Lista 1: Sequências, Séries, Séries de Potência e Series de Taylor

Cálculo Diferencial e Integral 3

Eng. Civil e Produção, 3ro Periodo

7 de abril de 2017

1. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$, $|x| < 1$ aplicar esta fórmula para somar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)10^{2n}}$.

2. Analise a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^{n+1} n!}$, se é convergente calcule a soma .

3. Encontre uma representação em série de potência de $\int_0^x e^{-t^2} dt$.

4. Analise a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{log(n)^k}$, onde k é constante. .

5. Analise a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{n(n+1)2^{n+1}}$ se converge calcule a soma.

6. Analise a convergência ou divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} ln(1 + \frac{1}{n(n+2)})$, se caso convergir calcule a soma.

7. Analise a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}) sen(\frac{n+1}{n}\pi)$.

8. Analise a convergência ou divergência da série $\frac{1}{2ln(2)} + \frac{1}{3ln(3)} + ...$

9. Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln(n))^{ln(n)}}$ é convergente.

10. Provar que a sequência$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...$ converge a 2.

11. Se $b_1 = 1$, $b_n = \frac{1}{4}(2b_{n-1} + 3)$ para $n \geq 2$, demostrar que a sequência converge.

12. Calcular o $\lim_{n->\infty} \frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)...(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)(n^2+5)...(n^2+(2n+1))}$.

13. Seja $\{a_n\}$ uma sequência tal que $a_{n+1} = \sqrt{1+\sqrt{a_n}}$, $a_1 = 1$, mostre que a sequência é convergente.

14. Seja $\{a_n\}$ uma sequência tal que $a_{n+1} = \lambda a_n$, λ constante. Investigue a convergência ou divergência de $\{a_n\}$.

15. Encontre o desenvolvimento em série de Maclaurin das seguintes funções:

    (a) $\frac{1}{senh(x)}$

    (b) $cosh(x)$

    (c) $\frac{1}{(x+1)(x-1)}$

    (d) $log(1+x)$

    (e) $sen(x^2 - 1)$

    (f) $\int_0^x sen(t^2 - 1)cos(2t^2 + 1)dt$

16. Considere a função $f : \Re - 2 \longrightarrow \Re$, $f(x) = \frac{2x(x-3)}{(x+2)(x^2+4)}$:

(a) Determine o desenvolvimento de Maclaurin de f

(b) Determine $f^{(n)}(0)$, $\forall n \in \aleph$

17. Com Auxilio da série de potência de $arctg(x)$, mostre que: $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

18. Represente as integrais $\int_0^x \frac{ln(1-t)}{t} dt$ e $\int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$ por séries de potência de x, indicando o intervalo de convergência de cada um deles. Em cada caso o integrando em $t = 0$ é definido pelo limite quando $t \longrightarrow 0$.

19. Investigue a convergência ou divergência das seguintes séries:

$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$

$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(log(n))^k}$.

20. Determine o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, onde a_n é dada nas seguintes equações:

$(a) \frac{n^2(n+1)}{(n+2)3^n}$

$(b) \frac{(2n)!}{(3n)!}$

$(c) \frac{1}{nlog(n)}$

$(d) \frac{(-1)^n 1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....2n}$

$(e) \frac{1}{3^n n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

Investigue a convergência em cada extremidade do intervalo de convergência.

21. Expandir $log(1+x)/(1+x)$ em séries de potência.

<u>Respostas e Sugestões</u>

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)10^{2n}} = 1 + 99ln(\frac{99}{100})$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^{n+1}n!} = \frac{1}{8}(e^{1/8} - 1)$

3. $\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^2 x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$

4. Sugest. Teste de Comparação.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{n(n+1)2^{n+1}} = 1$

6. Sugest. Teste do Limite.

7. Sugest. Teste da Integral.

8. Sugest. Teste da Integral.

9. Sugest. Teste da Integral.

10. Sugest. Utilize Indução Matemática.

11.

12. $\frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)...(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)(n^2+5)...(n^2+(2n+1))} = e^{-3/2}$

13.

14.

15. (a) Sugest. analise $(sinh(x))^{-1}$

    (d) Sugest. $\frac{d}{dx}log(x+1) = \frac{1}{(x+1)}$

16.

17.

18. $\int_0^x \frac{ln(1-t)}{t}dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ representação valida para $|x| < 1$ e $\int_0^x \frac{e^t-1}{t}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!n}$, representação válida em qualquer x real.

19. (a) Diverge se $k < 1$ e Converge se $k > 1$

    (b) Diverge se $k \leq 1$ e Converge se $k > 1$. .

20. (a) R=1, diverge em ± 3; (b) $R = \infty$; (c) $R = 1$, divergente em 1 e convergente -1; (d) $R = 1$, diverge em ± 1 e (e) $R = \frac{3}{e}$

21. $log(1+x)/(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n H_n$ onde $H_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Êxitos...!