Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo 3A – Lista 4

Exercício 1: Seja a integral iterada

$$I = \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz dy dx \, .$$

a) Esboce o sólido W cujo volume é dado pela integral I.

b) Escreva cinco outras integrais iteradas que sejam iguais à integral I.

Solução:

a) Temos que

$$I = \iiint\limits_W dx dy dz$$

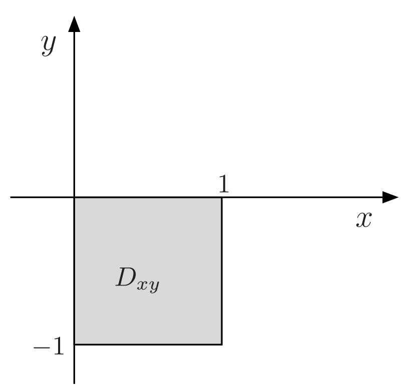
com

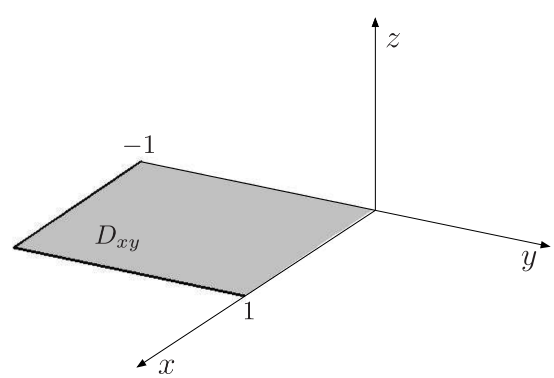
$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ (x,y) \in D_{xy} \ \text{ e } \ 0 \leq z \leq y^2 \right\}$$

onde

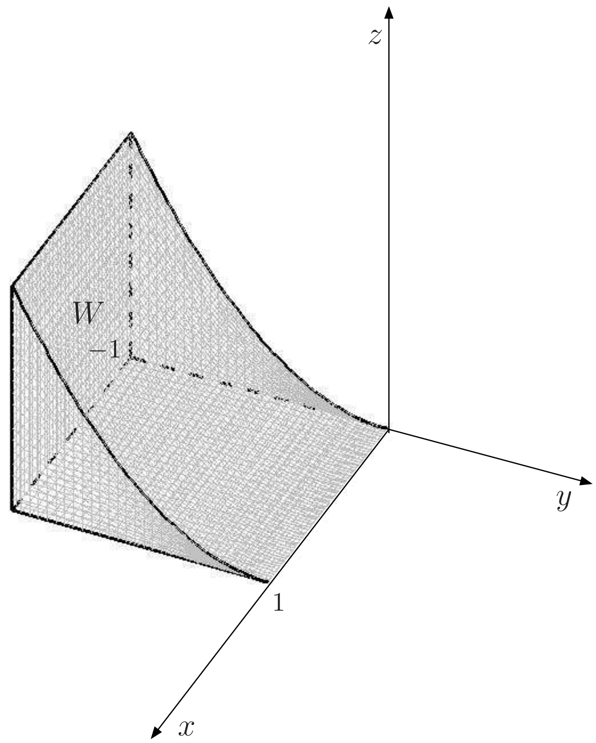
$$D_{xy} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; \ 0 \leq x \leq 1 \ \text{ e } \ -1 \leq y \leq 0 \right\} \, .$$

O esboço de D_{xy}, que representa a projeção do sólido W no plano xy está representado na figura a seguir.





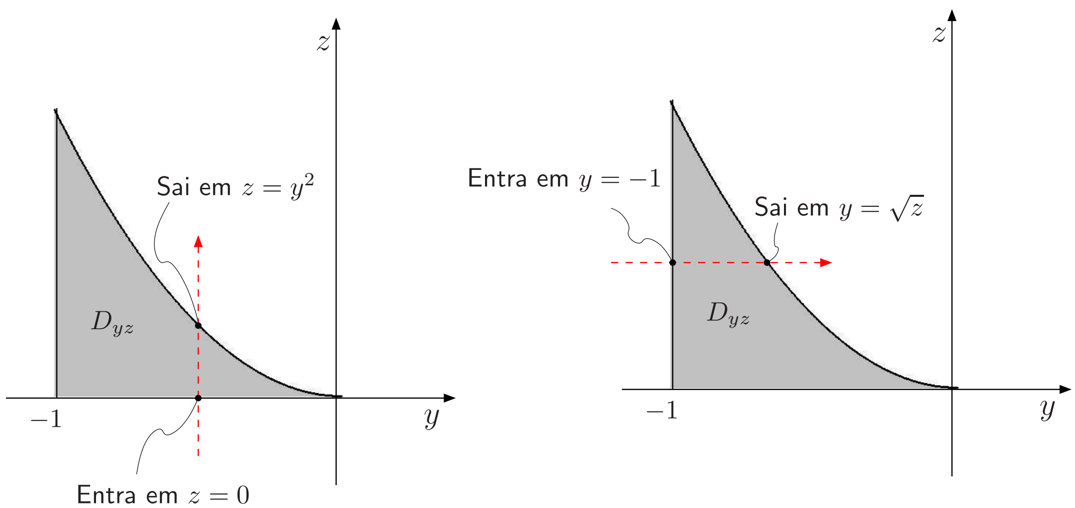
Consideremos a porção da superfície $z = y^2$, dita cilindro parabólico, que se projeta em D_{xy}. Considerando que z varia de 0 a y^2, obtemos o esboço de W na figura a seguir.



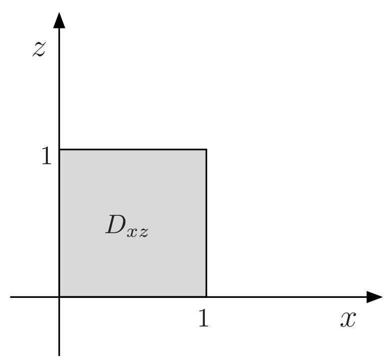
b) Como D_{xy} é um retângulo então

$$I = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{1} \int_{0}^{y^2} dz dx dy \, .$$

Projetando W sobre o plano yz, encontramos D_{yz} e esboçamos na figura que se segue.



Temos
$$D_{yz} = \left\{(y,z);\ -1 \le y \le 0\,, 0 \le z \le y^2\right\}$$
ou
$$D_{yz} = \left\{(y,z);\ 0 \le z \le 1\,, -1 \le y \le \sqrt{z}\right\}\ .$$
Considerando um ponto $P = (x,y,z)$ no interior de W e uma reta paralela ao eixo x, passando por P, orientada no sentido do crescimento de x, vemos que ela entra em W em $x = 0$ e sai de W em $x = 1$. Então $0 \le x \le 1$. Assim:
$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (y,z) \in D_{yz} \text{ e } 0 \le x \le 1\right\}\ .$$
Logo
$$I = \iint\limits_{D_{yz}} \int_0^1 dxdydz\,.$$
donde
$$I = \int_{-1}^{0} \int_0^{y^2} \int_0^1 dxdzdy$$
ou
$$I = \int_0^1 \int_{-1}^{\sqrt{z}} \int_0^1 dxdydz\,.$$
Finalmente, projetando W sobre o plano xz encontramos o quadrado D_{xz} na figura que se segue.



Considerando um ponto $P = (x,y,z)$ no interior de W e por P uma reta paralela ao eixo y, orientada no sentido do crescimento de y, vemos que ela entra em W em $y = -1$ e sai de W em $y = \sqrt{z}$. Logo, $-1 \le y \le \sqrt{z}$. Então:
$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,z) \in D_{xz} \text{ e } -1 \le y \le \sqrt{z}\right\}\ .$$
Logo
$$I = \iint\limits_{D_{xz}} \int_{-1}^{\sqrt{z}} dydxdz\,.$$
donde
$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^{\sqrt{z}} dydxdz$$

ou

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^{\sqrt{z}} dydzdx\,.$$

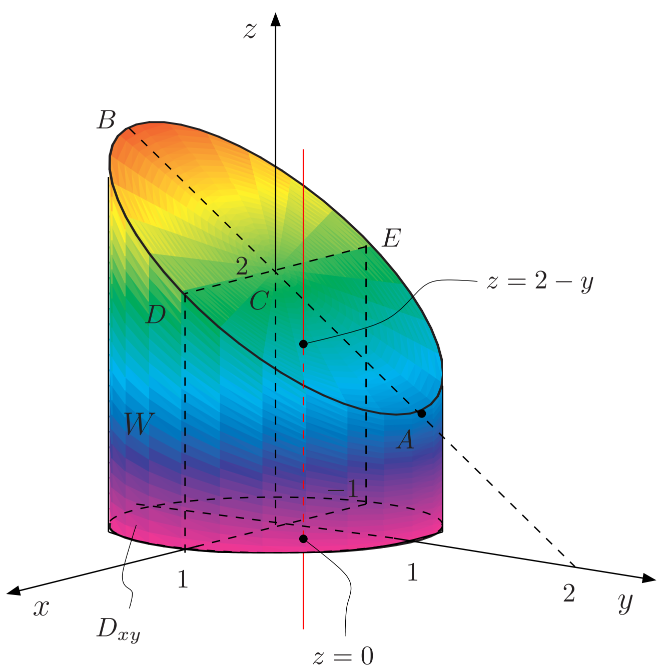
Exercício 2: Seja o sólido W limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 1$, $z + y = 2$ e $z = 0$.

a) Esboce W.

b) Calcule a massa de W, supondo que a densidade em (x, y, z) é dada por $\delta(x, y, z) = z$.

Solução:

a) Inicialmente, traçamos o cilindro $x^2+y^2 = 1$, em seguida, traçamos no plano yz, a reta $y+z = 2$, que intercepta o cilindro em A e B. Pelo ponto $C = (0, 0, 2)$ da reta, traçamos uma paralela ao eixo x, que intercepta o cilindro em D e E. Ligando os pontos A, B, D e E, obtemos a curva interseção do cilindro com o plano. Assim, temos o sólido W.



b) Temos

$$W = \left\{(x,y,z);\ (x,y) \in D_{xy}\,,\ 0 \le z \le 2-y\right\}$$

onde D_{xy} é dado por $D_{xy} : x^2+y^2 \le 1$. Temos:

$$M = \iiint\limits_W \delta(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_W z\,dV = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_0^{2-y} z\,dz\right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{2-y} dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} (4-4y+y^2)\,dy\,.$$

Aplicando coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy = & rdrd\theta \end{cases}$$

e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$. Então:

$$M = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{r\theta}} (4-4r\,\mathrm{sen}\,\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)\,r\,drd\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(4r-4r^2\,\mathrm{sen}\,\theta + r^3\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right) drd\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[2r^2 - 4\frac{r^3}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{r^4}{4}\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[2 - \frac{4}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\theta + \frac{4}{3}\cos\theta + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{17\pi}{8}\ \textit{u.m.}$$

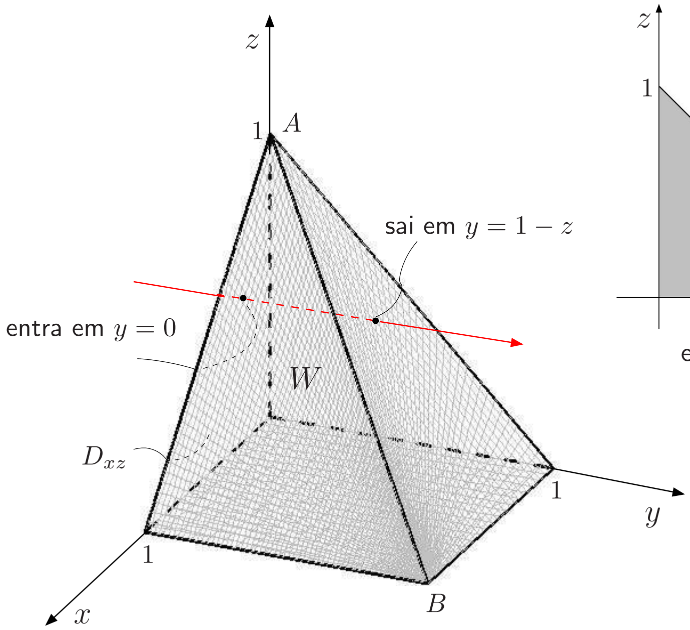
Exercício 3: Calcule a massa do sólido W limitado pelos planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y+z=1$ e $x+z=1$, sendo a densidade $\delta(x,y,z)=z$.

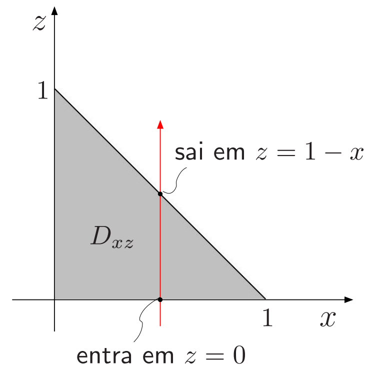
Solução:

Esboço do sólido W

Para esboçar o plano $y+z=1$, traçamos inicialmente a reta $y+z=1$ no plano yz. Como a equação não depende da variável x então por pontos da reta traçamos retas paralelas ao eixo x. Analogamente, esboçamos o plano $x+z=1$. Observemos que os pontos $A=(0,0,1)$ e $B=(1,1,0)$

são comuns aos dois planos. Ligando-os por uma reta, obtemos a curva interseção. Considerando que W é limitado pelos planos coordenados, temos assim o esboço na figura que se segue.





Devemos projetar W no plano xz ou no plano yz, pois para projetar W no plano xy devemos dividir W em duas partes, usando o plano $y = x$. Então, projetemos W no plano xz. Imaginando através de W uma reta paralela ao eixo y, orientada como o eixo y, vemos que ela entra em W em $y = 0$ e sai de W em $y = 1 - z$. Portanto:

$$W : \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,z) \in D_{xz} \text{ e } 0 \le y \le 1 - z\right\}$$

com $D_{xz} : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le 1 - x \end{cases}$. A massa M do sólido W é:

$$M = \iiint\limits_W \delta(x,y,z)\, dV = \iiint\limits_W z\, dV = \iint\limits_{D_{xz}} z \int_0^{1-z} dydxdz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xz}} z(1-z)\, dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} \left(z - z^2\right)\, dxdz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(z - z^2\right)\, dz =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3}\right] dx\,.$$

Fazendo $u = 1 - x$ temos $dx = -du$. Para $x = 0$ temos $u = 1$ e para $x = 1$ temos $u = 0$. Então:

$$M = \int_1^0 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)(-du) = -\int_1^0 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right) du = \int_0^1 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right) du =$$

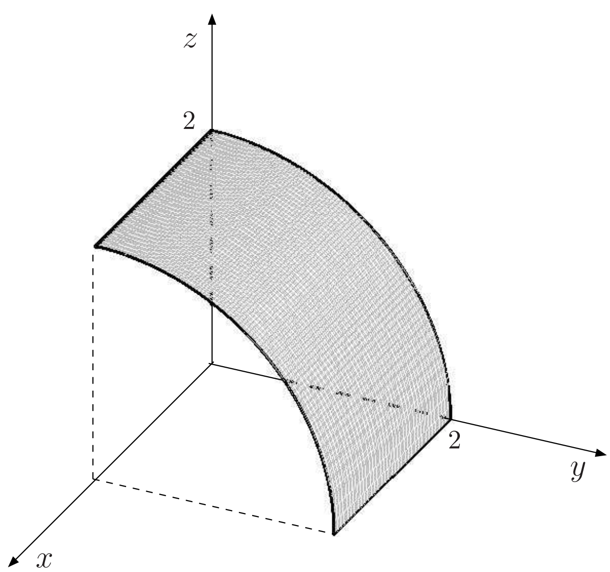
$$= \left[\frac{u^3}{6} - \frac{u^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \text{ u.m.}$$

Exercício 4: Use uma integral tripla para encontrar o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelos gráficos das equações $y^2 + z^2 = 4$, $x + y = 2$, $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$.

Solução:

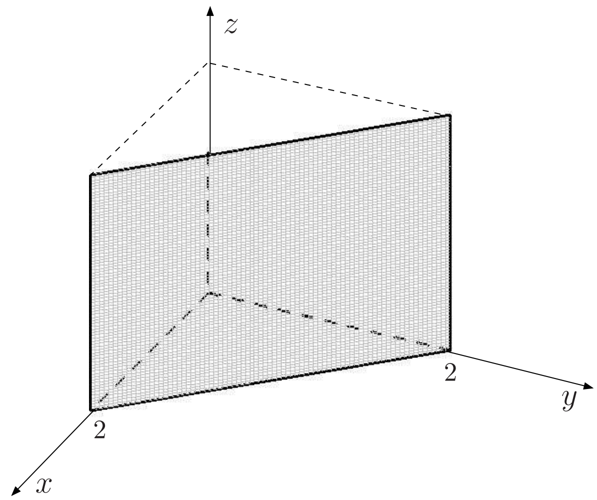
Esboço da superfície $y^2 + z^2 = 4$ *(cilindro circular) com* $x, y, z \geq 0$

No plano yz traçamos o arco da circunferência $y^2 + z^2 = 4$ com $y \geq 0$ e $z \geq 0$. Como esta equação não depende da variável x, então por pontos do arco traçemos semirretas paralelas ao eixo x, com $x \geq 0$.



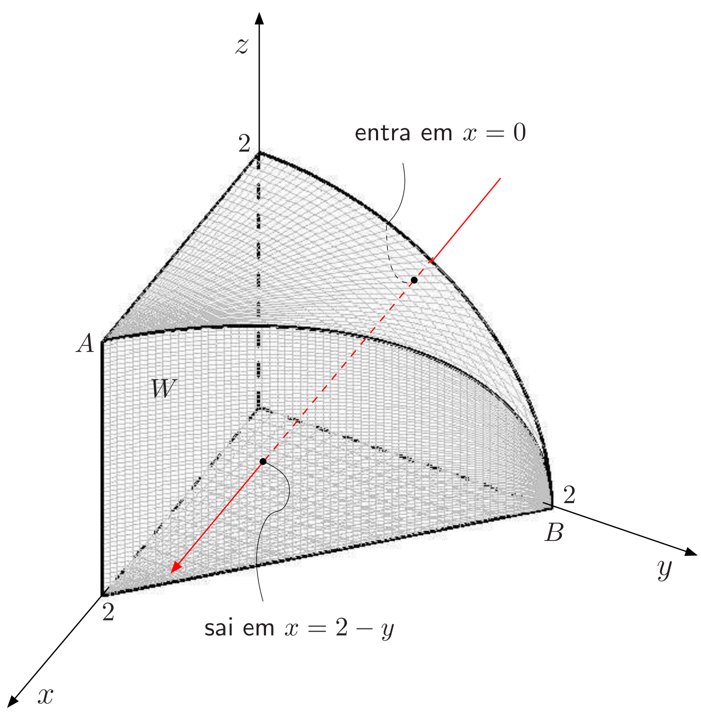
Esboço da superfície $x + y = 2$ *(plano) com* $x, y, z \geq 0$

No plano xy traçamos a reta $x + y = 2$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Como esta equação não depende da variável z, então por pontos dos segmentos da reta traçemos paralelas ao eixo z, com $z \geq 0$.



Esboço do sólido W

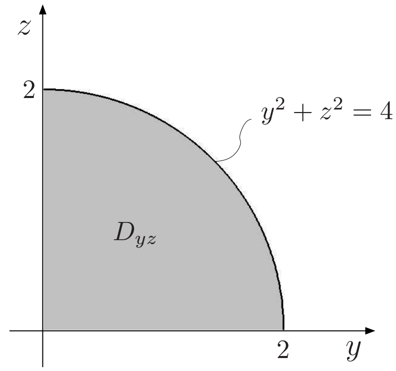
Observemos que o ponto $A = (2, 0, 2)$ e $B = (0, 2, 0)$ são comuns às duas superfícies. Ligando-os por uma curva temos a interseção. Considerando que o sólido é também limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, temos o esboço de W na figura a seguir.



Temos que:

$$V(W) = \iiint_W dV \, .$$

Para calcular a integral, vamos projetar o sólido no plano yz.



Imaginemos uma reta paralela ao eixo x através de W, orientada como o eixo x. Vemos que ela entra em W em $x = 0$ e sai de W em $x = 2 - y$. Então temos:

$$W : \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (y, z) \in D_{yz} \text{ e } 0 \leq x \leq 2 - y\right\} .$$

Assim:

$$V(W) = \iint\limits_{D_{yz}} \int_0^{2-y} dxdydz = \iint\limits_{D_{yz}} (2 - y)dydz\,.$$

Calculemos a integral utilizando coordenadas polares.

$$\begin{cases} y = r\cos\theta \\ z = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dydz = r\ drd\theta \\ y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$. Então:

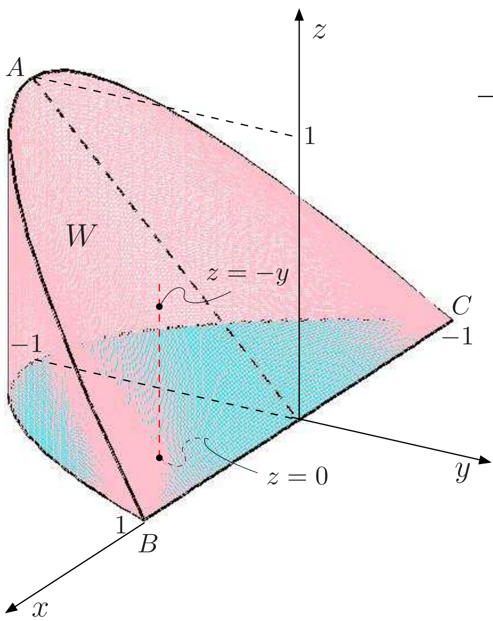
$$V(W) = \iint\limits_{D_{r\theta}} (2 - r\cos\theta)\ r\ drd\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \left(2r - r^2\cos\theta\right) drd\theta =$$

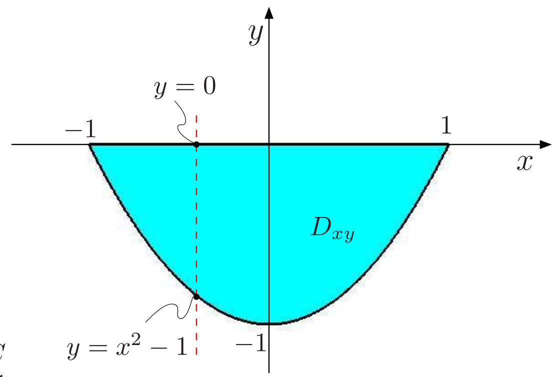
$$= \int_0^{\pi/2} \left[r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_0^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(4 - \frac{8}{3}\cos\theta\right) d\theta =$$

$$= \left[4\theta - \frac{8}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right]_0^{\pi/2} = \left(2\pi - \frac{8}{3}\right) \text{ \textit{u.v.}}$$

Exercício 5: Calcule o volume do sólido W limitado pelas superfícies $z=-y$, $y=x^2-1$ e $z=0$.

Solução: Primeiramente, esboçamos o cilindro parabólico $y=x^2-1$. Em seguida, desenhamos o plano bissetor $z=-y$, destacando alguns pontos comuns: $A=(0,-1,1)$, $B=(1,0,0)$ e $C=(-1,0,0)$. Ligamos esses pontos por uma curva que representa a interseção das duas superfícies. Considerando que o sólido é limitado pelo plano $z=0$, temos o sólido W representado na figura que se segue.





Projetando W sobre o plano xy, encontramos a região D_{xy} : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2-1 \leq y \leq 0 \end{cases}$. Por um ponto (x,y,z) no interior de W, traçamos uma reta paralela ao eixo z. Essa reta intercepta a fronteira inferior de W no plano xy onde $z=0$ e intercepta a fronteira superior no plano $z=-y$. Logo, $0 \leq z \leq -y$. Assim:

$$W = \{(x,y,z);\ (x,y) \in D_{xy}\,,\, 0 \leq z \leq -y\}\ .$$

Então:

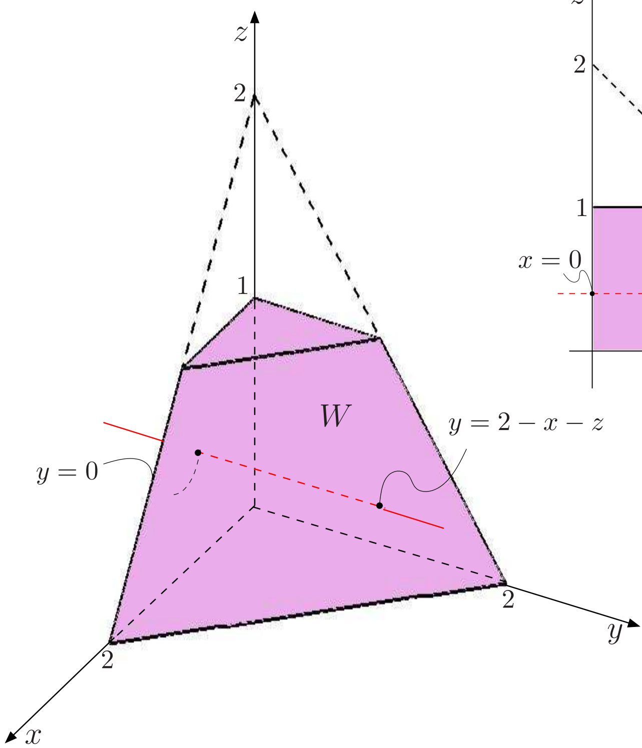
$$V(W) = \iiint\limits_W dV = \iint\limits_{D_{xy}} \int_0^{-y} dz\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{xy}} (-y)\ dx\,dy =$$

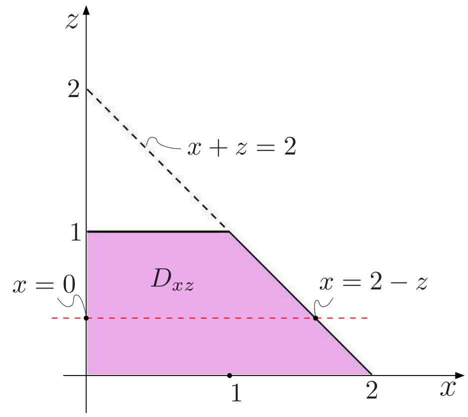
$$= -\int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{0} y\ dy\,dx = -\int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2-1}^{0} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(x^4-2x^2+1\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{3}+2\right) = \frac{8}{15}\ \text{u.v.}$$

Exercício 6: Calcule $\displaystyle\iiint_W 24z\, dxdydz$, onde W é o sólido limitado por $x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ e $z=1$.

Solução: Em primeiro lugar, traçamos o plano $x+y+z=2$ e em seguida esboçamos o plano $z=1$. Considerando que W é limitado pelos planos $x=0$ e $y=0$, temos o esboço de W na figura que se segue.





Projetando W sobre o plano xz temos a região D_{xz} : $\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 2-z \end{cases}$. Considerando uma paralela ao eixo y por um ponto (x,y,z) no interior de W, vemos que essa paralela intercepta a fronteira de W no plano xz onde $y=0$ e depois no plano $x+y+z=2$ onde $y=2-x-z$. Logo, $0 \leq y \leq 2-x-z$. Assim:

$$W = \{(x,y,z);\ (x,z) \in D_{xz} \text{ e } 0 \leq y \leq 2-x-z\} \ .$$

Então:

$$\iiint_W 24z\, dV = 24 \iint_{D_{xz}} \int_0^{2-x-z} z\, dydxdz = 24 \iint_{D_{xz}} z(2-x-z)dxdz =$$

$$= 24 \int_0^1 \int_0^{2-z} \left(2z - xz - z^2\right) dxdz = 24 \int_0^1 \left[2zx - \frac{x^2 z}{2} - z^2 x\right]_0^{2-z} dz =$$

$$= 24\int_0^1 \left[2z(2-z) - \frac{(2-z)^2 z}{2} - z^2(2-z)\right]dz =$$

$$= 24\int_0^1 \left(4z - 2z^2 - \frac{4z-4z^2+z^3}{2} - 2z^2 + z^3\right)dz =$$

$$= 12\int_0^1 \left(8z - 4z^2 - 4z + 4z^2 - z^3 - 4z^2 + 2z^3\right) dz =$$

$$= 12\int_0^1 \left(4z - 4z^2 + z^3\right) dz = 12\left[2z^2 - \frac{4z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right]_0^1 =$$

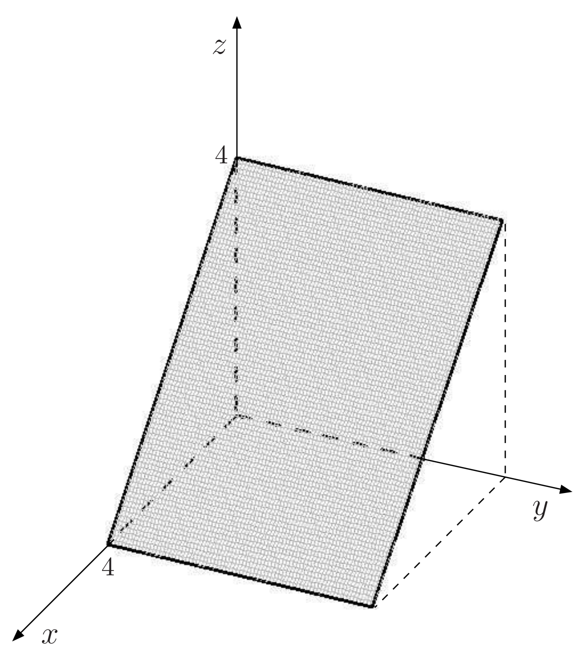
$$= 12\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}\right) = 11\,.$$

Exercício 7: Encontre a massa e a coordenada $\overline{z}$ do centro de massa do sólido W limitado pelos gráficos das equações $z = 4 - x$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ e $y = 4$ sendo a densidade $\delta(x, y, z) = kx$, onde $k > 0$ é uma constante.

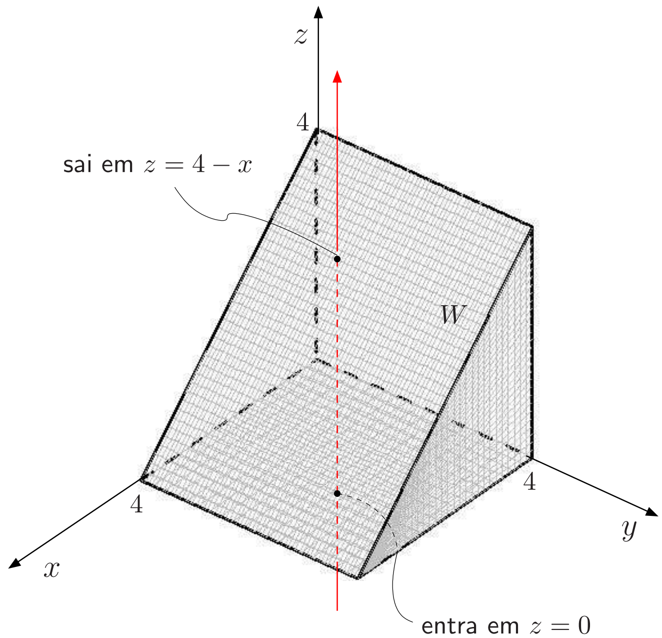
Solução:

Esboço do sólido W

No plano xz esboçamos a reta $x + z = 4$. Como esta equação não depende da variável y, então por pontos da reta traçamos retas paralelas ao eixo y.



Considerando que W é também limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $y = 4$ temos o sólido W na figura que se segue.



A massa de W é dada por

$$M = \iiint_W \delta(x,y,z)\, dV = k \iiint_W x\, dV\,.$$

Para calcular a integral, devemos projetar W sobre algum plano coordenado. Vamos projetar W no plano xy. Encontramos o quadrado $D_{xy} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$. Imaginando uma reta paralela ao eixo z, através de W, orientada como o eixo z, vemos que ela entra em W em $z = 0$ e sai de W em $z = 4 - x$. Então:

$$W : \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in D_{xy} \text{ e } 0 \leq z \leq 4 - x\right\}\,.$$

Assim:

$$M = k \iint_{D_{xy}} \int_0^{4-x} x\, dzdxdy = k \iint_{D_{xy}} x(4-x)\, dxdy =$$

$$= k \int_0^4 \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dxdy = k \int_0^4 \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 dy = \frac{32k}{3} \int_0^4 dy =$$

$$= \frac{128k}{3} \text{ } u.m.$$

A componente $\overline{z}$ é dada por:

$$M\overline{z} = \iiint_W z\, \delta(x,y,z)\, dV = k \iiint_W xz\, dV\,.$$

<u>*Cálculo de*</u> $\displaystyle\iiint_W xz\, dV$

Temos:

$$\iint_{D_{xy}} \int_0^{4-x} xz \; dzdxdy = \iint_{D_{xy}} x \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-x} dxdy = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} x\left(4 - x^2\right) dxdy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 \left(16x - 8x^2 + x^3\right) \int_0^4 dydx = 2 \int_0^4 \left(16x - 8x^2 + x^3\right) dx =$$

$$= 2\left[8x^2 - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^4 = 2\left(8 \times 16 - \frac{8 \times 64}{3} + 64\right) = \frac{128}{3}.$$

Logo, substituindo acima, temos

$$\frac{128k}{3}\,\overline{z} = \frac{128k}{3}$$

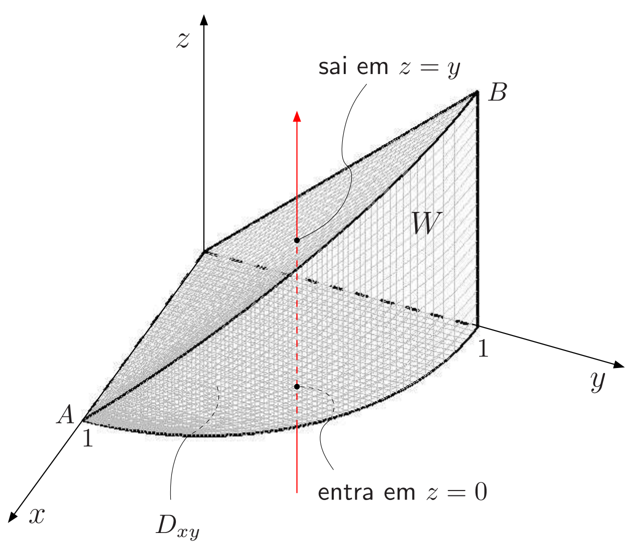
donde $\overline{z} = 1$.

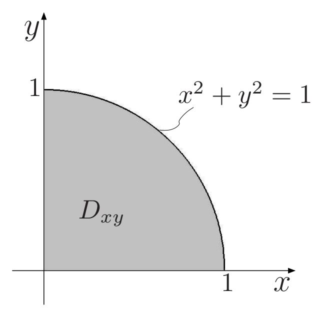
Exercício 8: Encontre o momento de inércia I_z do sólido no primeiro octante, limitado pelos gráficos das equações $z = y$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $x = 0$ se a densidade é dada por $\delta(x, y, z) = kz$, onde $k > 0$ é uma constante.

Solução:

Esboço do sólido W

No primeiro octante esboçamos o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Em seguida, esboçamos o plano $z = y$, destacando alguns pontos comuns como $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$. Ligando-os por uma curva, temos a curva interseção. Considerando que o sólido é limitado pelos planos $z = 0$ e $x = 0$, temos o esboço de W na figura que se segue.





O momento de inércia I_z é dado por:

$$I_z = \iiint\limits_W \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\ dV = k\iiint\limits_W \left(x^2+y^2\right)\ z\ dV\,.$$

Cálculo da integral

Projetando W no plano xy encontramos a região $D_{xy} : x^2+y^2 \leq 1$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Imaginando uma reta paralela ao eixo z através de W, orientada como o eixo z, vemos que ela entra em W em $z=0$ e sai de W em $z=y$. Então $0 \leq z \leq y$. Assim:

$$I_z = k\iint\limits_{D_{xy}}\int_0^y \left(x^2+y^2\right)\ z\ dzdxdy = k\iint\limits_{D_{xy}} \left(x^2+y^2\right)\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^y dxdy =$$

$$= \frac{k}{2}\iint\limits_{D_{xy}} \left(x^2+y^2\right)\ y^2\ dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares temos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy = r\ drd\theta \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases}$$

e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$. Então:

$$I_z = \frac{k}{2}\iint\limits_{D_{r\theta}} r^2(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 r\ drd\theta = \frac{k}{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\,\theta\int_0^1 r^5\ drd\theta =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\,\theta\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 d\theta = \frac{k}{12}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\,\theta\ d\theta\,.$$

Da trigonometria temos que $\mathrm{sen}^2\,\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$. Logo:

$$\int \mathrm{sen}^2\,\theta\ d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\ d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right) + C\,.$$

Assim:

$$I_z = \frac{k}{12}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{k\pi}{48}\,.$$

Exercício 9: Seja W um sólido limitado pelas superfícies $z = y^2$, $z = 2 - y^2$, $x = 0$ e $x + z = 4$.

a) Esboce W.

b) Calcule o volume de W.

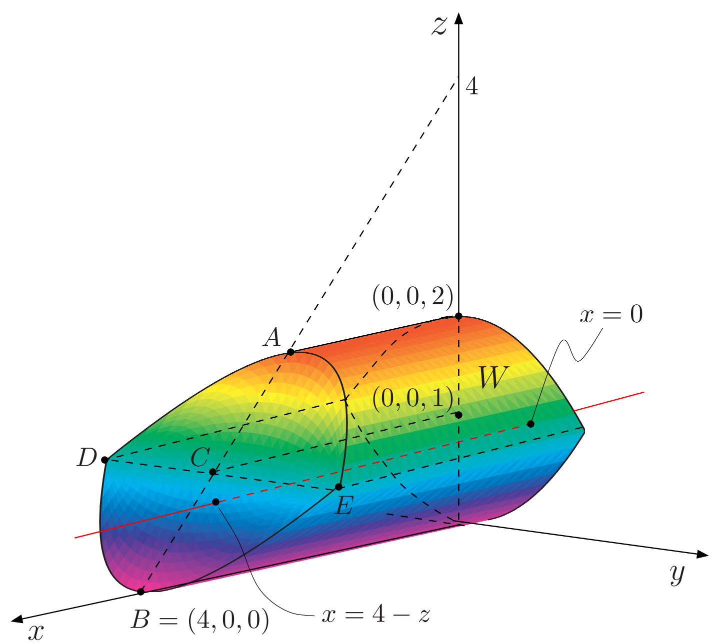
Solução:

a) Inicialmente, encontremos os pontos de interseção das duas parábolas:

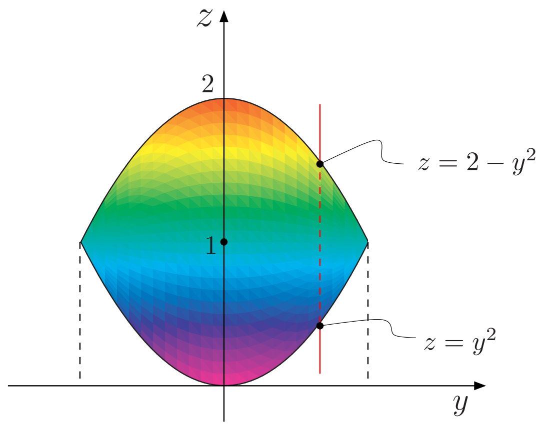
$$\begin{cases} z = y^2 \\ z = 2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = 2 - y^2 \Leftrightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1\,.$$

Por pontos das parábolas traçamos paralelas ao eixo x (por exemplo, $(0,0,2)$, $(0,0,0)$, $(0,-1,1)$ e $(0,1,1)$).

No plano xz, traçamos a reta $x + z = 4$, que intercepta as superfícies anteriores em A e B. Por $(0,0,1)$, traçamos uma paralela ao eixo x, que intercepta a reta em C. Por C, traçamos uma paralela ao eixo y, que intercepta as superfícies anteriores em D e E. Ligando A, E, B e D por uma curva fechada, obtemos o sólido W.



b) Projetando W sobre o plano yz encontramos D_{yz}.



Então descrevemos W por:

$$W = \left\{(x, y, z);\ (y, z) \in D_{yz} \text{ e } 0 \le x \le 4 - z\right\}.$$

Temos:

$$V(W) = \iiint_W dxdydz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_0^{4-z} dx\right] dydz = \iint_{D_{yz}} (4 - z)\, dydz =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{2-y^2} (4 - z)\, dzdy = \int_{-1}^{1} \left[4z - \frac{z^2}{2}\right]_{y^2}^{2-y^2} dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left[8z - z^2\right]_{y^2}^{2-y^2} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left[\left(16 - 8y^2 - 4 + 4y^2 - y^4\right) - \left(8y^2 - y^4\right)\right] dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (12 - 12y^2)\, dy = \frac{1}{2}\left[12y - 4y^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \cdot 2(12 - 4) = 8 \text{ u.v.}$$

Exercício 10: Seja W o sólido limitado pelas superfícies $z + x^2 = 4$, $y + z = 4$, $y = 0$ e $z = 0$.

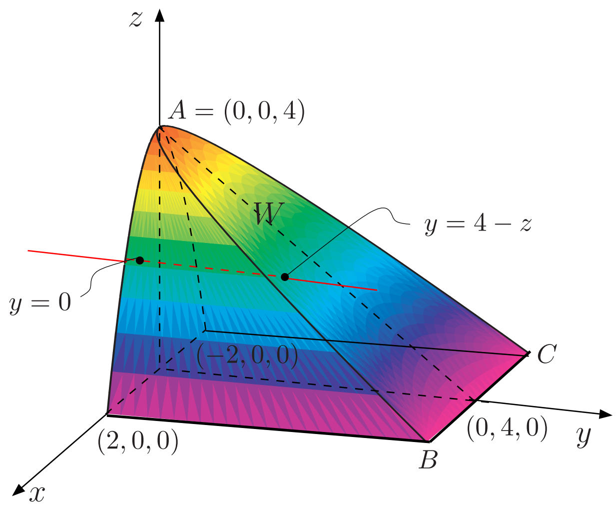
a) Esboce W.

b) Calcule, por integral tripla, o volume do sólido W.

Solução:

a) Para esboçar a superfície $z + x^2 = 4$ (dita cilindro parabólico), traçamos no plano $y = 0$, a parábola $z = 4 - x^2$. Como a equação não contém a variável y, então por pontos da parábola (por exemplo $A = (0, 0, 4)$, $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$) traçamos paralelas ao eixo y.

No plano $x = 0$, traçamos a reta $y + z = 4$, que intercepta o cilindro em $A = (0, 0, 4)$.



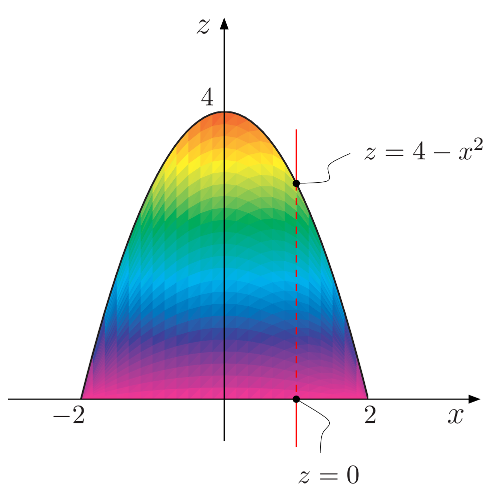
Para esboçar o plano, devemos traçar paralelas ao eixo x, por pontos da reta. Em particular, por $(0, 4, 0)$. Esta paralela intercepta o cilindro nos pontos B e C. A curva que passa por B, A e C representa a curva interseção do plano com o cilindro. Considerando os planos $y = 0$ e $z = 0$, temos o esboço de W.

b) Temos $V(W) = \iiint\limits_W dxdydz$, onde W pode ser descrito por:

$$W = \left\{(x, y, z);\ (x, z) \in D_{xz} \text{ e } 0 \leq y \leq 4 - z\right\}$$

onde

$$D_{xz} = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2;\ -2 \leq x \leq 2\ ,\ 0 \leq z \leq 4 - x^2\right\}.$$



Então:

$$V(W) = \iint_{D_{xz}} \left[\int_0^{4-z} dy \right] dxdz = \iint_{D_{xz}} (4-z)\, dxdz =$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_0^{4-x^2} (4-z)\, dzdx = \int_{-2}^{2} \left[4z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{4-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(32 - 8x^2 - 16 + 8x^2 - x^4\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(16 - x^4\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[16x - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \left(32 - \frac{32}{5} \right) = \frac{128}{5} \text{ u.v.}$$