Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558)
Grafos: Árvores

Prof. Dr. Ruben Interian

Resumo

Resumo

Revisão do conteúdo

- Grafo $G = (V, E)$ é **conexo**: $\forall u, v \in V \ \exists$ **um caminho** de u a v em G.
- **Componentes conexas** de um grafo G: subgrafos **conexos maximais**.
- Subgrafo $H = (V', E')$ é um **subgrafo gerador** de $G = (V, E)$ se $V' = V$.

Objetivos

Tópicos de hoje:

- **Cortes** e arestas-de-corte.
- **Árvores**.

Resumo

1. Revisão do conteúdo e objetivo
2. Cortes
3. Árvores
4. Síntese

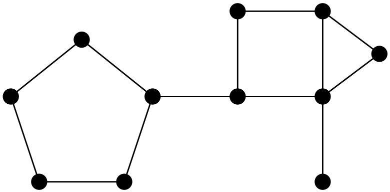
Número de componentes

Seja $c(G)$ o **número de componentes** de um grafo G.

Número de componentes

Seja $c(G)$ o **número de componentes** de um grafo G.

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $e \in E$. Então $c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$.



Número de componentes

Seja $c(G)$ o **número de componentes** de um grafo G.

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $e \in E$. Então $c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$.

Prova: Temos duas opções. Ou $c(G - e) = c(G)$, ou $c(G - e) > c(G)$.
Se $c(G - e) = c(G)$, o resultado é válido.

Se $c(G - e) > c(G)$, ao recolocar a aresta e no grafo $G - e$, o número de componentes diminui de volta ao valor $c(G)$. Assim, existem as componentes C_1 e C_2 de $G - e$, cada uma contendo um extremo de e e $c(G - e) = c(G) + 1$.

∎

Aresta-de-corte

Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $e \in E$. Se $c(G - e) = c(G) + 1$, a aresta e é uma aresta-de-corte (ou ponte) de G.

- Se G é conexo, dizemos que a remoção de e desconecta G.

Aresta-de-corte

Podemos caracterizar uma aresta-de-corte?

= Encontrar uma condição necessária e suficiente para uma aresta ser aresta-de-corte?

Aresta-de-corte

Podemos caracterizar uma aresta-de-corte?

= Encontrar uma condição necessária e suficiente para uma aresta ser aresta-de-corte?

Caracterização das arestas-de-corte

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $e \in E$. A aresta e é uma **aresta-de-corte** de G se e somente se e não pertence a nenhum ciclo de G.

Aresta-de-corte

Caracterização das arestas-de-corte

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $e \in E$. A aresta e é uma aresta-de-corte de G se e somente se e não pertence a nenhum ciclo de G.

Prova:

- Podemos supor que G é conexo. (Por quê?)

Aresta-de-corte

Caracterização das arestas-de-corte

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $e \in E$. A aresta e é uma aresta-de-corte de G se e somente se e não pertence a nenhum ciclo de G.

Prova:

- Podemos supor que G é conexo. (Por quê?)
- $\Rightarrow$ Seja $e = (u, v)$ uma aresta-de-corte, u e v pertencem a componentes distintos de $G - e$. Se e pertencesse a um ciclo C de G, então $C - e$ seria um caminho de u a v em $G - e$ (**contradição!**).

Aresta-de-corte

Caracterização das arestas-de-corte

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $e \in E$. A aresta e é uma aresta-de-corte de G se e somente se e não pertence a nenhum ciclo de G.

Prova:

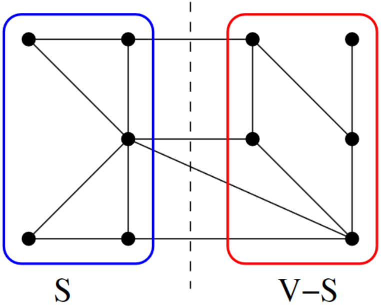
- Podemos supor que G é conexo. (Por quê?)
- $\Rightarrow$ Seja $e = (u, v)$ uma aresta-de-corte, u e v pertencem a componentes distintos de $G - e$. Se e pertencesse a um ciclo C de G, então $C - e$ seria um caminho de u a v em $G - e$ (**contradição!**).
- $\Leftarrow$ Vamos provar a **contraposição**: e não é aresta-de-corte $\Rightarrow$ $e \in$ um ciclo. Suponha que $e = (u, v)$ não é uma aresta-de-corte. Então $G - e$ é conexo e existe um caminho P de u a v em $G - e$. Então $P + e$ é um ciclo em G. ■

Corte

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. Denotamos por $\delta(S)$ o conjunto das arestas de G com um extremo em S e outro em $V - S$.

Corte

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. Denotamos por $\delta(S)$ o conjunto das arestas de G com um extremo em S e outro em $V - S$.



Quando S consiste de um único vértice v, escrevemos $\delta(v)$ em vez de $\delta(\{v\})$.
Dizemos que $\delta(S)$ é um corte de G **induzido** por S.

Resumo

1. Revisão do conteúdo e objetivo
2. Cortes
3. Árvores
4. Síntese

Árvores

Árvores

Grafo acíclico

Um grafo G é acíclico se ele não contém ciclos.

Árvores

Grafo acíclico

Um grafo G é acíclico se ele não contém ciclos.

Árvore

Uma árvore é um **grafo conexo** e **acíclico**.

Árvores

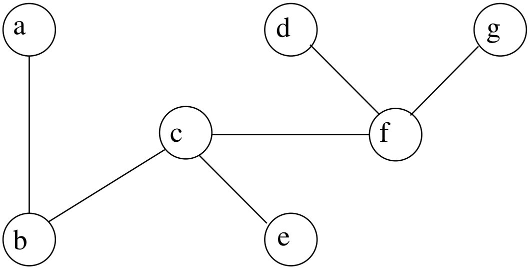


Figura: Exemplo de uma árvore.

Árvores

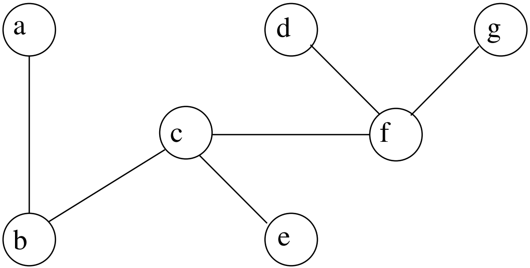


Figura: Exemplo de uma árvore.

- Uma **folha** de uma árvore G é um vértice de grau 1.

Árvores

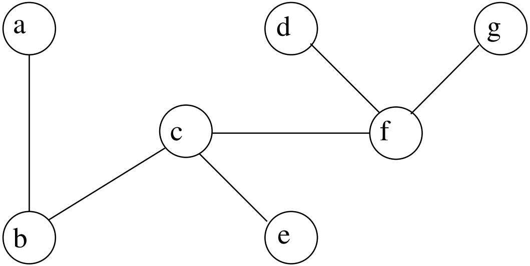


Figura: Exemplo de uma árvore.

- Uma **folha** de uma árvore G é um vértice de grau 1.
- Se v é uma folha da árvore $G \Rightarrow G - v$ é uma árvore.

Árvores

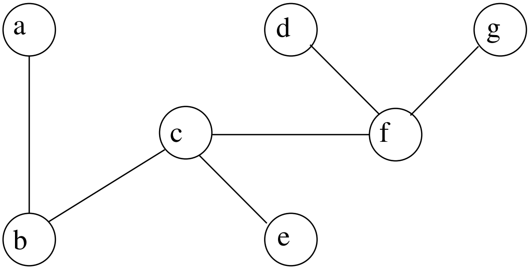


Figura: Exemplo de uma árvore.

- Uma **folha** de uma árvore G é um vértice de grau 1.
- Se v é uma folha da árvore $G \Rightarrow G - v$ é uma árvore. – **Importante!** Por quê?

Árvores

- Todo **grafo conexo** $G = (V, E)$ possui **pelo menos** $|V| - 1 = n - 1$ arestas.
  - Veja que cada aresta pode conectar apenas 2 componentes. Quantas arestas no mínimo precisamos colocar em um grafo vazio para ter apenas 1 componente?
- Portanto, uma árvore possui pelo menos $n - 1$ arestas.
- Vamos mostrar que uma **árvore sempre possui exatamente** $n - 1$ **arestas**.

Exercícios

Mostre que:

- Toda árvore $G = (V, E)$ com $|V| \geq 2$ possui pelo menos duas folhas.

Exercícios

Mostre que:

- Toda árvore $G = (V, E)$ com $|V| \geq 2$ possui pelo menos duas folhas.
- Toda árvore $G = (V, E)$ que não é um caminho possui pelo menos três folhas.

Caracterização das árvores

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. G é uma **árvore** (G é **conexo** e **acíclico**),
2. G é **conexo** e $|E| = n - 1$,
3. G é **acíclico** e $|E| = n - 1$,
4. G é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

Caracterização das árvores

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. G é uma **árvore** (G é **conexo** e **acíclico**),
2. G é **conexo** e $|E| = n - 1$,
3. G é **acíclico** e $|E| = n - 1$,
4. G é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

Provaremos que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

Caracterização das árvores

(1) $\Rightarrow$ (2)

G é uma **árvore** $\Rightarrow$ $|E| = n - 1$

Caracterização das árvores

(1) $\Rightarrow$ (2)

G é uma **árvore** $\Rightarrow$ $|E| = n - 1$

Por definição de árvore, G é **conexo** e **acíclico**. Prova por indução em $|V|$:

Caracterização das árvores

(1) $\Rightarrow$ (2)

G é uma **árvore** $\Rightarrow |E| = n - 1$

Por definição de árvore, G é **conexo** e **acíclico**. Prova por indução em $|V|$:

Base: $|V| = 1$. Neste caso, $|E| = 1 - 1 = 0$.

Caracterização das árvores

(1) $\Rightarrow$ (2)

G é uma **árvore** $\Rightarrow$ $|E| = n - 1$

Por definição de árvore, G é **conexo** e **acíclico**. Prova por indução em $|V|$:

Base: $|V| = 1$. Neste caso, $|E| = 1 - 1 = 0$.

Hipótese de indução: para toda árvore $G' = (V', E')$, com $|V'| < n$, $|E'| = |V'| - 1$.

Caracterização das árvores

(1) $\Rightarrow$ (2)

G é uma **árvore** $\Rightarrow |E| = n - 1$

Por definição de árvore, G é **conexo** e **acíclico**. Prova por indução em $|V|$:

Base: $|V| = 1$. Neste caso, $|E| = 1 - 1 = 0$.

Hipótese de indução: para toda árvore $G' = (V', E')$, com $|V'| < n$, $|E'| = |V'| - 1$.

Seja $G = (V, E)$ uma árvore com $|V| = n$.
G possui uma folha v, e $G - v = G'$ é uma árvore. Pela hipótese, temos que:

$$|E'| = |V'| - 1.$$

Mas, $|E'| = |E| - 1$ e $|V'| = |V| - 1$. Portanto, substituindo na equação anterior:

$$|E| - 1 = |V| - 1 - 1 \;\Rightarrow\; |E| = |V| - 1.$$

Caracterização das árvores

(2) $\Rightarrow$ (3)

G é **conexo** e $|E| = n - 1 \Rightarrow G$ é **acíclico**

Caracterização das árvores

(2) $\Rightarrow$ (3)

G é **conexo** e $|E| = n - 1 \Rightarrow G$ é **acíclico**

Por contradição:

Suponha que G tem um ciclo C. Seja uma aresta $e \in C$, veja que elá **não é uma aresta-de-corte**. O grafo $G' = G - e$ continua conexo, mas agora possui $n - 2$ arestas. Isso é uma **contradição**, pois já mostramos que todo grafo conexo possui pelo menos $n - 1$ arestas.

Caracterização das árvores

(3) $\Rightarrow$ (4)

G é **acíclico** e $|E| = n - 1 \Rightarrow G$ é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

Caracterização das árvores

(3) $\Rightarrow$ (4)

G é **acíclico** e $|E| = n - 1 \Rightarrow G$ é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

Como $G = (V, E)$ é **acíclico**, todas as suas arestas são **arestas-de-corte**.

Falta demonstrar que G é **conexo**.

Caracterização das árvores

(3) $\Rightarrow$ (4)

G é **acíclico** e $|E| = n - 1 \Rightarrow G$ é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

Como $G = (V, E)$ é **acíclico**, todas as suas arestas são **arestas-de-corte**.

Falta demonstrar que G é **conexo**. Sejam $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$ as componentes de G. Mostraremos que $k = 1$.

Cada componente é uma **árvore**. Já mostramos que toda árvore tem $n - 1$ arestas, veja **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**. Ou seja, $|E_i| = |V_i| - 1$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Somando para todo i, temos que:

$$|E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| = \sum_{i=1}^{k} [|V_i| - 1] = |V| - k.$$

Porém, sabemos que $|E| = |V| - 1$. Portanto, $k = 1$, ou seja, o grafo G possui apenas uma componente.

Caracterização das árvores

(4) $\Rightarrow$ (1)

G é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte** $\Rightarrow$ G é uma **árvore**

Caracterização das árvores

(4) $\Rightarrow$ (1)

G é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte** $\Rightarrow$ G é uma **árvore**

Sabemos que G é **conexo**, portanto precisamos mostrar apenas que G é **acíclico**.

Se houvesse um **ciclo** C em G, haveria pelo menos uma aresta $e \in C$ que não seria uma **aresta-de-corte**. Isso contradiz que **todas as arestas** de G são arestas-de-corte, portanto, C não pode existir, e G é **acíclico**.

Isto termina a prova do teorema. ∎

Floresta

Agora que definimos e caracterizamos as árvores, podemos dizer que:

Floresta

Um grafo acíclico, mas não necessariamente conexo, é uma **floresta**.

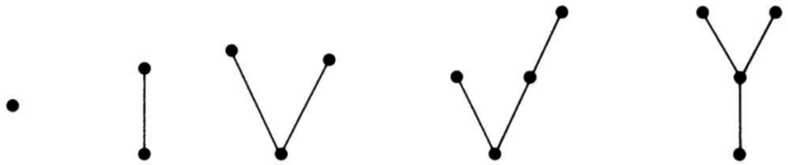
Floresta

Agora que definimos e caracterizamos as árvores, podemos dizer que:

Floresta

Um grafo acíclico, mas não necessariamente conexo, é uma **floresta**.

Veja que cada **componente da floresta** é uma **árvore**.



Árvore enraizada

Árvore enraizada

Uma arvore enraizada é uma árvore com um vértice especial chamado **raiz**.

- Uma árvore não enraizada é as vezes chamada de **árvore livre**.

Árvore enraizada

Árvore enraizada

Uma arvore enraizada é uma árvore com um vértice especial chamado **raiz**.

- Uma árvore não enraizada é as vezes chamada de **árvore livre**.

Árvore geradora

Lembrando:

O subgrafo $H = (V', E')$ é um **subgrafo gerador** de $G = (V, E)$ se $V' = V$.

Árvore geradora

Lembrando:

O subgrafo $H = (V', E')$ é um **subgrafo gerador** de $G = (V, E)$ se $V' = V$.

Árvore geradora

Uma árvore $T = (V', E')$ é chamada de árvore geradora de um grafo $G = (V, E)$, se essa árvore é um **subgrafo gerador** de G.

Árvore geradora

Lembrando:

O subgrafo $H = (V', E')$ é um **subgrafo gerador** de $G = (V, E)$ se $V' = V$.

Árvore geradora

Uma árvore $T = (V', E')$ é chamada de árvore geradora de um grafo $G = (V, E)$, se essa árvore é um **subgrafo gerador** de G.

Veja que todo grafo conexo $G = (V, E)$ **contém** uma árvore geradora.

Árvore geradora

Lembrando:

O subgrafo $H = (V', E')$ é um **subgrafo gerador** de $G = (V, E)$ se $V' = V$.

Árvore geradora

Uma árvore $T = (V', E')$ é chamada de árvore geradora de um grafo $G = (V, E)$, se essa árvore é um **subgrafo gerador** de G.

Veja que todo grafo conexo $G = (V, E)$ **contém** uma árvore geradora.

- É suficiente remover arestas que pertencem a algum ciclo.

Árvore geradora

Teorema

Seja $T = (V, E')$ uma árvore geradora do grafo $G = (V, E)$. Então para toda aresta $e \in E \setminus E'$ exite um único ciclo em $T + e$.

Prova:

Árvore geradora

Teorema

Seja $T = (V, E')$ uma árvore geradora do grafo $G = (V, E)$. Então para toda aresta $e \in E \setminus E'$ exite um único ciclo em $T + e$.

Prova:

Sejam u, v os extremos de e. Como a árvore T é um grafo conexo, existe um caminho P de u a v em T. Portanto, $P + e$ é o um ciclo em $T + e$.

Árvore geradora

Teorema

Seja $T = (V, E')$ uma árvore geradora do grafo $G = (V, E)$. Então para toda aresta $e \in E \setminus E'$ exite um único ciclo em $T + e$.

Prova:

Sejam u, v os extremos de e. Como a árvore T é um grafo conexo, existe um caminho P de u a v em T. Portanto, $P + e$ é o um ciclo em $T + e$.

Agora precisamos provar que esse ciclo é **único**. Suponha que existem dois ciclos **diferentes** em $T + e$.

***Exercício** Remova uma aresta que esteja em um dos ciclos e não esteja em outro, e chegue a uma contradição.

Árvores e grafos bipartidos

Exercício:

- Prove que **toda árvore é um grafo bipartido**.

Árvores e grafos bipartidos

Exercício:

- Prove que **toda árvore é um grafo bipartido**.
    - Usar indução.

Árvores e grafos bipartidos

Exercício:

- Prove que **toda árvore é um grafo bipartido**.
  - Usar indução.
  - Qual vértice pode ser colorido com facilidade?.. ...

Resumo

Síntese

- Se ao remover uma aresta, aumenta o número de componentes do grafo, a aresta é aresta-de-corte.
  - Arestas-de-corte não pertencem a nenhum ciclo.
- Uma árvore é um **grafo conexo** e **acíclico**.
- Vimos várias e **importantes** caracterizações das árvores.

Aplicações

Aplicações de árvores:

- Estrutura de pastas de um sistema operacional;
- Relações de descendência;
- Campeonatos esportivos;
- Espaço de soluções de um jogo.

Exercícios: cortes

Certo ou errado?

- Seja $G = (V, E)$ um grafo e $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, então $\delta(S) = \delta(V - S)$.

Exercícios: cortes

Certo ou errado?

- Seja $G = (V, E)$ um grafo e $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, então $\delta(S) = \delta(V - S)$.
- Uma aresta e é uma aresta-de-corte de G se e somente se existe um corte tal que $\delta(S) = \{e\}$?

Exercícios: cortes

Certo ou errado?

- Seja $G = (V, E)$ um grafo e $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, então $\delta(S) = \delta(V - S)$.
- Uma aresta e é uma aresta-de-corte de G se e somente se existe um corte tal que $\delta(S) = \{e\}$?
- G é conexo se e somente se todo corte em G é não vazio.

Exercícios: cortes

Certo ou errado?

- Seja $G = (V, E)$ um grafo e $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, então $\delta(S) = \delta(V - S)$.
- Uma aresta e é uma aresta-de-corte de G se e somente se existe um corte tal que $\delta(S) = \{e\}$?
- G é conexo se e somente se todo corte em G é não vazio.
- Se $G = (V, E)$ é bipartido, então existe $S \subset V$ tal que $\delta(S) = E$.

Dúvidas

Dúvidas?