriz quadrada \mathbf{A} .

2 Sistemas lineares

Definição 16. Dados os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ ($n \geq 1$), à equação:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$$

damos o nome de **equação linear** sobre \mathbb{R} nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n , onde cada x_i são variáveis em \mathbb{R}

Uma **solução** dessa equação é uma sequência de n números reais (não necessariamente distintos entre si), indicada por (b_1, \dots, b_n) , tal que:

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n = \beta$$

é uma frase verdadeira.

Exemplo 16. Dada a equação: $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$, a terna ordenada $(1, 1, 0)$ é uma solução dessa equação pois $2 \cdot 1 - 1 + 0 = 1$ é verdadeira.

Definição 17. Um sistema de m equações lineares com n incógnitas ($m, n \geq 1$) é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente. Um sistema linear se apresenta do seguinte modo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Uma solução do sistema acima é uma n -upla (b_1, \dots, b_n) de números reais que é solução de cada uma das equações do sistema.

Se, num sistema, tivermos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, o sistema será homogêneo. A n -upla $(0, 0, \dots, 0)$ é solução do sistema neste caso e por isso todo sistema homogêneo é compatível, de acordo com a definição anterior. A solução $(0, 0, \dots, 0)$ chama-se solução trivial do sistema homogêneo.

Exemplo 17. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

Uma solução do sistema é $(0, 3, 4)$. Notemos que essa solução não é única: a terna $(\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, 0)$ também é solução do sistema.

Definição 18. Dizemos que um sistema S linear é **incompatível** se S não admite nenhuma solução. Um sistema linear que admite uma única solução é chamado **compatível determinado**. Se o sistema linear S admitir mais do que uma solução então ele recebe o nome de **compatível indeterminado**.

Exemplo 18. O sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$$

Possui exatamente uma única solução o qual é $(3, 2)$ (fazer o gráfico).

Exemplo 19. O sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Não possui nenhuma solução (fazer o gráfico).

Exemplo 20. O sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

Possui infinitas soluções (fazer o gráfico).

Dadas as retas:

$$\begin{cases} r : ax + by + c = 0 \\ s : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Temos os seguintes casos:

a) se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, então as retas r e s são coincidentes

b) se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$, então as retas r e s são paralelas

b) se $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$, então as retas r e s são concorrentes

Exemplo 21. *Analise o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \equiv (*) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ -y + z = -1 \end{cases} \equiv (**) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

(*) Multiplicamos por -2 a primeira equação e somamos o resultado com a segunda equação; multiplicamos a primeira equação por -1 e somamos com a terceira.

(**) Somamos a segunda equação com a terceira.

Exemplo 24. *Discutir e resolver o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

Resposta: O sistema é compatível determinado e $(0, -2/3, 1/3)$ é sua solução.

5 Matrizes Inversíveis

Definição 20. Uma matriz A de ordem n se diz inversível se, e somente se, existe uma matriz B , também de ordem n , de modo que:

$$AB = BA = I$$

Esta matriz B , caso existe, é única e chama-se inversa de A , indica-se por A^{-1} .

Observação.

- (a) Se uma linha (ou coluna) de uma matriz A é nula, então A não é invertível.
- (b) Se A e B são matrizes de ordem n , ambas inversíveis, então AB também é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (c) Se A é invertível, então A^{-1} também e $(A^{-1})^{-1} = A$.

Teorema 2. *Uma matriz A é inversível se, e somente se, $I \equiv A$. Neste caso, a mesma sequência de operações elementares que transforma A em I , transforma I em A^{-1} .*

Exemplo 25. Verificar se a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

É inversível e determinar A^{-1} , caso esta matriz exista.

Sistemas de Cramer

A regra do Cramer somente é aplicado a sistemas cujo, número de incógnitas é igual ao número de equações do sistema. Seja:

[illegible]

Um sistema linear de m equações com n incógnitas sobre o conjunto dos números reais. Se formamos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

de tipos $m \times n$, $n \times 1$ e $m \times 1$, respectivamente, então S poderá ser escrito sob a forma matricial

$$AX = B$$

onde A recebe o nome de matriz dos coeficientes de S .

Um sistema de Cramer é um sistema linear de n equações com n incógnitas cuja matriz dos coeficientes é inversível. Se $AX = B$ é um sistema de Cramer, como:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Então, esse sistema é compatível determinado e sua única solução é dada por $A^{-1}B$. Em particular um sistema quadrado e homogêneo cuja matriz dos coeficientes é inversível só admite a solução trivial.

Exemplo 26. *Verificar se a matriz:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que já vimos ser inversível; já determinamos também

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Logo:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema é $(0, 1, 0)$.

6 Espaços Vetoriais

Definição 21. Dizemos que um conjunto V não vazio é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} quando e somente quando:

I. Existe uma adição $(u, v) \mapsto u + v$ em V , com as seguintes propriedades:

- $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (comutativa);
- $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$ (associativa);
- Existe em V um elemento neutro para essa adição o qual será simbolizado genericamente por 0 . Ou seja:
 $\exists 0 \in V | u + 0 = u, \forall u \in V$;
- Para todo elemento u de V existe o oposto; indicaremos por $(-u)$ esse é oposto. Assim:
 $\forall u \in V, \exists 0 \in V | u + (-u) = 0$;

II. esta definida uma multiplicação de $\mathbb{R} \times V$ em V , o que significa que a cada par (α, u) de $\mathbb{R} \times V$ esta associado um único elemento de V que se indica por αu , e para essa multiplicação tem-se o seguinte:

- $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- $1u = u$, para quaisquer u, v de V e α, β de \mathbb{R} .

Exemplo 27. Para todo número natural n , o simbolo \mathbb{R}^n representa o espaço vetorial euclidiano n -dimensional. Os elementos de \mathbb{R}^n são as listas ordenadas $u = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, \dots, y_n)$ de números reais.

As equações do espaço vetorial \mathbb{R}^n são definidas pondo:

$$u + v = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha u = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

O vetor zero é, por definição, aquela cujas coordenadas são todos iguais a zero, $0 = (0, \dots, 0)$. O inverso aditivo de $u = (x_1, \dots, x_n)$ é $-u = (-x_1, \dots, -x_n)$ verifica-se, sem dificuldade que estas definições fazem \mathbb{R}^n um espaço vetorial.

Exemplo 28. Uma matriz (real) $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ é uma lista de números reais a_{ij} com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, podemos representar a matriz A como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O conjunto $M(m \times n)$ de todas as matrizes $m \times n$ torna-se um espaço vetorial quando nele se define a soma das matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ como $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ e o produto da matriz A pelo número real α como $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$.

A matriz nula $0 \in M(m \times n)$ é aquela formada por zeros e o inverso aditivo da matriz $A = [a_{ij}]$ é $-A = [-a_{ij}]$.

Exemplo 29. Em \mathbb{R}^2 , mantenhamos a definição do produto αv de um número por um vetor mas modifiquemos, de 3 maneiras diferentes, a definição da soma $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$. Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados:

a) $u + v = (x + y', x' + y)$

b) $u + v = (xx', yy')$

c) $u + v = (3x + 3x', 5x + 5x')$

Escrevemos $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$ no que se segue. Em todos os itens funcionam os axiomas da associatividade do produto e da multiplicação por 1, que não tem nada ver com a adição.

a) Para $u + v = (x_1 + y_2, x_2 + y_1)$.

Verificamos a comutatividade:

$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1)$ e $v + u = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_2 + y_1, x_1 + y_2)$. São diferentes em geral. FALHA!!

Agora verificamos a associatividade:

$(u + v) + w = (x_1 + y_2, x_2 + y_1) + (x_3, y_3) = (x_1 + y_2 + y_3, x_3 + x_2 + y_1)$ e $u + (v + w) = (x_1, y_1) + (x_2 + y_3, x_3 + y_2) = (x_1 + x_3 + y_2, x_2 + y_3 + y_1)$. São diferentes em geral. FALHA!!

Verificamos o vetor nulo:

$O + u = (a, b) + (x_1, y_1) = (a + y_1, x_1 + b) = (x_1, y_1)$ logo $a = x_1 - y_1$ e $b = y_1 - x_1$, assim concluímos que o suposto vetor nulo $O = (a, b)$ não é único. Consequentemente não faz sentido falar do inverso aditivo.

Verificamos a distributividade:

sejam $\alpha u + \beta u = (\alpha x_1 + \beta y_1, \beta x_1 + \alpha y_1)$ e $(\alpha + \beta)u = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)y_1)$. São diferentes em geral. FALHA!!

De outra parte temos:

$\alpha(u + v) = (\alpha(x_1 + y_2), \alpha(x_2 + y_1))$ e $\alpha u + \alpha v = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = (\alpha(x_1 + y_2), \alpha(x_2 + y_1))$. Funciona!!

Deixar como tarefa o b) e c).

6.1 Subespaço vetorial

Definição 22. Dado um espaço vetorial V , um subconjunto W , não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

- i. $0 \in W$;
- ii. Para quaisquer u, v , então $u + v \in W$;
- iii. Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W$, tivermos $\alpha u \in W$

Note. Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços vetoriais (que são chamados subespaços triviais), o conjunto somente formado pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial.

Exemplo 30. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subset V$, um plano passando pela origem.

Exemplo 31. Seja $V = \mathbb{R}^5$ e $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i \in \mathbb{R}\}$, um plano que não passa pela origem.

W não é subespaço de V , pois existem u e $v \in W$ tal que $u + v \notin W$.

Exemplo 32. Seja $V = \mathbb{R}^5$ e $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i \in \mathbb{R}\}$, um plano que não passa pela origem.

Exemplo 33. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. Se escolhermos $u = (1, 1)$ e $v = (2, 4)$ temos que $u + v = (3, 5) \notin W$. Assim W não é subespaço vetorial de V .

Teorema 3. (Interseção de subconjuntos): Dados W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V , a interseção $W_1 \cap W_2$ ainda é subespaço vetorial.

Exemplo 34. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $W_1 \cap W_2$ é a reta de interseção dos planos W_1 e W_2 .

Teorema 4. (Soma de subespaços): Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V . Então, o conjunto $W_1 + W_2 = \{v \in V : v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ é subespaço de V .

Quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, então $W_1 + W_2$ é chamado de soma direta de W_1 e W_2 , denotado por $W_1 \oplus W_2$. Todo vetor $w \in W_1 \oplus W_2$ se escreve, de modo único, como a soma $w = w_1 + w_2$ onde W_1 e W_2 .

6.2 Combinação Linear

Vamos comentar, agora, uma das características mais importantes de um espaço vetorial, que é a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados.

Definição 23. Sejam V um espaço vetorial real e sejam $v_1, \dots, v_n \in V$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ é um elemento de V ao que chamaremos combinação linear de v_1, \dots, v_n .

6.2.1 Subespaços gerados

Uma vez fixados os vetores $v_1, \dots, v_n \in V$, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes, é chamado de subespaço gerado por v_1, \dots, v_n e usamos a notação

$$W = [v_1, \dots, v_n] = \{v \in V : v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Uma outra caracterização de subespaço gerado é a seguinte: $W = [v_1, \dots, v_n]$ é o menor subespaço de V que contem o conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$, no sentido de que qualquer outro subespaço W' de V que contenha $\{v_1, \dots, v_n\}$ satisfará $W \subset W'$. (TAREFA-PROVE!!!)

Exemplo 35. No espaço vetorial P_2 dos polinômios de grau ≤ 2 , o polinômio $v = 7x^2 + 11x - 26$ é uma combinação linear dos polinômios $v_1 = 5x^2 - 3x + 2$ e $v_2 = -2x^2 + 5x - 8$?

Seja $v = \alpha v_1 + \beta v_2$, devemos calcular α e β , caso eles existam e sejam números reais, então podemos concluir que v pode-se escrever como combinação linear de v_1 e v_2 .

Em efeito:

$$7x^2 + 11x - 26 = \alpha(5x^2 - 3x + 2) + \beta(-2x^2 + 5x - 8) = (5\alpha - 2\beta)x^2 + (-3\alpha + 5\beta)x + (2\alpha - 8\beta)$$

Logo resolvendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 5\alpha - 2\beta = 7 \\ -3\alpha + 5\beta = 11 \\ 2\alpha - 8\beta = -26 \end{cases}$$

obtemos o valor de $\alpha = 3$ e $\beta = 4$. Portanto, v pode-se escrever como combinação linear de v_1 e v_2 .

Exemplo 36. Sejam os vetores $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$. Escreva o vetor $v = (-4, -18, 7)$ como combinação linear dos vetores v_1 e v_2 .

Pretende-se que: $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$, sendo a_1 e a_2 escalares a determinar. Então, devemos ter: $(-4, -18, 7) = a_1(1, -3, 2) + a_2(2, 4, -1) = (a_1 + 2a_2, -3a_1 + 4a_2, 2a_1 - a_2)$ logo

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -3a_1 + 4a_2 = -18 \\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{cases}$$

Cuja solução do sistema de equações lineares anterior é $a_1 = 2$ e $a_2 = -3$. Portanto, $v = 2v_1 - 3v_2$.

Exemplo 37. Mostre que o subconjunto $W = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$ é gerado pelo conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ do \mathbb{R}^3 .

Seja $(x, y, 0) \in W$ tal que $(x, y, 0) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0)$, logo:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$$

, então qualquer vetor $(x, y, 0) \in W$ pode ser escrito como combinação linear de $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

Exemplo 38. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determine o subespaço gerado pelo vetor $v_1 = (1, 2, 3)$.

Temos $[v_1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \alpha(1, 2, 3), \alpha \in \mathbb{R}\}$ logo $(x, y, z) = \alpha(1, 2, 3)$, então $x = \alpha$, $y = 2\alpha$ e $z = 3\alpha$. Assim $[v_1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x, z = 3x\}$. onde $[v_1]$ é subespaço gerado de $v_1 \in \mathbb{R}^3$ (particularmente é uma reta que passa pela origem).

O subespaço gerado por um vetor $v_1 \in \mathbb{R}^3$, $v_1 \neq 0$ é uma reta que passa pela origem. Se a esse vetor acrescentamos v_2, v_3, \dots todos colineares entre si, o subespaço gerado por v_2, v_3, \dots vetores continuará sendo a mesma reta: $[v_1] = [v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3] = \dots$, por exemplo o vetor $(7, 14, 21)$ posso escrever como combinação linear de $(1, 2, 3)$ e $(2, 4, 6)$, ou seja, $(7, 14, 21) = 1(1, 2, 3) + 3(2, 4, 6)$.

Exemplo 39. Determine o subespaço gerado pelo conjunto $A = \{(1, -2, -1), (2, 1, 1)\}$.

Temos $[v_1, v_2] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \alpha(1, -2, -1) + \beta(2, 1, 1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Da desigualdade acima, temos:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ -2\alpha + \beta = y \\ -\alpha + \beta = z \end{cases}$$

, então

$$\begin{cases} \beta = \frac{x+z}{3} \\ \alpha = \frac{x-2z}{3} \end{cases}$$

Substituindo na equação (II) do primeiro sistema de eqs. lineares temos: $x + 3y - 5z = 0$.

Logo, $[v_1, v_2] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - 5z = 0\}$ (FAZER O GRÁFICO)

O subespaço gerado pelos vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, não colineares, é um plano P que passa pela origem. Se esses dois vetores acrescentamos v_3, v_4, \dots todos coplanares, ao subespaço gerado por v_3, v_4, \dots vetores continuará sendo o mesmo plano P : $[v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3, v_4] = \dots$

6.3 Dependência e independência linear

Definição 24. Seja V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores v_1, \dots, v_n são LI, se a equação:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

Implica $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. No caso que exista algum $\alpha_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente (LD), ou que os vetores são v_1, \dots, v_n são LD.

Teorema 5. $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD se, e somente se, um desses vetores for uma combinação linear dos outros.

Exemplo 40. No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^4$, os vetores $v_1 = (2, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 5, -3, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 4, -2)$ são linearmente independentes?

De fato: a partir de $a(2, 2, 3, 4) + b(0, 5, -3, 1) + c(0, 0, 4, -2) = (0, 0, 0, 0)$ temos: $(2a, 2a + 5b, 3a - 3b + 4c, 4a + b - 2c) = (0, 0, 0, 0)$, isto é,

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ 2a + 5b = 0 \\ 3a - 3b + 4c = 0 \\ 4a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

O sistema admite unicamente a solução $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0$.

Exemplo 41. No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, os vetores $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (-1, 0, -2)$ e $v_3 = (2, -3, 1)$ formam um conjunto LI? (TAREFA !!!!)

6.4 Base de um espaço vetorial

Agora estamos interessados em encontrar, dentro de um espaço vetorial V , um conjunto finito de vetores, tais que qualquer outro vetor V seja uma combinação linear deles. Denominaremos um conjunto de vetores desse tipo de base.

Definição 25. Um conjunto de vetores de V será uma base se:

i. $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI

ii. $[v_1, \dots, v_n] = V$

Exemplo 42.

a. Se $V = \mathbb{R}^2$ e sejam $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. O conjunto $\{e_1, e_2\}$ é uma base de V , conhecida como base canônica de \mathbb{R}^2 .

b. O conjunto $\{(1, 1), (0, 1)\}$ também é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.

De fato: Se $(0, 0) = a(1, 1) + b(0, 1)$, então $a = 0$ e $b = 0$. Isto é, $\{(1, 1), (0, 1)\}$ é LI. E ainda $[(1, 1), (0, 1)] = V$ pois dado $v = (x, y) \in V$, temos $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$.

Ou seja todo vetor de V é combinação linear dos vetores $\{(1, 1), (0, 1)\}$.

c. O conjunto $\{(0, 1), (0, 2)\}$ não é uma base \mathbb{R}^2 , pois é um conjunto LD. Se $(0, 0) = a(0, 1) + b(0, 2)$, $a = -2b$ logo a e b são necessariamente zero.

d. O conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ não é base de \mathbb{R}^3 mesmo sendo LI, já que não gera tudo o \mathbb{R}^3 , isto é, $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)] \neq \mathbb{R}^3$.

Teorema 6. Sejam v_1, \dots, v_n vetores não nulos que geram um espaço vetorial V . Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V .

Teorema 7. Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finitos de vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$. Então, qualquer conjunto de mais de n vetores em V é necessariamente LD (e portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).

Note-se. Se o espaço vetorial V admite uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ com n elementos, qualquer outra base de V possui n elementos. Concluimos, portanto, que qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado dimensão de V , e é denotado $\dim(V)$.

Exemplo 43. Se $V = \mathbb{R}^2$, os conjuntos $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(1, 1), (0, 1)\}$ são bases de V , então $\dim(V) = 2$.

Exemplo 44. Se $V = M(2, 2)$, uma base tem 4 elementos, então $\dim(V) = 4$.

Teorema 8. Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base em V (por exemplo, $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ é LI logo $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base de \mathbb{R}^3).

Note-se. Se $\dim(V) = n$, qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V .

Teorema 9. Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $\dim(U) \leq \dim(V)$ e $\dim(W) \leq \dim(V)$. Além disso,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Teorema 10. Dada uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V , cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear de v_1, \dots, v_n .

Definição 26. Sejam $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $v \in V$ onde $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. Chamamos estes números a_1, \dots, a_n de coordenadas de v em relação a base β e denotamos por:

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 45. Calcule as coordenadas do vetor $(4, 3)$ nas bases $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta' = \{(1, 1), (0, 1)\}$.

O coordenadas do vetor $(4, 3) = 4(1, 0) + 3(0, 1)$ na base β são 4 e 3, ou seja,

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O coordenadas do vetor $(4, 3) = 4(1, 1) - 1(0, 1)$ na base β' são 4 e -1 , ou seja,

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Note-se. Que a ordem dos elementos de uma base também influi na matriz das coordenadas de um vetor em relação a base. Isto é,

$\beta_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta_2 = \{(0, 1), (1, 0)\}$, então

$$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [v]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

, respectivamente.

Exemplo 46. Considere $U = \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) : x = y\}$. Determine $U + W$

Observe que $U = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$ e $W = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$, então

$V + W = [(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)]$ como $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever

$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 1, 0) + \theta(0, 0, 1)$ com

$\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = 0$ e $\theta = z - x - y$. Portanto, $U + W = \mathbb{R}^3$.

Logo $\dim(U + W) = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ e temos que $\dim(U \cap W) = 1$ já que $U \cap W = \{(x, y, z) : x + y - z = 0 \text{ e } x = y\} = \{(x, y, z) : x = y = \frac{z}{2}\} = [(1, 1, 1/2)]$.

Exemplo 47. Prove que os polinômios seguintes são LI $p(x) = x^3 - 5x^2 + 1$, $q(x) = 2x^4 + 5x - 6$ e $r(x) = x^2 - 5x + 2$.

Exemplo 48. Exiba uma base para cada um dos subespaços de \mathbb{R}^4 listados a seguir:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$$

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$$

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3\}$$

$$K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Exemplo 49. Mostre que os polinômios 1 , $x - 1$ e $x^2 - 3x + 1$ formam uma base de P_2 . Exprima os polinômio $2x^2 - 5x + 6$ como combinação linear dos elementos dessa base.

Exemplo 50. Dados $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 2)$, sejam F_1 e F_2 respectivamente as retas que passam pela origem em \mathbb{R}^2 e contem u e v . Mostre que $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$.