UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
**SEGUNDA PROVA UNIFICADA – CÁLCULO II**
Politécnica, Engenharia Química e Ciência da Computação - 04/07/2013.

# QUESTÕES DISCURSIVAS

**1ª Questão.** (*2.2 pontos*). Considere a superfície $S$ formada pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfazendo a equação

$$xyz = \mathrm{e}^{\beta x},$$

onde $\beta$ é um número real.

(a) Escreva a equação do plano tangente a $S$ no ponto $P_0 = \left(3, \frac{1}{3}, \mathrm{e}^{3\beta}\right) \in S$.

(b) Encontre $\beta$ de modo que o plano tangente a $S$ no ponto $P_0$ contenha a origem.

*Resolução*:

(a) A superfície $S$ pode ser vista como uma superfície de nível para $F(x, y, z) = xyz - \mathrm{e}^{\beta x}$. Calculando o gradiente de $F$ no ponto $P_0 = (3, \frac{1}{3}, \mathrm{e}^{3\beta})$ obtemos

$$\nabla F \left(3, \frac{1}{3}, \mathrm{e}^{3\beta}\right) = \left(-\beta \mathrm{e}^{3\beta} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\beta}, 3\mathrm{e}^{3\beta}, 1\right).$$

O plano tangente a $S$, portanto, tem equação

$$\left(-\beta \mathrm{e}^{3\beta} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\beta}\right)(x - 3) + 3\mathrm{e}^{3\beta}\left(y - \frac{1}{3}\right) + (z - \mathrm{e}^{3\beta}) = 0 \tag{1}$$

(b) Encontre $\beta$ de modo que o plano tangente a $S$ no ponto $P_0 = \left(3, \frac{1}{3}, \mathrm{e}^{3\beta}\right)$ contenha a origem.

(b) A origem $(0, 0, 0)$ pertence ao plano (1) se, se somente se,

$$\begin{aligned}\left(-\beta \mathrm{e}^{3\beta} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\beta}\right)(0 - 3) + 3\mathrm{e}^{3\beta}\left(0 - \frac{1}{3}\right) + (0 - \mathrm{e}^{3\beta}) = 0 &\Leftrightarrow e^{3\beta}(3\beta - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\beta - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta = 1.\end{aligned}$$

**2ª Questão.** (*2.2 pontos*).

Calcule, se existirem, o máximo e o mínimo absolutos de

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z$$

na região $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

*Resolução*: $f$ é uma função contínua e a região $R : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dada é limitada e fechada, logo o máximo e mínimo absolutos de $f$ em $R$ existem. Vamos calcula-los usando o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ \quad g(x,y,z) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y \\ \ \ 1 = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Da primeira equação sai que $x = 0$ ou $\lambda = 2$.

Se $x = 0$ : Então $y = 0$ ou $\lambda = 1$. Se $y = 0$ obtemos $z = \pm 1$ e os pontos $(0, 0, \pm 1)$, sendo $f(0, 0, \pm 1) = \pm 1$. Se $\lambda = 1$ obtemos $z = \dfrac{1}{2}$, $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ e os pontos $\left(0, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, sendo $f\left(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$.

Se $\lambda = 2$: Obtemos $y = 0$, $z = \dfrac{1}{4}$ e $x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$, sendo $f\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{4}, 0, \frac{1}{4}\right) = \frac{17}{8}$.

Portanto, o valor máximo de $f$ em $R$ é $\dfrac{17}{8}$ e o mínimo de $f$ em $R$ é $-1$ ocorrendo nos pontos $\left(\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}, 0, \dfrac{1}{4}\right)$ e $(0, 0, -1)$, respectivamente. .