Notas de Aula

Cálculo Diferencial e Integral 3

Fernando RL Contreras
Nucleo de Tecnologia
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

August 29, 2018

1 Sequências

Exemplos de motivação

Definição 1. *Entendemos por sequência infinita uma função S cujo domínio é o conjunto* $\{1,2,3,...\}$ *de todos os inteiros positivos. O contradomínio de S, é o conjunto* $\{S(1),S(2),S(3),...\}$ *também podemos escrever como* $\{S_1,S_2,S_3,...\}$*, e o valor da função* S_n *chama-se o termo n-ésimo da sequência.*

Uma sequência infinita $S_1,S_2,...,S_n,...$ pode ser representado por $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ou por (S_n). Graficamente temos:

Exemplo 1. *Nos exemplos a seguir, damos três descrições da sequência, uma usando a notação anterior, outra empregando a formulação da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência*

- $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\quad\left(\frac{n}{n+1}\right), n \geq 1$ $\quad\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},...,\frac{n}{n+1},...$
- $\left(\sqrt{n-3}\right)_{n=3}^{\infty}$ $\quad\left(\sqrt{n-3}\right), n \geq 3$ $\quad-\frac{2}{3},\frac{3}{9},-\frac{4}{27},...,\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n},...$
- $\left(\cos(\frac{n\pi}{6})\right)_{n=0}^{\infty}$ $\quad\left(\cos(\frac{n\pi}{6})\right), n \geq 0$ $\quad 1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},...,\cos(\frac{n\pi}{6}),...$

Exemplo 2. *calcule o n-ésimo termo da sequência* $1,3,6,15,21,....$

Solução.

Definição 2. *uma sequência* (S_n) *é denominado crescente se* $S_n \leq S_{n+1}$*, para todo* $n \geq 1$*, isto é,* $S_1 < S_2 < S_3 \ldots$. *É chamado decrescente se* $S_n \geq S_{n+1}$ *para todo* $n \geq 1$. *É dita monótona se for crescente ou decrescente.*

Exemplo 3. *Mostre que a sequência* $\frac{n}{n^2+1}$ *é decrescente.*

Solução.

Definição 3. *uma sequência* (S_n) *é limitada superiormente se existe um número* M *tal que* $S_n \leq M$*, para todo* $n \geq 1$.

Exemplo 4.

- *A sequência* (n) *é limitada inferiormente, mas não superiormente.*
- *A sequência* $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ *é limitada porque* $0 < S_n < 1$*, onde* $S_n = \frac{n}{n+1}$*, para todo n.*

agora vamos desenhar a sequência dada no exemplo anterior

Nas figuras anteriores podemos observar que a sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)$estão se aproximando de 1 quando n se torna grande. De fato a diferença $1-\frac{n}{n+1}$ pode ficar tão pequeno quanto se desejar tornando-se n suficientemente grande.

Definição 4. *uma sequência (S_n) tem limite L, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $N > 0$, tal que $|S_n - L| < \varepsilon$, para todo $n > N$ e denotaremos com $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n = L$.*

Em forma simbólica temos:

Propriedades
Se (S_n) e (T_n) forem sequências convergentes e c uma constante, então:

- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(S_n \pm T_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n$.
- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} cS_n = c\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n$.
- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_nT_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n$.
- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{S_n}{T_n} = \frac{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n}{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n \neq 0$.
- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} cS_n = c\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n$

- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n^p = \left(\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n\right)^p$, $p>0$ e $S_n>0$.

Exemplo 5. *Determine* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{3n^2-5n+2}{n^2+7n-4}$

Solução.

Exemplo 6. *calcule* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{n}{n+1}$

Solução.

Teorema 1. *Sejam as sequências (S_n), (R_n) e (T_n). Se para todos os inteiros positivos n, $S_n \leq R_n \leq T_n$ e se $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n = L$, então a sequência (R_n) converge e $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} R_n = L$.*

Exemplo 7. *Prove que* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

Solução.

Teorema 2. *Seja a sequência* (S_n)*. Se* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} |S_n| = 0$*, então* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S_n = 0$*.*

Exemplo 8. *calcule* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ *se ele existir.*

Solução.

Teorema 3. *Seja a sequência* (S_n)*. Se* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S_n = L$*, e se a função* f *for continua em* L*, então* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f(S_n) = f(L)$*.*

Exemplo 9. *Calcule o* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sin(\frac{\pi}{n})$*.*

Solução.

Exemplo 10. *Para que valores de r a sequência* (r^n) *é convergente.*

Solução.

Exemplo 11. *Determine a sequência* $((-1)^n)$ *é convergente ou divergente.*

Solução.

Do exemplo 11 sabemos que nem toda sequência limitada é convergente. E também sabemos que nem toda sequência monótona é convergente. Mas se uma sequência for limitada e e monótona, então ela deve ser convergente. Esse fato é mostrado no seguinte teorema.

Teorema 4. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Exemplo 12. *Investigue a sequência* (S_n) *definida pela relação de recorrência* $S_1 = 2$, $S_{n+1} = \frac{1}{2}(S_n + 6)$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Solução.

Propriedade auxiliares

- Se $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n = L$, então $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_{n+k} = L$ para todo $k \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |S_n \pm T_n| = \left|\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n\right|$.
- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |S_n| = \left|\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n\right|$.
- Se $S_n \geq 0$, então $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n \geq 0$.
- Se $S_n \geq T_n$, então $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n$.
- Se $S_n \geq 0$, então $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sqrt{S_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n}$.

Exemplo 13. *Calcule* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sqrt{\frac{4n^2+6n+3}{n^2-5}}$.

Solução.

Teorema 5. *Se* $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = L$ *e* $f(n) = S_n$, *então* $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} S_n = L$

Exemplo 14. *Calcule* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{\ln(n)}{n}$.

Solução.

2 Séries

Breve introdução

Definição 5. *Seja (a_n) uma sequência dada de numeros reais. Formemos uma nova sequência (s_n) como segue:*
$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1, 2, ...$
Uma sequência (s_n) formada de esta maneira é chamada série, onde o número s_n é a soma parcial n-ésima da série e a_n é o termo n-ésimo da série.

Definição 6. *uma sequência (s_n) converge ao ponto s, então dizemos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tem soma s ou que é o mesmo dizer que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a s.*
Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tem a soma s, então $s = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} s_n$, onde $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Exemplo 15. *calcule a soma da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$.*
Uma sequência (s_n) converge ao ponto s, então dizemos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tem soma s ou que é o mesmo dizer que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a s.
Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tem a soma s, então $s = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} s_n$, onde $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Exemplo 16. *Calcule a soma da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$.*
Solução.

Exemplo 17. *A série geométrica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^{1-n}}$ *é convergente ou divergente?*
Solução.

Exemplo 18. *A série harmônica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente?*
Solução.

Teorema 6. *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente, então* $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 0$.
Prova.

Uma consequência do teorema é: se o $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo 19. *mostre que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ *divergente.*
Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ *divergente.*
Solução.

Propriedades Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ (onde c é uma constante) e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n$ e

i. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Exemplo 20. *Calcule a soma da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}$
Solução.

2.1 Teste de convergência para séries numéricas com termos positivos

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, onde $a_n \geq 0$:
$a_1 = s_1$
$a_2 = s_1 + s_2$
$a_3 = s_1 + s_2 + s_3$
$a_4 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$
...
$a_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + ... + s_n$
....

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq ... \leq a_n \leq ...$

Portanto $\{a_n\}$ é sequencia de somas parciais monótonas.

2.1.1 Teste de comparação direta

Sejam as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Converge e $0 \leq a_n \leq b_n$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Converge.
2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverge e $0 \leq a_n \leq b_n$, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Diverge.

Prova

Nota: Ao usar este Teste de comparação direta, devemos ter algumas séries conhecidas $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ para o proposito de comparação. Usualmente se utiliza uma P-série ou uma série geométrica.

Exemplo 21. *Estude das séries* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$
Solução.

2.1.2 Teste da integral

Suponha que f seja uma função continua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se e somente se a integral impropria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente. Em outras palavras:

i. Se $\int_1^{\infty} f)(x)dx$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

ii. Se $\int_1^{\infty} f)(x)dx$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente

Exemplo 22. *Para que valores de p a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *é convergente ?*
Solução.

2.1.3 Teste de limite

Sejam as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

i. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergente ou convergente.

ii. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

iii. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo 23. *Estude a convergência ou divergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.
Solução.

2.2 Séries alternadas

Uma série numérica da forma seguinte:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_n - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1}a_n + ...$
onde $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, denomina-se série alternada.

2.2.1 Teste da série alternada (Critério da Leibniz)

A série alternada da forma:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_n - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1}a_n + ...$, é convergente se

i. $a_{n+1} \leq a_n$.

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 24. *a série harmônica alternada* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *é convergente ?*

Solução.

Definição 7. *Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é dita absolutamente convergente se a série de valores absolutos* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for convergente.*

Definição 8. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é dita condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não absolutamente convergente.*

Exemplo 25. *Teste a série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ *quanto a convergência ou divergência.*

Solução.

Exemplo 26. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ *é absolutamente convergente por que?.*

Solução.

Exemplo 27. *Determine se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ *é convergente ou divergente?.*

Solução.

Exemplo 28. *A série alternada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3}{2^n}$ *é absolutamente convergente ja que a série*

Teorema 7. *Se uma série é absolutamente convergente, então ela é convergente.*

2.2.2 Teste da razão

i. Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

ii. Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

iii. Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ o teste da razão não é conclusivo. Isto é, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Exemplo 29. *Teste a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ *quanto a convergência absoluta.*

Exemplo 30. *Teste a convergência ou divergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

2.2.3 Teste da raiz

i. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

ii. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

iii. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ o teste da razão não é conclusivo. Isto é, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Exemplo 31. *Teste a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2n+3}{3n+2})^n$ *quanto a convergência absoluta.*