UFPE

Universidade Federal de Pernambuco
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Tecnologia
Engenharia Civil

Primeira Prova

Dados de Identificação	
Disciplina:	Algebra Linear
Professor:	Fernando Contreras
Aluno(a):	

1. Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ o espaço vetorial com as operações: $(x,y,z) \oplus (a,b,c) = (x+a+2, y+b, zc)$, $(x,y,z),(a,b,c) \in V$; $\alpha \odot (x,y,z) = (\alpha x + 2(\alpha-1), \alpha y, z^{\alpha})$, $(x,y,z) \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) **(0.5)** Calcule $3 \odot (-1,0,2) \oplus 2 \odot (2,-1,3)$
   (b) **(0.5)** Determine o vetor nulo desse espaço vetorial.
   (c) **(0.5)** Determine o simétrico ou posto de (x,y,z).
   (d) **(0.5)** Verifique se $W = \{(x,y,z) : x = -2\}$ é um subespaço vetorial de V.

2. Seja $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com as operações usuais e seja $W = \left\{ B \in V : B \quad \text{comuta com} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$.
   (a) **(1.0)** Mostre que se $B \in W$, então existem constantes reais α e β tais que $B = \alpha A + \beta I$, onde I é a matriz identidade.
   (b) **(1.0)** Por que W é um subespaço vetorial de V? Exiba uma base para W. Justifique adequadamente.

3. Uma transformação $T : E \longrightarrow F$, entre espaços vetoriais, chama-se *afim* quando se tem $T((1-t)u+tv) = (1-t)T(u)+tT(u)$ para quaisquer $u,v \in E$ e $t \in \mathbb{R}$. Dada a transformação afim $T : E \longrightarrow F$, prove que:
   (a) **(1.0)** Supondo ainda que $T(0) = 0$, a relação $T(\frac{1}{2}(u+v)) = \frac{1}{2}(T(u)+T(v))$, implica que $T(u+v) = T(u)+T(v)$ para quaisquer $u,v \in E$.
   (b) **(1.0)** Para todo $b \in F$, a transformação $S : E \longrightarrow F$, definida por $S(v) = T(v)+b$ também é *afim*.

4. **(2.0)** O produto vetorial de dois vetores $v = (x_1,y_1,z_1)$ e $w = (x_2,y_2,z_2)$ em $\mathbb{R}^3$ é, por definição, o vetor $v \times w = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$. Fixado o vetor $u = (a,b,c)$, determine a matriz, relativamente à base canônica, do operador $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $A(v) = v \times u$. Descreva geometricamente o núcleo desse operador e obtenha a equação da sua imagem.

5. **(2.0)** Considere $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais e sejam $\alpha = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ e
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Determine a base $\beta = \{v^1, v^2, v^3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $A = [I]^{\alpha}_{\beta}$.

Êxitos...!!!