

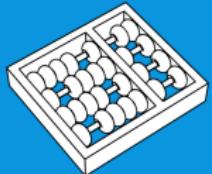
GRAFOS BIPARTIDOS, DIRECIONADOS E PONDERADOS

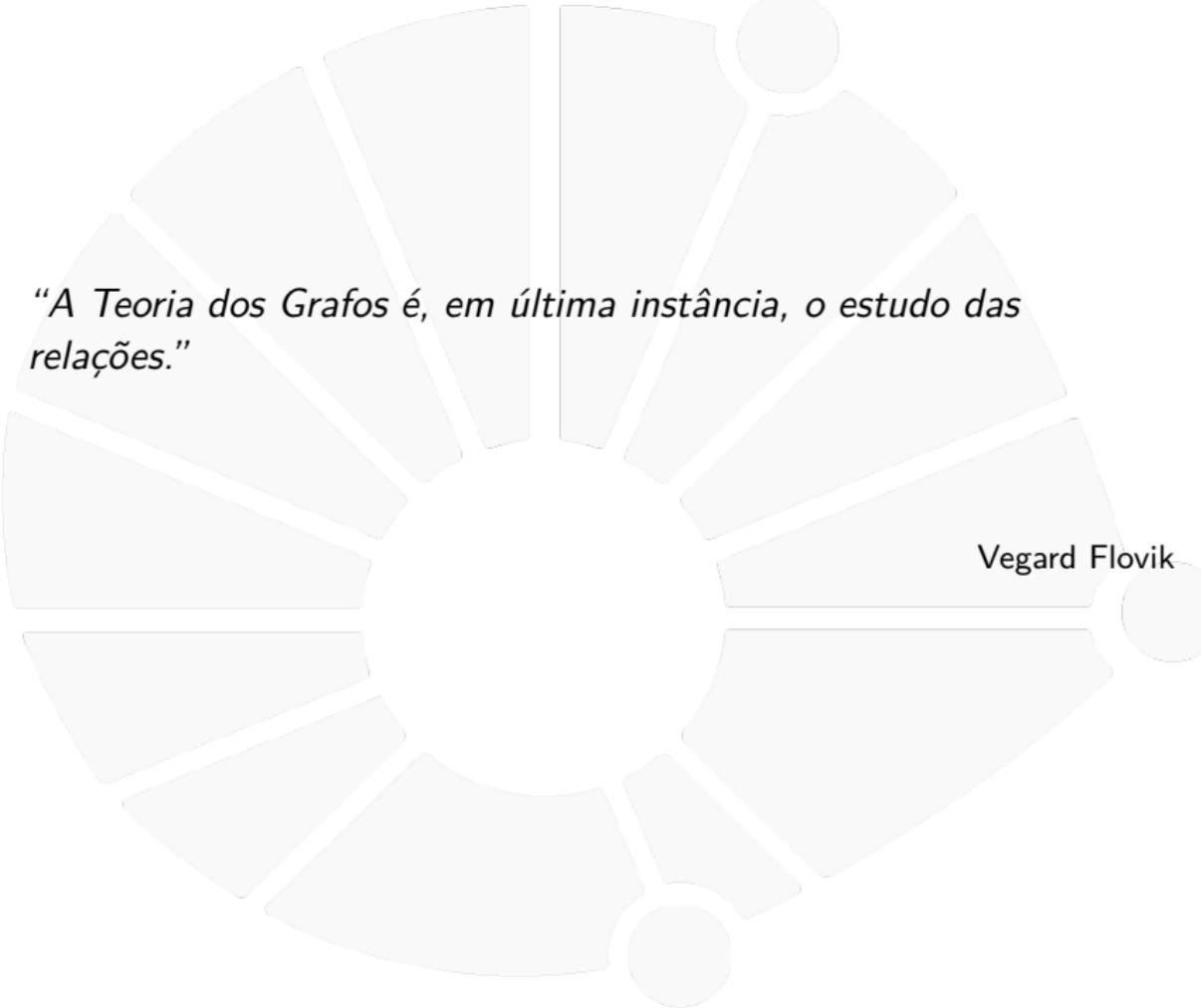
MC558 - Projeto e Análise de
Algoritmos II

08/24 03




Santiago Valdés Ravelo
<https://ic.unicamp.br/~santiago/>
ravelo@unicamp.br



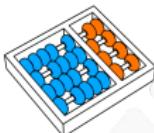


“A Teoria dos Grafos é, em última instância, o estudo das relações.”

Vegard Flovik

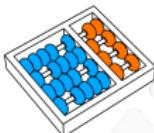


ÚLTIMA AULA

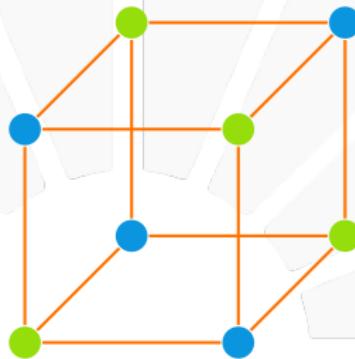


Definição

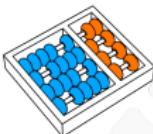
Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é **BIPARTIDO** se existe uma partição (\mathbf{A}, \mathbf{B}) de \mathbf{V} tal que toda aresta de G tem um extremo em \mathbf{A} e outro em \mathbf{B} .



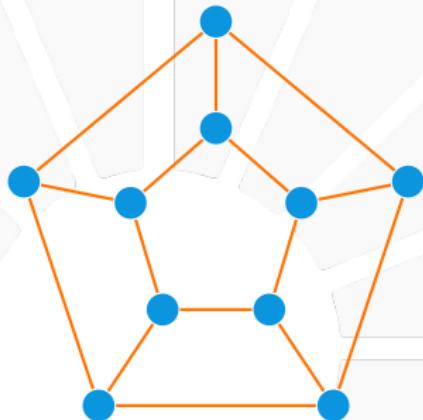
Exemplo



Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é bipartido se for possível colorir os vértices de G com **DUAS CORES** de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.

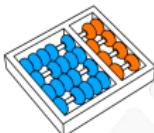


Exemplo



Este grafo **NÃO** é bipartido.

Pois possui ciclos de comprimento ímpar!



Condição necessária e suficiente

Teorema

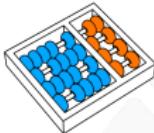
Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

- ▶ Já vimos que se G tem um ciclo ímpar, ele não é bipartido.
- ▶ Assim, resta demonstrar a recíproca.
- ▶ Podemos supor que G é conexo. Por quê?
- ▶ Antes de continuar a prova, vejamos outros resultados...



ÁRVORE GERADORA



Propriedade

Fato (1)

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Provar o fato a partir do seguinte resultado (exercício):

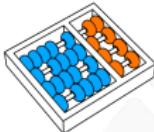
Lema

Seja G um grafo conexo e seja C um ciclo de G . Se e é uma aresta de C então $G - e$ é conexo.

A recíproca também vale:

Lema

Seja G um grafo conexo e seja e uma aresta de G . Se $G - e$ é conexo então e pertence a algum ciclo de G .

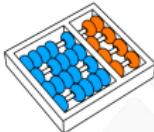


Árvores e grafos bipartidos

Fato (2)

Toda árvore $T = (\textcolor{blue}{V}, \textcolor{orange}{E})$ é um grafo bipartido.

É possível provar por indução em $|\textcolor{blue}{V}|$. Demonstre como exercício.



Árvore geradora

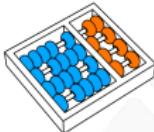
Fato (3)

Seja $T = (\textcolor{blue}{V}, \textcolor{orange}{E}')$ uma árvore geradora de um grafo $G = (\textcolor{blue}{V}, \textcolor{orange}{E})$.
Então para toda aresta $e \in \textcolor{orange}{E} \setminus \textcolor{orange}{E}'$ existe um único ciclo em
 $T + e = (\textcolor{blue}{V}, \textcolor{orange}{E}' \cup \{e\})$.

Demonstração:

- ▶ Sejam $\textcolor{blue}{u}, \textcolor{blue}{v}$ os extremos de e .
- ▶ Como T é árvore, existe um único caminho P de $\textcolor{blue}{u}$ a $\textcolor{blue}{v}$ em T .
- ▶ Portanto, $P + e$ é o único ciclo em $T + e$.

O único ciclo de $T + e$ é chamado de **CICLO FUNDAMENTAL**.



Demonstração do teorema

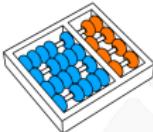
Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

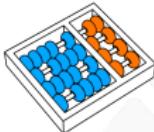
Demonstração:

- ▶ Resta mostrar que se G não tem ciclo ímpar, ele é bipartido.
- ▶ Lembre, podemos supor que G seja conexo.
- ▶ Suponha que G não contenha um ciclo ímpar.
- ▶ Construiremos uma bipartição (\mathbf{A} , \mathbf{B}) de \mathbf{V} tal que toda aresta de G tem um extremo em \mathbf{A} e outro em \mathbf{B} .



Demonstração do teorema

- ▶ Pelo Fato 1, G contém uma árvore geradora $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E}')$.
- ▶ Pelo Fato 2, T possui uma bipartição (\mathbf{A}, \mathbf{B}) de \mathbf{V} tal que toda aresta de T tem um extremo em \mathbf{A} e outro em \mathbf{B} .
- ▶ Mostraremos que toda aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E}'$ tem um extremo em \mathbf{A} e outro em \mathbf{B} .

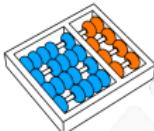


Demonstração do teorema

Seja e uma aresta de $E \setminus E'$:

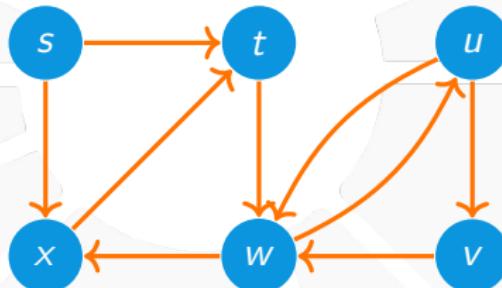
- ▶ Pelo Fato 3, existe um único ciclo C em $T + e$ que contém e .
- ▶ Se os extremos de e são da mesma parte (**A** ou **B**),
- ▶ então C é um ciclo ímpar, o que é uma **CONTRADIÇÃO!**
- ▶ Portanto, os extremos de e estão em partes distintas.

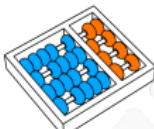
GRAFOS DIRECIONADOS



Definição

Um **GRAFO DIRECIONADO** ou **DIGRAFO** é definido de forma semelhante, com a diferença que as arestas (chamadas também de **ARCOS**) consistem de **PARES ORDENADOS** de vértices.





Adjacência de grafos direcionados

Considere uma aresta $e = (u, v)$ de um grafo direcionado G :

- ▶ Dizemos que e sai de u e entra em v .
- ▶ O vértice u é a **CAUDA** de e .
- ▶ O vértice v é **CABEÇA** de e .

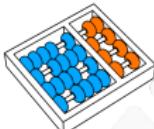
Temos dois tipos de grau para grafos direcionados:

- ▶ **GRAU DE SAÍDA:** $d^+(v)$ é o número de arestas que saem de v .
- ▶ **GRAU DE ENTRADA:** $d^-(v)$ é o número de arestas que entram em v .

Teorema

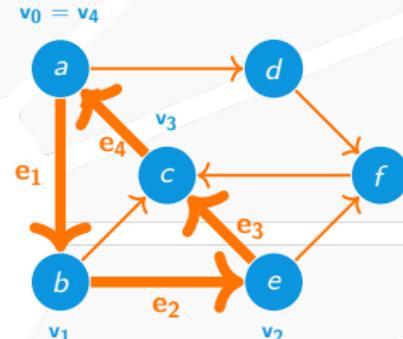
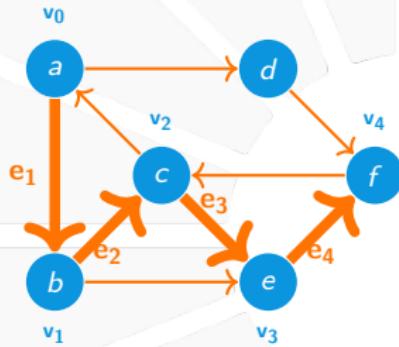
Para todo grafo direcionado $G = (V, E)$ temos:

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|.$$



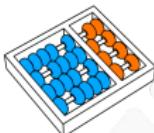
Passeios em grafos direcionados

Em um **PASSEIO DIRECIONADO** de um grafo direcionado todas as arestas seguem o mesmo sentido.

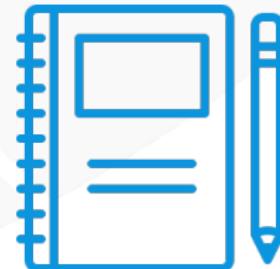


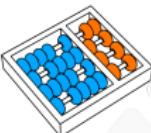
- ▶ Definimos **CAMINHOS E CICLOS DIRECIONADOS** analogamente, assim como subgrafos de um grafo direcionado.
- ▶ Noções de conexidade serão vistas depois.

Refletindo sobre as definições



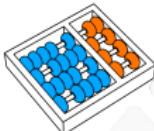
Vamos fazer alguns exercícios?





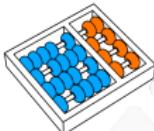
Exercício 1

Seja G um grafo direcionado e u, v vértices de G . Mostre que se existe um passeio de u a v em G , então existe um caminho de u a v em G .



Exercício 2

Seja G um grafo direcionado e u, v, w vértices de G . Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G .

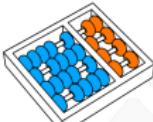


Exercício 3

É verdade que todo passeio fechado em um grafo direcionado contém um ciclo direcionado?



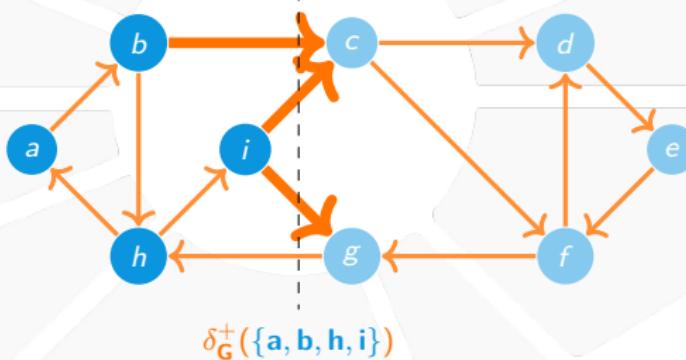
CORTES EM DIGRAFOS



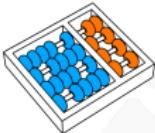
Cortes em grafos direcionados

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado e seja $S \subset V$.

Denote por $\delta_G^+(S)$ o **CORTE DIRECIONADO** de G induzido por S , que contém o conjunto de arestas de G com cauda em S e cabeça em $V \setminus S$.



Se $s \in S$ e $t \in V \setminus S$ dizemos que $\delta_G^+(S)$ **SEPARA** s de t .



Caminhos versus cortes direcionados

Lema

Seja G um grafo direcionado e sejam s, t vértices distintos de G .

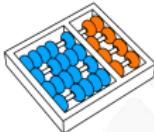
Então, exatamente uma das afirmações é verdadeira:

- (a) Existe um caminho de s a t em G , ou
- (b) existe um corte direcionado $\delta_G^+(S)$ que separa s de t tal que $\delta_G^+(S) = \emptyset$.

A demonstração é análoga à do lema para grafos não direcionados.
Faça como exercício.

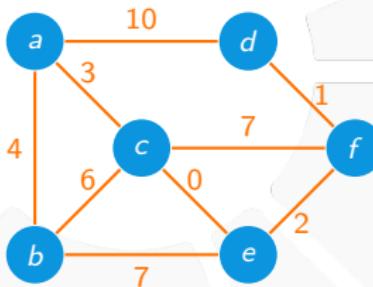


GRAFOS PONDERADOS



Definição

Um grafo (direcionado ou não) é **PONDERADO** se a cada aresta **e** do grafo está associado um valor real **w(e)**, denominado **PESO** ou **CUSTO** da aresta.



REPRESENTAÇÃO DE GRAFOS

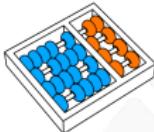
Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais:

1. **MATRIZ DE ADJACÊNCIA.**
2. **LISTAS DE ADJACÊNCIA.**

Qual estrutura de dados escolher?

- ▶ Depende do problema sendo tratado e das operações realizadas pelo algoritmo.
- ▶ A estrutura escolhida afeta a **COMPLEXIDADE DO ALGORITMO.**

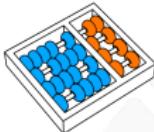


Matriz de adjacência

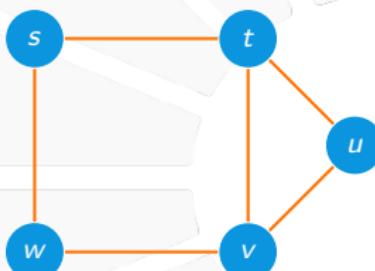
A **MATRIZ DE ADJACÊNCIA** de um grafo simples G é uma matriz quadrada A de ordem $|V|$ tal que:

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

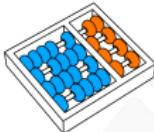
- ▶ O grafo pode ser direcionado ou não.
- ▶ Se G for não direcionado, então a matriz A é simétrica.



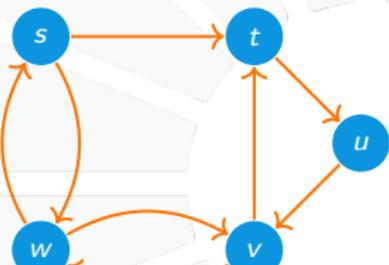
Matriz de adjacência



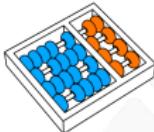
	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
<i>s</i>	0	1	0	0	1
<i>t</i>	1	0	1	1	0
<i>u</i>	0	1	0	1	0
<i>v</i>	0	1	1	0	1
<i>w</i>	1	0	0	1	0



Matriz de adjacência



	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
<i>s</i>	0	1	0	0	1
<i>t</i>	0	0	1	0	0
<i>u</i>	0	0	0	1	0
<i>v</i>	0	1	0	0	1
<i>w</i>	1	0	0	1	0



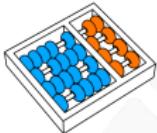
Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (V, E)$ por **LISTAS DE ADJACÊNCIAS**:

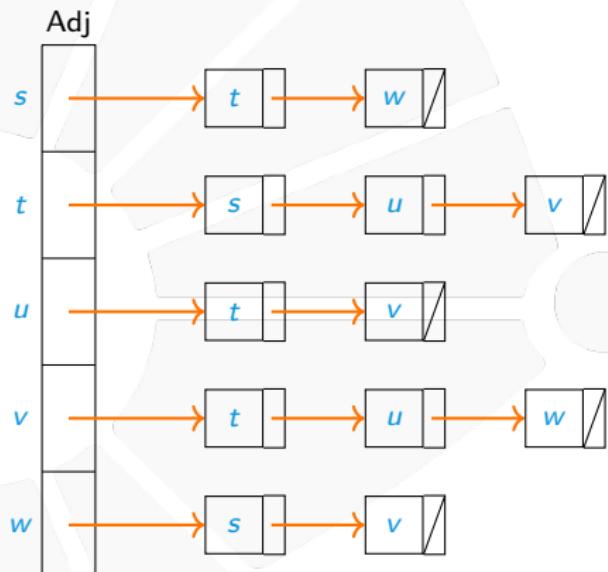
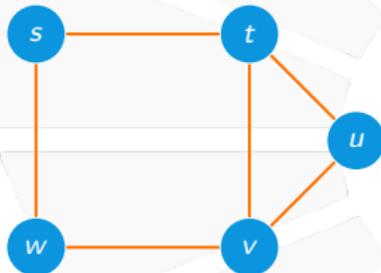
- ▶ Criamos uma lista ligada $\text{Adj}[v]$ para cada vértice v .
- ▶ Adicionamos a $\text{Adj}[v]$ todos os vértices adjacentes a v .

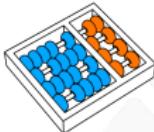
Como representamos uma aresta (u, v) ?

- ▶ Se a aresta for direcionada, então v está em $\text{Adj}[u]$.
- ▶ Se a aresta for não direcionada, então v está em $\text{Adj}[u]$ e u está em $\text{Adj}[v]$.

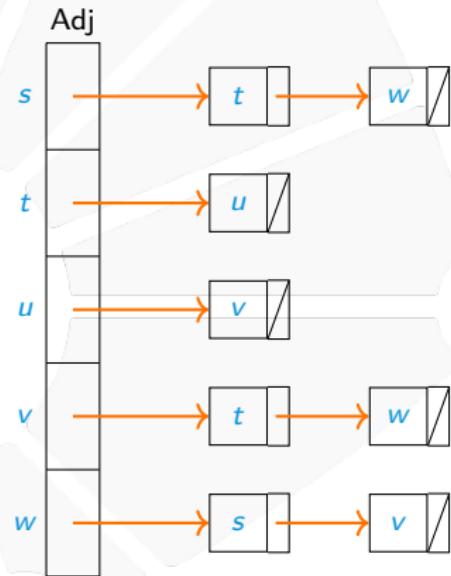
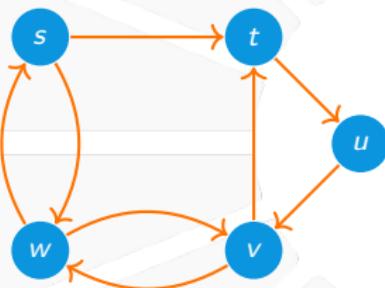


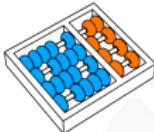
Listas de adjacência





Listas de adjacências

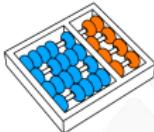




Notação para complexidade

Considere um grafo $G = (\text{V}, \text{E})$:

- ▶ Vamos simplificar a **NOTAÇÃO ASSINTÓTICA**.
- ▶ Escrevemos V e E ao invés de $|\text{V}|$ e $|\text{E}|$.
- ▶ Por exemplo, $O(\text{E}^2 \log \text{V})$ ao invés de $O(|\text{E}|^2 \log |\text{V}|)$.



Matriz versus listas

A melhor representação depende do algoritmo.

1. Matriz de adjacência:

- ▶ É fácil verificar se (u, v) é uma aresta de G .
- ▶ O espaço utilizado é $\Theta(V^2)$.
- ▶ Adequada para grafos densos (com $|E| = \Theta(V^2)$).

2. Listas de adjacência:

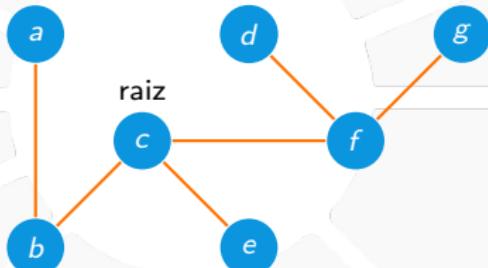
- ▶ É fácil listar os vértices adjacentes de um dado vértice v .
- ▶ O espaço utilizado é $\Theta(V + E)$.
- ▶ Adequada a grafos esparsos (com $|E| = \Theta(V)$).

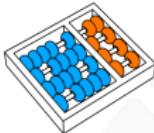
Extensões

- ▶ Há alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.
- ▶ Essas representações podem ser usadas para grafos ponderados, grafos com laços e arestas múltiplas, grafos com pesos nos vértices etc.
- ▶ Para determinados algoritmos é importante manter **ESTRUTURAS DE DADOS ADICIONAIS**.

Representação de árvores

Uma **ÁRVORE ENRAIZADA** é uma árvore com um vértice especial chamado **RAIZ**.

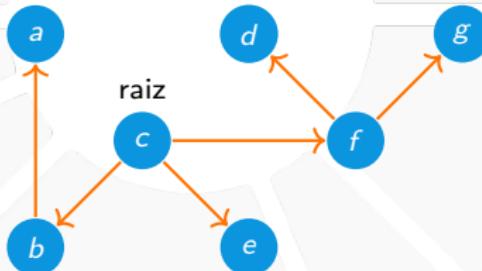


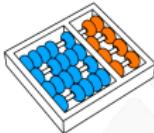


Representação de árvores

Uma **ÁRVORE DIRECIONADA** com raiz r é um grafo direcionado acíclico $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ tal que:

1. $d^-(r) = 0$,
2. $d^-(v) = 1$ para $v \in \mathbf{V} \setminus \{r\}$.



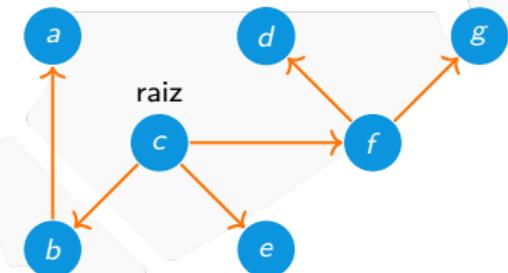
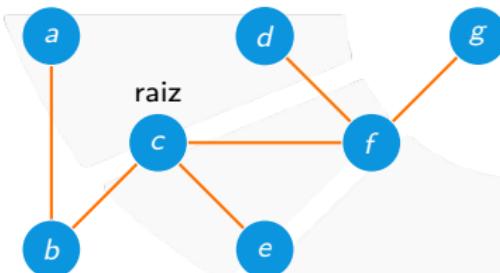


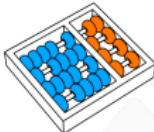
Representação de árvores

Representar uma árvore enraizada com um vetor π de **PREDECESSORES**.

vértice	a	b	c	d	e	f	g
π	b	c	N	f	c	c	f

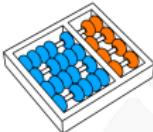
O símbolo N indica a ausência de predecessor.





Alguns detalhes de implementação

- ▶ Nos algoritmos que veremos, usamos a representação de um grafo (direcionado ou não) por listas de adjacências.
- ▶ Em uma implementação real de um algoritmo, provavelmente a representação **NÃO** é dada a priori.
- ▶ Assim, é necessário construir tal representação a partir da dos dados de entrada.
- ▶ Como construir a representação de um grafo depende do formato da entrada.

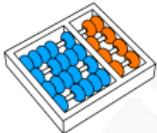


Exemplo de entrada

Suponha que a entrada é um arquivo texto:

5 7
0 1
0 2
1 2
1 3
2 3
2 4
3 4

- ▶ O arquivo representa um grafo não direcionado.
- ▶ A primeira linha contém $|V|$ e $|E|$.
- ▶ Os vértices são numerados de 0 a $|V| - 1$.
- ▶ As próximas $|E|$ linhas representam os extremos das arestas.



Exemplo de construção

Algoritmo: CONSTRUIR-ADJ()

- 1 leia n e m
 - 2 repita m vezes
 - 3 leia a próxima aresta (u, v)
 - 4 insira v na lista $\text{Adj}[u]$
 - 5 insira u na lista $\text{Adj}[v]$
 - 6 devolva Adj
-

GRAFOS BIPARTIDOS, DIRECIONADOS E PONDERADOS

MC558 - Projeto e Análise de
Algoritmos II

08/24 03




Santiago Valdés Ravelo
<https://ic.unicamp.br/~santiago/>
ravelo@unicamp.br

