Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo 3A – Lista 8

Exercício 1: Um objeto percorre uma elipse $4x^2+25y^2=100$ no sentido anti-horário e se encontra submetido à força $\overrightarrow{F}(x,y)=(-3y,3x)$. Ache o trabalho realizado.

Solução: De $4x^2+25y^2=100$, temos $x^2/25+y^2/4=1$. Então, $\gamma(t)=(5\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, com $0\le t\le 2\pi$ é uma parametrização da elipse no sentido anti-horário. O trabalho é dado por

$$W=\int\limits_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int\limits_C -3y\,dx+3x\,dy=$$

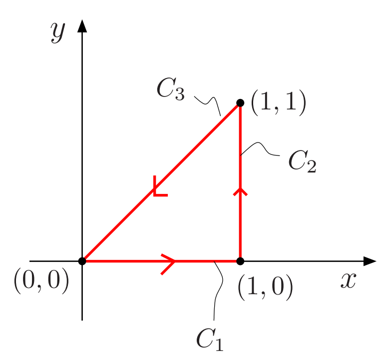
$$=\int_0^{2\pi}\big[(-6\operatorname{sen} t)(-5\operatorname{sen} t)+(15\cos t)(2\cos t)\big]\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(30\operatorname{sen}^2 t+30\cos^2 t\right)\,dt=\int_0^{2\pi}30\,dt=60\pi\,.$$

Exercício 2: Calcule $\oint\limits_{C^+}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ para $\overrightarrow{F}(x,y)=(x^2,x+y)$ onde C é a fronteira do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: Temos $C=C_1\cup C_2\cup C_3$. Então:

$$\oint\limits_{C^+}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int\limits_{C_1}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}+\int\limits_{C_2}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}+\int\limits_{C_3}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}\,.$$



<u>*Cálculo de*</u> $\int\limits_{C_1}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$

Temos $C_1 : y = 0$, com $0 \leq x \leq 1$. Logo, $dy = 0$. Então:

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} x^2\ dx + (x+y)\ dy = \int_{C_1} x^2\ dx = \int_0^1 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

<u>*Cálculo de*</u> $\displaystyle\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Temos $C_2 : x = 1$, com $0 \leq y \leq 1$. Logo, $dx = 0$. Então:

$$\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_2} x^2\ dx + (x+y)\ dy = \int_{C_2} (1+y)\ dy = \int_0^1 (1+y)\ dy =$$

$$= \left[y + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\,.$$

<u>*Cálculo de*</u> $\displaystyle\int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Temos que C_3^- é a curva C_3 percorrida no sentido contrário. Logo, $C_3^- : y = x$, com $0 \leq x \leq 1$, donde, $dy = dx$. Logo:

$$\int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{C_3^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{C_3^-} x^2\,dx + (x+y)\,dy =$$

$$= -\int_{C_3^-} x^2\,dx + (x+x)\,dx = -\int_{C_3^-} (x^2+2x)\,dx = -\int_0^1 (x^2+2x)\,dx =$$

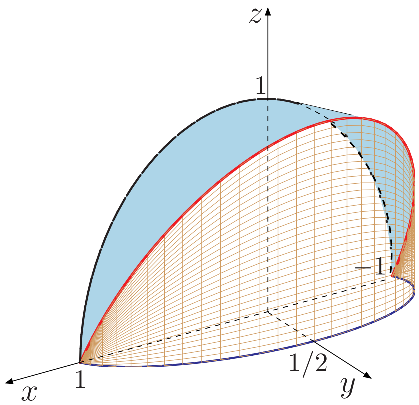
$$= -\left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 = -\left[\frac{1}{3} + 1\right] = -\frac{4}{3}\,.$$

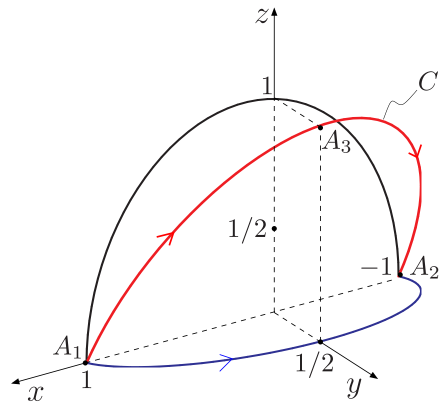
Portanto:

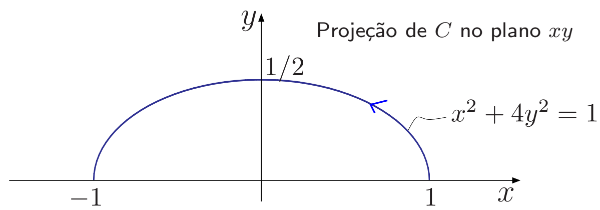
$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{2}\,.$$

Exercício 3: Calcule $\displaystyle\int_C -2y\,dx + 3z\,dy + x\,dz$, sendo C a interseção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, com $y \geq 0$ e $z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(1, 0, 0)$ ao ponto $(-1, 0, 0)$.

Solução: Esboçando os dois cilindros, vemos que $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (-1, 0, 0)$ e $A_3 = (0, 1/2, 1)$ são pontos de interseção. Ligando-os encontramos C.







Se $(x, y, z) \in C$ então (x, y, z) satisfaz

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{1/4} = 1 \quad \text{com} \quad y \geq 0 \\ x^2 + z^2 = 1 \quad \text{com} \quad z \geq 0 \end{cases}$$

então $x = \cos t$ e $y = (1/2)\,\mathrm{sen}\, t$, com $0 \leq t \leq \pi$. Como $z = \sqrt{1 - x^2}$ então temos que $z = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{\mathrm{sen}^2\, t} = \mathrm{sen}\, t$.

Logo, $\gamma(t) = (\cos t, (1/2)\,\mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, t)$, com $0 \leq t \leq \pi$ é uma parametrização de C, orientada de A_1 para A_2. Temos $dx = -\,\mathrm{sen}\, t\; dt$, $dy = (1/2)\cos t\; dt$ e $dz = \cos t\; dt$. Então

$$\int_C -\,2y\; dx + 3z\; dy + x\; dz =$$

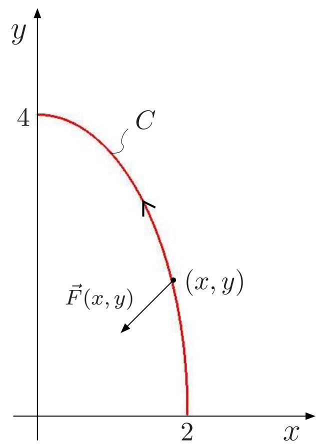
$$= \int_0^\pi \Big[\left(-2 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, t \right) (-\,\mathrm{sen}\, t) + (3\,\mathrm{sen}\, t) \cdot \frac{1}{2} \cos t + (\cos t)(\cos t) \Big]\, dt =$$

$$= \int_0^\pi \left(\mathrm{sen}^2\, t + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\, t \cos t + \cos^2 t \right) dt = \int_0^\pi \left(1 + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\, t \cos t \right) dt =$$

$$= \left[t + \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathrm{sen}^2\, t}{2} \right]_0^\pi = \pi\,.$$

Exercício 4: Achar o trabalho de uma força variável, dirigida para a origem das coordenadas, cuja grandeza é proporcional ao afastamento do ponto em relação à origem das coordenadas, se o ponto de aplicação desta força descreve, no sentido anti-horário, a parte da elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ no primeiro quadrante.

Solução: O esboço da trajetória C está representado na figura que se segue.



Como a força $\overrightarrow{F}(x,y)$ está dirigida para a origem e seu módulo é proporcional à distancia de (x,y) à origem então os vetores $\overrightarrow{F}(x,y)$ e (x,y) têm mesma direção e sentidos contrários e $\left\|\overrightarrow{F}(x,y)\right\| = k\sqrt{x^2+y^2}$, onde $k>0$ é uma constante. Assim, temos que

$$\overrightarrow{F}(x,y) = -k\,(x,y)\ .$$

O trabalho W é dado por $W = \int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ onde C é parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = (2\cos t\,, 4\,\mathrm{sen}\,t)$, com $0\le t\le \pi/2$, donde $\overrightarrow{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,t\,, 4\cos t)$. Logo:

$$W = \int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{\pi/2} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right)\cdot \overrightarrow{r}'(t)\ dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \overrightarrow{F}(2\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t)\cdot \overrightarrow{r}'(t)\ dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} -k\,(2\cos t\,, 4\,\mathrm{sen}\,t)\cdot(-2\,\mathrm{sen}\,t, 4\cos t)\,dt =$$

$$= -k\int_0^{\pi/2} (-4\,\mathrm{sen}\,t\cos t + 16\,\mathrm{sen}\,t\cos t)\,dt =$$

$$= -k\int_0^{\pi/2} 12\,\mathrm{sen}\,t\cos t\ dt = -k\left[12\frac{\mathrm{sen}^2\,t}{2}\right]_0^{\pi/2} = -6k \quad \textit{u.w.}$$

Exercício 5: O campo vetorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x-2, y-2, z-4x-4)$ atua sobre uma partícula transladando-a ao longo da curva interseção das superfícies $z = x^2+y^2$ e $z = 4x+4y-4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido horário. Calcule o trabalho realizado por $\overrightarrow{F}(x,y,z)$.

Solução: Das equações $z = x^2+y^2$ e $z = 4x+4y-4$ temos que $x^2+y^2-4x-4y = -4$ ou $(x-2)^2+(y-2)^2 = 8-4 = 4$. Isto significa que a projeção de C no plano xy é a circunferência $(x-2)^2+(y-2)^2 = 4$. Parametrizando a projeção no sentido anti-horário, temos $x = 2+2\cos t$ e $y = 2+2\operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Como $z = 4x+4y-4$ então $z = 8+8\cos t+8+8\operatorname{sen} t-4 = = 12+8\cos t+8\operatorname{sen} t$. Então uma parametrização da curva C, com orientação oposta ao do enunciado é:

$$C^- : \gamma(t) = (2+2\cos t, 2+2\operatorname{sen} t, 12+8\cos t+8\operatorname{sen} t)$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo:

$$\gamma'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, -8\operatorname{sen} t+8\cos t)$$

e

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}(\gamma(t)) &= (2+2\cos t-2, 2+2\operatorname{sen} t-2, 12+8\cos t+8\operatorname{sen} t-8-8\cos t-4) = \\ &= (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 8\operatorname{sen} t)\,.\end{aligned}$$

Então:

$$\int_{C^-} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 8\operatorname{sen} t)\cdot(-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, -8\operatorname{sen} t+8\cos t)\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-4\operatorname{sen} t\cos t+4\operatorname{sen} t\cos t-64\operatorname{sen}^2 t+64\operatorname{sen} t\cos t\right)\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-64\operatorname{sen}^2 t+64\operatorname{sen} t\cos t\right)\ dt =$$

$$= -\frac{64}{2}\left[t-\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_0^{2\pi} + 32\left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = -64\pi\,.$$

Por propriedade de integral de linha de campo vetorial, temos que:

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{C^-} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = -(-64\pi) = 64\pi\,.$$

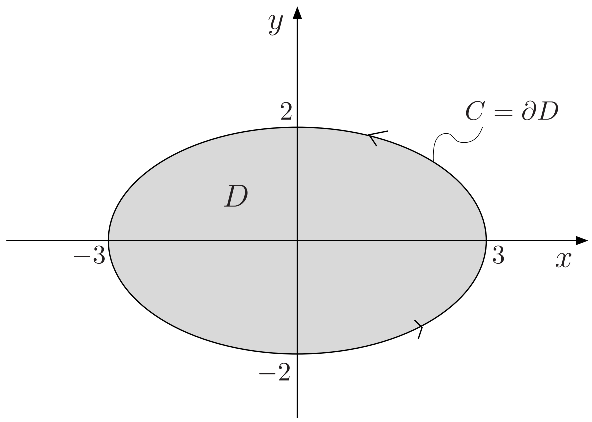
Como o trabalho é dado por $W = \int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$, então $W = 64\pi$ *u.w.*

Exercício 6: Verifique o Teorema de Green calculando as duas integrais do enunciado para $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^3+xy^2)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (yx^2+y^3+3x)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ e C a fronteira da região $D = \left\{(x,y);\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$.

Solução: Devemos verificar que

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

onde $P = x^3+xy^2$ e $Q = yx^2+y^3+3x$. O esboço de D é:



<u>Cálculo de</u> $\oint_{C^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Parametrizando C, no sentido anti-horário, temos $x = 3\cos t$ e $y = 2\,\mathrm{sen}\,t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ donde $dx = -3\,\mathrm{sen}\,t\,dt$ e $dy = 2\cos t$. Logo:

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(3\cos t)^3 + (3\cos t)(2\,\mathrm{sen}\,t)^2\right](-3\,\mathrm{sen}\,t) + \Big[(2\,\mathrm{sen}\,t)(3\cos t)^2 +$$

$$+ (2\,\mathrm{sen}\,t)^3 + 3(3\cos t)\Big](2\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-81\cos^3 t\,\mathrm{sen}\,t - 36\cos t\,\mathrm{sen}^3 t + 36\cos^3 t\,\mathrm{sen}\,t + 16\cos t\,\mathrm{sen}^3 t +$$

$$+18\cos^2 t\Big)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-45\cos^3 t\,\mathrm{sen}\,t - 20\cos t\,\mathrm{sen}^3 t + 18\cos^2 t\right)\,dt =$$

$$= \left[45 \cdot \frac{\cos^4 t}{4} - 20 \cdot \frac{\mathrm{sen}^4 t}{4} + \frac{18}{2}\left(t + \frac{\mathrm{sen}\,2t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 0 - 0 + 18\pi = 18\pi \qquad (1)$$

Por outro lado,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_D (2xy + 3 - 2xy)\, dxdy = \iint\limits_D 3\, dxdy =$$

$$= 3A(D) = 3\pi ab$$

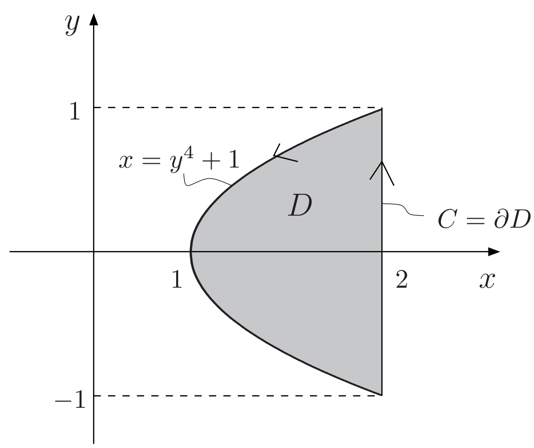
com $a = 3$ e $b = 2$. Logo,

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 18\pi \qquad (2)$$

De (1) e (2), vemos que o teorema está verificado.

Exercício 7: Calcule $\oint\limits_C x^{-1}e^y \; dx + (e^y \ln x + 2x)\; dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: A região D, limitada por C está ilustrada na figura a seguir.



Como $\vec{F} = (P, Q) = \left(\dfrac{e^y}{x}, \, e^y \ln x + 2x\right)$ é de classe C^1 no aberto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\; x > 0\}$ contendo D e $C = \partial D$ está orientada positivamente, então podemos aplicar o teorema de Green. Temos, então que:

$$\oint\limits_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_D \left(\frac{e^y}{x} + 2 - \frac{e^y}{x}\right) dxdy =$$

$$= 2 \iint\limits_D dxdy\,.$$

Descrevendo D como tipo II, temos:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\; -1 \le y \le 1\,,\; y^4 + 1 \le x \le 2\right\}\,.$$

Então:

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\int_{-1}^{1}\int_{y^4+1}^{2} dxdy = 2\int_{-1}^{1}\left(1-y^4\right)\, dy =$$

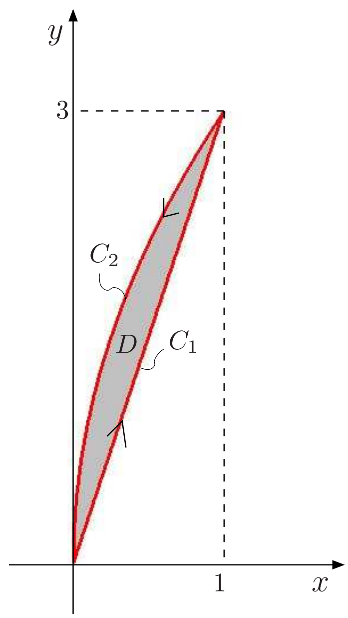
$$= 2\Big[y - \frac{y^5}{5}\Big]_{-1}^{1} = 2\left(2-\frac{2}{5}\right) = \frac{16}{5}\,.$$

Exercício 8: Use a fórmula $A(D) = \displaystyle\int_{C^+=\partial D^+} x\ dy$ para calcular a área da região D limitada pelas curvas $y = 3x$ e $y^2 = 9x$.

Solução: De $y = 3x$ e $y^2 = 9x$ temos:

$$9x^2 = 9x \ \Leftrightarrow\ 9x^2 - 9x = 0 \ \Leftrightarrow\ 9x(x-1) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0 \text{ ou } x = 1\,.$$

Logo, $(0,0)$ e $(1,3)$ são pontos de interseção. Assim, o esboço de D está representado na figura a seguir.



Temos $C = \partial D = C_1 \cup C_2$. Logo:

$$A(D) = \int_{C_1} x\ dy + \int_{C_2} x\ dy\,.$$

<u>*Cálculo de*</u> $\displaystyle\int_{C_1} x\ dy = \int_{C_1} 0\ dx + x\ dy$

Temos que $C_1 : y = 3x$, com $0 \leq x \leq 1$, orientada de $(0,0)$ a $(1,3)$. Então uma parametrização de C_1 é dada por $C_1 : \gamma(t) = (t, 3t)$, com $0 \leq t \leq 1$ donde $\gamma'(t) = (1,3)$. Logo, sendo $\overrightarrow{F}(x,y) = (0,x)$:

$$\int_{C_1} x\ dy = \int_0^1 \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_0^1 (0,t) \cdot (1,3)\ dt =$$
$$= \int_0^1 3t\ dt = \left[\frac{3t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\,.$$

<u>*Cálculo de*</u> $\displaystyle\int_{C_2} x\ dy = \int_{C_2} 0\ dx + x\ dy$

Temos que $C_2 : y^2 = 9x$, com $0 \leq y \leq 3$, orientada de $(1,3)$ a $(0,0)$. Então uma parametrização de C_2^- orientada de $(0,0)$ para $(1,3)$ é dada por $C_2^- : \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{9}, t\right)$, com $0 \leq t \leq 3$ donde $\gamma'(t) = \left(\frac{2t}{9}, 1\right)$. Então:

$$\int_{C_2} x\ dy = -\int_{C_2^-} x\ dy = -\int_0^3 \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt$$

onde $\overrightarrow{F}(x,y) = (0,x)$. Logo:

$$\int_{C_2} x\ dy = -\int_0^3 \left(0, \frac{t^2}{9}\right) \cdot \left(\frac{2t}{9}, 1\right) dt = -\int_0^3 \frac{t^2}{9}\ dt = -\left[\frac{t^3}{27}\right]_0^3 = -1\,.$$

Assim:

$$A(D) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}\ \text{u.a.}$$

Exercício 9: Se D é a região interior à elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ e exterior à circunferência $x^2 + y^2 = 4$, calcule a integral de linha

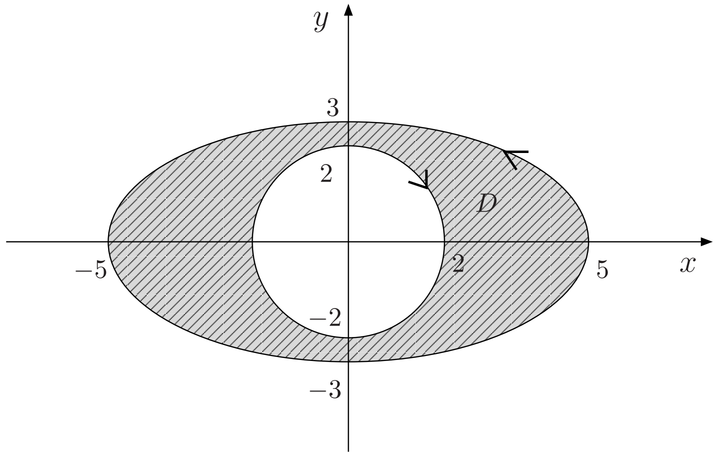
$$I = \int_C \left(2xy + e^{x^2}\right) dx + \left(x^2 + 2x + \cos y^2\right) dy$$

onde $C = \partial D$ está orientada positivamente.

Solução: O esboço de D está representado na figura que se segue.

Como $\overrightarrow{F} = (P,Q) = \left(2xy + e^{x^2}\,,\, x^2 + 2x + \cos y^2\right)$ é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e ∂D está orientada positivamente, podemos aplicar o Teorema de Green. Tem-se

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 2$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$



donde

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2\,.$$

Então, pelo Teorema de Green, tem-se:

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 2\iint\limits_D dxdy = 2A(D) =$$

$$= 2 \cdot (\text{área da elipse - área do disco}) = 2\big(\pi ab - \pi r^2\big) =$$

$$= 2\big(\pi \cdot 5 \cdot 3 - \pi \cdot 2^2\big) = 2\big(15\pi - 4\pi\big) = 22\pi\,.$$

Exercício 10: Seja

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,,\ \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

com $(x,y) \in U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\,.$

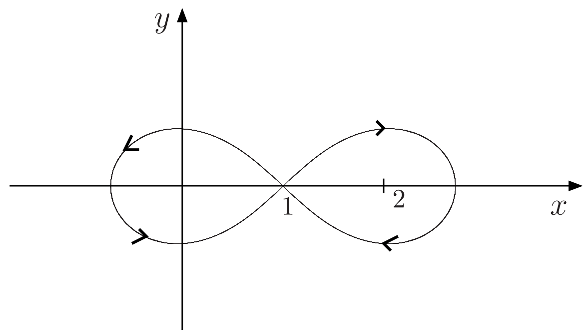
a) Calcule $\displaystyle\oint_{C_1^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde C_1 é a circunferência $x^2+y^2=a^2$, $a>0$, orientada no sentido anti-horário.

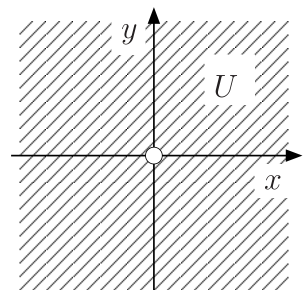
b) Calcule $\displaystyle\oint_{C_2^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde C_2 é a fronteira do quadrado $D = [-1,1]\times$ $\times[-1,1]$, orientada no sentido anti-horário.

c) Calcule $\displaystyle\oint_{C_3^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde C_3 é dada na figura abaixo.

Solução:

a) O campo $\overrightarrow{F} = (P,Q) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\,,\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$ é de classe C^1 em $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.





Observe que

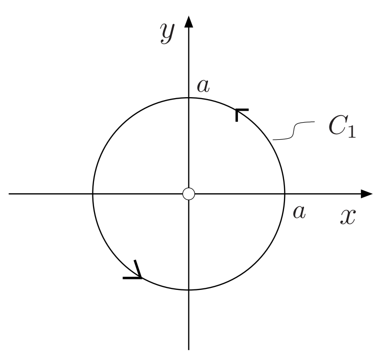
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

donde

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0\,.$$

O esboço de C_1 está representado na figura que se segue.



Seja D a região limitada por C_1. Como D não está contida em U, domínio de $\overrightarrow{F}$, pois $(0,0) \in D$ e $(0,0) \notin U$, então <u>*não*</u> podemos aplicar o Teorema de Green. Sendo assim, usaremos a definição.

Parametrizando C_1, tem-se $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \,\text{sen}\, t \end{cases}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ donde

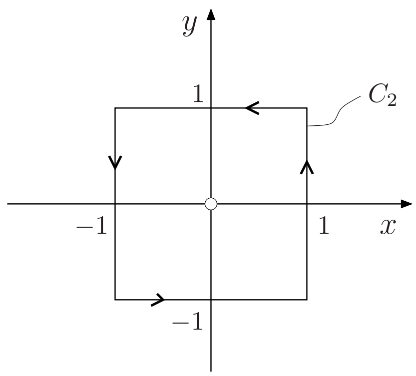
$\begin{cases} dx = -a \operatorname{sen} t \ dt \\ dy = a \cos t \ dt \end{cases}$. Então:

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-a \operatorname{sen} t}{a^2} \cdot (-a \operatorname{sen} t) + \frac{a \cos t}{a^2} \cdot a \cos t \right] dt =$$

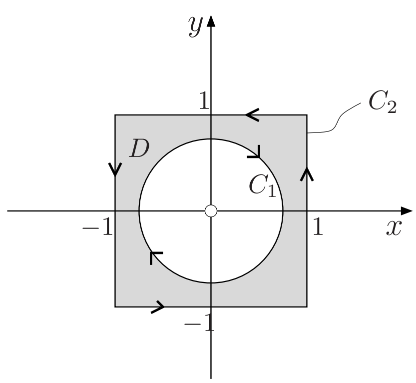
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2 \operatorname{sen}^2 t}{a^2} + \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} \right) dt = \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t \right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \, .$$

Observe que a integral não depende do raio da circunferência.

b) O esboço de C_2 está representado na figura que se segue.



Aqui também não podemos usar o Teorema de Green pois, $(0,0)$ está no interior do quadrado. Usar a definição é uma tarefa complicada. Então, o que fazer? A idéia é de isolar $(0,0)$ por uma circunferência $C_1 : x^2 + y^2 = a^2$, com $a < 1$, orientada no sentido horário.



Consideremos a região D limitada por C_2 e C_1. Como D não contém $(0,0)$ e $\partial D = C_1 \cup C_2$ está orientada positivamente, podemos aplicar o Teorema de Green em D. Tem-se

$$\oint_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 0 \ dxdy = 0$$

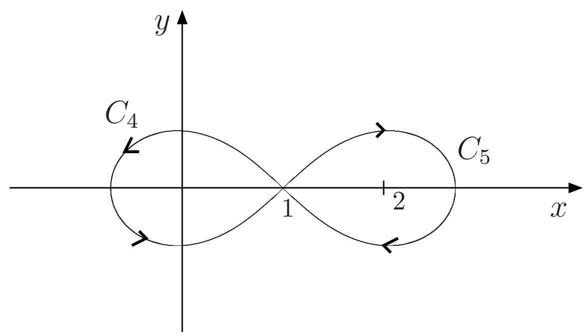
ou

$$\oint_{C_2^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \oint_{C_1^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$$

ou

$$\oint_{C_2^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{C_1^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 2\pi \qquad \text{(por (a))}$$

c)



A curva C_3 deve ser olhada como $C_3 = C_4 \cup C_5$. Logo:

$$\oint_{C_3^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{C_4^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \oint_{C_5^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

Usando o mesmo argumento de (b), mostra-se que:

$$\oint_{C_4^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 2\pi\,.$$

Como a região limitada por C_5 não contém $(0,0)$ podemps aplicar o Teorema de Green e temos que:

$$\oint_{C_5^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$$

donde

$$\oint_{C_5^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0\,.$$

Logo:

$$\oint_{C_3^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 2\pi + 0 = 2\pi\,.$$

Exercício 11: Calcule

$$I = \int_C \left(e^{x^3} + y^2\right)\,dx + \left(x + y^5\right)\,dy$$

onde C é formada por $y = x$ e $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, que vai do ponto $(1,1)$ ao ponto $(1,0)$.

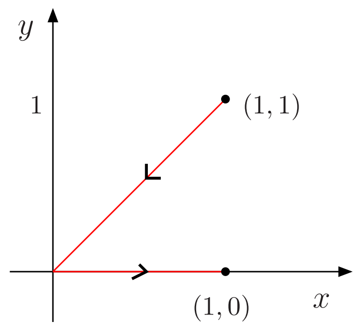
Solução: O campo $\overrightarrow{F}(P,Q) = \left(e^{x^3} + y^2\,,\, x + y^5\right)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

donde

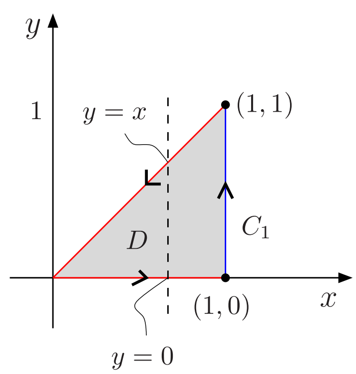
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2y\,.$$

O esboço da curva C está representado na figura a seguir.



Calcular a integral I diretamente (através da definição) é uma tarefa ingrata. Será que podemos aplicar o Teorema de Green? NÃO, pois C não é uma curva fechada. Mas podemos fechá-la através de uma curva simples: segmento de reta C_1 que liga $(1,0)$ a $(1,1)$ e depois usar o teorema de Green.

Seja então $\overline{C} = C \cup C_1$, que é uma curva fechada.



Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, a região limitada por $\overline{C}$. Como $\overline{C} = \partial D$ está orientada positivamente, podemos aplicar o teorema de Green. Tem-se então

$$\oint_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (1 - 2y)\, dxdy$$

onde D é dado por $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$. Logo:

$$\oint\limits_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 \int_0^x (1 - 2y)\ dydx = \int_0^1 \Big[y - y^2\Big]_0^x\ dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x - x^2\right)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

ou

$$I + \int\limits_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{1}{6}\,.$$

<u>*Cálculo de*</u> $\displaystyle\int\limits_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Tem-se $C_1 : \begin{cases} x = 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$, portanto $dx = 0$. Então:

$$\int\limits_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\limits_{C_1} \left(e^{x^3} + y^2\right)\ dx + \left(x + y^5\right)\ dy = \int\limits_{C_1} \left(1 + y^5\right)\ dy$$

pois, $x = 1$ e $dx = 0$. Logo:

$$\int\limits_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 \left(1 + y^5\right)\ dy = \left[y + \frac{y^6}{6}\right]_0^1 = \frac{7}{6}\,.$$

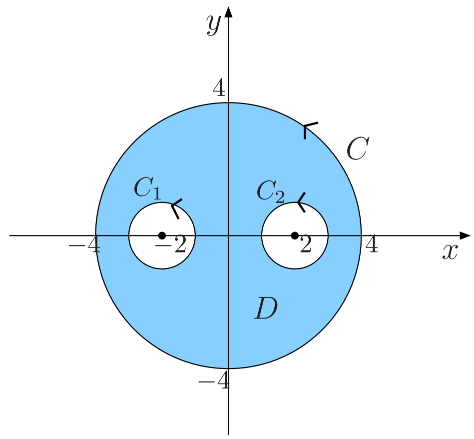
Assim:

$$I + \frac{7}{6} = \frac{1}{6}\,,$$

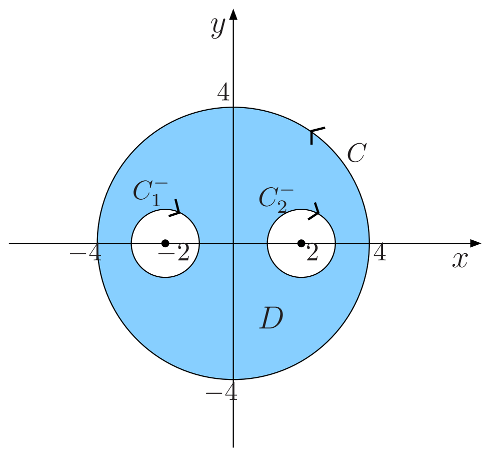
donde $I = -1$.

Exercício 12: Considere um campo vetorial $\overrightarrow{F}$ definido em $\mathbb{R}^2 - \{(-2,0), (2,0)\}$ satisfazendo a relação $\nabla \times \overrightarrow{F}(x,y) = \overrightarrow{0}$ em todos os pontos do domínio. Suponha que $\oint\limits_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 6$ e $\oint\limits_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 9$, onde C_1 é o círculo de raio 1 e centro $(-2,0)$ e C_2 é o círculo de raio 1 e centro $(2,0)$, orientados no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde C é o círculo de raio 4 e centro $(0,0)$, orientado no sentido anti-horário.

Solução: Seja D a região do plano limitada por C, C_1 e C_2. O esboço de D está representado na figura que se segue.



Orientando positivamente a fronteira ∂D, podemos aplicar o Teorema de Green.



Temos então que

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_1^-} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2^-} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D 0\ dxdy$$

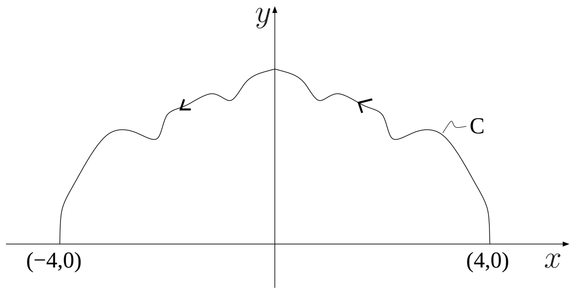
pois

$$\nabla \times \vec{F}(x,y) = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0,0,0)\,.$$

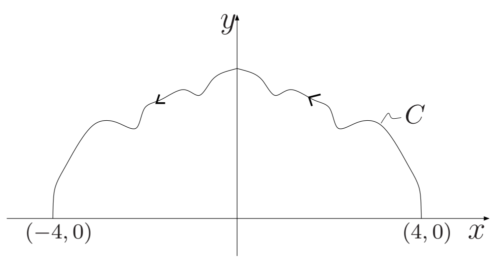
Então:

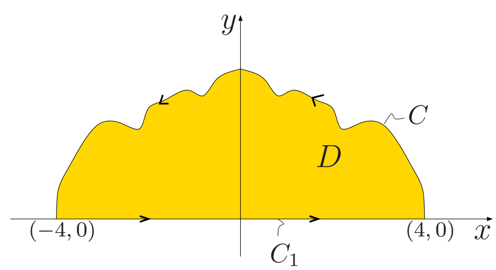
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6 + 9 = 15\,.$$

Exercício 13: Seja C uma curva simétrica em relação ao eixo y, que vai de $(4,0)$ a $(-4,0)$, como mostrada na figura que se segue. Sabendo-se que a área da região delimitada por C e pelo eixo x vale 16, calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x^2}{4} + xy^3\right)\vec{\mathbf{i}} + (2x + \operatorname{arctg} y)\,\vec{\mathbf{j}}$.



Solução: Sabemos que o trabalho é dado por $W = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Mas é impossível calcular diretamente a integral pois não conhecemos a equação de C. Como $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 3xy^2 \neq 0$, então $\vec{F}$ não é conservativo. Assim, só nos resta aplicar o Teorema de Green. Para isso, devemos fechar a curva por um segmento de reta sobre o eixo x, de $(-4, 0)$ a $(4, 0)$.





Seja D a região limitada por $\overline{C} = C \cup C_1$. Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e $\overline{C}$ é a fronteira de D e está contida em $\mathbb{R}^2$ e está orientada no sentido anti-horário, podemos aplicar o Teorema de Green. Então, temos

$$\oint\limits_{\overline{C}^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint\limits_{\overline{C}^+} \underbrace{\frac{x^2}{4} + xy^3}_{P}\, dx - \underbrace{2x + \operatorname{arctg} y}_{Q}\, dy =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_D (2 - 3xy^2)\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_D 2\, dxdy - \iint\limits_D 3xy^2\, dxdy\,.$$

Como $f(x, y) = 3xy^2$ é uma função ímpar na variável x e D tem simetria em relação ao eixo y, então:

$$\iint\limits_D 3xy^2\, dxdy = 0\,.$$

Assim:

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\ A(D) = 2 \cdot 16 = 32\,.$$

<u>*Cálculo de*</u> $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos $C_1 : y = 0$, com $-4 \leq x \leq 4$ donde $dy = 0$. Então:

$$\int\limits_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\limits_{C_1} \left(\frac{x^2}{4} + xy^3 \right) \, dx + (2x + \operatorname{arctg} y) \, dy = \int\limits_{C_1} \frac{x^2}{4} \, dx =$$

$$= \int_{-4}^{4} \frac{x^2}{4} \, dx = \left[\frac{x^3}{12} \right]_{-4}^{4} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = \frac{32}{3} \, .$$

Logo:

$$W = \int\limits_{C} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \, .$$

Exercício 14: Calcule $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y}{x} + x, \ln x + e^y \right)$ é definido em $U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\; x > 0 \right\}$ e C é a ciclóide parametrizada por $\vec{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, com $t \in [\pi, 2\pi]$.

Solução Observemos que o cálculo direto é extremamente difícil! Então, pesquisemos se $\vec{F} = (P,Q) = \left(\frac{y}{x} + x, \ln x + e^y \right)$ é um campo conservativo em U.

Vemos que $\vec{F}$ é de classe C^1 em U e que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Como U é um conjunto simplesmente conexo então, pelo teorema das equivalências, segue que $\vec{F}$ é conservativo onde uma função potencial $\varphi(x,y)$ é encontrada resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{y}{x} & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \ln x + e^y & (2) \end{cases}$$

Integrando (1) e (2) em relação a x e y, respectivamente, temos

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = y \ln x + \dfrac{x^2}{2} + f(y) \\[2ex] \varphi(x,y) = y \ln x + e^y + g(x) \end{cases}$$

onde $f(y)$ e $g(x)$ são "constantes" de integração.

Fazendo $f(y) = e^y$ e $g(x) = x^2/2$, temos que

$$\varphi(x,y) = y \ln x + \frac{x^2}{2} + e^y$$

donde $(x,y) \in U$ é uma função potencial de $\vec{F}$. Logo, pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}(2\pi)) - \varphi(\vec{r}(\pi))$$

onde $\vec{r}(2\pi) = (2\pi, 0)$ e $\vec{r}(\pi) = (\pi, 2)$.

Logo:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(2\pi, 0) - \varphi(\pi, 2) = \left(\frac{4\pi^2}{2}, e^0\right) - \left(2\ln\pi + \frac{\pi^2}{2} + e^2\right) =$$
$$= \frac{3\pi^2}{2} + 1 - 2\ln\pi - e^2 .$$

Exercício 15: Verifique que a seguinte integral de linha independe do caminho e calcule o seu valor:

$$I = \int_{(1,1)}^{(3,3)} \left(e^x \ln y - \frac{e^y}{x}\right) dx + \left(\frac{e^x}{y} - e^y \ln x\right) dy .$$

Solução: Seja

$$\overrightarrow{F} = (P, Q) = \left(e^x \ln y - \frac{e^y}{x}, \frac{e^x}{y} - e^y \ln x\right)$$

para todo $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0\}$, que é um conjunto simplesmente conexo. Temos:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{e^x}{y} - \frac{e^y}{x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

em D.

Logo, pelo Teorema das Equivalências, segue que $\overrightarrow{F}$ é conservativo. Portanto, existe uma função potencial $\varphi(x, y)$ para $\overrightarrow{F}$. Por inspeção, vemos que

$$\varphi(x, y) = e^x \ln y - e^y \ln x ,\ \ \forall (x, y) \in D$$

é uma função potencial. Então

$$I = \varphi(3, 3) - \varphi(1, 1) = e^3 \ln 3 - e^3 \ln 3 - 0 - 0 = 0 .$$

Outra solução:

Pelo Teorema das Equivalências segue que a integral I não depende do caminho que liga $(1, 1)$ a $(3, 3)$. Então considere $C : \sigma(t) = (t, t)$, com $1 \leq t \leq 3$. Temos:

$$I = \int_1^3 \overrightarrow{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\ dt = \int_1^3 \left(e^t \ln t - \frac{e^t}{t}, \frac{e^t}{t} - e^t \ln t\right) \cdot (1, 1)\ dt =$$
$$= \int_1^3 \left(e^t \ln t - \frac{e^t}{t} + \frac{e^t}{t} - e^t \ln t\right)\ dt = \int_1^3 0\ dt = 0 .$$

Exercício 16: Mostre que o campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \left[\cos\left(xy^2\right) - xy^2 \operatorname{sen}\left(xy^2\right)\right] \overrightarrow{\mathbf{i}} - 2x^2 y \operatorname{sen}\left(xy^2\right) \overrightarrow{\mathbf{j}}$$

é conservativo. Calcule $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ para a curva C dada por $\gamma(t) = (e^t, e^{t+1})$, com $-1 \leq t \leq 0$.

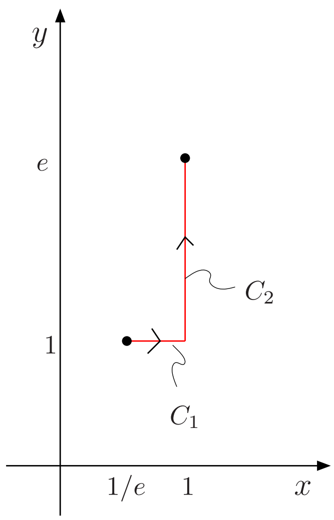
Sugestão: Prove que a integral não depende do caminho e escolha um caminho adequado.

Solução: Como dom $\overrightarrow{F} = \mathbb{R}^2$ (conjunto simplesmente conexo) e

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= -4xy\,\text{sen}\,(xy^2) - 2x^2y^3\cos(xy^2) + 2xy\,\text{sen}\,(xy^2) + \\ &+ 2xy\,\text{sen}\,(xy^2) + 2x^2y^3\cos(xy^2) = 0\end{aligned}$$

então pelo teorema das quatro equivalências, segue que $\overrightarrow{F}$ é conservativo.

Também pelo teorema das equivalências temos que a integral $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ não depende do caminho que liga $\gamma(-1) = (e^{-1}, 1)$ a $\gamma(0) = (1, e)$. Então, considere a poligonal $C = C_1 \cup C_2$ conforme figura que se segue:



Temos que

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}\,.$$

<u>*Cálculo de*</u> $\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Temos $C_1 : y = 1$, com $1/e \leq x \leq 1$ donde $dy = 0$. Então,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{1/e}^{1} (\cos x - x\,\text{sen}\,x)\; dx \\ &= \Big[\text{sen}\,x + x\cos x - \text{sen}\,x\Big]_{1/e}^{1} \\ &= \Big[x\cos x\Big]_{1/e}^{1} \\ &= \cos 1 - \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{e}\right)\,.\end{aligned}$$

<u>Cálculo de</u> $\displaystyle\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Temos $C_2 : x = 1$, com $1 \leq y \leq e$ donde $dx = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_1^e -2y \operatorname{sen} y^2 \; dy \\
&= \Big[\cos y^2\Big]_1^e \\
&= \cos\left(e^2\right) - \cos 1 \,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \cos\left(e^2\right) - \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{e}\right) \,.$$

Exercício 17: Considere o campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \,.$$

a) Calcule, caso exista, o potencial associado ao campo $\overrightarrow{F}$.

b) Calcule $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \,,\ x \geq 0 \,,\ y \geq 0\right\}$, orientada no sentido horário.

Solução:

a) Fazendo $\overrightarrow{F} = (P,Q) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ temos que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} == \dfrac{-xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$. Logo, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$. Como dom$\overrightarrow{F} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ não é um conjunto simplesmente conexo, não podemos usar o teorema das equivalências. Mas isto não significa que $\overrightarrow{F}$ não seja conservativo. Então tentemos encontrar $\varphi(x,y)$ definida em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tal que $\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$ ou

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (1) \\[2ex]
\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (2)
\end{cases}$$

Integrando (1) em relação a x, temos:

$$\varphi(x,y) = \int x\left(x^2+y^2\right)^{-1/2} \; dx \,.$$

Fazendo

$$u = x^2 + y^2 \;\;\Rightarrow\;\; du = 2x \; dx \;\;\Rightarrow\;\; x \; dx = \frac{du}{2}$$

temos

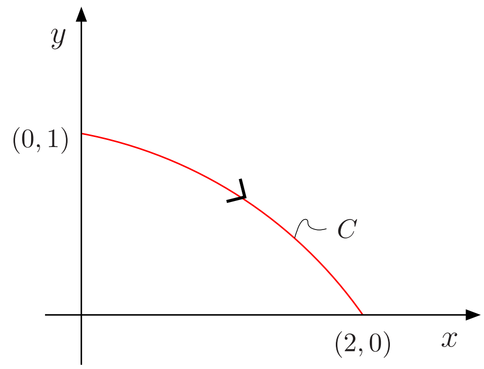
$$\varphi(x,y) = \int u^{-1/2}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2u^{1/2} + f(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + f(y) \quad (3)$$

Derivando (3) em relação a y e comparando com (2), temos:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y) = c\,.$$

Fazendo $c = 0$, temos que $\varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ definida em $\mathbb{R}^2$ é uma função potencial de $\overrightarrow{F}$.

b) O esboço de C está representado na figura a seguir.



Pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos:

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \varphi(2,0) - \varphi(0,1) = \sqrt{2^2+0^2} - \sqrt{0^2+1^2} = 2 - 1 = 1\,.$$