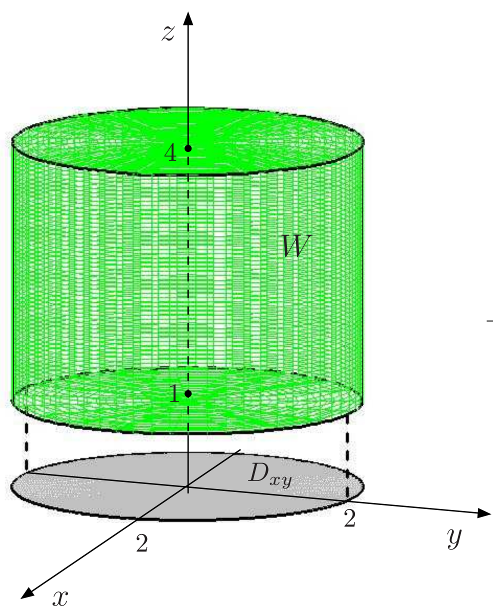
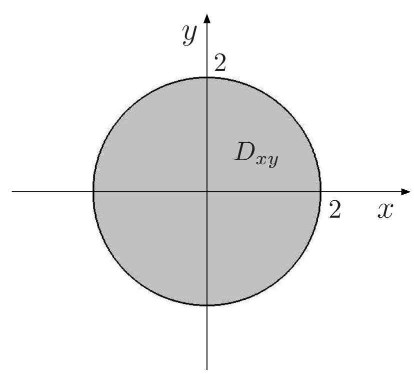
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo 3A – Lista 5

Exercício 1: Calcule $\iiint\limits_W \sqrt{x^2+y^2}\, dV$ onde W é a região contida dentro do cilindro $x^2+y^2=4$ e entre os planos $z=1$ e $z=4$.

Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.





Como o integrando envolve $\sqrt{x^2+y^2}$ e a região de integração é um cilindro, devemos calcular a integral utilizando coordenadas cilíndricas. Temos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\theta \\ y &=& r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &=& z \\ dV &=& r\,dr\,d\theta\,dz \\ x^2+y^2 &=& r^2 \end{array}\right.$$

e a descrição de W é dada pelas seguintes desigualdades $W_{r\theta z}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq z \leq 4\,. \end{cases}$. Então:

$$\iiint\limits_{W} \sqrt{x^2+y^2}\; dV = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} \sqrt{r^2}\; r\; drd\theta = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^2\; drd\theta dz =$$

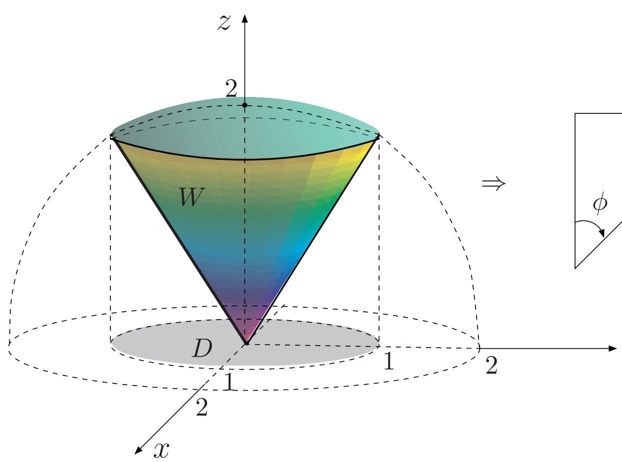
$$= \int_0^2 r^2 \int_1^4 \int_0^{2\pi} d\theta dz dr = 2\pi \int_0^2 r^2 \int_1^4 dz dr = 2\pi \int_0^2 r^2 \Big[z\Big]_1^4 dr =$$

$$= 6\pi \int_0^2 r^2\; dr = 6\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = 16\pi\,.$$

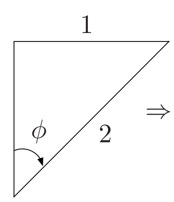
Exercício 2: Calcule $\displaystyle\iiint\limits_{W} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\; dV$, onde W é limitado inferiormente pelo cone $z = \sqrt{3\big(x^2+y^2\big)}$ e superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

Solução: De $x^2+y^2+z^2=4$ e $z=\sqrt{3\big(x^2+y^2\big)}$, tem-se $x^2+y^2=1$ que é a projeção, no plano xy, da curva interseção das duas superfícies. A projeção do sólido W é o disco $D: x^2+y^2 \leq 1$.

O sólido W e sua projeção D são mostrados a seguir:



$\Rightarrow$



$\Rightarrow \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$

Passando para coordenadas esféricas, tem-se:

$$\begin{cases} x &= \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho\cos\phi \\ dxdydz &= \rho^2 \operatorname{sen}\phi\; d\rho d\phi d\theta \\ x^2+y^2+z^2 &= \rho^2 \end{cases}.$$

A equação da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ fica em coordenadas esféricas $\rho^2=4$ ou $\rho=2$. Então:

$$W_{\rho\phi\theta} = \big\{(\rho,\phi,\theta);\; 0 \leq \rho \leq 2\,,\, 0 \leq \phi \leq \pi/6\,,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\big\}\,.$$

Logo:

$$\iiint\limits_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dxdydz = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \rho\cdot\rho^2 \operatorname{sen}\phi\ d\rho d\phi d\theta =$$

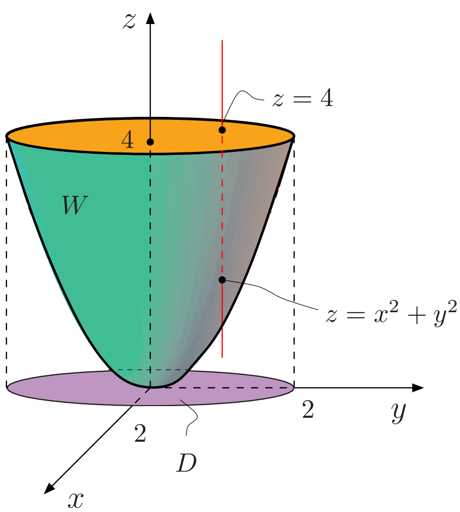
$$= \int_0^{\pi/6}\int_0^2\int_0^{2\pi} \rho^3 \operatorname{sen}\phi\ d\theta d\rho d\phi = 2\pi\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\phi \int_0^2 \rho^3\ d\rho d\phi =$$

$$= 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\phi\ d\phi = 8\pi\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/6} = 8\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 8\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\pi(2-\sqrt{3})\,.$$

Exercício 3: Calcule a massa do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2+y^2$ e pelo plano $z = 4$, sendo a densidade em cada ponto do sólido dada por $\delta(x,y,z) = \left(x^2+y^2\right)^{1/2}$.

Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.



A massa de W é dada por:

$$M = \iiint\limits_W \delta(x,y,z)\ dV = \iiint\limits_W \left(x^2+y^2\right)^{1/2}\ dxdydz\,.$$

Passando para coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \\ z &= z \\ dxdydz &= r\ drd\theta dz \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases}$$

Como W é dado por $W : \begin{cases} (x,y) \in D \\ x^2+y^2 \leq z \leq 4 \end{cases}$ então $W_{r\theta z}$ é dado por $W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 4 \end{cases}$.

Assim:

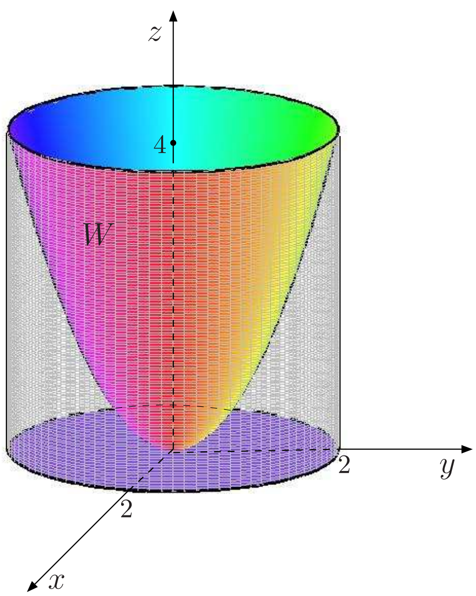
$$M = \iiint_W \left(x^2+y^2\right)^{1/2} dxdydz = \iiint_{W_{r\theta z}} \left(r^2\right)^{1/2} r \; drd\theta dz =$$

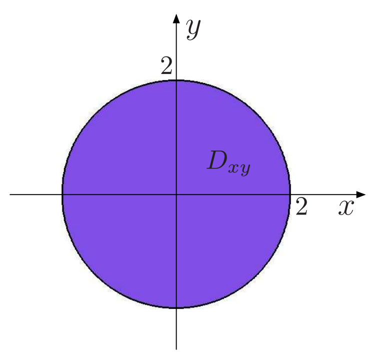
$$= \iiint_{W_{r\theta z}} r^2 \; drd\theta dz = \int_0^2 r^2 \int_{r^2}^4 \int_0^{2\pi} d\theta dz dr = 2\pi \int_0^2 r^2 \int_{r^2}^4 dzdr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^2\left(4-r^2\right) dr = 2\pi \int_0^2 \left(4r^2 - r^4\right) dr = 2\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{5} \text{ u.m.}$$

Exercício 4: Determine o volume e o centróide do sólido W limitado pelo parabolóide $z = x^2+y^2$, pelo cilindro $x^2+y^2=4$ e pelo plano xy.

Solução: De $z = x^2+y^2$ e $x^2+y^2=4$, temos $z=4$. Isto significa que as duas superfícies se interceptam no plano $z=4$, segundo a circunferência $x^2+y^2=4$. Considerando que o sólido W é limitado também pelo plano xy, de equação $z=0$, temos o esboço de W.





Como o sólido W é limitado pelo cilindro $x^2+y^2=4$, vamos aplicar a transformação cilíndrica:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\theta \\ y &=& r\,\text{sen}\,\theta \\ z &=& z \\ dV &=& r\;drd\theta dz \\ x^2+y^2 &=& r^2 \end{array}\right. .$$

O parabolóide $z=x^2+y^2$ se converte em $z=r^2$ e o cilindro $x^2+y^2=4$ se converte em $r^2=4$ ou $r=2$. Observemos que a projeção de W sobre o plano xy é o disco $D_{xy}: x^2+y^2\leq 4$. Como as variações de r e θ são determinadas na projeção D_{xy}, então $0\leq r\leq 2$ e $0\leq\theta\leq 2\pi$. Considerando um ponto (x,y,z) no interior de W e pelo ponto uma paralela ao eixo z, vemos que a essa paralela intercepta a fronteira inferior no plano xy, onde $z=0$, e intercepta a fronteira superior no parabolóide $z=x^2+y^2$ onde $z=r^2$. Então $0\leq z\leq r^2$. Assim, a região transformada é:

$$W_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z);\ 0\leq r\leq 2\,,\,0\leq\theta\leq 2\pi\,,\,0\leq z\leq r^2\right\}\,.$$

Como $V(W)=\iiint\limits_W dV$ então:

$$V(W)=\iiint\limits_{W_{r\theta z}} r\;drd\theta dz=\int_0^2 r\int_0^{r^2}\int_0^{2\pi}d\theta dzdr=2\pi\int_0^2 r\int_0^{r^2}dzdr=$$

$$=2\pi\int_0^2 r\cdot r^2\;dr=2\pi\int_0^2 r^3\;dr=2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2=8\pi\;\textit{u.v.}$$

O centro de massa de um sólido homogêneo é dito centróide e como a densidade $\delta(x,y,z)$ é constante ela pode ser cancelada e temos:

$$V(W)\,\overline{x}=\iiint\limits_W x\;dV$$

$$V(W)\,\overline{y}=\iiint\limits_W y\;dV$$

$$V(W)\,\overline{z}=\iiint\limits_W z\;dV\,.$$

<u>*Cálculo de*</u> $\iiint\limits_W x\;dV$

Temos que:

$$\iiint\limits_W x\;dV=\iint\limits_{D_{xy}} x\int_0^{x^2+y^2}dzdxdy=\iint\limits_{D_{xy}} x\left(x^2+y^2\right)dxdy=0$$

pois a função $x\left(x^2+y^2\right)$ é ímpar na variável x e D_{xy} tem simetria em relação ao eixo y. Logo, $\overline{x}=0$.

<u>*Cálculo de*</u> $\displaystyle\iiint\limits_W y\, dV$

Temos que:

$$\iiint\limits_W y\, dV = \iint\limits_{D_{xy}} y \int_0^{x^2+y^2} dzdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} y\left(x^2+y^2\right) dxdy = 0\,,$$

pois a função $y\,(x^2+y^2)$ é ímpar na variável y e D_{xy} tem simetria em relação ao eixo x. Logo, $\overline{y}=0$.

<u>*Cálculo de*</u> $\displaystyle\iiint\limits_W z\, dV$

Temos que:

$$\iiint\limits_W z\, dV = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} zr\, drd\theta dz = \int_0^2 r \int_0^{r^2} z \int_0^{2\pi} d\theta dzdr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r \int_0^{r^2} z\, dzdr = 2\pi \int_0^2 r \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{r^2} dr = \pi \int_0^2 r\cdot r^4\, dr =$$

$$= \pi \int_0^2 r^5\, dr = \pi \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{3}\,.$$

Logo

$$8\pi\overline{z} = \frac{32\pi}{3}$$

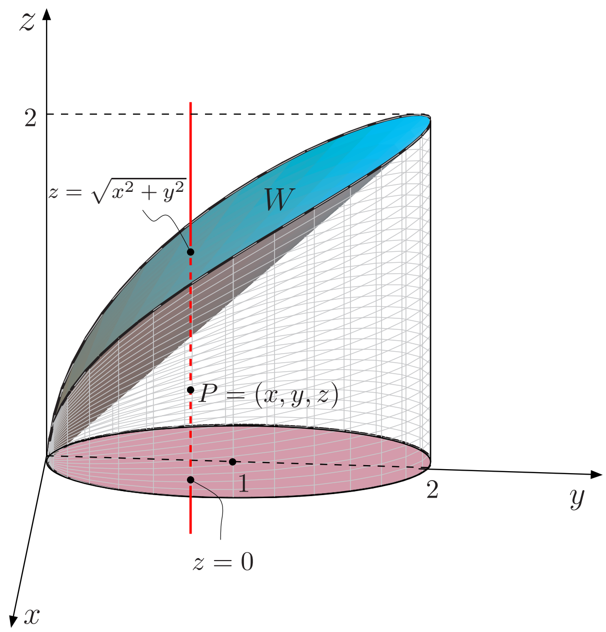
donde

$$\overline{z} = \frac{4}{3}\,.$$

Portanto, o centróide localiza-se em $(0,0,\,4/3)$.

Exercício 5: Considere o sólido homogêneo, limitado pelo plano $z=0$, o cilindro $x^2+y^2=2y$ e pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z.

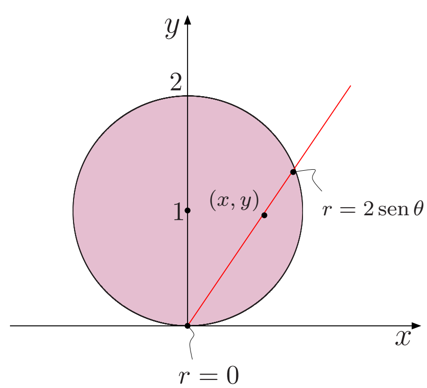
Solução: O esboço do sólido W, limitado superiormente pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, inferiormente pelo plano $z=0$ e lateralmente pelo cilindro $x^2+y^2=2y$ ou $x^2+(y-1)^2=1$ está representado na figura a seguir.



Passando para coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = & z \\ dV = & r\;drd\theta dz \\ x^2+y^2 = & r^2 \end{cases} .$$

Seja $P = (x, y, z) \in W$. A reta passando por P e paralela ao eixo z intercepta a fronteira de W em $z = 0$ e $z = \sqrt{x^2+y^2} = r$. As variações de r e θ são olhadas na projeção de W no plano $xy : x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ ou $x^2+y^2 \leq 2y$.



De $x^2+y^2 = 2y$, temos $r^2 = 2r\,\mathrm{sen}\,\theta$ ou $r = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ se $r \neq 0$. Então $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$. Logo $W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \leq z \leq r \end{cases}$. O momento de inércia em relação ao eixo z é:

$$I_z = \iiint\limits_W (x^2+y^2)\cdot\delta(x, y, z)\;dV$$

onde $\delta(x,y,z)=k$. Logo:

$$I_z = k\iiint\limits_W (x^2+y^2)\ dV = k\iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^2\cdot r\,drd\theta dz =$$

$$= k\int_0^{\pi}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r^3\int_0^r dzdrd\theta = k\int_0^{\pi}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r^4\,drd\theta =$$

$$= k\int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta = \frac{32k}{5}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^5\,\theta\,d\theta =$$

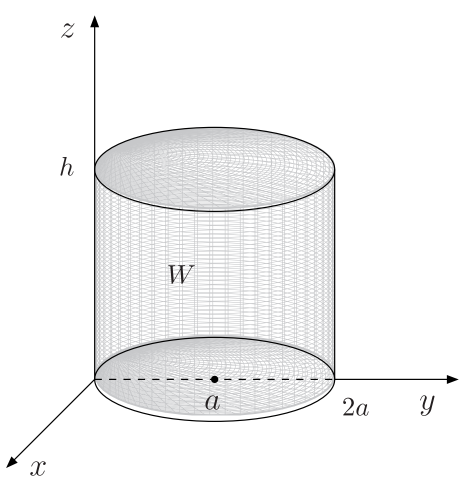
$$= \frac{32k}{5}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)^2\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta =$$

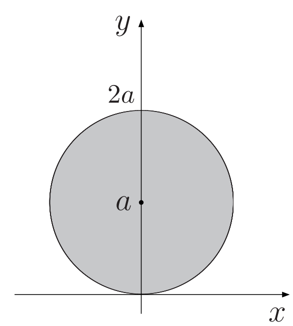
$$= \frac{32k}{5}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{-32k}{5}\left[\cos\theta-\frac{2\cos^3\theta}{3}+\frac{\cos^5\theta}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{64k}{5}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{512}{75}k\,.$$

Exercício 6: Considere o cilindro homogêneo $x^2+(y-a)^2 \leq a^2$ e $0\leq z\leq h$. Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z, em função da massa M do cilindro.

Solução: O esboço do cilindro está representado na figura que se segue.





Se a densidade constante for denotada por k, então, o momento de inércia em relação ao eixo z é

$$I_z = k\iiint\limits_W (x^2+y^2)\ dxdydz\,.$$

Passando para coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \\ dxdydz = r\;drd\theta dz \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases}.$$

O conjunto $W_{r\theta z}$ é dado por $W_{r\theta z}: \begin{cases} 0 \leq z \leq h \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$. Logo:

$$I_z = k\iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^2 \cdot r\;drd\theta dz = k\iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^3\;drd\theta dz =$$

$$= k\int_0^{\pi}\int_0^{2a\,\mathrm{sen}\,\theta} r^3 \int_0^h dzdrd\theta = hk\int_0^{\pi}\int_0^{2a\,\mathrm{sen}\,\theta} r^3\;drd\theta =$$

$$= hk\int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2a\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta = 4a^4hk\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^4\,\theta\;d\theta\,.$$

Da trigonometria, tem-se:

$$\mathrm{sen}^4\,\theta = (\mathrm{sen}^2\,\theta)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\big(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\big)\,.$$

Então:

$$\int_0^{\pi/4}\mathrm{sen}^4\,\theta\;d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\big(1-2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\big)\;d(2\theta) =$$

$$= \frac{1}{8}\left[2\theta - 2\,\mathrm{sen}\,2\theta + \frac{1}{2}\left(2\theta + \frac{\mathrm{sen}\,4\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{8}(2\pi+\pi) = \frac{3\pi}{8}\,.$$

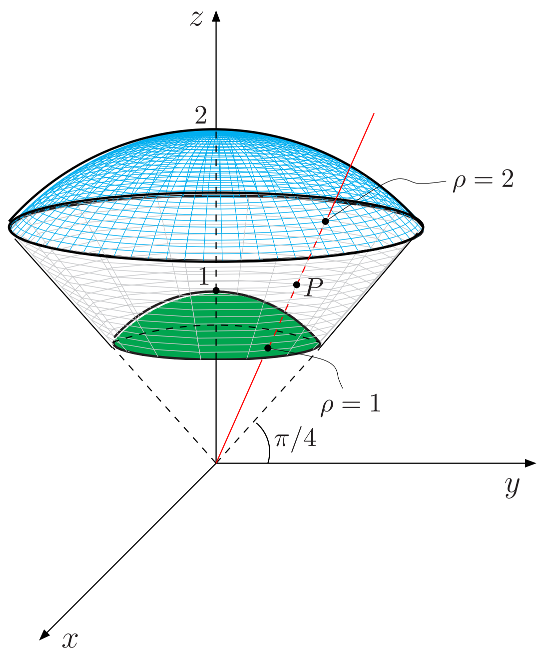
Logo:

$$I_z = \frac{3\pi a^4 hk}{2} = \frac{3}{2}Ma^2$$

pois $M = k\pi a^2 h$.

Exercício 7: Calcule $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dV$, sendo W a região interior ao cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, limitada superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ e inferiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.



Descrição de W em coordenadas esféricas

Consideremos um ponto $P = (x, y, z)$ qualquer em W; observemos que o raio OP intercepta a superfície do sólido (ou a fronteira do sólido) inicialmente em $\rho = 1$ e depois em $\rho = 2$. Logo, $1 \leq \rho \leq 2$. O ângulo ϕ varia de 0 (eixo z positivo) até $\pi/4$ (parede do cone); a variação do ângulo θ é encontrada na projeção de W no plano $xy : 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo, $W_{\rho\phi\theta}$ é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} .$$

Como $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$ e $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta$, então:

$$\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dV = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \int_1^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \big[\rho\big]_1^2 \big[-\cos\phi\big]_0^{\pi/4} =$$

$$= 2\pi \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \pi \left(2 - \sqrt{2}\right) .$$

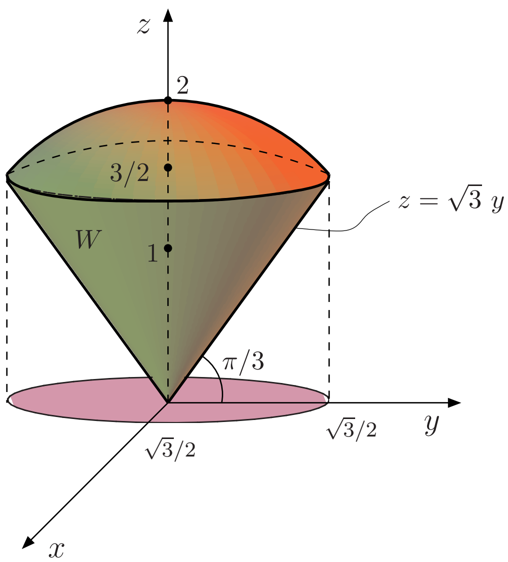
Exercício 8: Calcule a massa do sólido W inferior ao cone $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ e limitado pela esfera $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$, sendo a densidade igual ao quadrado da distância de (x, y, z) ao plano $z = 0$.

Solução: Primeiramente, calculemos a interseção das duas superfícies.

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z \\ z^2=3(x^2+y^2) \end{cases} \Rightarrow \frac{z^2}{3}+z^2=2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4z^2-6z=0 \Rightarrow z=0 \text{ ou } z=\frac{3}{2}.$$

Logo, a interseção se dá no plano $z = 3/2$, e a sua projeção no plano xy é a circunferência $x^2+y^2=3/4$. Assim, o esboço de W está representado na figura que se segue.



Como o ângulo da reta $z=\sqrt{3}\,y$ (corte do cone $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$, considerando $x=0$) é o ângulo $\pi/3$, então ϕ varia de 0 (eixo z positivo) a $\pi/2-\pi/3=\pi/6$. Transformando a equação $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ ou $x^2+y^2+z^2=2z$ para coordenadas esféricas temos $\rho^2=2\rho\cos\phi$ donde $\rho=0$ ou $\rho=2\cos\phi$. Isto significa que ρ varia de 0 a $2\cos\phi$. A variação de θ é encontrada na projeção de W no plano xy. Logo, $0\le\theta\le 2\pi$. Assim, $W_{\rho\phi\theta}$ é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta}: \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\phi\le\pi/6 \\ 1\le\rho\le 2\cos\phi\,. \end{cases}$$

Como a distância de (x,y,z) ao plano $z=0$ é $|z|$ então $\delta(x,y,z)=|z|^2=z^2$. A massa de W é:

$$M=\iiint\limits_W \delta(x,y,z)\,dV=\iiint\limits_W z^2\,dV=\iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}}(\rho\cos\phi)^2\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho d\phi d\theta=$$

$$=\iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}}\rho^4\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\,d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\int_0^{2\cos\phi}\rho^4\,d\rho d\phi d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{2\cos\phi}d\phi d\theta=\frac{32}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\cos^7\phi\operatorname{sen}\phi\,d\phi d\theta=$$

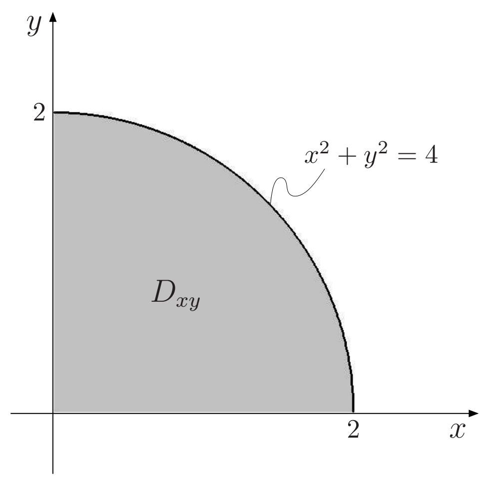
$$=\frac{32}{5}\left[\frac{-\cos^8\phi}{8}\right]_0^{\pi/6}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{8\pi}{5}\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8\right]=\frac{8\pi}{5}\cdot\frac{2^8-3^4}{2^8}=\frac{35\pi}{32}\ \textit{u.m.}$$

Exercício 9: Expresse a integral

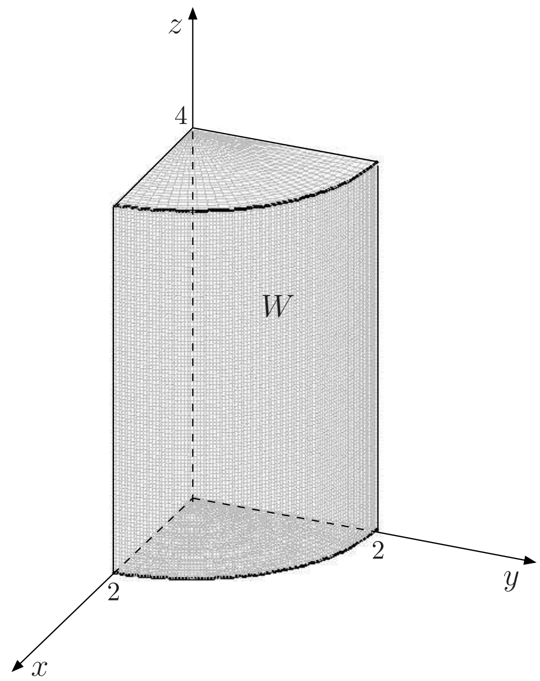
$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^4 \sqrt{1+x^2+y^2}\; dzdydx$$

como uma integral tripla em coordenadas cilíndricas, e calcule a integral obtida.

Solução: Temos que $I = \iiint\limits_W \sqrt{1+x^2+y^2}\, dV$, onde W é o sólido dado por $W : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$.
Também podemos descrever W por $W = = \{(x,y,z);\ (x,y) \in D_{xy}\,,\ 0 \leq z \leq 4\}$ onde D_{xy} é a projeção de W sobre o plano xy e é dado por $D_{xy} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{cases}$.



Logo, o esboço de W está representado na figura que se segue.



Descrevendo W em coordenadas cilíndricas, temos $W_{r\theta z}$: $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$. Então:

$$I = \iiint_{W_{r\theta z}} \sqrt{1+r^2}r\ drd\theta dz = \int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^4 \left(1+r^2\right)^{1/2} r\ dzdrd\theta =$$

$$= \frac{4}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3}\left[\left(1+r^2\right)^{3/2}\right]_0^2 d\theta = \frac{4}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)\pi\,.$$

Exercício 10: Expresse cada integral como uma integral tripla iterada em coordenadas esféricas e calcule a integral obtida:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dzdydx}{1+x^2+y^2+z^2}\,.$

b) $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} xz\ dzdydx\,.$

Solução:

a) Denotando a integral iterada por I, temos que:

$$I = \iiint_W \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\ dxdydz$$

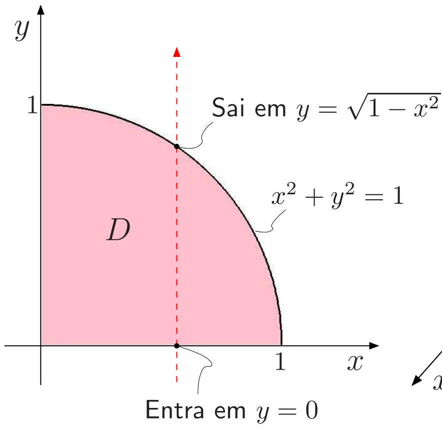
onde

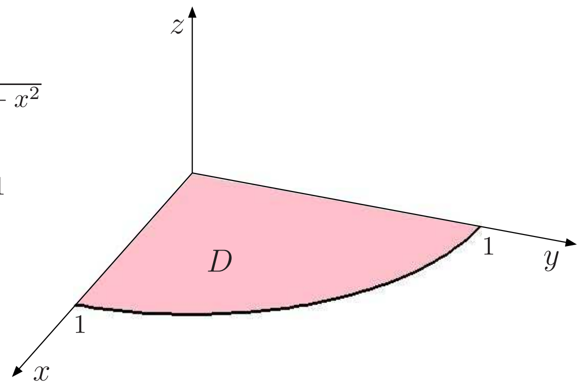
$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \underbrace{0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}}_{D}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

ou

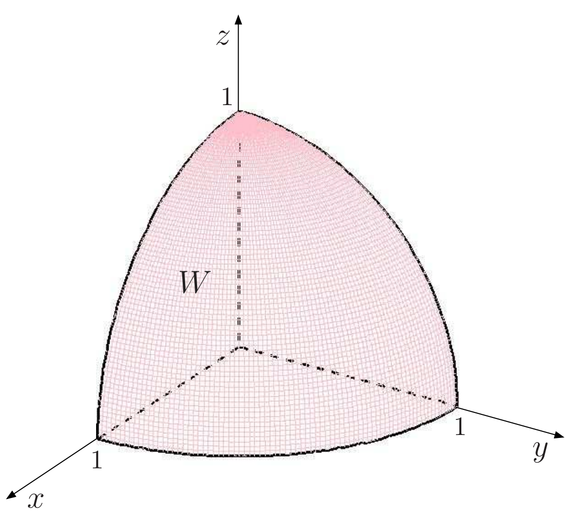
$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

onde $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ é a projeção de W no plano xy.





De $0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$ concluímos que o sólido W é limitado superiormente pela superfície $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ou $x^2+y^2+z^2 = 1$, com $z \geq 0$, que é a semiesfera superior de raio 1 e centro $(0,0,0)$, e é limitado inferiormente pelo plano xy de equação $z = 0$. Considerando que a projeção de W no plano xy é a região D, temos:



Passando para coordenadas esféricas, temos:

$$\begin{cases} x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z &= \rho \cos \phi \\ dxdydz &= \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho d\phi d\theta \\ x^2+y^2+z^2 &= \rho^2 \end{cases}.$$

Como a projeção de W no plano xy é o conjunto D, vemos que θ varia de 0 a $\pi/2 : 0 \leq \theta \leq \pi/2$. Efetuando uma "varredura" em W, a partir do eixo z positivo vemos que ϕ varia de 0 (no eixo z

positivo) até $\pi/2$ (no plano xy): $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Considerando um ponto P no interior de W e a semirreta OP, vemos que ela entra em W na origem onde $\rho = 0$ e sai de W em um ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde $\rho = 1$. Logo, $0 \leq \rho \leq 1$.

Assim, W transforma-se em:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases} .$$

Como o integrando $\dfrac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ transforma-se em $\dfrac{1}{1 + \rho^2}$ então:

$$I = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \frac{1}{1+\rho^2} \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \int_0^{\pi/2} d\theta d\phi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \; d\phi d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[-\cos\phi \Big]_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \; d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1+\rho^2-1}{1+\rho^2} \; d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+\rho^2} \right) d\rho = \frac{\pi}{2} \Big[\rho - \operatorname{arctg}\rho \Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} (1 - \operatorname{arctg} 1) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8} (4 - \pi) .$$

b) Temos que:

$$I = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} xz \; dzdydx = \iiint\limits_W xz \; dxdydz$$

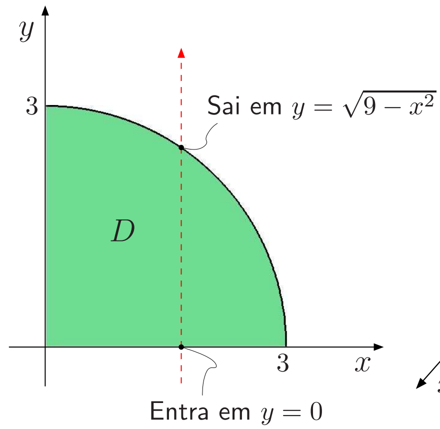
onde

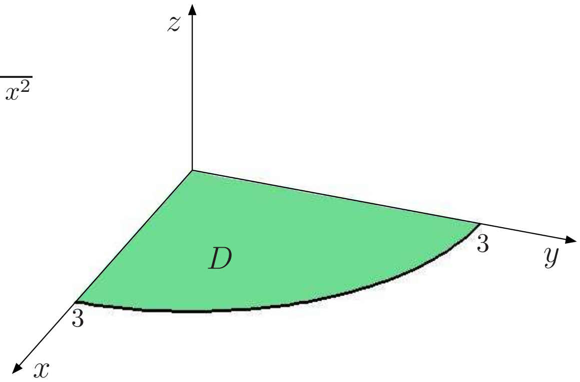
$$W = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \; \underbrace{0 \leq x \leq 3 \, , 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}}_{D} , 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2} \Big\}$$

ou

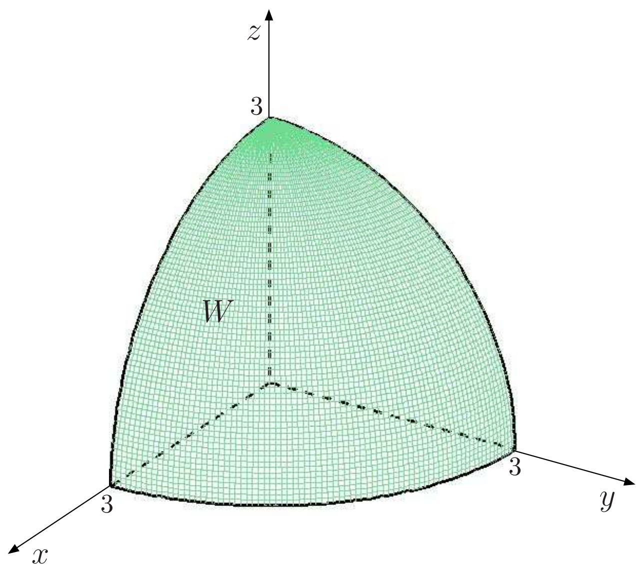
$$W = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \; (x,y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2} \Big\}$$

onde $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \end{cases}$ é a projeção de D no plano xy.





Considerando um ponto P no interior de W e uma reta paralela ao eixo z, passando por P e levando em conta que $0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ concluímos que a reta entra em W em $z = 0$ e sai de W em $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ ou $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, com $z \geq 0$. Logo, W é limitado superiormente pela semiesfera superior e limitado inferiormente pelo plano $z = 0$.



Passando para coordenadas esféricas temos:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \rho \leq 3 \end{cases}$$

e

$$xz = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta)(\rho \cos \phi) = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos \theta\,.$$

Então:

$$I = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \left(\rho^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi \cos\theta\right) \left(\rho^2 \operatorname{sen}\phi\right) d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^4 \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi \cos\theta \; d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^3 \rho^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \; d\theta d\phi d\rho =$$

$$= \underbrace{\Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{\pi/2}}_{=1} \int_0^3 \rho^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi \; d\phi d\rho = \left[\frac{\operatorname{sen}^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^4 \; d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^3 = \frac{81}{5}\,.$$