Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Tecnologia
Lista 1 de Calculo Diferencial e Integral 3
Prof. Fernando RL Contreras

Sejam os seguintes problemas

1. Determine $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})^{1/\ln n}$ Rpta. e^{-1}
2. Calcule $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n^3}{n^3+2n^2+1}$ Rpta. Diverge
3. Determine $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n}}$ Rpta. -2
4. Calcule $\lim_{n\to\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{(2n)^n}$ Rpta. 0
5. Determinar $\lim_{n\to}\sinh(\ln(n))$ Rpta. Diverge

Nos seguintes problemas determine se a sequência converge ou não e encontre o limite se ele converge.

1. $a_n = \frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}$ Rpta. Diverge
2. $a_n = 1-(0.2)^n$ Rpta. Converge a 1
3. $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$ Rpta. Converge a 5
4. Calcule o limite da sequência $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...\right)$ Rpta.2
5. $a_n = \frac{n^2}{2n-1}\sin(\frac{1}{n})$ Rpta. Converge a 1/2
6. $(\arctan(2n))$ Rpta. Converge a $\frac{\pi}{2}$
7. $\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2n)}\right)$ Rpta. Converge a 1
8. $\left(n^2e^{-n}\right)$ Rpta. Converge a 0
9. $a_n = \frac{(-3)^n}{n!}$ Rpta. Converge a 0
10. $a_n = \frac{(\ln n)^2}{n}$ Rpta. Converge a 0
11. $a_n = \sqrt{\frac{n+1}{9n+1}}$ Rpta. Converge a 1/3
12. $a_n = \frac{1}{n}\int_1^n \frac{1}{x}dx$ Rpta. Converge a 0
13. $a_n = \frac{(\ln n)^{200}}{n}$ Rpta. Converge a 0
14. $a_n = \frac{n!}{n^n}$ (Sugestão compare com $1/n$). Rpta. Converge a 0

15. $a_n = (\frac{x^n}{2n+1})^{1/n}$, se $x > 0$ Rpta. Converge a x

16. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ Rpta. Converge a 0

17. $a_n = (3^n + 5^n)^{1/n}$ Rpta. Converge a 5

Assuma que cada sequência convirja e encontre o limite.

17. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{72}{1+a_n}$ Rpta. 8

18. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = \frac{a_n+6}{a_n+2}$ Rpta. 2

19. $a_1 = -4$, $a_{n+1} = \sqrt{8+2a_n}$ Rpta. 4

20. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{8+2a_n}$ Rpta. 4

21. $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$ Rpta. 5

22. $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 12 - \sqrt{a_n}$ Rpta. 9

23. $2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \ldots$ Rpta. $1+\sqrt{2}$

24. $\sqrt{1}, \sqrt{1+\sqrt{1}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}+\sqrt{1}}}, \ldots$ Rpta. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

25. Método de Newton. As sequências vêm da formula recursiva para o método de Newton, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. A sequência converge? Em caso afirmativo, para qual valor? Identifique a função f que gera a sequência $x_0 = 1, x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ Rpta. $\sqrt{2}$

26. O primeiro termo de uma sequência é $x_1 = 1$. Cada um dos termos seguintes é a soma de todos os seus antecedentes: $x_{n+1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Escreva os primeiros termos da sequência suficientes para deduzir uma fórmula geral para x, que seja verdadeira para $n \geq 2$

27. **(a)** Presumindo que $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^c}) = 0$ se c for qualquer constante positiva, mostre que $\lim_{n\to\infty}(\frac{\ln(n)}{n^c}) = 0$ se c for qualquer constante positiva.
(b) Prove que $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^c}) = 0$ se c for qualquer constante positiva. (Sugestão: se $\varepsilon = 0.001$ e $c = 0.04$, quão grande deve ser N para assegurar que $|1/n^c - 0| < \varepsilon$ e $n > N$?)

Determine se a sequência é monotônica e se é limitada.

28. $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$

29. $a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!}$

30. $a_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$

31. $a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$

32. Suponha que $f(x)$ seja derivável para todo x em [0,1] e $f(0) = 0$. Defina a sequência (a_n) pela regra $a_n = nf(1/n)$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0)$. Utilize o resultado do problema (32) para encontrar os limites das sequências dadas em 33. e 34.

33. $a_n = n(e^{1/n} - 1)$ Rpta. 1

34. $a_n = n\ln(1+\frac{1}{n})$ Rpta. 2

35. Mostre que a sequência definida por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$ satisfaz $0 < a_n \leq 2$ e é decrescente. Deduza que a sequência é convergente e encontre o seu limite.

36. Demostre que se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e (b_n) for limitada, então $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

37. Suponha que $\{a_n\}$ é uma sequência crescente não limitada. Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

38. Suponha que $A > 0$. Dado x_1 arbitrário, defina a sequência $\{x_n\}$ de maneira recursiva como segue: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})$ se $n \geq 1$. Demostre que se $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ existe, então $L = \pm\sqrt{A}$.

39. Considere a sequência $\{a_n\}$ definida de maneira recursiva por $a_1 = 2$; $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$ para $n \geq 1$ (a) Demostrar mediante indução sobre n que $a_n < 4$ para cada n e que (a_n) é uma sequência crescente. (b) Determine o limite desta sequência.

40. O tamanho da população de peixes pode ser modelado pela formula $p_{n+1} = \frac{bp_n}{a+p_n}$ onde p_n é o tamanho da população de peixes depois de n anos e a e b são constantes positivas que dependem da espécie e de seu habitat. Suponha que a população no ano 0 seja $p_0 > 0$ (a) Moesstre que se (p_n) é convergente, então os únicos valores possíveis para seu limite são 0 e $b - a$. (b) mostre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.