UFF – Depto. de Análise
GAN 04139 – Álgebra Linear
P1 – Prof. Ana Isabel – 04/10/2005 – 14h

As respostas devem ser bem justificadas e expostas com clareza.
Duas horas de prova, sem consulta.

1. **(0,5 pontos)** Seja A uma matriz $m \times n$. Se o sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem uma única solução, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tem quantas soluções? Justifique.

2. **(1,0 ponto)** Sejam U e V subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$. Prove que $U \cap V$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

3. **(1,5 pontos)** Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$ abaixo. Encontre $V \cap W$ e uma base para $V \cap W$.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;/\; x + y - 2z + w = 0 \text{ e } 2x - 4z + 2w = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;/\; -2x + y + z + w = 0 \text{ e } y + z - w = 0 \right\}$$

4. **(2,0 pontos)** Verifique se o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido abaixo é invertível. Em caso afirmativo, determine $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;,\; T\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. **(2,0 pontos)** Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}$.

   Encontre $T^{-1} \circ T^{-1}$.

6. **(1,0 ponto)** Mostre que a inversa de uma rotação em $\mathbb{R}^2$ no sentido anti-horário de um ângulo θ é a rotação em $\mathbb{R}^2$ no sentido horário de ângulo θ.

7. **(2,0 pontos)** (Sendo 0,2 para cada item correto, 0 para cada item sem resposta e -0,2 para cada item errado)

   Diga se é verdadeira(V) ou falsa(F) cada uma das afirmações abaixo:

   (a) A soma de matrizes invertíveis é sempre uma matriz invertível. ( )

   (b) A união de conjuntos LI é um conjunto LI. ( )

   (c) O operador linear de reflexão em torno da origem em $\mathbb{R}^2$ é invertível. ( )

   (d) As colunas de uma matriz A, 5×7, são vetores LD. ( )

   (e) O produto de matrizes triangulares superiores é sempre uma matriz triangular superior. ( )

   (f) Se { **u,v,w** } é LI então { **u - v**, **v - w**, **u - w** } é LI. ( )

   (g) Toda matriz elementar é invertível. ( )

   (h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y \leq 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. ( )

   (i) Dada uma matriz arbitrária, ela possui uma única matriz escalonada reduzida por linhas. ( )

   (j) Se **u** e **v** são soluções do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ então **u-v** é solução do sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ( )

   (k) O produto de duas matrizes elementares é necessariamente uma matriz elementar. ( )

   (l) A matriz $A = (a_{ij})$ 40×40 tal que $a_{77} = 4$, $a_{ii} = 1$ se $i \neq 7$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ é invertível. ( )