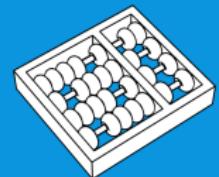


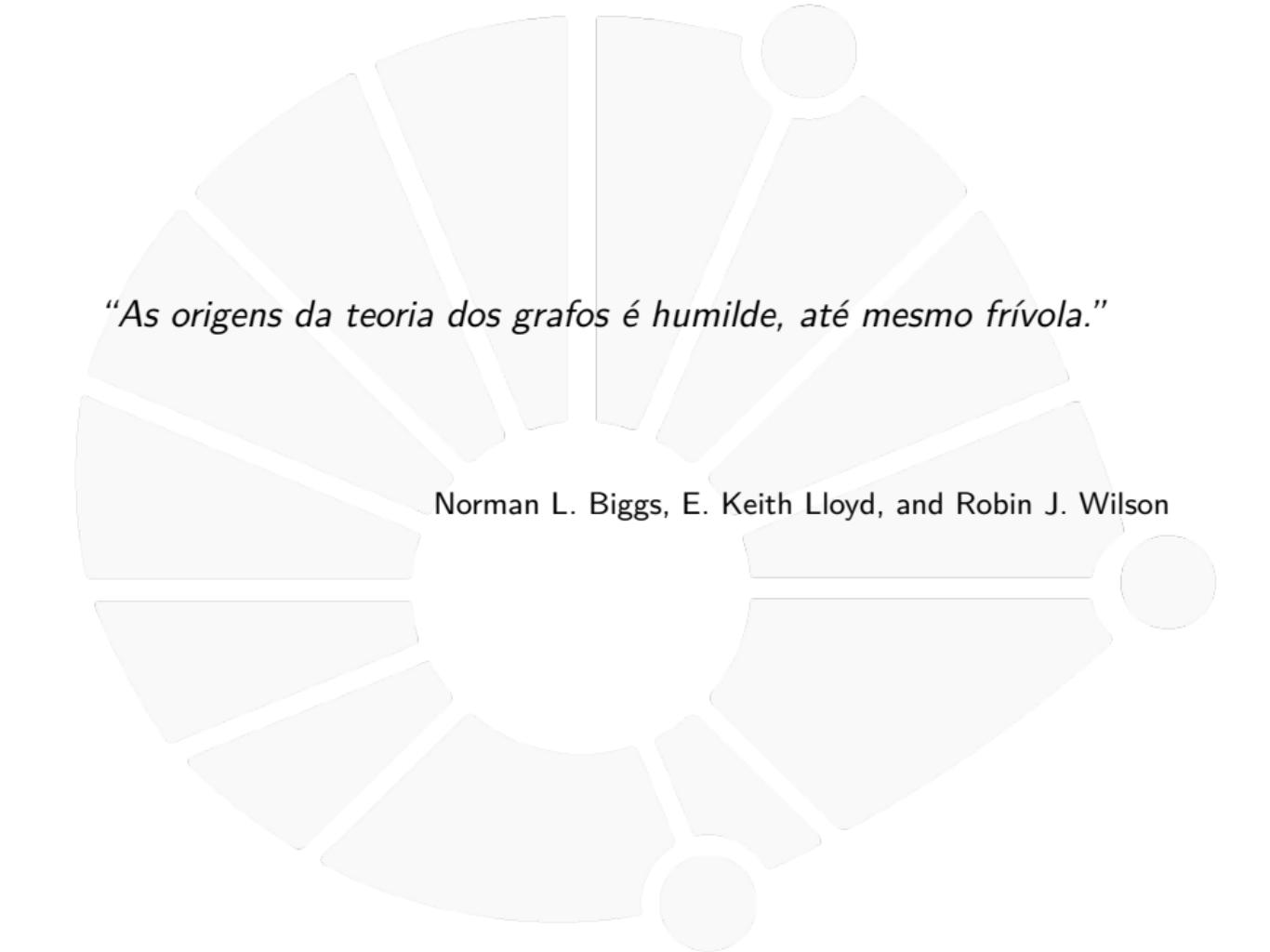
# CONCEITOS SOBRE GRAFOS

MC558 - Projeto e Análise de  
Algoritmos II

08/24      01  

Santiago Valdés Ravelo  
<https://ic.unicamp.br/~santiago/>  
ravelo@unicamp.br

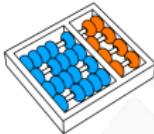


*“As origens da teoria dos grafos é humilde, até mesmo frívola.”*

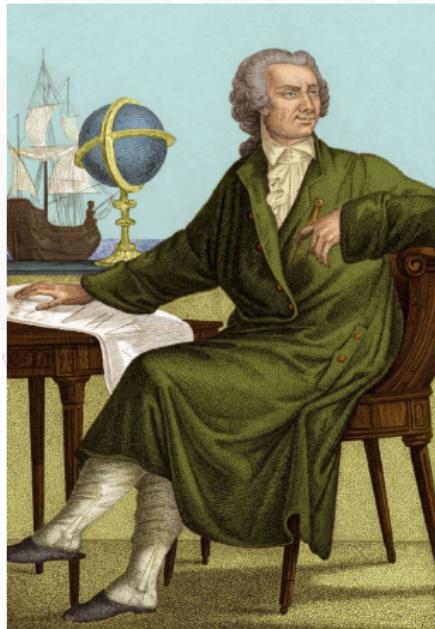
Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd, and Robin J. Wilson



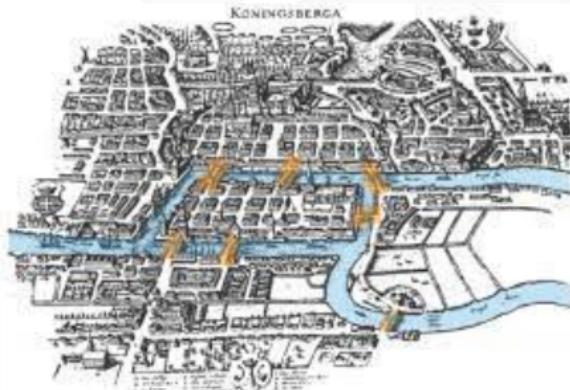
# INTRODUÇÃO

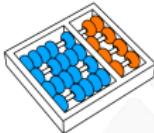


## Origem

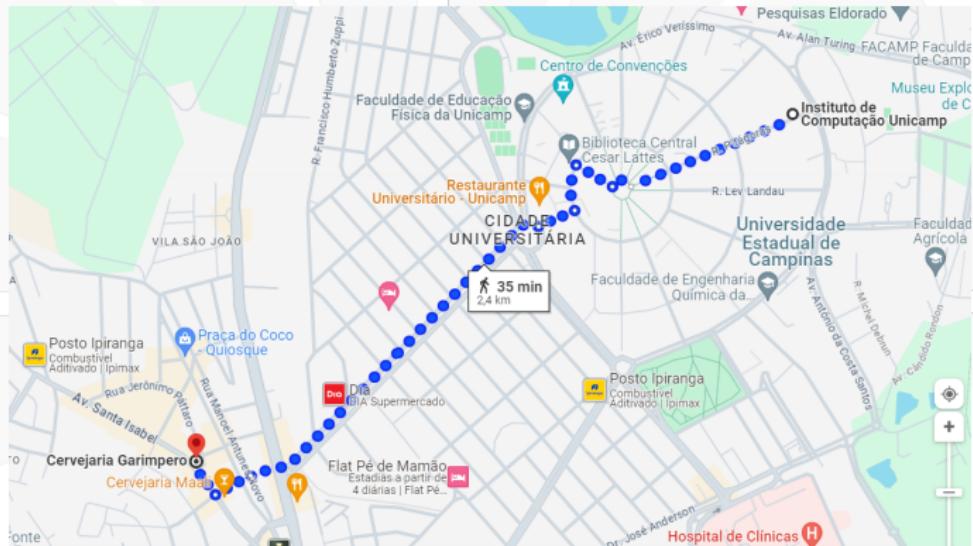


- ▶ Leonhard P. Euler
- ▶ 1735
- ▶ 7 Pontes de Königsberg

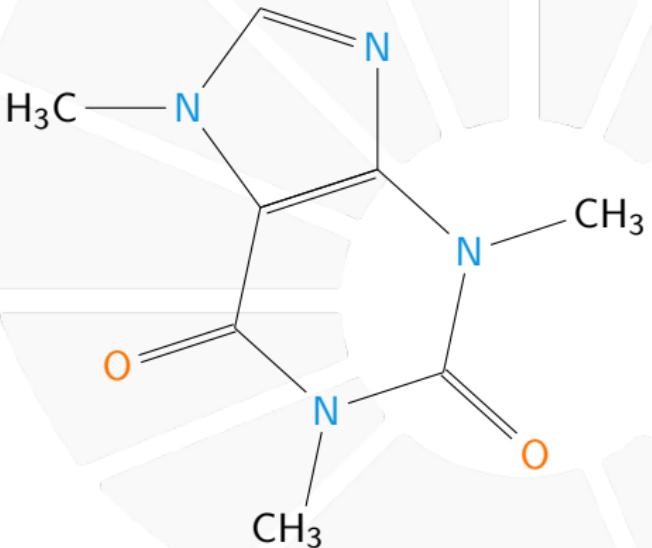


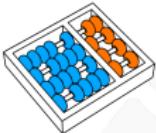


## Aplicações

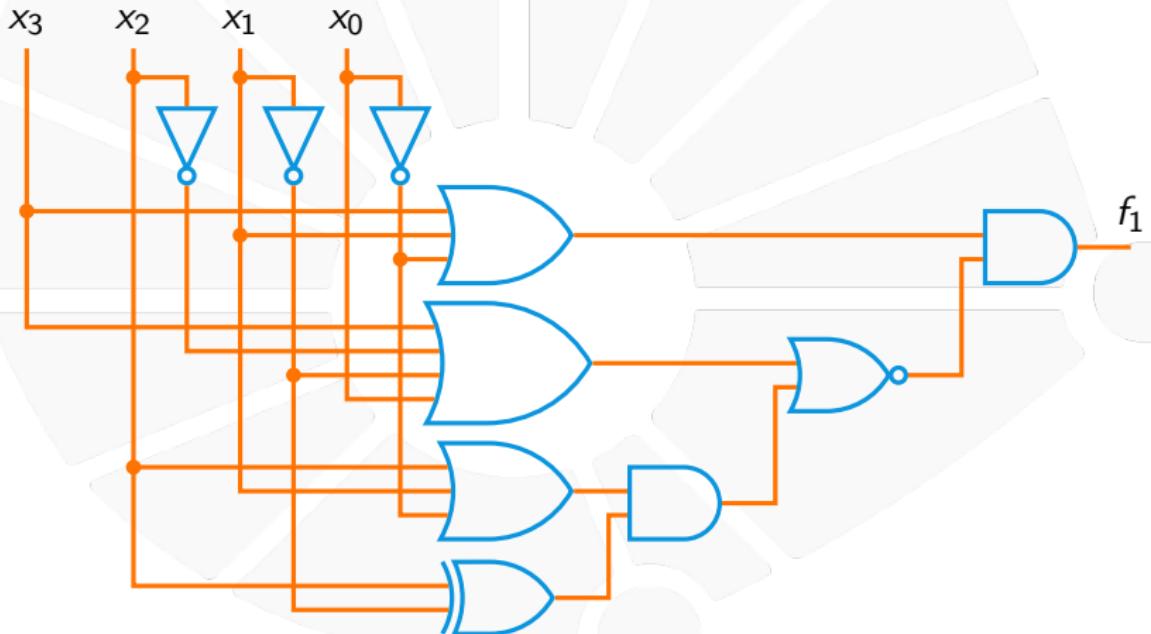


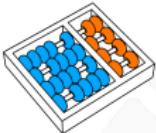
## Aplicações





## Aplicações

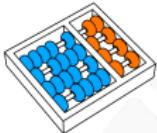




## Aplicações

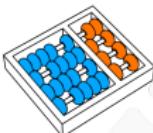


## Aplicações





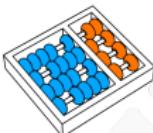
# CONCEITOS BÁSICOS



## Definição de grafo

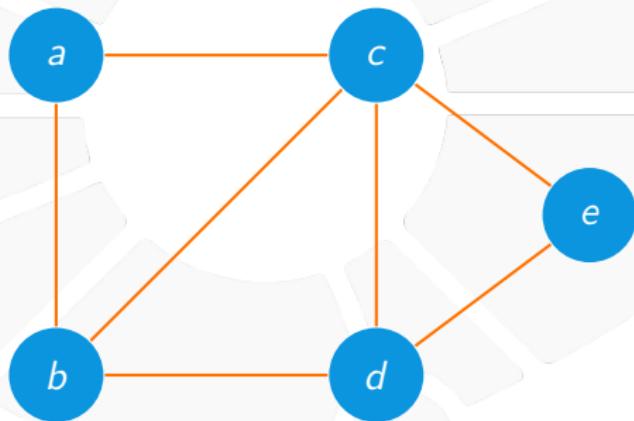
Um **GRAFO** é um par  $G = (V, E)$  onde:

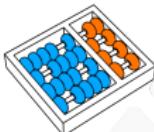
- ▶ **V** é um conjunto finito de elementos chamados **VÉRTICES** e
- ▶ **E** é um conjunto finito de pares **NÃO ORDENADOS** de vértices chamados **ARESTAS**.



## Exemplo de grafo

- ▶  $V = \{a, b, c, d, e\}$
- ▶  $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)\}$





## Adjacência e incidência

Considere uma aresta  $e = (a, b)$ :

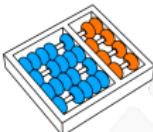
- ▶ Para pares não ordenados, temos  $(a, b) = (b, a)$ .
- ▶ Desenhamos a aresta como uma linha ligando os vértices:



- ▶ Dizemos que os vértices **a** e **b** são os **EXTREMOS** de **e**,
- ▶ também que **a** e **b** são vértices **ADJACENTES**.

Para enfatizar a relação entre arestas e vértices:

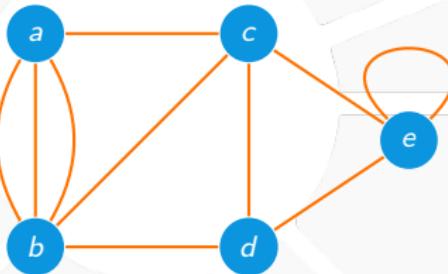
- ▶ Dizemos que a aresta **e** é **INCIDENTE** nos vértices **a** e **b**,
- ▶ também que os vértices **a** e **b** são incidentes na aresta **e**.



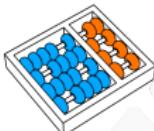
## Multigrafo

Grafos são generalizados por **MULTIGRAFOS**, que podem conter:

- ▶ **LAÇOS**: arestas com os dois extremos idênticos.
- ▶ **ARESTAS MÚLTIPLAS**: duas ou mais arestas com o mesmo par de extremos.



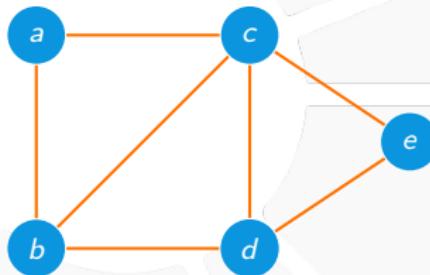
Um grafo é **SIMPLES** se ele não tiver laços ou arestas múltiplas.



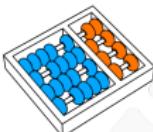
## Tamanho do grafo

Considere um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ :

- ▶ Denotamos por  $|\mathbf{V}|$  a cardinalidade do conjunto de vértices
- ▶ e por  $|\mathbf{E}|$  a cardinalidade do conjunto de arestas.
- ▶ No exemplo abaixo temos  $|\mathbf{V}|=5$  e  $|\mathbf{E}|=7$ :

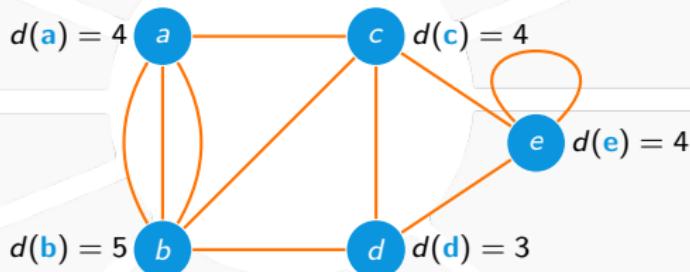


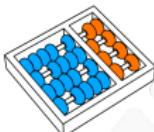
O **TAMANHO** do grafo  $G$  é dado por  $|\mathbf{V}| + |\mathbf{E}|$ .



## Grau de um vértice

O **GRAU** de um vértice  $v$ , denotado por  $d(v)$  é o número de arestas incidentes a  $v$ , com laços contados duas vezes.

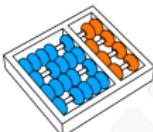




## Alguns nomes

Considere um vértice  $v$  de um grafo  $G = (V, E)$ :

- ▶ Se  $d(v) = |V| - 1$ , dizemos que  $v$  é um **VÉRTICE UNIVERSAL**.
- ▶ Se  $d(v) = 0$ , dizemos que  $v$  é um **VÉRTICE ISOLADO**.

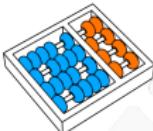


## Relação entre grau dos vértices e número de arestas

### Teorema (Handshaking lemma)

Para todo grafo  $G = (\textcolor{blue}{V}, \textcolor{orange}{E})$ ,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$



## Grafos completos

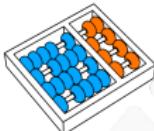
Um grafo é **COMPLETO** se tiver uma aresta  $(u,v)$  para todo par de vértices  $u,v$ :

- ▶ Se o número de vértices é  $n$ , então ele tem  $\binom{n}{2}$  arestas.
- ▶ Portanto, um grafo simples tem **NO MÁXIMO**  $\binom{n}{2}$  arestas.

Exemplos de grafos completos:



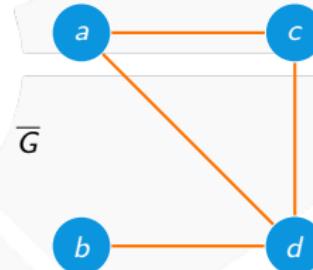
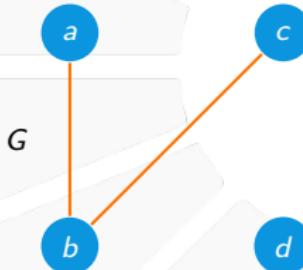
Um grafo completo com três vértices é chamado de **TRIÂNGULO**.



## Grafo complementar

O **COMPLEMENTO** de um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  é o grafo  $\overline{G} = (\mathbf{V}, \overline{\mathbf{E}})$ :

- ▶ Com o mesmo conjunto de vértices,  $\mathbf{V}$
- ▶ e com  $(u,v) \in \overline{\mathbf{E}}$  se e somente se  $(u,v) \notin \mathbf{E}$ .

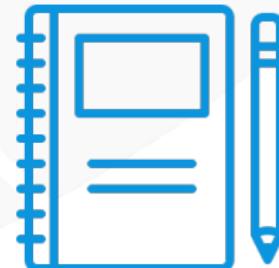


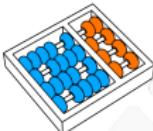
Note que, para qualquer vértice  $v$ ,  $d_{\overline{G}}(v) = |\mathbf{V}| - 1 - d_G(v)$ .

## Consequências da complementaridade



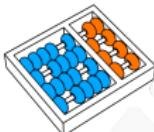
**Vamos fazer alguns exercícios?**





## Exercício 1

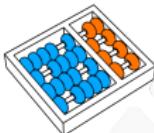
Mostre que em uma festa com pelo menos  $n \geq 6$  pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente.



## Exercício 1. Solução

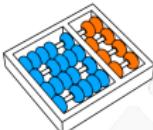
Considere o grafo  $G$  representando as amizades:

- ▶ Tome um vértice  $v$ . Note de que  $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) \geq 5$ .
- ▶ Logo,  $d_G(v) \geq 3$  ou  $d_{\bar{G}}(v) \geq 3$ .
- ▶ Suponha que  $d_G(v) \geq 3$  (o outro caso é análogo). Então,  $v$  tem três vizinhos  $a, b, c$  em  $G$ :
  1. Se houver aresta entre dois vizinhos, então ela forma triângulo com  $v \Rightarrow 3$  pessoas se conhecem mutuamente.
  2. Caso contrário,  $a, b, c$  formam um triângulo em  $\bar{G} \Rightarrow 3$  pessoas se desconhecem mutuamente.



## Exercício 2

Suponha que em um grupo  $S$  de  $n$  pessoas, com  $n \geq 4$ , vale o seguinte: em qualquer grupo  $X \subseteq S$  de 4 pessoas, existe uma que conhece as demais pessoas de  $X$ . Mostre que existe uma pessoa em  $S$  que conhece todas as demais pessoas de  $S$ .



## Exercício 2. Solução

Considere o grafo  $G$  representando os desconhecidos:

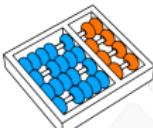
- ▶ Dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem.
- ▶ Queremos encontrar um vértice isolado de  $G$ .
- ▶ Se o grafo não tiver arestas, problema solucionado. Caso contrário, consideremos a aresta  $(x,y)$ .

Tome um subconjunto de vértices  $X = \{x, y, z, w\}$ :

- ▶ Necessariamente,  $w$  conhece  $\{x, y, z\}$ , ou  $z$  conhece  $\{x, y, w\}$ .
- ▶ Sem perda de generalidade, suponha que  $w$  conhece  $\{x, y, z\}$ .
- ▶ Então, não há arestas de  $w$  a  $\{x, y, z\}$ .
- ▶ Como para qualquer  $z, w$  e  $z$  se conhecem, não há aresta de  $w$  a todo  $z$ .
- ▶ Portanto,  $w$  é um vértice isolado.



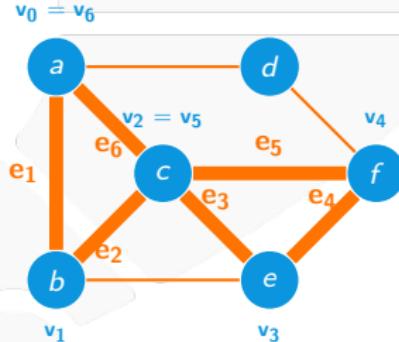
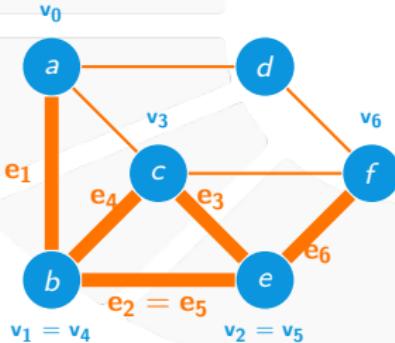
# PASSEIOS, CAMINHOS E CICLOS

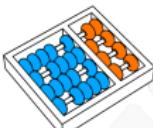


## Passeios em grafos

Um **PASSEIO**  $P$  de um vértice  $v_0$  a um vértice  $v_k$  em um grafo  $G$  é uma sequência finita e não vazia  $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ , tal que:

- ▶ Seus elementos são alternadamente vértices e arestas
- ▶  $e_i$ , para  $1 \leq i \leq k$ ,  $v_{i-1}$  e  $v_i$  são os extremos de  $e_i$ .

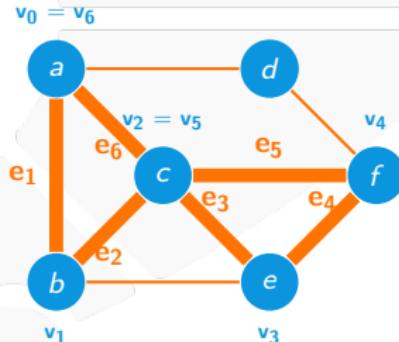
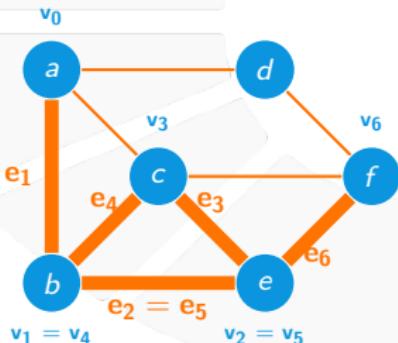


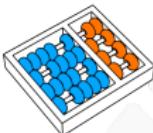


## Passeios em grafos

Dado um passeio  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ :

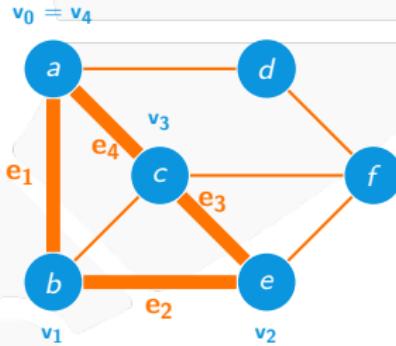
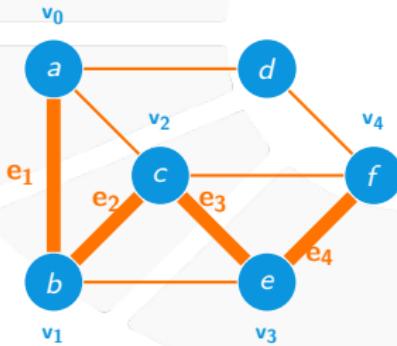
- ▶ Dizemos que  $v_k$  é **ALCANÇÁVEL** a partir de  $v_0$  através de  $P$ .
- ▶ Se  $v_0 = v_k$ , então  $P$  é um **PASSEIO FECHADO**.
- ▶ O **COMPRIMENTO** de  $P$  é o seu número de arestas ( $k$ ).

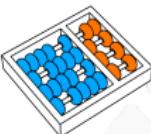




## Caminhos e ciclos

- ▶ Um **CAMINHO** é um passeio cujos vértices são distintos.
- ▶ Um **CICLO** é um passeio fechado que possui pelo menos uma aresta e tal que  $v_1, \dots, v_k$  são distintos e todas as arestas são distintas.

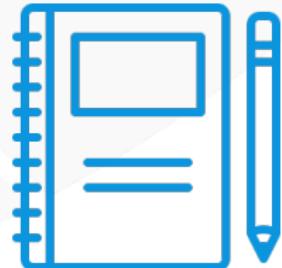


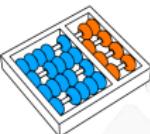


Refletindo sobre as definições



**Vamos fazer alguns exercícios?**

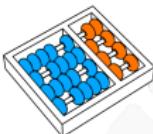




## Exercício 1

Dados um grafo  $G$  e dois vértices  $u, v$  de  $G$ , mostre que:

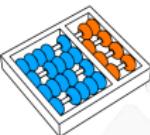
Se existe um passeio de  $u$  a  $v$  em  $G$ , então existe um caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$ . Por que isto é um resultado interessante?



## Exercício 2

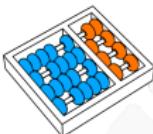
Dados um grafo  $G$  e três vértices  $u, v, w$  de  $G$ , mostre que:

Se em  $G$  existem um caminho de  $u$  a  $v$  e um caminho de  $v$  a  $w$  então existe um caminho de  $u$  a  $w$  em  $G$ .



## Exercício 3

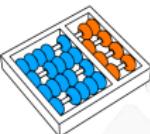
É verdade que todo passeio fechado contém um ciclo?



## Exercício 4

Dados um grafo  $G$  e um passeio  $P = (v_0, \dots, v_k)$  em  $G$  que não repete arestas, mostre que:

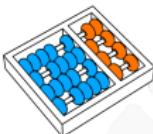
Se um vértice  $u$  de  $G$  aparece em  $P$  e  $v_0 \neq u \neq v_k$ , então o número de arestas diferentes em  $P$  que incidem em  $u$  é par.



## Exercício 5

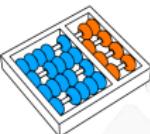
Dado um grafo  $G$ , mostre que:

Se existe um passeio que passa por todas as arestas sem repeti-las, então no máximo há dois vértices de grau ímpar em  $G$ .

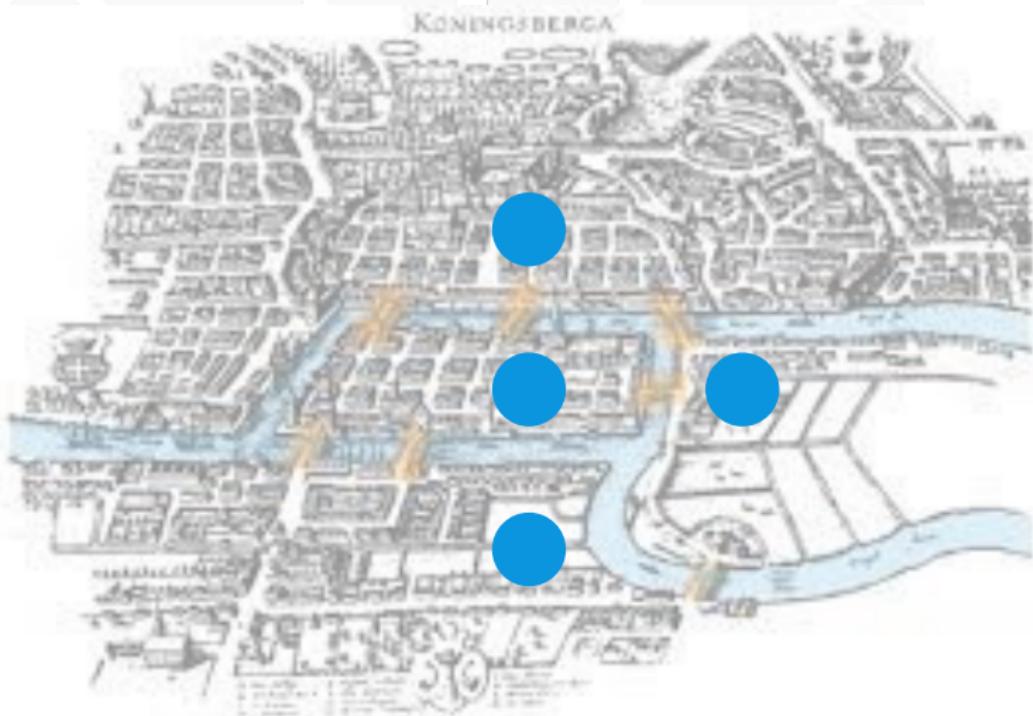


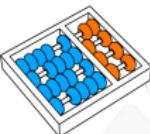
## Solucionando o problema das 7 Pontes de Königsberg



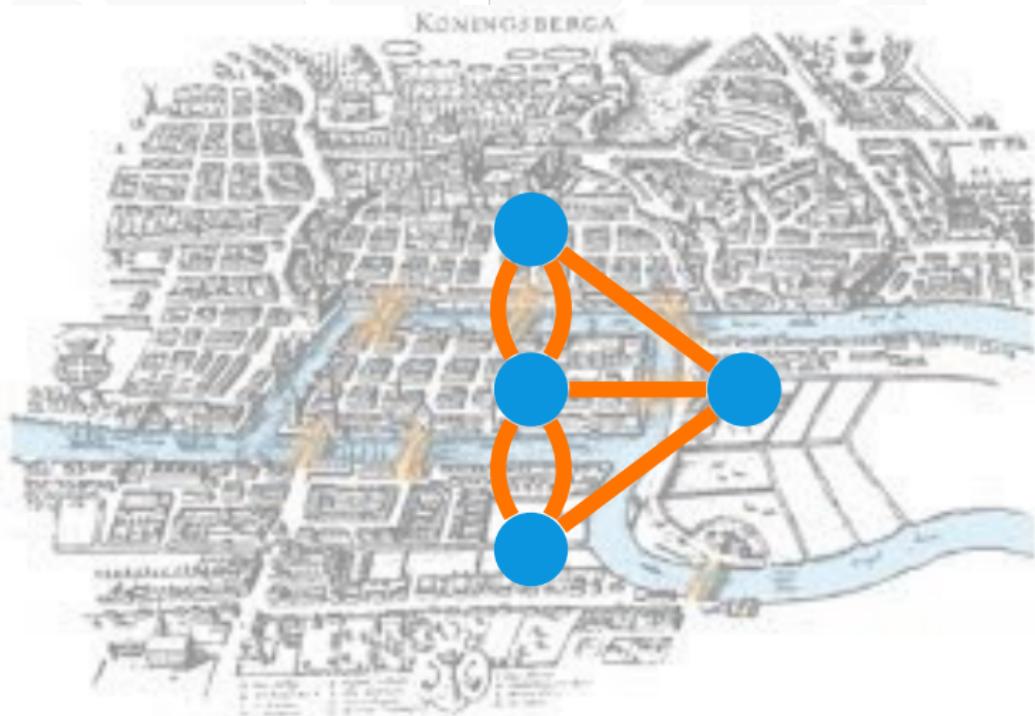


## Solucionando o problema das 7 Pontes de Königsberg





## Solucionando o problema das 7 Pontes de Königsberg



# CONCEITOS SOBRE GRAFOS

MC558 - Projeto e Análise de  
Algoritmos II

Santiago Valdés Ravelo  
<https://ic.unicamp.br/~santiago/>  
ravelo@unicamp.br

08/24

01

