

# **Notas de Aula**

## **Cálculo Diferencial e Integral 3**

**Fernando RL Contreras**

Núcleo de Tecnologia

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

September 2, 2018

# 1 Sequências

Exemplos de motivação

**Definição 1.** Entendemos por sequência infinita uma função  $S$  cujo domínio é o conjunto  $\{1, 2, 3, \dots\}$  de todos os inteiros positivos. O contradomínio de  $S$ , é o conjunto  $\{S(1), S(2), S(3), \dots\}$  também podemos escrever como  $\{S_1, S_2, S_3, \dots\}$ , e o valor da função  $S_n$  chama-se o termo  $n$ -ésimo da sequência.

Uma sequência infinita  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  pode ser representado por  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  ou por  $(S_n)$ . Graficamente temos:

**Exemplo 1.** Nos exemplos a seguir, damos três descrições da sequência, uma usando a notação anterior, outra empregando a formulação da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência

- $(\frac{n}{n+1})_{n=1}^{\infty}$        $(\frac{n}{n+1}), n \geq 1$        $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$
- $(\sqrt{n-3})_{n=3}^{\infty}$        $(\sqrt{n-3}), n \geq 3$        $-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \dots, \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \dots$
- $(\cos(\frac{n\pi}{6}))_{n=0}^{\infty}$        $(\cos(\frac{n\pi}{6})), n \geq 0$        $1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \cos(\frac{n\pi}{6}), \dots$

**Exemplo 2.** calcule o  $n$ -ésimo termo da sequência  $1, 3, 6, 15, 21, \dots$

*Solução.*

**Definição 2.** *uma sequência  $(S_n)$  é denominado crescente se  $S_n \leq S_{n+1}$ , para todo  $n \geq 1$ , isto é,  $S_1 < S_2 < S_3 \dots$ . É chamado decrescente se  $S_n \geq S_{n+1}$  para todo  $n \geq 1$ . É dita monótona se for crescente ou decrescente.*

**Exemplo 3.** *Mostre que a sequência  $\frac{n}{n^2+1}$  é decrescente.*

*Solução.*

**Definição 3.** *uma sequência  $(S_n)$  é limitada superiormente se existe um número  $M$  tal que  $S_n \leq M$ , para todo  $n \geq 1$ .*

**Exemplo 4.**     • *A sequência  $(n)$  é limitada inferiormente, mas não superiormente.*

- *A sequência  $(\frac{n}{n+1})$  é limitada porque  $0 < S_n < 1$ , onde  $S_n = \frac{n}{n+1}$ , para todo  $n$ .*

agora vamos desenhar a sequência dada no exemplo anterior

Nas figuras anteriores podemos observar que a sequência  $(\frac{n}{n+1})$  estão se aproximando de 1 quando  $n$  se torna grande. De fato a diferença  $1 - \frac{n}{n+1}$  pode ficar tão pequeno quanto se desejar tornando-se  $n$  suficientemente grande.

**Definição 4.** *uma sequência  $(S_n)$  tem limite  $L$ , se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um número  $N > 0$ , tal que  $|S_n - L| < \varepsilon$ , para todo  $n > N$  e denotaremos com  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ .*

Em forma simbólica temos:

### Propriedades

Se  $(S_n)$  e  $(T_n)$  forem sequências convergentes e  $c$  uma constante, então:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} T_n.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \lim_{n \rightarrow \infty} T_n.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} T_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \neq 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^p = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right)^p$ ,  $p > 0$  e  $S_n > 0$ .

**Exemplo 5.** Determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 2}{n^2 + 7n - 4}$

*Solução.*

**Exemplo 6.** calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$

*Solução.*

**Teorema 1.** Sejam as sequências  $(S_n)$ ,  $(R_n)$  e  $(T_n)$ . Se para todos os inteiros positivos  $n$ ,  $S_n \leq R_n \leq T_n$  e se  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = L$ , então a sequência  $(R_n)$  converge e  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = L$ .

**Exemplo 7.** Prove que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

*Solução.*

**Teorema 2.** *Seja a sequência  $(S_n)$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| = 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ .*

**Exemplo 8.** *calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$  se ele existir.*

*Solução.*

**Teorema 3.** *Seja a sequência  $(S_n)$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ , e se a função  $f$  for contínua em  $L$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(S_n) = f(L)$ .*

**Exemplo 9.** *Calcule o  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{\pi}{n})$ .*

*Solução.*

**Exemplo 10.** Para que valores de  $r$  a sequência  $(r^n)$  é convergente.

*Solução.*

**Exemplo 11.** Determine a sequência  $((-1)^n)$  é convergente ou divergente.

*Solução.*

Do exemplo 11 sabemos que nem toda sequência limitada é convergente. E também sabemos que nem toda sequência monótona é convergente. Mas se uma sequência for limitada e monótona, então ela deve ser convergente. Esse fato é mostrado no seguinte teorema.

**Teorema 4.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

**Exemplo 12.** *Investigue a sequência  $(S_n)$  definida pela relação de recorrência  $S_1 = 2$ ,  $S_{n+1} = \frac{1}{2}(S_n + 6)$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$*

*Solução.*



### Propriedade auxiliares

- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+k} = L$  para todo  $k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n \pm T_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right|$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right|$ .
- Se  $S_n \geq 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq 0$ .
- Se  $S_n \geq T_n$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ .
- Se  $S_n \geq 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{S_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n}$ .

**Exemplo 13.** Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2+6n+3}{n^2-5}}$ .

*Solução.*

**Teorema 5.** Se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  e  $f(n) = S_n$ , então  $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n = L$

**Exemplo 14.** Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n}$ .

*Solução.*

## 2 Séries

### Breve introdução

**Definição 5.** *Seja  $(a_n)$  uma sequência dada de números reais. Formemos uma nova sequência  $(s_n)$  como segue:*

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

*Uma sequência  $(s_n)$  formada de esta maneira é chamada série, onde o número  $s_n$  é a soma parcial  $n$ -ésima da série e  $a_n$  é o termo  $n$ -ésimo da série.*

**Definição 6.** *uma sequência  $(s_n)$  converge ao ponto  $s$ , então dizemos que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  tem soma  $s$  ou que é o mesmo dizer que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge a  $s$ .*

*Se a série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  tem a soma  $s$ , então  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , onde  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .*

**Exemplo 15.** *calcule a soma da série geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ .*

*Uma sequência  $(s_n)$  converge ao ponto  $s$ , então dizemos que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  tem soma  $s$  ou que é o mesmo dizer que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge a  $s$ .*

*Se a série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  tem a soma  $s$ , então  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , onde  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .*

**Exemplo 16.** *Calcule a soma da série geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ .*

*Solução.*

**Exemplo 17.** A série geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^{1-n}}$  é convergente ou divergente?  
*Solução.*

**Exemplo 18.** A série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  é divergente?

*Solução.*

**Teorema 6.** Se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Prova.*

Uma consequência do teorema é: se o  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existir ou se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

**Exemplo 19.** mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$  divergente.

Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$  divergente.

*Solução.*

**Propriedades** Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  forem séries convergentes, então também o serão as séries  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  (onde  $c$  é uma constante) e  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n$  e

i.  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ii.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Exemplo 20.** Calcule a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}$

*Solução.*

## 2.1 Teste de convergência para séries numéricas com termos positivos

Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , onde  $a_n \geq 0$ :

$$a_1 = s_1$$

$$a_2 = s_1 + s_2$$

$$a_3 = s_1 + s_2 + s_3$$

$$a_4 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$$

...

$$a_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \dots + s_n$$

....

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

Portanto  $\{a_n\}$  é sequência de somas parciais monótonas.

### 2.1.1 Teste de comparação direta

Sejam as séries  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

1. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  Converge e  $0 \leq a_n \leq b_n$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  Converge.
2. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  Diverge e  $0 \leq a_n \leq b_n$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  Diverge.

Prova

**Nota:** Ao usar este Teste de comparação direta, devemos ter algumas séries conhecidas  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  para o propósito de comparação. Usualmente se utiliza uma P-série ou uma série geométrica.

**Exemplo 21.** Estude das séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$   
*Solução.*

### 2.1.2 Teste da integral

Suponha que  $f$  seja uma função contínua, positiva e decrescente em  $[1, \infty)$  e seja  $a_n = f(n)$ . Então, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente se e somente se a integral imprópria  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for convergente. Em outras palavras:

- i. Se  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for convergente, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente.
- ii. Se  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for divergente, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente

**Exemplo 22.** Para que valores de  $p$  a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  é convergente ?  
*Solução.*

### 2.1.3 Teste de limite

Sejam as séries  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ :

- i. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergente ou convergente.
- ii. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  e se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  convergente, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente.
- iii. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$  e se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergente, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

**Exemplo 23.** Estude a convergência ou divergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ .

*Solução.*

## 2.2 Séries alternadas

Uma série numérica da forma seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

onde  $a_n > 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , denomina-se série alternada.

### 2.2.1 Teste da série alternada (Critério da Leibniz)

A série alternada da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \text{ é convergente se}$$



i.  $a_{n+1} \leq a_n$ .

ii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 24.** a série harmônica alternada  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  é convergente ?

*Solução.*

**Definição 7.** Uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é dita absolutamente convergente se a série de valores absolutos  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  for convergente.

**Definição 8.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é dita condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não absolutamente convergente.

**Exemplo 25.** Teste a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$  quanto a convergência ou divergência.

*Solução.*

**Exemplo 26.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$  é absolutamente convergente por que?.

*Solução.*

**Exemplo 27.** Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$  é convergente ou divergente?.

*Solução.*

**Exemplo 28.** A série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{2^n}$  é absolutamente convergente já que a série

**Teorema 7.** Se uma série é absolutamente convergente, então ela é convergente.

### 2.2.2 Teste da razão

i. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente.

ii. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

iii. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  o teste da razão não é conclusivo. Isto é, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Exemplo 29.** *Teste a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$  quanto a convergência absoluta.*

**Exemplo 30.** *Teste a convergência ou divergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ .*

### 2.2.3 Teste da raiz

i. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente.

ii. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

iii. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  o teste da razão não é conclusivo. Isto é, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Exemplo 31.** *Teste a convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$  quanto a convergência absoluta.*

### 3 Séries de Potencias

Uma série de potencias é uma série da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \dots$$

Onde  $x$  é uma variável e  $c_n$  são constantes chamados coeficientes da série. Uma série pode convergir para alguns valores de  $x$  ou divergir para outros valores de  $x$ .

Por exemplo, se tomarmos  $c_n = 1$  para todo  $n$ , a série de potências se torna uma série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + \dots$$

que converge quando  $-1 < x < 1$  e diverge quando  $1 \leq |x|$