UFF – Depto. de Análise
GAN 04139 – Álgebra Linear
P1 – Prof. Ana Isabel – 16/06/2004 – 16h

1. **(1,0 ponto)** Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, encontre duas matrizes elementares E_1 e E_2 tais que a matriz $B = E_2 \cdot E_1 \cdot A$ fique na forma triangular superior, isto é na forma $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

2. **(1,0 ponto)** Definimos uma "matriz-tabuleiro" como sendo uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i+j \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i+j \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Encontre uma base para o espaço-solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, onde:

   (a) A é a matriz-tabuleiro 3×3.

   (b) A é a matriz-tabuleiro 4×4.

3. **(1,5 pontos)** Seja $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Encontre os autovalores de A.

   (b) Encontre os autoespaços de A, exibindo uma base para cada um deles e suas dimensões.

   (c) Encontre os autovalores de A^{48}.

4. **(0,5 pontos)** Encontre um vetor $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que o conjunto $\{(1,2,1),(1,1,0),\mathbf{v}\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

5. **(2,0 pontos)** Seja $S = [\{(0,1,1,2),(3,0,1,0)\}]$ e seja

$$T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\}$$

(a) Encontre equações para S.

(b) Determine a dimensão de $S \cap T$.

6. **(2,0 pontos)** Dadas as bases $\alpha = \{(2,4,2),(1,3,1),(1,5,2)\}$ e $\varepsilon = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, use operações elementares para determinar a matriz mudança de base $[I]^{\varepsilon}_{\alpha}$ a partir de $[I]^{\alpha}_{\varepsilon}$.

7. **(2,0 pontos)** (Sendo 0,2 para cada item correto, 0 para cada item sem resposta e -0,2 para cada item errado)

Diga se é verdadeira(V) ou falsa(F) cada uma das afirmações abaixo:

(a) A soma de matrizes invertíveis é sempre uma matriz invertível. ( )

(b) $\{A \in M_{2\times 2} \mid \det A = 0\}$ é subespaço de $M_{2\times 2}$. ( )

(c) $\det(2 \cdot A) = 2 \cdot \det(A)$. ( )

(d) O conjunto $\{(2,1),(4,3),(7,-3)\}$ é LI em $\mathbb{R}^2$. ( )

(e) O produto de matrizes triangulares superiores é sempre uma matriz triangular superior. ( )

(f) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI então também o é o conjunto $\{kv_1, kv_2, kv_3\}$ para cada $k \in \mathbb{R}^*$. ( )

(g) Toda matriz elementar é invertível. ( )

(h) O conjunto $\{(1,2,2),(1,3,2)\}$ gera $\mathbb{R}^3$. ( )

(i) Se A é uma matriz $n \times n$ não invertível e B resulta da permutação de duas linhas de A, então B pode ser ou não ser invertível. ( )

(j) Se A é uma matriz $n \times n$ não invertível então $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções. ( )

As respostas devem ser bem justificadas e expostas com clareza.
Duas horas de prova, sem consulta.