Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo 3A – Lista 9

Exercício 1: Seja S uma superfície parametrizada por

$$\varphi(u,v) = \big(v\cos u,\ v\,\mathrm{sen}\,u,\ 1-v^2\big)$$

com $0 \leq u \leq 2\pi$ e $v \geq 0$.

a) Identifique esta superfície.

b) Encontre uma equação da reta normal e a equação do plano tangente a S em $\varphi(0,1)$.

Solução:

a) As equações paramétricas de S são $\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\,\mathrm{sen}\,u \\ z = 1-v^2 \end{cases}$, com $0 \leq u \leq 2\pi$ e $v \geq 0$. Eliminando os parâmetros u e v, temos $x^2+y^2 = v^2 = 1-z$ ou $z = 1-x^2-y^2$ (parabolóide circular).

b) Um vetor normal de S em $\varphi(0,1) = (1,0,0)$ é:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N}(0,1) &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}(0,1) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(0,1) = \\
&= (-v\,\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0) \times (\cos u, \mathrm{sen}\,u, -2v)\Big|_{(0,1)} = \\
&= (0,1,0)\times(1,0,-2) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \\
&= (-2,0,-1)\,.
\end{aligned}$$

<u>*Equação do plano tangente a*</u> S <u>*em*</u> $\varphi(0,1) = (1,0,0)$

Da fórmula $\big[(x,y,z)-\varphi(0,1)\big]\cdot\overrightarrow{N}(0,1) = 0$ temos:

$$\big[(x,y,z)-(1,0,0)\big]\cdot(-2,0,-1) = 0 \ \Rightarrow\ (x-1,y,z)\cdot(-2,0,-1) = 0 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ -2(x-1)-z = 0 \ \Rightarrow\ 2x+z-2 = 0\,.$$

<u>*Equação da reta normal a*</u> S <u>*em*</u> $\varphi(0,1) = (1,0,0)$

Da fórmula $\big[(x,y,z)-\varphi(0,1)\big] = \lambda\overrightarrow{N}(0,1)$, com $\lambda\in\mathbb{R}$, temos:

$$\big[(x,y,z)-(1,0,0)\big] = \lambda(-2,0,-1)$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$ que é a equação vetorial da reta normal ou

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

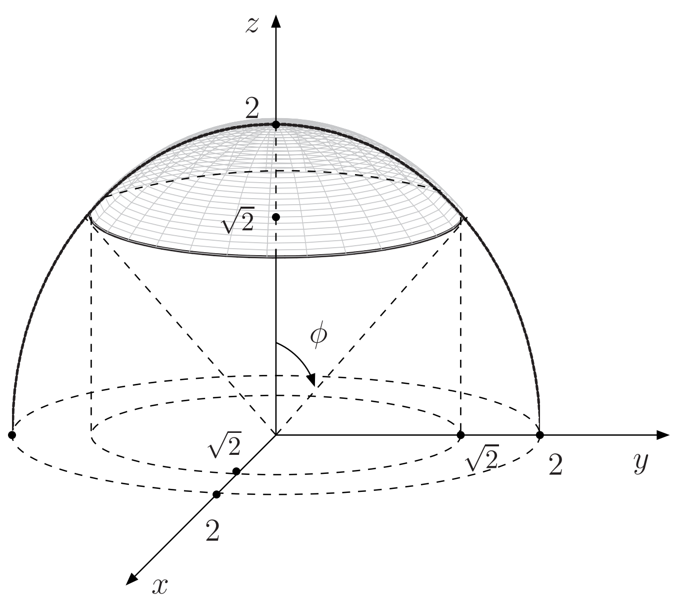
com $\lambda \in \mathbb{R}$, que são equações paramétricas da reta normal.

Exercício 2: Encontre uma representação paramétrica para a superfície

a) S : parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que fica acima do plano $z = \sqrt{2}$.
b) S : parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ que fica entre os planos $z = -2$ e $y + z = 2$.
c) S : parte do plano $x + y + z = 2$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
d) S : cone gerado pela semirreta $z = 2y$, $y \geq 0$, girando-a em torno do eixo z.

Solução:

a) O esboço de S é a figura a seguir.



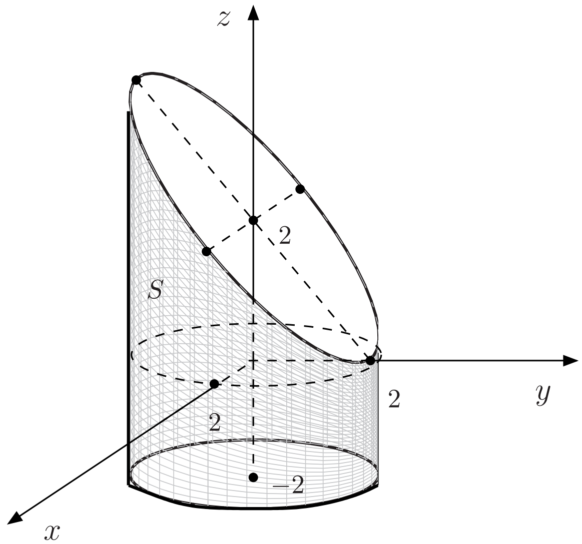
Se $(x, y, z) \in S$ então $\begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = 2 \cos \phi \end{cases}$.

Da figura vemos que $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \cos \phi = \sqrt{2}/2 \quad \Rightarrow \quad \phi = \pi/4 \end{cases}$. Portanto, uma parametrização de S é dada por

$$\varphi(\phi, \theta) = (2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, 2 \cos \phi)$$

com $(\phi, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.

b) O esboço de S está representado na figura a seguir.



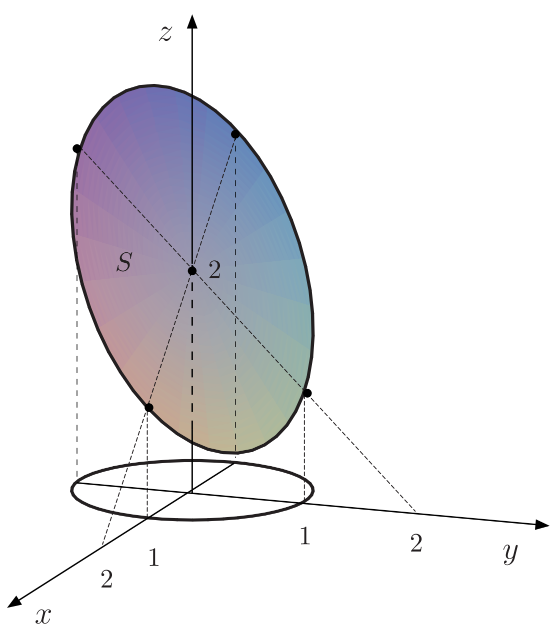
Se $(x, y, z) \in S$ então $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t \\ z = z \end{cases}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ e $-2 \leq z \leq \leq 2 - y = 2 - 2\,\mathrm{sen}\, t$.

Então uma parametrização de S é

$$\varphi(t, z) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, z)$$

com $(t, z) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ -2 \leq z \leq 2 - 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$.

c) O esboço de S está representado na figura a seguir.

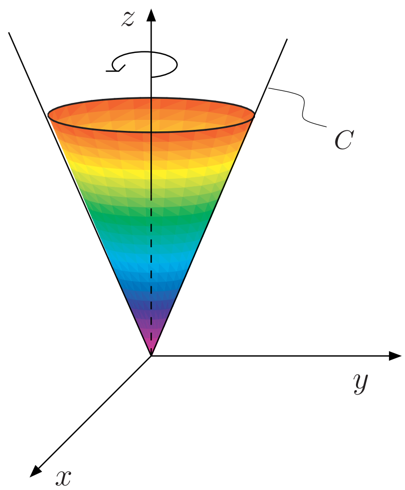


Se $(x, y, z) \in S$ então $z = 2 - x - y$ com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Então, uma parametrização de S é dada por $\phi(x, y) = (x, y, 2 - x - y)$. Uma outra parametrização de S é dada por

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, 2 - r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)$$

com $(r, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.

d) O esboço de S é está representado na figura a seguir.



Uma parametrização de C é dada por

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \\ z(t) = 2t \end{cases}$$

com $t \geq 0$. Se $(x, y, z) \in S$ então (x, y, z) pertence à circunferência de raio $y(t) = t$ e de centro $(0, 0, z(t)) = (0, 0, 2t)$. Então

$$\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\operatorname{sen}\theta \\ z = 2t \end{cases}$$

com $t \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Assim, uma parametrização de S é dada por

$$\varphi(t, \theta) = (t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta, 2t)$$

com $(t, \theta) \in D : t \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$.

Exercício 3:

a) Encontre uma parametrização para a superfície obtida girando-se o círculo $(x - a)^2 + z^2 = r^2$, com $0 < r < a$, em torno do eixo z (esta superfície é chamada *toro*).

b) Encontre um vetor normal à esta superfície.

Solução:

a) Inicialmente vamos parametrizar o círculo que está no plano xz. Temos que $\begin{cases} x(t) = a + r\cos t \\ y(t) = r \operatorname{sen} t \end{cases}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Seja $(x, y, z) \in S$. Temos

$$\begin{cases} x = x(t)\cos\theta \\ y = y(t) \operatorname{sen}\theta \\ z = z(t) \end{cases}$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Então, uma parametrização de S é dada por

$$\varphi(\theta, t) = \big((a + r\cos t)\cos\theta,\ (a + r\cos t)\operatorname{sen}\theta,\ r\operatorname{sen} t\big)$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq t \leq 2\pi$.

Um vetor normal à S é dado por

$$\overrightarrow{N}(\theta, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta, t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\theta, t)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= \big(- (a + r\cos t)\operatorname{sen}\theta, (a + r\cos t)\cos\theta, 0\big) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= (-r\operatorname{sen} t\cos\theta, -r\operatorname{sen} t\operatorname{sen}\theta, r\cos t\big)\ . \end{aligned}$$

Logo:

$$\overrightarrow{N}(\theta, t) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ -(a + r\cos t)\operatorname{sen}\theta & (a + r\cos t)\cos\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen} t\cos\theta & -r\operatorname{sen} t\operatorname{sen}\theta & r\cos t \end{vmatrix} =$$

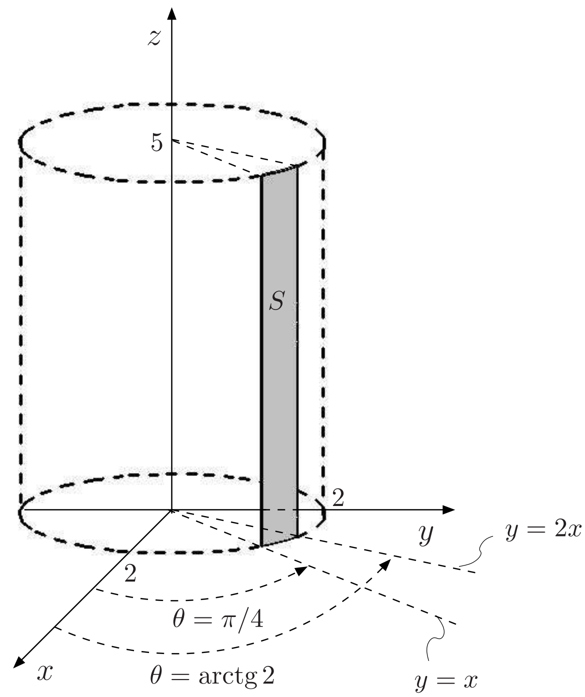
$$= \big(r(a + r\cos t)\cos\theta\cos t, r(a + r\cos t)\operatorname{sen}\theta\cos t, r(a + r\cos t)\operatorname{sen} t\big) =$$

$$= (a + r\cos t)(r\cos\theta\cos t, r\operatorname{sen}\theta\cos t, r\operatorname{sen} t)\ .$$

Exercício 4: Seja S a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com $0 \leq z \leq 5$, delimitada pelos semiplanos $y = x$ e $y = 2x$, com $x \geq 0$.

a) Obtenha uma parametrização de S.
b) Calcule a área de S.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Adotando as coordenadas cilíndricas θ e z como parâmetros temos

$$S : \varphi(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$$

com $(\theta, z) \in D : \begin{cases} 0 \leq z \leq 5 \\ \pi/4 \leq \theta \leq \mathrm{arctg}\,2 \end{cases}$.

b) Temos:

$$A(S) = \iint_D \left\| \varphi_\theta \times \varphi_z \right\| \, d\theta dz$$

onde

$$\varphi_\theta \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -2\,\mathrm{sen}\,\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)$$

e

$$\left\| \varphi_\theta \times \varphi_z \right\| = \sqrt{4\cos^2\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta} = \sqrt{4} = 2\,.$$

Então:

$$A(S) = \iint_D 2 \, d\theta dz = 2\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\,2} \int_0^5 dz d\theta = 10 \int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\,2} dz =$$

$$= 10\left(\mathrm{arctg}\,2 - \frac{\pi}{4}\right) \textit{ u.a.}$$

Exercício 5: Seja a superfície S parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, interior ao cone $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$.

a) Parametrize S usando coordenadas cartesianas como parâmetros.

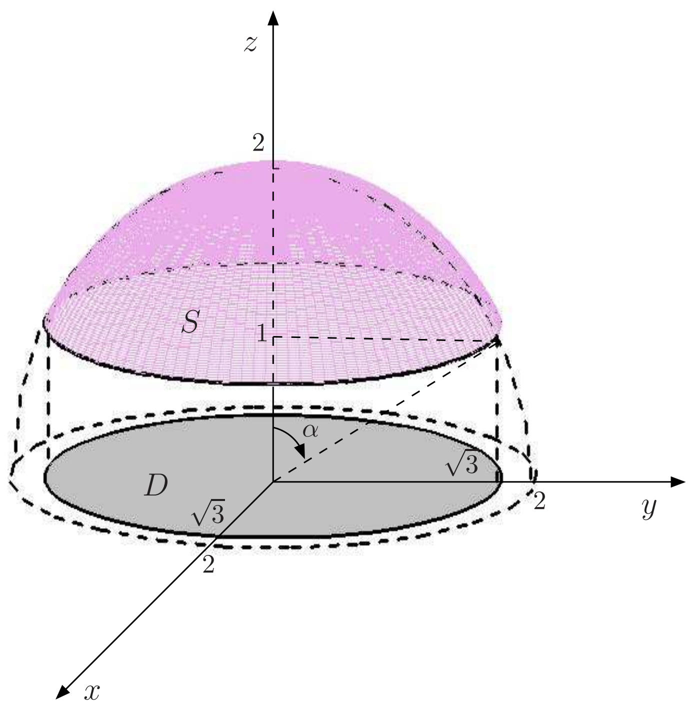
b) Parametrize S usando coordenadas polares como parâmetros.

c) Parametrize S usando coordenadas esféricas como parâmetros.

d) Calcule a área de S.

Solução:

a) De $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$, temos $x^2 + y^2 + \dfrac{x^2+y^2}{3} = 4$ donde $x^2 + y^2 = 3$. Logo, a interseção é a circunferência $x^2 + y^2 = 3$ e ocorre no plano $z = 1$. Assim, o esboço de S está representado na figura a seguir.



Temos $S : \varphi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right)$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 3$.

b) Usando as coordenadas polares, temos $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, e $z = \sqrt{4 - r^2}$, com $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo, temos $S : \varphi(r, \theta) = = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{4 - r^2})$, com $(r, \theta) \in D : 0 \leq r \leq 1\,, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

c) As coordenadas esféricas são: ρ, ϕ e θ. Em S, temos que $\rho = 2$. Logo, $x = 2\operatorname{sen}\phi\cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$ e $z = 2\cos\phi$. Temos $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}/1$, donde $\alpha = \pi/3$. Assim, S pode ser definida por:

$$S : \varphi(\phi, \theta) = (2\operatorname{sen}\phi\cos\theta, 2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, 2\cos\phi)$$

com $(\phi, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi/3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.

d) Usando o item (c), temos que $dS = \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\theta = 4 \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\theta$. Temos que,

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D 4 \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\theta = 4 \int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\theta d\phi =$$

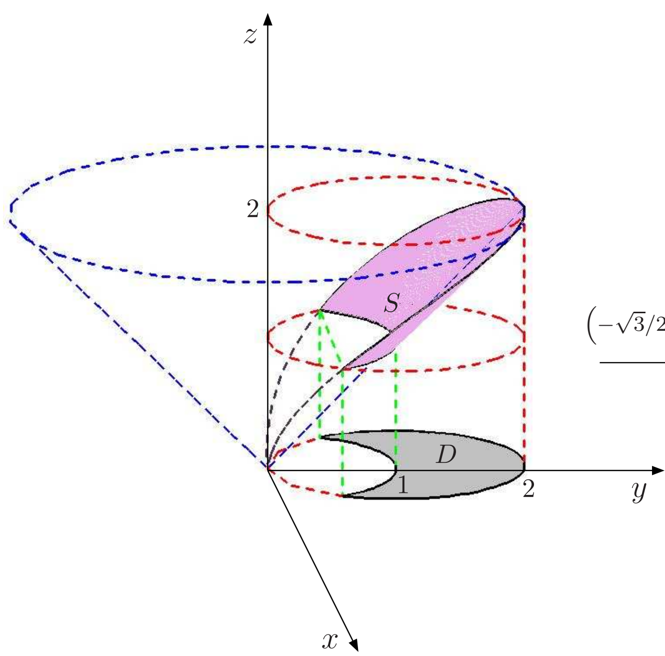
$$= 8\pi \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\phi \, d\phi = 8\pi \big[-\cos\phi \big]_0^{\pi/3} = 8\pi \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4\pi \ \textit{u.a.}$$

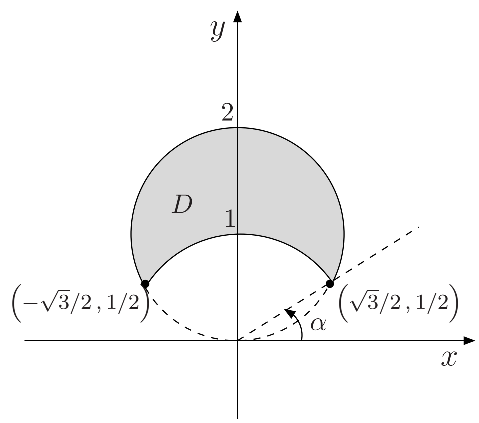
Exercício 6: Seja a superfície S parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 \leq 2y$, fora do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ e acima do plano xy.

a) Parametrize S usando coordenadas cartesianas.
b) Parametrize S usando coordenadas polares.
c) Calcule a área de S.

Solução:

a) O esboço de S está representado na figura a seguir.





Adotando x e y como parâmetros, temos $S : \varphi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right)$, com $(x,y) \in D$.

b) Adotando r e θ como parâmetros, temos $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ e $z = \sqrt{x^2+y^2} = r$. Vamos descrever D em coordenadas polares.

Temos $\operatorname{tg}\alpha = (1/2)/(\sqrt{3}/2)$, donde $\alpha = \pi/6$. Logo, $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6$. De $x^2 + y^2 = 2y$, temos $r^2 = 2r\operatorname{sen}\theta$, donde $r = 2\operatorname{sen}\theta$. Logo, $1 \leq r \leq 2\operatorname{sen}\theta$.

Então, temos $S : \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r)$, com $1 \leq r \leq 2\operatorname{sen}\theta$ e $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6$.

c) De (a) temos que S é dada por $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $(x,y) \in D$. Então:

$$
\begin{aligned}
A(S) &= \iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy = \\
&= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dxdy = \\
&= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\, dxdy = \sqrt{2}\iint_D dxdy = \\
&= \sqrt{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_1^{2\operatorname{sen}\theta} r\, drd\theta = \sqrt{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{2\operatorname{sen}\theta} d\theta = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left(4\operatorname{sen}^2\theta - 1\right) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{4}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right) - \theta\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\big[\theta - \operatorname{sen}2\theta\big]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\frac{5\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right] = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \textit{ u.a.}
\end{aligned}
$$

Exercício 7: Considere o parabolóide

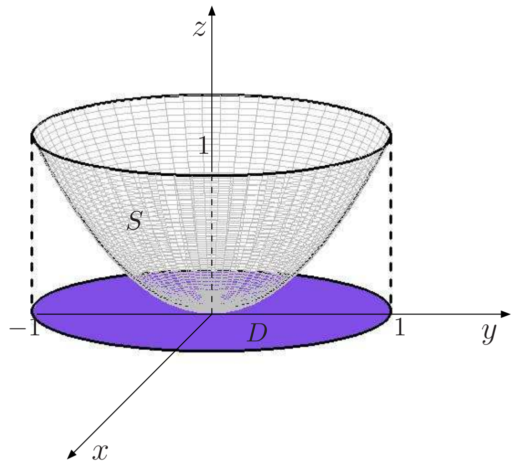
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2 + y^2\,,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}\ .$$

a) Parametrize S usando coordenadas cartesianas.
b) Parametrize S usando coordenadas cilíndricas.
c) Calcule a área de S.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.

a) Adotando x e y como parâmetros temos $S : \varphi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$.

b) Adotando r e θ como parâmetros temos $S : \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2)$, com $(r,\theta) \in D :$ $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.



c) Como S é gráfico de $z = f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$, então:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy\,.$$

Usando coordenadas polares, temos $x^2 + y^2 = r^2$, $dxdy = rdrd\theta$ e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Então:

$$A(S) = \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{1 + 4r^2}\; r\; drd\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 + 4r^2\right)^{1/2} r\; d\theta dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(1 + 4r^2\right)^{1/2} r\; dr\,.$$

Fazendo $u = 1 + 4r^2$ temos $du = 8rdr$ (ou $rdr = du/8$). Para $r = 0$ temos $u = 1$ e para $r = 1$ temos $u = 5$. Então:

$$A(S) = 2\pi \int_1^5 u^{1/2} \frac{du}{8} = \frac{2\pi}{8} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{3/2}\right]_1^5 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)\ \textit{u.a.}$$

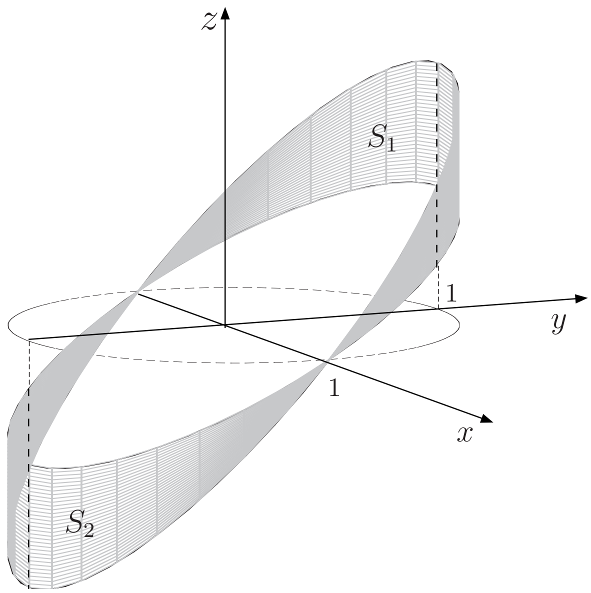
Observação: Usando a parametrização encontrada em (b) temos

$$A(S) = \iint_D \left\|\varphi_r \times \varphi_\theta\right\|\, drd\theta\,.$$

Então, calculamos as derivadas parciais φ_r e φ_θ, o produto vetorial $\varphi_r \times \varphi_\theta$ e sua norma e em seguida a integral.

Exercício 8: Determine a área da porção S do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre os planos $z = y$ e $z = 2y$.

Solução: O esboço de S está representado na figura a seguir.



Temos $S = S_1 \cup S_2$, donde $A(S) = A(S_1) + A(S_2) = 2A(S_1)$ por simetria. A superfície S_1 é a porção de S acima do plano xy e é dada por $S_1 \; : \; \varphi(t,z) =$ $= (\cos t, \operatorname{sen} t, z)$ com $(t,z) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq \pi \\ \operatorname{sen} t \leq z \leq 2 \operatorname{sen} t \end{cases}$. Temos

$$\varphi_t \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$$

donde, $\|\varphi_t \times \varphi_z\| = 1$. Como

$$A(S_1) = \iint_D \|\varphi_t \times \varphi_z\| \, dtdz$$

então

$$A(S_1) = \iint_D dtdz = \int_0^\pi \int_{\operatorname{sen} t}^{2 \operatorname{sen} t} dzdt = \int_0^\pi (2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t) \, dt =$$

$$= \int_0^\pi \operatorname{sen} t \, dt = \Big[-\cos t \Big]_0^\pi = 2 \, .$$

Logo:

$$A(S) = 2 \cdot 2 = 4 \;\; \textit{u.a.}$$

Exercício 9: Calcule a área da superfície do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ que está entre o plano xy e o plano $z - \dfrac{y}{2} = 1$.

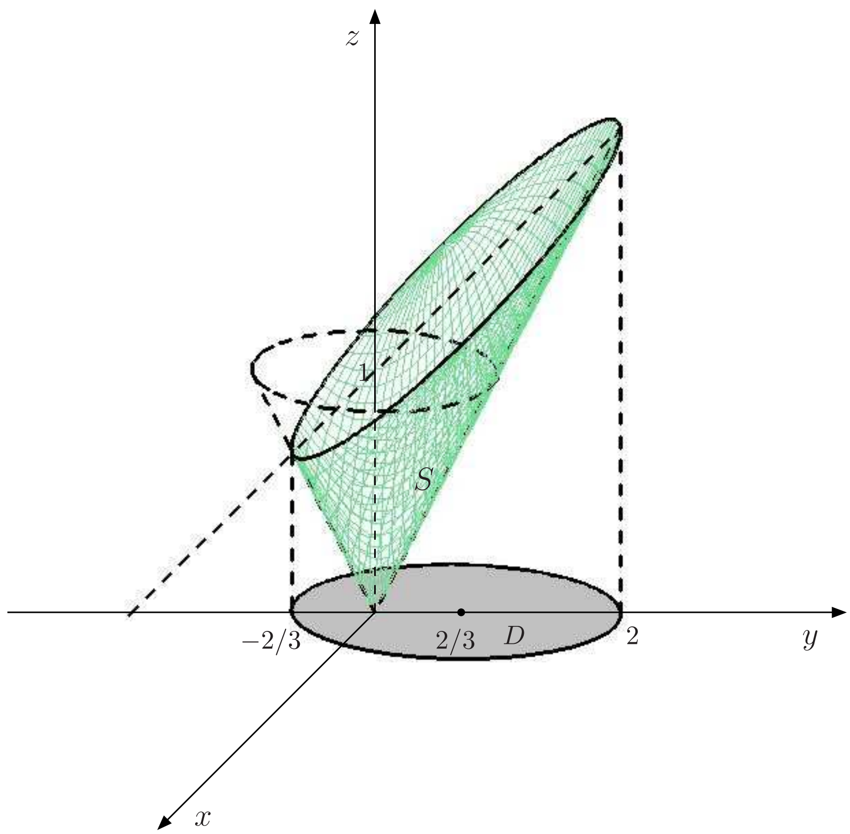
Solução: De $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z - \dfrac{y}{2} = 1$ temos que:

$$x^2 + y^2 = \left(1 + \frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 + y + \frac{y^2}{4} \Rightarrow x^2 + \frac{3}{4}y^2 - y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4/3} + \frac{(y-2/3)^2}{16/9} = 1\,.$$

Assim, o esboço de S está representado na figura que se segue.



Temos $S : z = \sqrt{x^2+y^2}$, com $(x, y) \in D : \dfrac{x^2}{4/3} + \dfrac{(y-2/3)^2}{16/9} \leq 1$. Então:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\; dxdy$$

onde

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Logo:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1+1}\, dxdy =$$

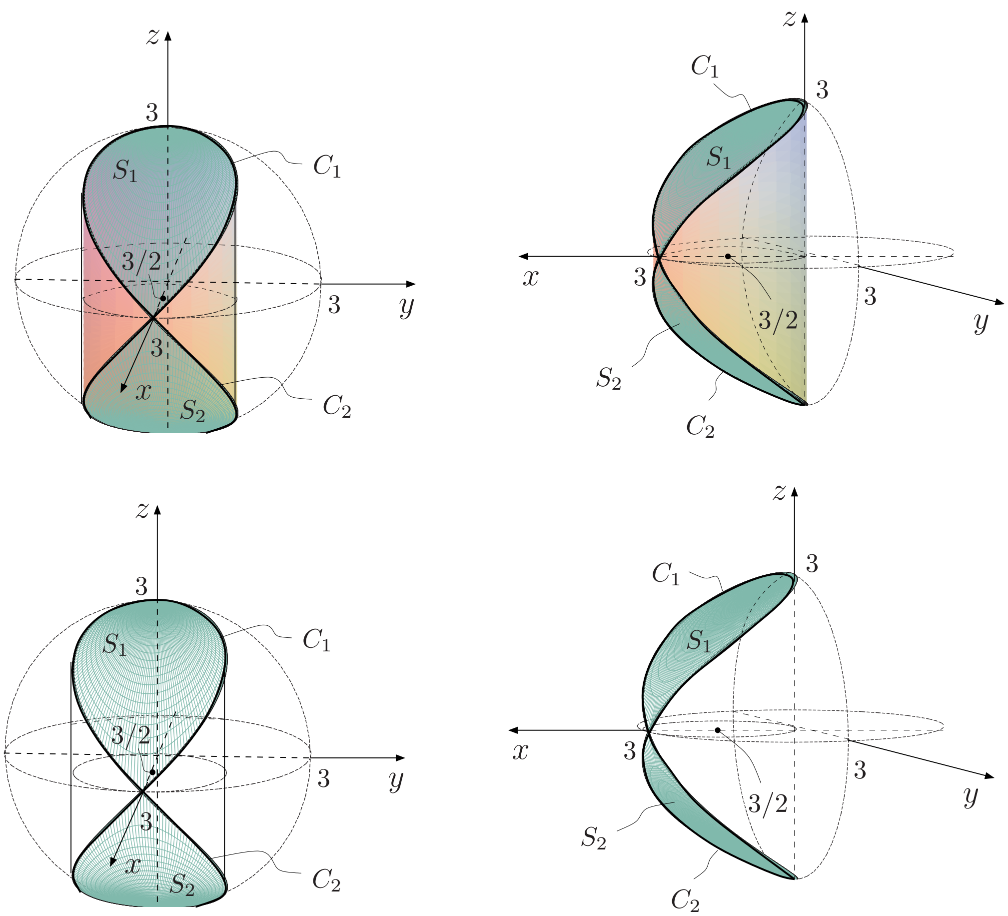
$$= \sqrt{2}A(D) = \sqrt{2}\pi ab$$

onde $a = 2/\sqrt{3}$ e $b = 4/3$. Portanto:

$$A(S) = \sqrt{2}\pi \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\pi\sqrt{6}}{9} \text{ u.a.}$$

Exercício 10: Calcule a área da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 3x$.

Solução: A superfície $S = S_1 \cup S_2$ está ilustrada na figura a seguir.



Por simetria, $A(S_1) = A(S_2)$. Logo, $A(S) = 2A(S_1)$. Temos que S_1 é definida por $S_1 : z =$

$\sqrt{9-x^2-y^2} = f(x,y)$, com $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 3x$. Temos:

$$A(S_1) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{9-x^2-y^2}}\, dx\, dy = \iint\limits_D \frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\, dx\, dy\,.$$

Em coordenadas polares temos:

$$A(S_1) = 3 \iint\limits_{D_{r\theta}} = \; 3 \iint\limits_{D_{r\theta}} (9-r^2)^{-\frac{1}{2}}\, r\; dr\, d\theta$$

onde

$$D_{r\theta} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2;\; -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\,,\, 0 \leq r \leq 3\cos\theta\right\}\,.$$

Então:

$$A(S_1) = \frac{3}{-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{3\cos\theta} (9-r^2)^{-1/2}\; d\big(9-r^2\big) =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\big(9-r^2\big)^{1/2}\right]_0^{3\cos\theta} d\theta =$$

$$= -3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\big(9\,\text{sen}^2\theta\big)^{1/2} - 9^{1/2}\right]\; d\theta = -3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3|\,\text{sen}\,\theta| - 3\; d\theta =$$

$$= 9\left(\pi - \int_{-\pi/2}^{0} (-\,\text{sen}\,\theta)\; d\theta - \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,\theta\; d\theta\right) =$$

$$= 9\left(\pi + \Big[-\cos\theta\Big]_{-\pi/2}^{0} + \Big[\cos\theta\Big]_0^{\pi/2}\right) = 9(\pi-2)\,.$$

Logo:

$$A(S) = 18(\pi-2)\;\; \textit{u.a.}$$