MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
3a. Prova - 22/06/2010 - Escola Politécnica

Questão 1. a) (valor: 2,0) Determine a massa da parte da superfície $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ que satisfaz $z \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 2y$, com densidade $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) (valor: 2,0) Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma$, sendo $\overrightarrow{F}(x, y, z) = -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ e S a parte de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que satisfaz $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, orientada pela normal $\overrightarrow{N}$ tal que $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{k} > 0$.

Solução:

(a) Em primeiro lugar, é preciso parametrizar a superfície em questão. Sendo assim, uma das possíveis parametrizações é:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{3u^2 + 3v^2} \end{cases}$$

$$\sigma(u, v) = (u, v, \sqrt{3u^2 + 3v^2})$$

Com esta parametrização, a massa da superfície pode ser calculada com a seguinte integral:

$$M = \iint_{D_{uv}} \delta(\sigma(u, v)) \cdot \|\sigma_u \wedge \sigma_v\|\, du\, dv$$

Calculando o módulo do produto vetorial $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|$:

$$\sigma_u = \left(1, 0, \frac{6u}{2\sqrt{3u^2 + 3v^2}}\right)$$

$$\sigma_v = \left(0, 1, \frac{6u}{2\sqrt{3u^2 + 3v^2}}\right)$$

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = \left(\frac{-3u}{\sqrt{3u^2 + 3v^2}}, \frac{-3v}{\sqrt{3u^2 + 3v^2}}, 1\right)$$

$$\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = \sqrt{\frac{9u^2 + 9v^2}{3u^2 + 3v^2} + 1} = 2$$

E a integral fica:

$$M = \iint_{D_{uv}} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot 2\, du\, dv$$

Utilizando coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} u = \rho\cos\theta \\ v = \rho\sin\theta \\ J = \rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} \rho^2\, d\rho\, d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} 8\sin^3\theta\, d\theta \\
&= \frac{16}{3}\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \\
&= \frac{16}{3}\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)_0^{\pi} \\
&= \frac{16}{3}\cdot\frac{4}{3} \\
&= \frac{64}{9}
\end{aligned}$$

(b) Primeiramente, é preciso parametrizar a superfície S. Tratando-se de uma esfera de raio 1, a parametrização em coordenadas esféricas é dada por (note que a orientação $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{k} > 0$ já está coreta):

$$\begin{cases} x = \cos\theta\sin\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\varphi \end{cases}$$

$$\sigma(\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

$$\overrightarrow{N} = \sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = \sin\varphi\,(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos\varphi \le \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right)$$

Desta forma, a integral de fluxo pode ser calculada:

$$
\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}\, d\sigma &= \iint_S (-\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \cos\varphi) \cdot (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi) \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi + \cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos^2\varphi\right) \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi
\end{aligned}
$$

Sabendo que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta = 0$, a integral de fluxo se resume a:

$$
\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}\, d\sigma &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi \\
&= 2\pi \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{2\pi}{3}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{2\sqrt{2}}{8}\right) \\
&= \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

Questão 2. (valor: 3,0) Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma$, onde

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left[-y + \ln(z^2+1)\right] \overrightarrow{i} + (x^2+y)\overrightarrow{j} + [e^y + z + \arctan(x+5)] \overrightarrow{k}$$

e S é a superfície $y = 9 - x^2 - z^2$, $y \geq 0$, orientada pela normal $\overrightarrow{N}$ que satisfaz $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{j} > 0$.

Solução:

Para a solução deste exercício será utilizado o Teorema de Gauss.

Sendo assim, primeiramente, deve-se obter uma superfície fechada. E como o campo $\overrightarrow{F}$ não possui nenhuma indeterminação, a superfície pode ser fechada, por exemplo, com o plano $y = 0$. Aplicando o Teorema de Gauss para a superfície fechada formada pelo plano $y = 0$ e pela superfície S, teremos:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma + \iint_{plano} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma = \iiint_R div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy\, dz$$

A integral do divergente de $\overrightarrow{F}$ na região R pode ser calculada com o auxílio de coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = y \\ z = \rho\sin\theta \\ J = \rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 9 - \rho^2 \end{cases}$$

$$\left(div(\overrightarrow{F}) = 2\right)$$

$$
\begin{aligned}
\iiint_R div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy\, dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-\rho^2} 2\rho\, dy\, d\rho\, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^3 2\rho(9-\rho^2)\, d\rho \\
&= 4\pi \int_0^3 9\rho - \rho^3\, d\rho \\
&= 4\pi \left[\frac{9\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 \\
&= 4\pi \left[\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right] \\
&= 81\pi
\end{aligned}
$$

E calculando a integral de fluxo do plano limitado pela superfície S (com a normal no sentido negativo do eixo y, que é a normal exterior da superfície fechada):

$$
\begin{aligned}
\iint_{plano} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N} d\sigma &= \iint_{plano} \overrightarrow{F}\cdot(0,-1,0) d\sigma \\
&= \iint_{plano} -x^2 - y\, d\sigma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
x = \rho\cos\theta \\
y = 0 \\
z = \rho\sin\theta \\
J = \rho
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_{plano} -x^2\, d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 -\rho^3\cos^2\theta\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right)_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{-\rho^4}{4}\right)_0^3 \\
&= -\frac{81\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Por fim, com o Teorema de Gauss apresentado anteriormente, temos:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma = -\iint_{plano} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma + \iiint_R div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy\, dz$$

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma = \frac{81\pi}{4} + 81\pi$$

Questão 3. (valor: 3,0) Calcule

$$\int_\gamma \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{y+x}{x^2+y^2}dy + z^2dz$$

sendo γ a intersecção de $(z+1)^2 = x^2+y^2$ com $2z+y=6$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido horário.

Solução:

Esse exercício pode ser resolvido utilizando o Teorema de Stokes. Sendo assim, temos a curva γ definida pela intersecção de um cone com um plano, e podemos definir uma curva α, a partir da intersecção deste mesmo cone com o plano $x=0$.

$$\begin{cases} \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0) \\ \alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Define-se, também, como S, a superfície do cone contida entre as duas curvas, tal que o Teorema de Stokes fica dado por:

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_\alpha \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{n} dS$$

Calculando o rotacional do campo $\overrightarrow{F}$, chega-se que $rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$, e portanto:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= -\int_\alpha \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(\cos t - \sin t\,,\ \sin t + \cos t\,,\ 0)}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t\,,\ \cos t\,,\ 0)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos t \sin t + \cos^2 t\right)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1\, dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$