UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
3a. Prova – MA-211 – Quinta-feira (TARDE), 15/12/2016

ALUNO	RA	Turma

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

3a. Prova – MA-211 – Quinta-feira (TARDE), 15/12/2016

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1. Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

é conservativo. Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ em que C é a curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Resolução:

Um campo vetorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ no $\mathbb{R}^3$ é conservativo se as derivadas parciais de suas componentes P, Q e R são contínuas e rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$. Como

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = 2\mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \tag{1}$$

o campo vetorial $\mathbf{F}$ não é conservativo.

Pela definição das integrais de linha, temos

$$I = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi} (1+t)dt = 2\pi(1+\pi). \tag{2}$$

Questão 2. Considere o campo vetorial $\mathbf{F}(x,y) = -\dfrac{y}{(x^2+y^2)}\mathbf{i} + \dfrac{x}{(x^2+y^2)}\mathbf{j}$, que não está definido na origem. Mostre que, para todo caminho fechado simples C que circunda a origem, tem-se $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi$. Justifique sua resposta indicando os resultados e conceitos usados na sua argumentação.

Resolução:

Primeiramente, observe que a função não está definida na origem. Portanto, não podemos aplicar diretamente o teorema de Green considerando uma curva fechada arbitrária que contém a origem. Dessa forma, deve-se considerar uma região que não contém a origem.

Seja C_a um círculo com centro na origem, raio a, inteiramente contido na região delimitada pela curva C. Pelo teorema de Green, temos

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_a} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 0, \tag{3}$$

em que D é a região entre as curvas C_a e C e, nessa região, as derivadas parciais de P e Q são contínuas. Dessa forma,

$$I = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_a} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt, \tag{4}$$

em que $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ descreve a curva C_a. Pela definição de integral de linha, temos

$$I = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \tag{5}$$

Questão 3. Encontre a área da superfície $z = 1 + 3x + 3y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(2,1)$.

Resolução:

A área da superfície dada por $z = f(x,y)$ é

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dA. \tag{6}$$

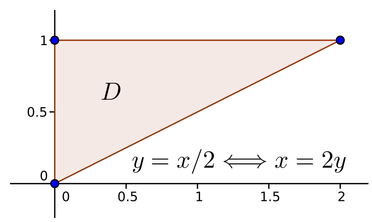
Nesta questão, temos $f(x,y) = 1 + 3x + 3y^2$. Logo,

$$f_x = 3 \quad \text{e} \quad f_y = 6y. \tag{7}$$

Portanto,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (3)^2 + (6y)^2} dA = \iint_D \sqrt{1 + 9 + 36y^2} dA = \iint_D \sqrt{10 + 36y^2} dA, \tag{8}$$

em que D, nesta questão, é o triângulo com vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(2,1)$ mostrado abaixo.



Interpretando D como uma região do Tipo 2 no plano, encontramos

$$A(S) = dxdy = \int_0^1 \sqrt{10 + 36y^2}(2y) dy. \tag{9}$$

Tomando $u = 10 + 36y^2$, $du = 36(2y)dy$, encontramos

$$A(S) = \int_{10}^{46} u^{1/2} \frac{du}{36} = \frac{1}{36} \frac{u^{3/2}}{(3/2)} \Big|_{10}^{46} = \frac{1}{54}(46\sqrt{46} - 10\sqrt{10}). \tag{10}$$

Questão 4. Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, em que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k},$$

e C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, orientado no sentido anti-horário quando visto por cima.

Resolução:

Pelo teorema de Stokes, temos

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \tag{11}$$

em que C é a curva fronteira da superfície S que, nesta questão, pode ser o triangulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Agora,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y^2 & y + z^2 & z + x^2 \end{vmatrix} = -2z\mathbf{i} + -2x\mathbf{j} + -2y\mathbf{k}, \tag{12}$$

e a superfície S corresponde a parte do plano $x + y + z = 1$ acima do triangulo $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ no plano xy. Dessa forma, a superfície pode ser descrita pela equação paramétrica

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (1 - x - y)\mathbf{k}, \quad (x, y) \in D, \tag{13}$$

em que D é o triangulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. As derivadas com respeito a x e a y de $\mathbf{r}$ são, respectivamente,

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} - \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} - \mathbf{k}. \tag{14}$$

Logo,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}. \tag{15}$$

Note que a orientação de S induz a orientação positiva da curva C, ou seja, a superfície fica a esquerda quando você anda na curva C com a cabeça apontada na direção e sentido de $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$. Concluindo, pela definição de integral de superfície, temos

$$I = \iint_D \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) dA = \iint_D -2(-1 - x - y) - 2x - 2y dA = -2 \iint_D dA = -1. \tag{16}$$

Questão 5. Use o teorema do divergente para calcular o fluxo $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2)\mathbf{i} + xe^{-z}\mathbf{j} + (\operatorname{sen} y + x^2 z)\mathbf{k},$$

através da superfície do sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$.

Resolução:

Pelo teorema do divergente, temos que

$$I = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV, \tag{17}$$

em que E é o sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$. Nessa questão, temos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (\cos z + xy^2)\mathbf{i} + xe^{-z}\mathbf{j} + (\operatorname{sen} y + x^2 z)\mathbf{k} = x^2 + y^2. \tag{18}$$

Logo,

$$I = \iiint_E (x^2 + y^2) dV. \tag{19}$$

Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\operatorname{sen}\theta, \\ z = z, \end{cases} \tag{20}$$

obtemos

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} r^2 r dr dz d\theta \tag{21}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{\sqrt{z}} dz d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^4 z^2 dz d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^4 d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi}{3}. \tag{22}$$