Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

# Cálculo 3A – Lista 10

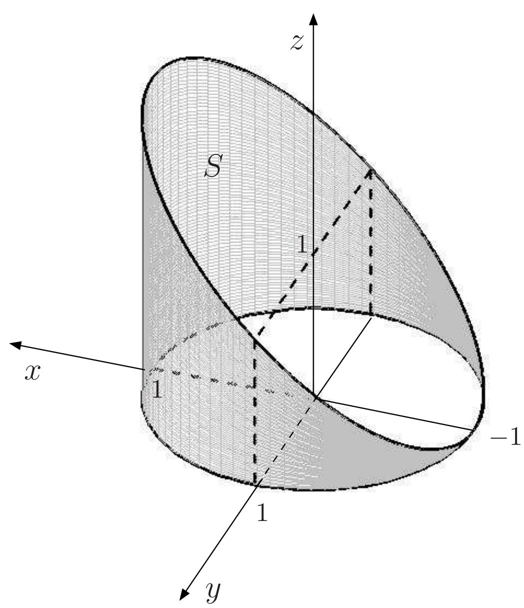
**Exercício 1:** Seja $S$ a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = x + 1$.

a) Parametrize e esboce $S$.

b) Calcule $\displaystyle\iint_S z\, dS$.

**Solução:**

a) A superfície $S$ é mostrada na figura que se segue.




Usamos $\theta$ e $z$ como parâmetros para parametrizar $S$. Temos $S : \varphi(\theta, z) = = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$, onde $(\theta, z) \in D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 + x = 1 + \cos\theta \end{cases}$.

b) Temos:

$$\varphi_\theta \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

e

$$\left\|\varphi_\theta \times \varphi_z\right\| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1\,.$$

Então:

$$\iint_S z\ dS = \iint_D z\ \left\|\varphi_\theta \times \varphi_z\right\|\ d\theta dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} z\ dz d\theta =$$

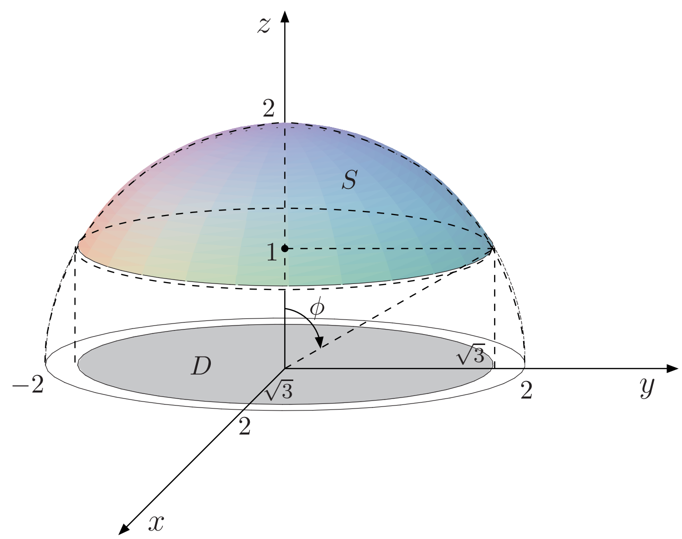
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)\ d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(2\pi + \frac{1}{2}\cdot 2\pi\right) = \frac{3\pi}{2}\,.$$

---

**Exercício 2:** Calcule $\displaystyle\iint_S f(x,y,z)\,dS$, onde $f(x,y,z) = x^2+y^2$ e $S : x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 1$.

**Solução:** O esboço de $S$ está representado na figura que se segue.




Observe que $\mathrm{tg}\,\phi = \sqrt{3}/1$ implica $\phi = \pi/3$. Uma parametrização de $S$ é dada por $\varphi(\phi,\theta) = (2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\cos\phi)$ com $(\phi,\theta) \in D : 0 \leq \leq \phi \leq \pi/3$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Já vimos que, no caso da esfera, $x^2+y^2+z^2 = a^2$ e $dS = a^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi d\theta$. Logo, $dS = 4\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi d\theta$. Assim:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f\left(\varphi(\phi,\theta)\right) 4\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi d\theta =$$

$$= 4\iint_D \left(4\,\mathrm{sen}^2\phi\cos^2\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\phi\,\mathrm{sen}^2\theta\right)\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi d\theta =$$

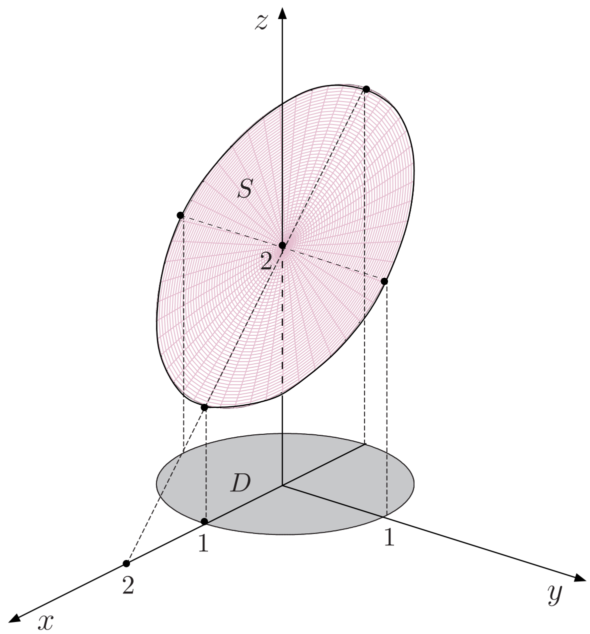
$$= 16\iint_D \mathrm{sen}^2\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi d\theta = 16\int_0^{\pi/3}\left(1-\cos^2\phi\right)\mathrm{sen}\,\phi\int_0^{2\pi} d\theta d\phi =$$

$$= -32\pi\int_0^{\pi/3}\left(1-\cos^2\phi\right)\ d(\cos\phi) = -32\pi\left[\cos\phi - \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/3} =$$

$$= -32\pi\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right) - \left(1-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{40\pi}{3}\,.$$

**Exercício 3:** Calcule a massa da superfície $S$ parte do plano $z = 2-x$ dentro do cilindro $x^2+y^2 = 1$, sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = y^2$.

**Solução:** O esboço de $S$ está representado na figura que se segue.




A superfície $S$ é descrita por $S : z = f(x, y) = 2 - x$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Como $dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy$, então temos que $dS = \sqrt{1 + (-1)^2 + 0^2}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy$. Temos:

$$M = \iint_S \delta(x, y, z)\, dS = \iint_S y^2\, dS = \iint_D y^2 \sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2} \iint_D y^2\, dxdy\,.$$

Usando coordenadas polares, temos:

$$\iint_D y^2\, dxdy = \iint_{D_{r\theta}} (r^2 \operatorname{sen}^2 \theta) r\, drd\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^3 \operatorname{sen}^2 \theta\, drd\theta =$$

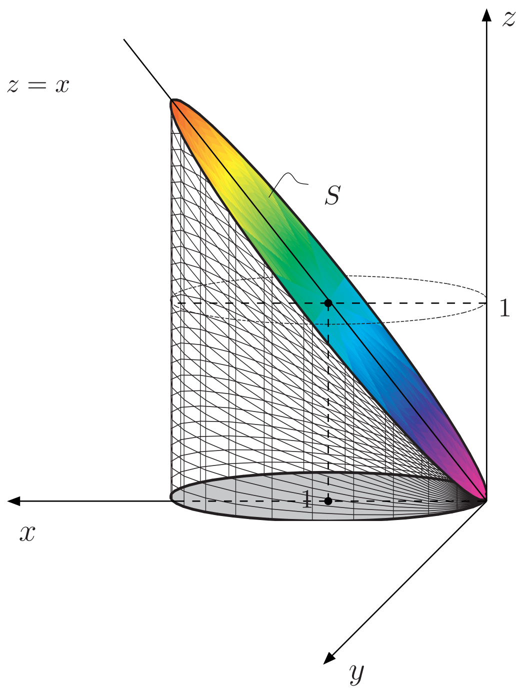
$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \int_0^1 r^3\, drd\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}\,.$$

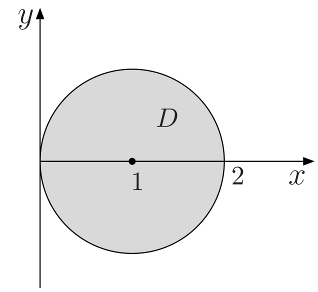
Logo:

$$M = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \text{ u.m.}$$

**Exercício 4:** Uma lâmina tem a forma da parte do plano $z = x$ recortada pelo cilindro $(x-1)^2+y^2 = 1$. Determine a massa dessa lâmina se a densidade no ponto $(x, y, z)$ é proporcional à distância desse ponto ao plano $xy$.

**Solução:** As figuras que se seguem mostram a lâmina $S$ e a sua projeção sobre o plano $xy$.




$S$ é dada por $S : z = z(x, y) = x$, onde $(x, y) \in D : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Temos:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \sqrt{1 + 1^2 + 0^2}\,dxdy = \sqrt{2}\,dxdy.$$

A densidade $f(x, y, z)$ é dada por $f(x, y, z) = kz$, onde $k$ é uma constante de proporcionalidade. Como

$$M = \iint_S f(x, y, z)\,dS$$

então:

$$M = k\iint_S z\,dS = k\iint_D x\sqrt{2}\,dxdy = k\sqrt{2}\,x\,dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$M = k\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta\, r\,drd\theta = k\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\cos\theta\,drd\theta =$$

$$= k\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{8k\sqrt{2}}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{8k\sqrt{2}}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{2k\sqrt{2}}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)d\theta =$$

$$= \frac{2k\sqrt{2}}{3\cdot 2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)d(2\theta) =$$

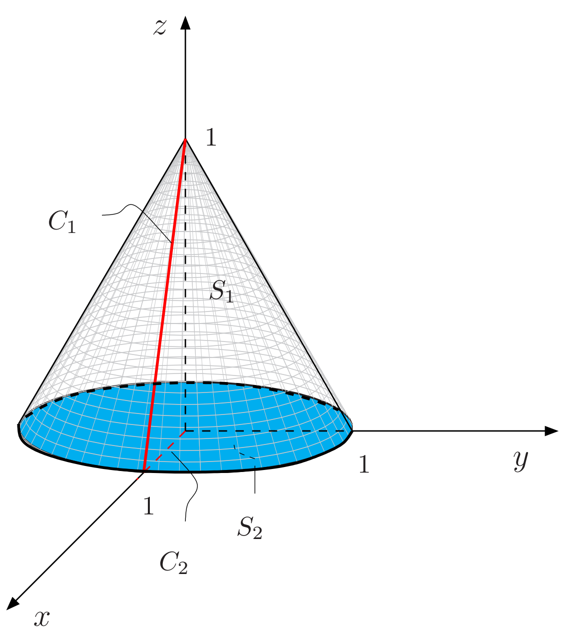
$$= \frac{k\sqrt{2}}{3}\left[2\theta+2\,\mathrm{sen}\,2\theta+\frac{1}{2}\left(2\theta+\frac{\mathrm{sen}\,4\theta}{2}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{k\sqrt{2}}{3}\,(2\pi+\pi) = k\sqrt{2}\,\pi \ \ \textit{u.m.}$$

---

**Exercício 5:** Seja $S$ uma superfície fechada tal que $S = S_1 \cup S_2$, onde $S_1$ e $S_2$ são as superfícies de revolução obtidas pela rotação em torno do eixo $z$ das curvas $C_1 : z = 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$ e $C_2 : z = 0$, com $0 \leq x \leq 1$, respectivamente. Se $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ é a função que fornece a densidade (massa por unidade de área) em cada ponto $(x,y,z) \in S$, calcule a massa de $S$.

**Solução:** O esboço de $S$ está representado na figura que se segue.



Tem-se:

$$M=\iint_S \rho(x,y,z)\,dS=\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS=$$

$$=\iint_{S_1}\sqrt{x^2+y^2}\,dS+\iint_{S_2}\sqrt{x^2+y^2}\,dS\,.$$

<u>*Cálculo de*</u> $\displaystyle\iint_{S_1}\sqrt{x^2+y^2}\,dS$

Uma parametrização da curva $C_1$ é

$$\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=0 \\ z(t)=1-t \end{cases} \quad \text{com } 0\leq t\leq 1\,.$$

Logo:

$$\begin{aligned} x(t) &= t &&= \text{raio de uma circunferência transversal} \\ z(t) &= 1-t &&= \text{altura dessa circunferência}\,. \end{aligned}$$

Então, uma parametrização de $S_1$ é dada por $\varphi(t,\theta)=(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta, 1-t)$, com $(t,\theta)\in D$ : $\begin{cases} 0\leq t\leq 1 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1) \\ \varphi_\theta &= (-t\operatorname{sen}\theta, t\cos\theta, 0) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_t\times\varphi_\theta &= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & -1 \\ -t\operatorname{sen}\theta & t\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \big(t\cos\theta\,,\ t\operatorname{sen}\theta\,,\ \underbrace{t\cos^2\theta+t\operatorname{sen}^2\theta}_{=\,t}\big) = \\ &= t(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)\,. \end{aligned}$$

Logo

$$\big\|\varphi_t\times\varphi_\theta\big\| = |t|\sqrt{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta+1}=t\sqrt{2}$$

pois $0\leq t\leq 1$ e, portanto:

$$dS=\|\varphi_t\times\varphi_\theta\|\;dtd\theta=t\sqrt{2}\;dtd\theta\,.$$

Então:

$$\iint_{S_1} \sqrt{x^2+y^2}\ dS = \iint_D \sqrt{t^2\cos^2\theta + t^2 \operatorname{sen}^2\theta}\ \ t\sqrt{2}\ dtd\theta =$$

$$= \sqrt{2}\iint_D t^2\ dtd\theta = \sqrt{2}\int_0^1 t^2 \int_0^{2\pi} d\theta dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 t^2\ dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\,.$$

<u>Cálculo de</u> $\displaystyle\iint_{S_2} \sqrt{x^2+y^2}\ dS$

A superfície $S_2$ é dada por $S_2 : z = f(x,y) = 0$, com $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq \leq 1$. Como $dS = \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\ dxdy$ então $dS = \sqrt{1+0+0}\ dxdy$ ou $dS = dxdy$.

**Observação:** Se $S$ é uma porção do plano $z = 0$ ou $z = c$ ($c =$ constante), segue que $dS = dxdy$ (memorize este resultado).

Logo:

$$\iint_{S_2} \sqrt{x^2+y^2}\ dS = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, tem-se:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \\ dxdy &= rdrd\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases}$$

e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Logo:

$$\iint_{S_2} \sqrt{x^2+y^2}\ dS = \iint_{D_{r\theta}} r \cdot r\ drd\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^2\ drd\theta =$$

$$= \int_0^1 r^2 \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\pi \int_0^1 r^2\ dr = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Assim:

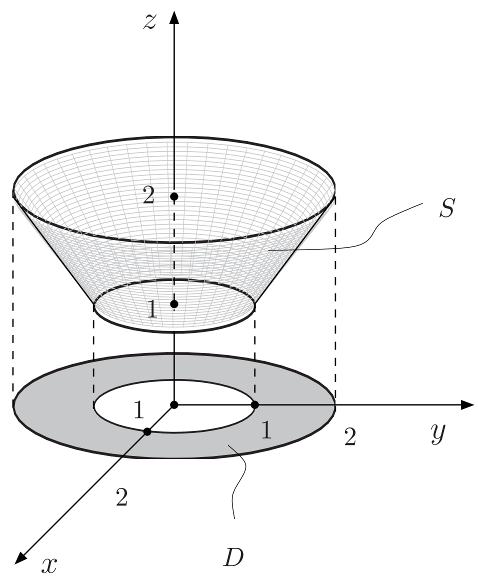
$$M = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

ou

$$M = \frac{2\pi}{3}(1+\sqrt{2})\quad \textit{u.m.}$$

**Exercício 6:** Determine o momento de inércia em relação ao eixo da superfície $S$ parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, sendo a densidade constante.

**Solução:** O esboço de $S$ está representado na figura que se segue.




Note que o eixo de $S$ é o eixo $z$. Então

$$I_z = \iint_S \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y, z)\; dS$$

onde $\rho(x, y, z) = \rho$. Logo:

$$I_z = \rho \iint_S \left(x^2 + y^2\right)\, dS\,.$$

A superfície $S$ pode ser descrita por $S : z = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x, y)$, com $(x, y) \in D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Tem-se:

$$z_x = f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z_y = f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

donde

$$1 + (z_x)^2 + (z_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 2\,.$$

Como $dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\; dxdy$ então $dS = \sqrt{2}\; dxdy$. Tem-se:

$$I_z = \rho \iint_S (x^2 + y^2)\; dS = \rho \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{2}\; dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\rho \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\, dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, tem-se:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \\ dxdy &= rdrd\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le r \le 2\,. \end{cases}$$

Então:

$$I_z = \sqrt{2}\,\rho \iint\limits_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r\ drd\theta = \sqrt{2}\,\rho \iint\limits_{D_{r\theta}} r^3\ drd\theta =$$

$$= \sqrt{2}\,\rho \int_1^2 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\sqrt{2}\,\rho\pi \int_1^2 r^3\ dr = 2\sqrt{2}\,\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\rho\pi}{2}(16-1) = \frac{15\sqrt{2}\,\rho\pi}{2}\,.$$

---

**Exercício 7:** Uma lâmina tem a forma de um hemisfério de raio $a$. Calcule o momento de inércia dessa lâmina em relação a um eixo que passa pelo pólo e é perpendicular ao plano que delimita o hemisfério. Considere a densidade no ponto $P$ da lâmina proporcional à distância deste ponto ao plano que delimita o hemisfério.

**Solução:** Sem perda de generalidade, podemos considerar o hemisfério superior centrado em $(0,0,0)$, isto é, $x^2+y^2+z^2=a^2$, com $z \ge 0$ donde

$$S : \varphi(\phi,\theta) = (a\operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ a\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\ a\cos\phi)$$

com $0 \le \phi \le \pi/2$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. Temos que $dS = a^2\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta$. Como o eixo que passa pelo pólo, perpendicular ao plano $xy$ é o eixo $z$, temos:

$$I_z = \iint\limits_S \left(x^2+y^2\right) f(x,y,z)\, dS$$

sendo $f(x,y,z) = kz$, onde $k$ é uma constante de proporcionalidade. Então:

$$I_z = k \iint\limits_S \left(x^2+y^2\right) z\ \ dS =$$

$$= k \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} a^2\operatorname{sen}^2\phi\ a\cos\phi\ a^2\operatorname{sen}\phi\ \ d\theta d\phi =$$

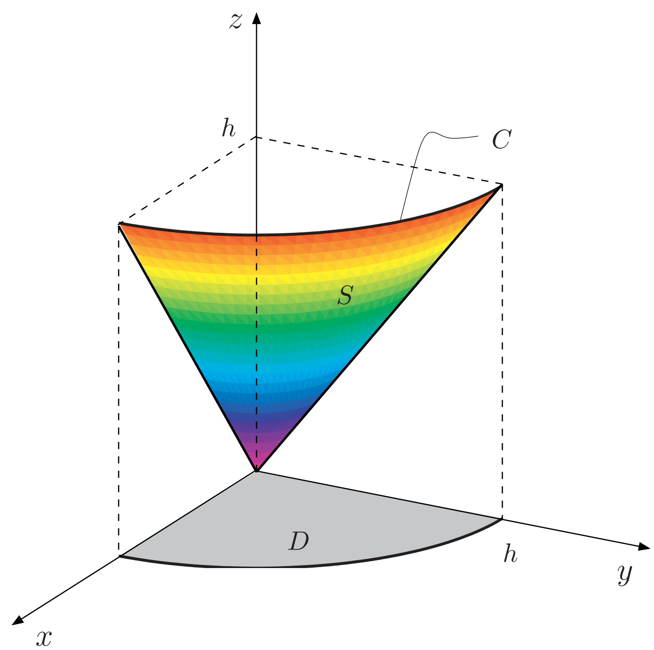
$$= ka^5 \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\phi\cos\phi\ \ d\theta d\phi =$$

$$= 2k\pi a^5 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\phi\cos\phi\ \ d\phi =$$

$$= 2k\pi a^5 \left[\frac{\operatorname{sen}^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{k\pi a^5}{2}\,.$$

**Exercício 8:** Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo $z$ da casca do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ de altura $h$ que está no primeiro octante com densidade constante é $I = \dfrac{Mh^2}{2}$, onde $M$ é a massa total.

**Solução:** A superfície $S$ pode ser vista na figura a seguir.




Temos $S : z = \sqrt{x^2+y^2}$, com $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq h^2,\ x \geq 0$ e $y \geq 0$ donde $dS = \sqrt{2}\ dxdy$. Como

$$I_z = \iint\limits_S (x^2+y^2)k\ dS$$

então

$$I_z = k\iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{2}\ dxdy = k\sqrt{2}\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\ dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$I_z = k\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^h r^2 r\ drd\theta = k\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^h r^3\ drd\theta =$$

$$= k\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^h\ d\theta = \frac{h^4k}{4}\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\ d\theta = \frac{h^4k\sqrt{2}\pi}{8}\,.$$

Mas

$$M = \iint\limits_S k\ dS = k\sqrt{2}\iint_D\ dxdy = k\sqrt{2}\ A(D) =$$

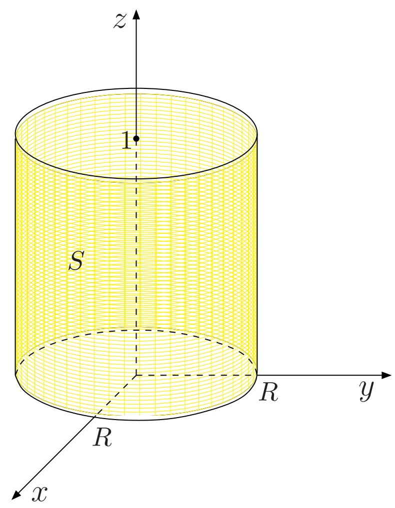
$$= \frac{k\sqrt{2}\ \pi h^2}{4} = \frac{h^2k\sqrt{2}\ \pi}{4}\,.$$

Logo:

$$I_z = \frac{Mh^2}{2}\,.$$

**Exercício 9:** Calcule o momento de inércia da superfície homogênea, de massa $M$, de equação $x^2 + y^2 = R^2$, $(R > 0)$, com $0 \leq z \leq 1$, em torno do eixo $z$.

**Solução:** O esboço de $S$ está representado na figura a seguir.




Uma parametrização de $S$ é dada por $\varphi(t,z) = (R\cos t, R\,\text{sen}\, t, z)$, com $(t,z) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$.

Temos $\varphi_t = (-R\,\text{sen}\, t, R\cos t, 0)$ e $\varphi_z = (0,0,1)$ donde

$$\varphi_t \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -R\,\text{sen}\, t & R\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R\cos t, R\,\text{sen}\, t, 0)$$

e $\|\varphi_t \times \varphi_z\| = R$. Como $dS = \|\varphi_t \times \varphi_z\|\, dtdz$ então $dS = R\, dtdz$.

**Observação:** Daqui por diante, no caso do cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, use o fato de que $dS = R\, dtdz$.

O momento de inércia é dado por

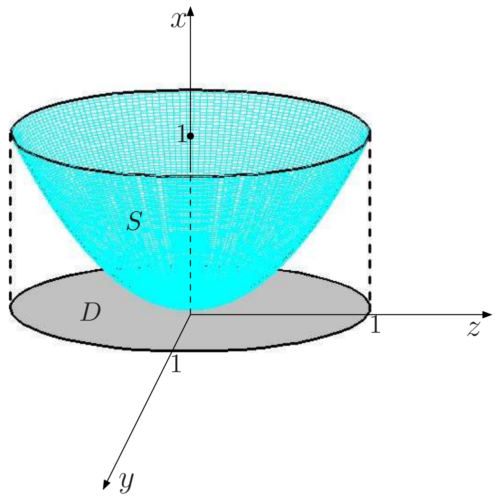
$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \underbrace{\delta(x,y,z)}_{k}\, dS =$$

$$= k \iint_D (R^2 \cos^2 t + R^2\, \text{sen}^2\, t)\, R\, dtdz = kR^3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 dzdt = 2k\pi R^3\,.$$

Como $M = kA(S) = k(2\pi R) \cdot 1 = 2k\pi R$ então $I_z = MR^2$.

**Exercício 10:** Encontre a coordenada $\overline{x}$ do centro de massa da superfície homogênea $S$ parte do parabolóide $x = y^2 + z^2$ cortada pelo plano $x = 1$.

**Solução:** O esboço de $S$ está representado na figura que se segue.




A superfície $S$ é dada por $S : x = y^2 + z^2$, com $(y,z) \in D : y^2 + z^2 \leq 1$. Temos que:

$$dS = \sqrt{1 + (x_y)^2 + (x_z)^2}\; dydz = \sqrt{1 + (2y)^2 + (2z)^2}\; dydz =$$

$$= \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}\; dydz\,.$$

Se $S$ é homogênea então

$$A(S)\overline{x} = \iint\limits_S x\; dS\,.$$

Temos que

$$A(S) = \iint\limits_S \; dS = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}\; dydz\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos que $y = r\cos\theta$, $z = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $dydz = = rdrd\theta$ e $y^2 + z^2 = r^2$. Logo:

$$A(S) = \iint\limits_{D_{r\theta}} \sqrt{1 + 4r^2}r\; drd\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 + 4r^2\right)^{1/2}(8r)\; d\theta dr =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1 + 4r^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)\,.$$

Temos também que:

$$\iint\limits_S x\; dS = \iint\limits_S \left(y^2 + z^2\right) dS =$$

$$= \iint\limits_D \left(y^2 + z^2\right)\sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}\; dydz =$$

$$= \iint\limits_{D_{r\theta}} r^2\left(1 + 4r^2\right)^{1/2} rdrd\theta = 2\pi\int_0^1 r^2\left(1 + 4r^2\right)^{1/2} rdr\,.$$

Fazendo $u = 1 + 4r^2$ temos que $du = 8r\ dr$ e $r^2 = \dfrac{u-1}{4}$. Para $r = 0$ temos $u = 1$ e para $r = 1$ temos $u = 5$. Logo:

$$\iint\limits_S x\ dS = 2\pi \int_1^5 \frac{u-1}{4} u^{1/2} \frac{du}{8} = \frac{\pi}{16} \int_1^5 \left(u^{3/2} - u^{1/2}\right) du =$$

$$= \frac{\pi}{16} \left[\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2}\right]_1^5 = \frac{\pi}{60} \left(25\sqrt{5} + 3\right)\ .$$

Logo:

$$\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \overline{x} = \frac{\pi}{60}\left(25\sqrt{5} + 3\right)$$

donde

$$\overline{x} = \frac{25\sqrt{5} + 3}{10\left(5\sqrt{5} - 1\right)}\ .$$