Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Tecnologia
Lista 2 de Calculo Diferencial e Integral 3
Prof. Fernando RL Contreras

Sejam os seguintes problemas relativos a Séries, Séries de potências e Séries de Taylor.

1. Determine se a série é convergente ou divergente

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$
   b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

2. Pelo teste da integral determine se a série é convergente ou divergente.

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$
   b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/2}}{n^2}$

3. Pelo teste de comparação ou teste do limite determine a convergência ou divergência das séries:

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$
   b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$
   c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$

4. Teste a Série quanto a convergência ou divergência

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{3/4}}$
   b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\frac{\pi}{n})$

5. Os termos da série são definidos recursivamente pelas equações $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n-3} a_n$. Determine se $\sum a_n$ converge ou diverge.

6. Uma série $\sum a_n$ é definida pelas equações $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n}} a_n$. Determine se $\sum a_n$ converge ou diverge.

7. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência das série de potência.

   a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^n \ln(n)}$
   b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{2n+1}$
   c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$
   d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2.4.6.....(2n)}$

8. Se k for um inteiro positivo, encontre o raio de convergência ou divergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$

9. A função J_1 definida por $J_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$ denominado função de Bessel de ordem 1. Encontre seu domínio.

10. Encontre uma representação em serie de potencia para a função e determine o intervalo de convergência.

    a. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$
    b. $f(x) = \frac{1}{x+10}$
    c. $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$
    d. $f(x) = \frac{3}{1-x^4}$

11. Use a derivação para encontrar a representação em série de potência para:

    a. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$
    b. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$
    c. $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$

    Qual é o raio de convergência?

12. Calcule a integral indefinida como uma série de potências. Qual é o raio de convergência?

    a. $\int \frac{t}{1-t^8} dt$
    b. $\int \frac{\ln(1-t)}{t} dt$

13. Mostre que a função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é solução da equação diferencial $f'(x) = f(x)$. E mostre que $f(x) = e^x$.

14. Mostre que a função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ é uma solução da equação diferencial $f''(x) + f(x) = 0$

14. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado por

    a. $f(x,y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$
    b. $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $(x_0, y_0) = (1,1)$
    c. $f(x,y) = \sin(3x+4y)$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$

15. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado por

    a. $f(x,y) = x\sin(y)$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$
    b. $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$ e $(x_0, y_0) = (1,1)$

16. Seja $P_2(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x,y) = x\sin(y)$ em volta de $(0,0)$. Mostre que $|f(x,y) - P_2(x,y)| < \frac{|y|^2}{2} \left[|x| + \frac{1}{3}|y|\right]$