Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Tecnologia
Lista 1 de Álgebra Linear
Prof. Fernando RL Contreras

Sejam os seguintes problemas

1. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e o corpo $\mathbb{R}$. Determine se as seguintes operações definem sobre Vuma estrutura de espaço vetorial. $(a,b)+(a_1,b_1) = (0.5a+0.5a_1, 0.5b+0.5b_1)$ e $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$

2. considerando $V = \mathbb{R}$, ou seja, o conjunto de funções reais com variável real, investigar se V são espaços vetoriais:
   - O conjunto de funções pares, ou seja, as funções $f \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = f(-x)$.
   - O conjunto de funções impares, ou seja, as funções $f \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = -f(-x)$.

3. Considerando o espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$, investigar se o seguintes conjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^3$
   - $S = \left\{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 / a_1 + a_3 = 0\right\}$.
   - $S = \left\{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 / |a_1| = |a_2|\right\}$.
   - $S = \left\{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 / a_3 = a_1 + 2\right\}$.

4. Seja o espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$. Determinar se os seguintes conjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^n$
   - $S = \{(a_1,a_2,...,a_n) \in \mathbb{R}^n / a_n \in \mathbb{Z}\}$.
   - $S = \left\{(a_1,a_2,...,a_n) \in \mathbb{R}^3 / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0\right\}$.

5. Considere $[a,-a]$ um intervalo simétrico e $C^1[-a,a]$ o conjunto das funções reais definidas no intervalo $[-a,a]$ que possuem derivadas continuas no intervalo. Seja ainda os subconjuntos $V_1 = \left\{f(x) \in C^1[-a,a] | f(-x) = f(x)\right\}$ e $V_2 = \left\{f(x) \in C^1[-a,a] | f(-x) = -f(x)\right\}$. Mostre que $V1 \oplus V2 = C^1[-a,a]$.

6. Mostre que os polinômios $1-t^3, (1-t)^2, 1-t$ e 1 geram o espaço dos polinômios de grau ≤ 3.

7. No espaço vetorial de funções reais definidas em $\mathbb{R}$, se consideram as funções f, g e h, definidas por $f(t) = t^2+2t-1$, $g(t) = t^2+1$, $h(t) = t^2+t$, demostrar que são LI.

8. Sejam $W_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^4 | x+y = 0 \quad e \quad z-t = 0\right\}$ e $W_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^4 | x-y-z+t = 0\right\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$
   - Determine $W_1 \cap W_2$.
   - Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.
   - Determine $W_1 + W_2$.
   - $W_1 + W_2$ é direta? Justifique.

9. Seja U subespaço gerado de $\mathbb{R}^3$, gerado por $(1,0,0)$ e W o subespaço de $\mathbb{R}^3$, gerado por $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

10. Comprovar que os vetores de $\mathbb{R}^3$, $v_1 = (-1,3,1), v_2 = (3,-1,1)$ e $v_3 = (4,0,2)$ são LD e expressar a v_3 como combinação linear de v_1 e v_2.

11. Sabendo que v_1, v_2 e v_3 são vetores linearmente independentes do espaço vetorial V. Investigar a dependência ou independência linear dos seguintes vetores

    - $\{v_1 + av_2 + bv_3, v_2 + cv_3, v_3\}$
    - $\{v_1, v_2 + av_3, v_3 + bv_2\}$

12. Determinar o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (0,-1,1)$ e $v_3 = (1,1,0)$. obter uma base para aquele subespaço.

13. Sejam $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1),(1,1)\}$, $\beta_2 = \left\{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\right\}$ e $\beta_3 = \{(2,0),(0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Ache as matrizes de mudança de base: **(a)** $[I]^{\beta_1}_{\beta}$, **(b)** $[I]^{\beta}_{\beta_1}$, **(c)** $[I]^{\beta}_{\beta_2}$ e **(d)** $[I]^{\beta}_{\beta_3}$.

14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma reflexão, através da reta $y = 3x$. (a) Encontre $T(x,y)$ e (b) encontre a base α de $\mathbb{R}^2$, tal que $[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

15. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$. **(a)** Determine uma base do núcleo de T, **(b)** Dê a dimensão da imagem de T e **(c)** T é sobrejetora ?.

16. Sejam $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\beta = \}(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente e $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. **(a)** Ache T e **(b)** se $S(x,y) = (2y, x-y, x)$, ache $[S]^{\alpha}_{\beta}$.

17. Se $R(x,y) = (2x, x-y, y)$ e $S(x,y,z) = (y-z, z-x)$. Ache $[R \circ S]$ e $[S \circ R]$

18. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ache os vetores u e v tal que **(a)** $T(u) = u$ e **(b)** $T(v) = -v$

19. Dados $T : U \longrightarrow V$ linear e injetora e $u_1, u_2, \ldots, u_n$, vetores LI em U, mostre que $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ é LI

20. Seja $T : V \longrightarrow W$ uma função. mostre que: **(a)** Se T é uma transformação linear, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. **(b)** Se $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, então T não é transformação linear.