NP-Completude

F. K. Miyazawa

Instituto de Computação/Unicamp

2021

Sumário I

Sumário II

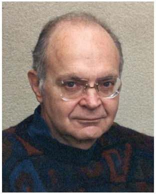
- HAM-CYCLE
- TSP
- SUBSET-SUM
- CIRCUIT-SAT $\in$ NP-Difícil

5. Outros aspectos de complexidade computacional
   - Decisão $\times$ Otimização
   - NP-Intermediário
   - Complexidade de Espaço e Não-Determinismo
   - Problemas Indecidíveis

Problemas Computáveis Eficientemente

Projeto e Análise de Algoritmos voltados para computação

- John von Neumann desenvolve o Merge Sort'45
- Análise por Goldstine e von Neumann'48



Popularizado por Donald Knuth

- The art of Computer Programming'68,69,73,...

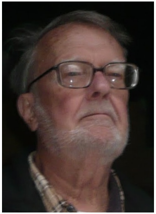
Problemas Computáveis Eficientemente

Algoritmos rápidos para vários problemas básicos e importantes

- Caminho Mínimo
- Emparelhamento Mínimo
- Programação Linear
- Fluxo Máximo e Corte Mínimo
- Árvore Geradora de Peso Mínimo
- ...

Problemas Computáveis Eficientemente

- Cobham'64 & Edmonds'65:
  Algoritmo *eficiente* = Complexidade de tempo polinomial


Cobham


Edmonds

Algoritmos eficientes foram encontrados para vários problemas

Mas há muitos que – possivelmente – jamais admitirão!

Problema de Decisão da Satisfatibilidade (D-SAT)

- Entrada:
  Fórmula lógica $\phi(x_1, \ldots, x_n)$
  com variáveis lógicas $x_1, \ldots, x_n$, operadores lógicos, parênteses
  sem quantificadores
- Pergunta:
  Existe atribuição de valores V/F às variáveis $x_1, \ldots, x_n$ que tornam ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

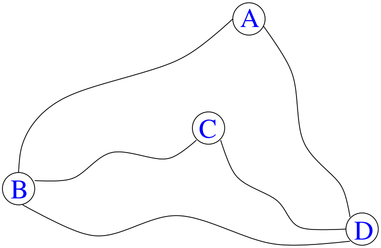
Resposta: Sim! Atribuição/Certificado: $x_1 = \mathtt{V}$, $x_2 = \mathtt{F}$, $x_3 = \mathtt{F}$.

$$\begin{array}{rcccccc} \phi(\mathtt{V}, \mathtt{F}, \mathtt{F}) & = & (\mathtt{V} \vee \mathtt{F} \vee \mathtt{F}) & \wedge & (\mathtt{V} \vee \mathtt{V} \vee \mathtt{F}) & \wedge & (\mathtt{V} \vee \mathtt{V} \vee \mathtt{V}) \\ & = & \mathtt{V} & \wedge & \mathtt{V} & \wedge & \mathtt{V} \\ & = & \mathtt{V} & & & & \end{array}$$

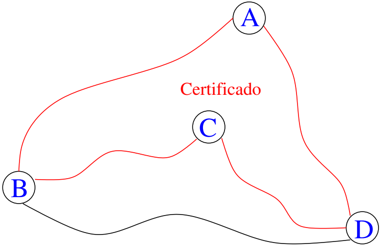
Problema HAM-CYCLE

- Entrada:
  Grafo $G = (V, E)$
- Pergunta:
  Existe ciclo hamiltoniano (passa por cada vértice uma vez) em G?

Entrada



Resposta: Sim!



Problemas Difíceis

Os problemas D-SAT e D-CH

- Algoritmos (simples): $O^*(2^n)$ para D-SAT e $O^*(n!)$ para D-CH
- Possuem um certificado/garantia quando a resposta é Sim
- Não são conhecidos algoritmos eficientes para os problemas
- Possivelmente jamais terão algoritmos eficientes!

Indício: Há problemas que

- contemplam toda dificuldade computacional
- de uma grande classe

Problemas de Decisão e algumas Classes de Complexidade:

Baseada nos modelos básicos de computação, como a Máquina de Turing ou Modelo RAM (Random Access Model).

Segue uma definição informal das classes de problemas P, NP, NP-Completo, NP-Difícil

$X \in \mathrm{P}$:
: X pode ser decidido em tempo polinomial.

$X \in \mathrm{NP}$:
: X é de decisão e tem certificado curto e verificável em tempo polinomial.

$X \in \mathrm{NP\text{-}Completo}$:
: $X \in$ NP e $\forall Y \in NP$, Y é redutível polinomialmente a X.

$X \in \mathrm{NP\text{-}Difícil}$:
: $\forall Y \in$ NP, Y é redutível polinomialmente a X, onde X não necessariamente pertence a NP.

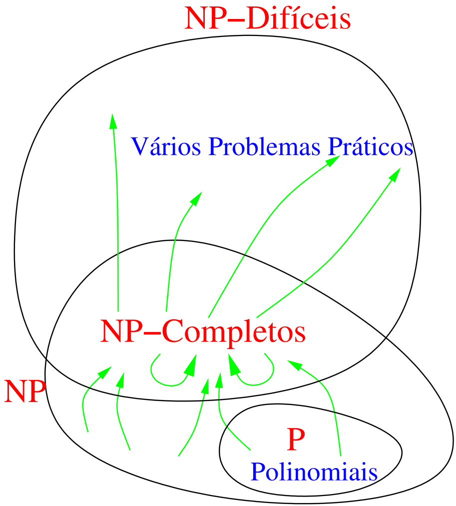
Observações:

- **Todo** problema de NP é redutível polinomialmente a **um** problema NP-completo

- Se existir **um** algoritmo de tempo polinomial para um problema NP-completo então **todos** os problemas de NP se tornam de tempo polinomial

- Se **um** dos problemas de NP só puder ser resolvido em tempo exponencial, então **todos** os problemas NP-completos também só poderão ser resolvidos em tempo exponencial.

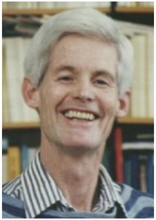
Possível configuração:



Primeiro Problema NP-Completo: Satisfatibilidade (SAT)

- NP é gigantesca
- Existem problemas NP-completos

Cook'71 & Levin'73: D-SAT é NP-Completo.



Cook

Levin

Primeiros Problemas NP-Completos

Karp'72: 21 Problemas NP-Completos.

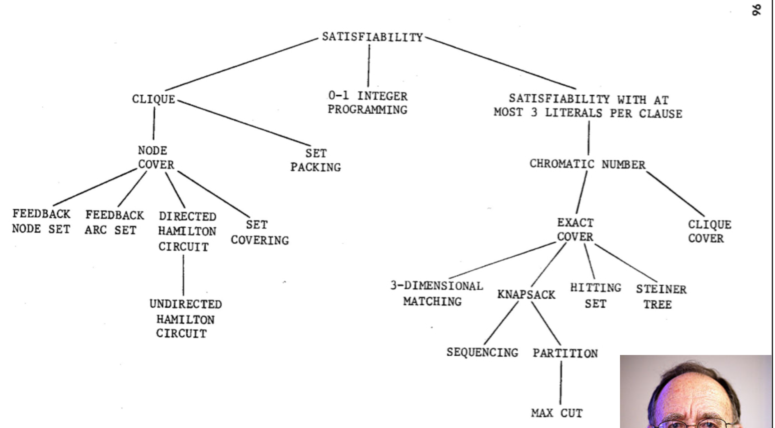


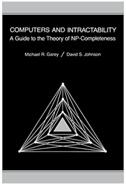
FIGURE 1 - Complete Problems

21 Problemas NP-Completos provados por Karp

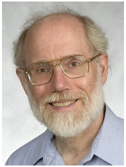
- *Satisfatibilidade* em forma normal conjuntiva
- *Programação Inteira 0-1*
- *Clique*
- *Empacotamento de Conjuntos*
- *Cobertura de Vértices*
- *Cobertura de Conjuntos*
- *Feedback Node Set*
- *Feedback Arc Set*
- *Circuito Hamiltoniano em grafo orientado*
- *Circuito Hamiltoniano em grafo não orientado*
- *3-Satisfatibilidade*
- *Coloração de Grafos*
- *Partição em Cliques*
- *Cobertura Exata*
- *Transversal*
- *Árvore de Steiner*
- *Emparelhamento Tridimensional*
- *Mochila*
- *Sequenciamento de Tarefas*
- *Partição*
- *Corte Máximo*

O número de problemas NP-completos aumentou rapidamente

- M.R. Garey & D.S. Johnson'79:
  Computer and Intractability: A guide to the Theory of NP-Completeness.



Garey



Johnson

"I can't find an efficient algorithm, but neither can all these famous people."

Comparando tempos polinomiais e exponenciais

O quão ruim é ter um algoritmo de tempo exponencial:

- Considere um computador com velocidade de 1 Terahertz (mil vezes mais rápido que um computador de 1 Gigahertz)
- Funções de complexidades de tempo simplificadas

$f(n)$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 80$	$n = 100$
n	$2{,}0\times10^{-11}$seg	$4{,}0\times10^{-11}$seg	$6{,}0\times10^{-11}$seg	$8{,}0\times10^{-11}$seg	$1{,}0\times10^{-10}$seg
n^2	$4{,}0\times10^{-10}$seg	$1{,}6\times10^{-9}$seg	$3{,}6\times10^{-9}$seg	$6{,}4\times10^{-9}$seg	$1{,}0\times10^{-8}$seg
n^3	$8{,}0\times10^{-9}$seg	$6{,}4\times10^{-8}$seg	$2{,}2\times10^{-7}$seg	$5{,}1\times10^{-7}$seg	$1{,}0\times10^{-6}$seg
n^5	$2{,}2\times10^{-6}$seg	$1{,}0\times10^{-4}$seg	$7{,}8\times10^{-4}$seg	$3{,}3\times10^{-3}$seg	$1{,}0\times10^{-2}$seg
2^n	$1{,}0\times10^{-6}$seg	1,0seg	13,3dias	$1{,}3\times10^{5}$séc	$1{,}4\times10^{11}$séc
3^n	$3{,}4\times10^{-3}$seg	140,7dias	$1{,}3\times10^{7}$séc	$1{,}7\times10^{19}$séc	$5{,}9\times10^{28}$séc

onde seg=segundos e séc=séculos.

Comparando tempos polinomiais e exponenciais

E se usarmos computadores muito melhores?

$f(n)$	Computador atual	100×mais rápido	1000×mais rápido
n	N_1	$100N_1$	$1000N_1$
n^2	N_2	$10N_2$	$31.6N_2$
n^3	N_3	$4.64N_3$	$10N_3$
n^5	N_4	$2.5N_4$	$3.98N_4$
2^n	N_5	$N_5 + 6.64$	$N_5 + 9.97$
3^n	N_6	$N_6 + 4.19$	$N_6 + 6.29$

Fixando o tempo de execução

Problemas NP-difíceis

- Vários problemas práticos são NP-difíceis
  Exemplos:
  - Problema do Caixeiro Viajante
  - Atribuição de Freqüências em Telefonia Celular
  - Empacotamento de Objetos em Contêineres
  - Escalonamento de Funcionários em Turnos de Trabalho
  - Escalonamento de Tarefas em Computadores
  - Classificação de Objetos
  - Coloração de Mapas
  - Projetos de Redes de Computadores
  - Vários outros...

- **P$\neq$NP** $\Rightarrow$ Não existem algoritmos eficientes
  para problemas NP-difíceis!

O quão grande é a classe NP-difícil?

Considere o seguinte problema NP-difícil

Problema MOCHILA: São dados

- Conjunto de itens $I = \{1, \ldots, n\}$, cada item i com tamanho $t_i > 0$
- Mochila (recipiente) de capacidade $B > 0$.

O objetivo é encontrar subconjunto $S \subseteq I$ tal que

- $\sum_{i \in S} t_i \leq B$
- $\sum_{i \in S} t_i$ é máximo.

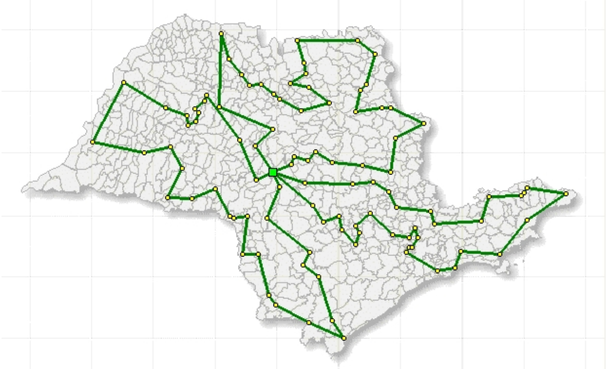
Em problemas práticos:

- É comum termos quantidades limitadas de recursos e o problema da mochila aparecer como subproblema
- Queremos aproveitar o recurso da melhor maneira possível.
- Exemplos: Otimização do número de pessoas, tempo, espaço/ocupação, etc.

Problemas NP-difíceis costumam ser parte de muitos problemas práticos

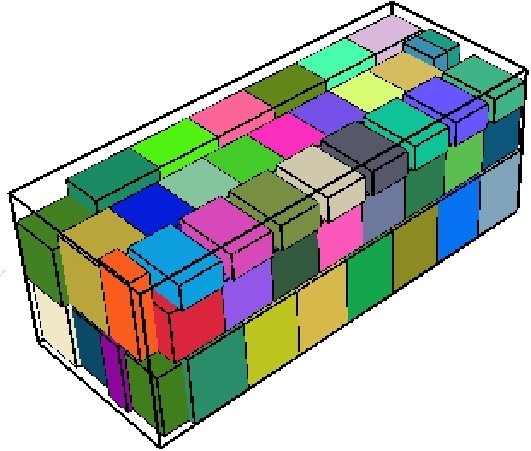
Dificuldade intrínseca de problemas

Exemplo de problema NP-difícil: Busca por rotas (de custo mínimo) para entrega de produtos em São Paulo (vehicle routing)



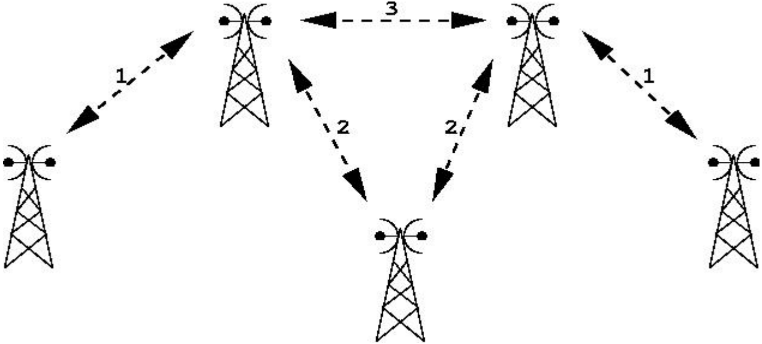
Dificuldade intrínseca de problemas

Exemplo de problema NP-difícil: calcular o número mínimo de *containers* para transportar um conjunto de caixas com produtos. (bin packing 3D)



Dificuldade intrínseca de problemas

Exemplo de problema NP-difícil: calcular a localização de antenas para garantir a cobertura de uma certa região e atribuir frequências minimizando interferências (facility location + frequency assignment)

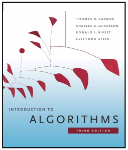


É importante poder

- Indentificar se estamos lidando com um problema NP-difícil!
- Tratar um problema NP-difícil!
  - Algoritmos Exatos
  - Algoritmos de Aproximação
  - Algoritmos Probabilísticos
  - Algoritmos Paramétricos
  - Heurísticas e Metaheurísticas
  - ...

Referência para material usados nestes slides

- Livro texto da parte de NP-Completude
  [CLRS'09] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein: Introduction to Algorithms, 3ed. The MIT Press, 2009.



- Consulte outras referências na página do curso, principalmente para fazer exercícios

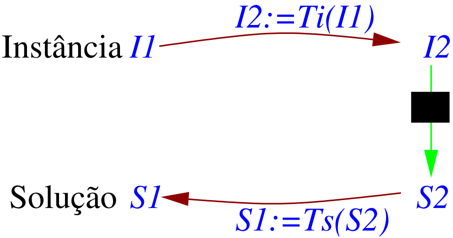
Reduções

- Por vezes, conseguimos mapear instâncias de um problema P_1 para instâncias de um problema P_2,
- e mapear de volta soluções de P_2 para soluções de P_1.
- Neste caso, podemos usar R_2 como 'caixa preta' para resolver instâncias de P_1.
- Este processo é conhecido como redução de P_1 para P_2 e denotaremos por $P_1 \leq P_2$.

Reduções

Reduções com uma chamada:
P_1 é redutível a P_2 ($P_1 \leq P_2$) se

- $\exists$ *Ti* que transforma instância I_1 de P_1 para instância I_2 de P_2
- $\exists$ *Ts* que transforma solução S_2 de I_2 para solução S_1 de I_1



Claramente vale transitividade:

$$\text{Se } P_1 \leq P_2 \text{ e } P_2 \leq P_3 \text{ então } P_1 \leq P_3$$

Reduções

Exemplo de redução com uma chamada

Problema (do Triângulo em um Grafo (D-TG))

Dado grafo $G = (V, E)$ não-orientado, decidir se há triângulo (3 vértices com arestas entre si) em G.

Algoritmo trivial $O(n^3)$: Verificar os $\binom{n}{3}$ subconjuntos de 3 vértices de G.

Vamos reduzir D-TG para o problema de Multiplicação de Matrizes e obter algoritmo com complexidade de tempo melhor

Problema (Multiplicação de Matrizes (MM))

Dadas matrizes A e B, computar a matriz $C = A \cdot B$.

Algoritmos para MM:

- Strassen'69: $O(n^{2,807})$.
- Coppersmith-Winograd'90: $O(n^{2,376})$.

Reduções

Seja A a matriz de adjacência de G:

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{se } \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Compute A^2. Note que

$$A^2[i,j] = \sum_{k=1}^{n} A[i,k] \cdot A[k,j]$$

I.e.,

$$A^2[i,j] > 0 \iff \text{existe } k \text{ tal que } A[i,k] = 1 \text{ e } A[k,j] = 1.$$

Assim,

$$G \text{ tem triângulo} \iff \text{existem } i,j \text{ tal que } A[i,j] = 1 \text{ e } A^2[i,j] > 0$$

Reduções

Proposição

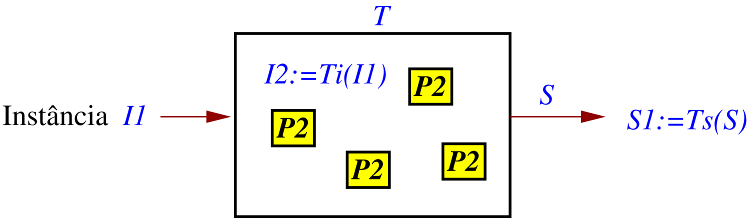
O Problema D-TG pode ser resolvido em tempo $O(n^{2,376})$.

Algoritmo

1. Compute matriz de adjacência A.
2. Compute A^2 (em tempo $O(n^{2,376})$).
3. Para cada par $1 \leq i, j \leq n$, com $i \neq j$:
4.   Se $A[i,j] = 1$ e $A^2[i,j] > 0$ devolva 1.
5. Devolva 0.

Reduções

Reduções com multiplas chamadas:
reduções de P_1 para P_2, fazendo várias aplicações de P_2.



- Reduções de Karp: Reduções de tempo polinomial com uma chamada.
- Reduções de Turing: Reduções de tempo polinomial com uma ou mais chamadas.

Redução para Problemas de Decisão

A teoria de NP-Completude é desenvolvida sobre problemas de decisão.

- Problemas que possuem resposta sim/não.
- Em geral, problemas práticos não são de decisão.

Muitas vezes, a versão de decisão se refere a existência de uma estrutura (em vez de buscá-la).

Problema (de Decisão do Ciclo Hamiltoniano)

Dado grafo G, decidir se G possui ciclo que passa por cada vértice exatamente uma vez.

Na prática, queremos encontrar tal estrutura.

Problema (do Ciclo Hamiltoniano)

Dado grafo G, encontrar ciclo em G que passa por cada vértice exatamente uma vez, caso exista.

Redução para Problemas de Decisão

Apesar da aparente simplicidade, muitos problemas de decisão são tão difíceis quanto as versões de busca.

Vamos reduzir o problema (de busca) do Ciclo Hamiltoniano para sua versão de decisão.

Suponha que temos uma rotina ACH que decide a existência de ciclo hamiltoniano em um grafo:

Subrotina ACH(G)
ACH(G) devolve 1, se G possui ciclo hamiltoniano
ACH(G) devolve 0, caso contrário.

Ideia: Se $G - e$ possui ciclo hamiltoniano, descarte e

Redução para Problemas de Decisão

Algoritmo BuscaCH(G) $\#$ Devolve ciclo hamiltoniano de G, se existir

1. Se ACH(G)=0 devolva $\emptyset$
2. Senão
3. Para todo $e \in E$ faça
4. Se $\text{ACH}(G - e) = 1$ então remova e de G.
5. Devolva G

Se um problema Π_1 é redutível polinomialmente a um problema Π_2 e vice-versa, dizemos que Π_1 é polinomialmente equivalente a Π_2.

Teorema

Os problemas CH e D-CH são polinomialmente equivalentes

Problemas de Otimização para Decisão

Problemas de otimização: buscamos por

- estruturas que respeitam certas propriedades e
- possuem o *melhor* valor dentre elas.

Podem ser de minimização ou de maximização:

- Problemas de minimização: buscamos estruturas de valor mínimo.
- Problemas de maximização: buscamos estruturas de valor máximo.

Forma padrão para construir versão de decisão: Inclusão de parâmetro K

- Problemas de minimização: Decidir se há estrutura de valor $\leq K$
- Problemas de maximização: Decidir se há estrutura de valor $\geq K$

Problemas de Otimização para Decisão

Exemplo

Problema (do Caminho Mínimo (CM))

Dado grafo $G = (V, E)$ e dois vértices $s, t \in V$, encontrar um caminho mais curto entre s e t em G.

Problema (de Decisão do Caminho Mínimo (D-CM))

Dado grafo $G = (V, E)$, dois vértices $s, t \in V$ e um inteiro K, decidir se há caminho de s a t em G de comprimento no máximo K.

Exercício: Faça uma redução de Turing em tempo polinomial do Problema de Encontrar um Caminho Mais Curto para o Problema de Decisão do Caminho Mínimo.

Reduções

Redução de P_1 para P_2 é interessante para:

- Resolver P_1 quando já temos a resposta para P_2.
- Transferir a "dificuldade" de P_1 para P_2, caso as transformações envolvidas sejam suficientemente rápidas.

Codificação de Problemas

- Instâncias são codificadas por strings de bits.
- $|I|$: Tamanho de I - número de bits da string que codifica I.
- Complexidade é definida em relação ao tamanho $|I|$.

Exemplo: Considere algoritmo A e instância I dada por um inteiro k, e A tem complexidade $O(k)$.

- Se usarmos a codificação unária: o número k é codificado com k uns e A tem complexidade de tempo linear
- Se usarmos a codificação binária: o número k é codificado com $n = \lceil \log_2 k \rceil$ bits e A tem complexidade de tempo exponencial $(k = O(2^n))$.

- Na prática não consideramos codificações "caras" como a unária.
- Utilizaremos codificações "baratas"/compactas, como a binária.

Codificação de Problemas

Codificações com outras bases fixas (como ternária, decimal,...) também funcionam.

Exemplo:

- Um inteiro N na base 2 gasta $n = \lceil \log_2 N \rceil$ bits e na base 3 gasta $n' = \lceil \log_3 N \rceil$ bits
- Como $\log_2 N = \frac{\log_3 N}{\log_3 2}$
- Mudança para codificação ternária difere por um fator constante.

Assumiremos base binária.

Exercício: Anteriormente, vimos um algoritmo por PD para o Problema da Mochila com dados inteiros e complexidade $O(nK)$, onde n é o número de itens e K a capacidade da mochila. Comente a complexidade computacional deste algoritmo supondo codificação compacta para representar seus dados.

Linguagens Formais

Podemos representar os problemas de decisão por linguagens formais.

Notação:

- Alfabeto Σ: conjunto finito de símbolos
- *Linguagem sobre* Σ: Conjunto de strings formadas com símbolos de Σ
- ε: String vazia
- $\emptyset$: Linguagem vazia
- Σ^*: Linguagem com todas possíveis strings sobre Σ

Exemplo

Se $\Sigma = \{0, 1\}$ *então* $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\}$

Linguagens Formais

- Operações usuais sobre linguagens: $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$
- $\overline{L}$: Complemento de uma linguagem L, dada por
$$\overline{L} = \Sigma^* - L$$
- L_1L_2: Concatenação de linguagens L_1 e L_2 é dada pela linguagem
$$L_1L_2 = \{x_1x_2 : x_1 \in L_1 \text{ e } x_2 \in L2\}$$
- L^i: Concatenação da linguagem L, i vezes.
- L^*: Fecho de uma linguagem é dada por
$$L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \cup \dots$$

Linguagens Formais

Dado problema de decisão Π

- Assumiremos $\Sigma = \{0, 1\}$.
- Σ^* corresponde a todas possíveis instâncias de Π.
- Π mapeia instâncias de Σ^* para $\{0, 1\}$ (se resposta *sim* ou *não*).
- Assumiremos que Π é a linguagem:

$$\Pi = \{x \in \Sigma^* : \Pi(x) = 1\}$$

I.e., Π é a linguagem composta das instâncias cuja solução é *sim*.

Linguagens Formais

Problema (PATH)

$$\text{PATH} = \{\langle G, u, v, k\rangle : \begin{array}{l} G = (V, E) \textit{ é um grafo} \\ u, v \in V, \\ k \geq 0 \textit{ inteiro} \\ \exists \textit{ caminho de } u \textit{ a } v \textit{ em } G \textit{ de tamanho } \leq k \end{array}\}$$

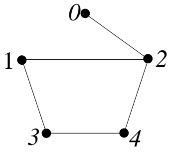
Notação: $\langle I \rangle$ é a string, em bits, que codifica I.

Linguagens Formais

Possível codificação para entradas em PATH:

- T: Sequência de 0's terminando em 1 (número de bits dos números)
- Grafo $G = (V, E)$ codificado como:
  - $|V|$: Número de vértices (V é conjunto de inteiros começando do 0)
  - $|E|$: Número de arestas (pares de vértices)
  - E: Sequência das arestas
- Vértices u e v (origem e destino do caminho)
- k (tamanho máximo do caminho)

Exemplo de $x = \langle G, u, v, k\rangle \in \mathrm{PATH}$:



$$x = \underbrace{001}_{\mathrm{T}}\underbrace{\underbrace{101}_{|\mathrm{V}|}\underbrace{101}_{|\mathrm{E}|}\underbrace{000010}_{(0,2)}\underbrace{001010}_{(1,2)}\underbrace{001011}_{(1,3)}\underbrace{010100}_{(2,4)}\underbrace{011100}_{(3,4)}}_{\mathrm{G}}\underbrace{000}_{\substack{0\\ \shortparallel\\ u}}\underbrace{011}_{\substack{3\\ \shortparallel\\ v}}\underbrace{011}_{\substack{3\\ \shortparallel\\ k}}$$

Linguagens Formais

Dado algoritmo A e $x \in \Sigma^*$ escrevemos

- $A(x) = 1$ se A aceita x
- $A(x) = 0$ se A rejeita x

A linguagem aceita por A é

$$L = \{x \in \Sigma^* : A(x) = 1\}$$

Dizemos que A aceita uma linguagem L se

- $A(x) = 1$ para todo $x \in L$;
- $A(x) \neq 1$ para todo $x \notin L$ (o algoritmo pode não parar).

Dizemos que A decide uma linguagem L se

- $A(x) = 1$ para todo $x \in L$
- $A(x) = 0$ para todo $x \notin L$.

Linguagens Formais

A aceita linguagem L em tempo polinomial se

- A aceita L
- $A(x)$ executa em tempo polinomial $\forall x \in L$

A decide linguagem L em tempo polinomial se

- A decide L
- $A(x)$ executa em tempo polinomial $\forall x \in \Sigma^*$

Definição (Classe P)

$P = \{L \subseteq \Sigma^* : \ \textit{existe um algoritmo } A \textit{ que decide } L \textit{ em tempo polinomial}\}$

Linguagens Formais

Teorema

$P = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ é aceita por um algoritmo polinomial}\}$

Prova.

$\subseteq$ Seja $L \in P$.
Por definição, existe algoritmo A de tempo polinomial que decide L. Então, A também aceita L.

$\supseteq$ Seja L uma linguagem aceita por um algoritmo A em tempo polinomial $p(n)$.
Construa um algoritmo A' que decide L em tempo $O(p(n))$:
Seja $x \in L$ e $n = |x|$. Temos que o $A(x)$ executa em $p(n)$ passos. O algoritmo A' emula A executando os mesmos passos.
Se A aceitou x dentro do tempo $p(n)$, A' aceita x.
Caso contrário, A' rejeita x.

□

Verificação por Certificados em Tempo Polinomial

Certificados: estruturas que *certificam* que uma entrada tem resposta SIM

Exemplo: Considere a linguagem (problema de decisão) do Ciclo Hamiltoniano

$$\text{HAM-CYCLE} = \{\langle G \rangle : \ G \text{ é um grafo hamiltoniano.}\}$$

Para todo grafo G tal que $\langle G \rangle \in \text{HAM-CYCLE}$

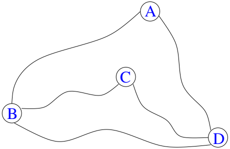
- Existe um ciclo hamiltoniano (certificado) S em G
- Podemos ter algoritmo que *verifica* que S é de fato ciclo hamiltoniano
- Esta verificação pode ser feita em tempo polinomial

Verificação por Certificados em Tempo Polinomial

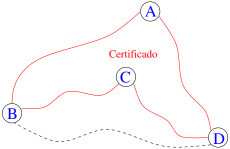
Exemplo: Considere

- Grafo $G = (V, E)$ e $x = \langle G \rangle$.
- Permutação de vértices S que é ciclo hamiltoniano em G e $y = \langle S \rangle$.

Entrada $x = \langle G \rangle$



Certificado: $y = \langle A, B, C, D \rangle$



Podemos ter algoritmo de tempo polinomial A que verifica que S é de fato ciclo hamiltoniano de G:

- Verifica que S é permutação de V
- Verifica ter aresta em G entre cada par de vértices consecutivos de S
- Verifica ter aresta em G ligando os extremos de S

Verificação por Certificados em Tempo Polinomial

Algoritmo de verificação A:
A tem dois argumentos: x (entrada) e y (possível certificado).

A verifica a entrada x se há certificado y tal que $A(x, y) = 1$.

Linguagem verificada por A é

$$L = \{x \in \{0,1\}^* : \text{ existe } y \in \{0,1\}^* \text{ tal que } A(x, y) = 1\}.$$

- Se $x \in L$ então existe certificado y tal que $A(x, y) = 1$.
- Se $x \notin L$ então para todo y temos $A(x, y) \neq 1$.

Se A é de tempo polinomial e y tem tamanho polinomial em relação a x,
A verifica L em tempo polinomial

Verificação por Certificados em Tempo Polinomial

Exemplo: Considere a linguagem dos grafos hamiltonianos

$$\text{HAM-CYCLE} = \{\langle G \rangle : \; G \text{ é um grafo hamiltoniano.}\}$$

Considere um algoritmo A com dois argumentos x e y, tal que

- y (certificado) tem tamanho polinomial em relação a x (entrada)
- $A(x, y)$ devolve 0 se x não codifica um grafo G
- $A(x, y)$ devolve 0 se y não codifica um ciclo hamiltoniano de G
- $A(x, y)$ devolve 1 se y codifica ciclo hamiltoniano de G
- $A(x, y)$ executa em tempo polinomial

Então, A verifica HAM-CYCLE em tempo polinomial.

Classe NP

- NP se refere a Não-determinístico Polinomial (baseada no modelo computacional não-determinístico)
- Usaremos a definição através de certificados

Definição (Classe NP)

$\mathrm{NP} = \{L \subseteq \Sigma^* : L \textit{ é verificada por um algoritmo de tempo polinomial}\}$

Isto é, $L \in \mathrm{NP}$ se e somente se existe algoritmo A de tempo polinomial e constante c tal que

$$L = \{x \in \Sigma^* : \text{ existe certificado } y \text{ tal que } |y| = O(|x|^c) \text{ e } A(x,y) = 1\}$$

A classe NP é gigantesca:

- Contém muitos problemas de decisão associados a busca/otimização
- Em geral, o certificado é a própria solução do problema de busca
- Para estar em NP, basta verificar o certificado eficientemente

Classe NP

Exemplo: Considere a linguagem dos grafos hamiltonianos CH.

$$\mathrm{CH} = \{\langle G \rangle : \ G \text{ é um grafo hamiltoniano.}\}$$

Vimos que para todo grafo G

- Se G é hamiltoniano, existe certificado S tal que
- S é ciclo hamiltoniano e tem tamanho polinomial
- há algoritmo A que verifica S em tempo polinomial:
  $A(x, y) = 1$, para $x = \langle G \rangle$ e $y = \langle S \rangle$
  $A(x, y) = 0$, para todo $x \notin \mathrm{CH}$ e $y \in \Sigma^*$.

Lema

A linguagem dos grafos hamiltonianos pertence a NP *(*$\mathrm{CH} \in \mathrm{NP}$*).*

Classe NP

Lema

$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.

Prova. (esboço)

- Seja $L \in \mathrm{P} \Rightarrow$ Existe algoritmo A que decide L em tempo polinomial
- Seja A' o seguinte algoritmo

  Algoritmo $A'(x, y)$, para $x, y \in \Sigma^*$
  1. Devolva $A(x)$ # o algoritmo ignora y.

- A' executa em tempo polinomial
- $A'(x, y)$, para $y = \varepsilon$, verifica corretamente em tempo polinomial.
- Portanto $L \in \mathrm{NP}$.

Com isso $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$ □

Prêmio de 1 Milhão de dólares: $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$?

Classe $\mathrm{co\text{-}NP}$

Classe dos problemas com *certificado curto* e *verificável eficientemente* para a resposta NÃO.

Definição (Classe $\mathrm{co\text{-}NP}$)

$$\mathrm{co\text{-}NP} = \{L \subseteq \Sigma^* : \overline{L} \in \mathrm{NP}\}$$

I.e., para cada $x \notin L$, existe

- Algoritmo verificador A de tempo polinomial;
- Certificado y de tamanho polinomial em x

tal que $A(x, y) = 1$.

Exemplo: Considere a linguagem dos grafos não-hamiltonianos (NH)

$$\mathrm{NH} = \{\langle G \rangle : \ G \text{ não é um grafo hamiltoniano.}\}$$

Lema

$\mathrm{NH} \in \mathrm{co\text{-}NP}$.

Problema em aberto (há várias décadas): $\mathrm{co\text{-}NP} = \mathrm{NP}$?

Classe co-NP

Exemplo: Considere a linguagem dos números primos:

$$\text{Primo} = \{\langle n \rangle : \ n \text{ é um número primo.}\}$$

Lema

$\text{Primo} \in \text{co-NP}$.

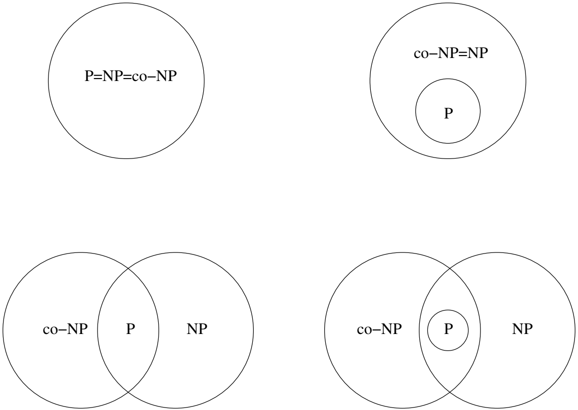
- Seja $x \notin \text{Primo}$.
- Se $x \notin \text{Primo}$, então é composto e há y que divide x com $1 < y < x$.
- y é um certificado que $x \notin \text{Primo}$ (y é um divisor de x).
- y tem tamanho polinomial (de fato linear, pois $|\langle y \rangle| \leq |\langle x \rangle|$).
- Um algoritmo verificador só teria que dividir x por y para verificar que $x \notin \text{Primo}$
- Tal algoritmo verificador pode ser implementado em tempo polinomial.

Classes de Complexidade

$$\begin{array}{rll}
\mathrm{P} & = \{L \subseteq \Sigma^* : & \text{existe alg. pol. } A \text{ que decide L}\} \\[2ex]
\mathrm{NP} & = \{L \subseteq \Sigma^* : & \text{existe alg. pol. } A \text{ que verifica } L\text{, ou seja,} \\
 & & \text{para cada } x \in L \text{ existe } y \in \Sigma^* \text{ de tam. pol.} \\
 & & \text{tal que A(x,y)=1 } \} \\[2ex]
\text{co-NP} & = \{L \subseteq \Sigma^* : & \text{existe alg. pol. } A \text{ que verifica } \overline{L}\text{, ou seja,} \\
 & & \text{para cada } x \notin L \text{ existe } y \in \Sigma^* \text{ de tam. pol.} \\
 & & \text{tal que A(x,y)=1}\}
\end{array}$$

Classes de Complexidade

Possíveis configurações das classes P, NP e $\mathrm{co\text{-}NP}$:



NP-Completude e Reduções de Tempo Polinomial

Um dos principais motivos que se acredita que $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$

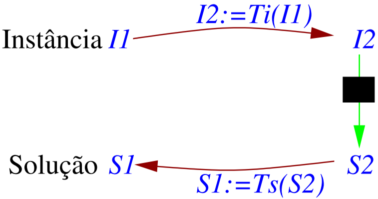
- Sabemos que a classe NP é gigantesca!
- Mas um subconjunto de problemas $\mathrm{NP\text{-}Completo} \subseteq \mathrm{NP}$ concentra toda a dificuldade de NP.
- Se um problema de $\mathrm{NP\text{-}Completo}$ é resolvido eficientemente, todos de NP também são.

A Classe $\mathrm{NP\text{-}Completo}$ será definida através de reduções (de Karp)

NP-Completude e Reduções de Tempo Polinomial

Reduções de Karp: P_1 é redutível polinomialmente a P_2 ($P_1 \leq P_2$) se

- $\exists$ *Ti* que transforma instância I_1 de P_1 para instância I_2 de P_2
- $\exists$ *Ts* que transforma solução S_2 de I_2 para solução S_1 de I_1
- *Ti* e *Ts* têm complexidade de tempo polinomial



NP-Completude e Reduções de Tempo Polinomial

Para problemas de decisão / linguagens, simplificamos:

Linguagem L_1 é *redutível polinomialmente* à linguagem L_2,

- denotado por $L_1 \leq_{\mathrm{P}} L_2$, se
- existe função f computável
- em tempo polinomial tal que

$$x \in L_1 \text{ se e somente se } f(x) \in L_2 \quad \forall x \in \Sigma^*$$

- Isto é, ao respondermos se $f(x) \in L_2$ temos a resposta se $x \in L_1$.

NP-Completude e Reduções de Tempo Polinomial

Lema

Se L_1 e L_2 são linguagens tal que $L_1 \leq_{\mathrm{P}} L_2$ e $L_2 \in \mathrm{P}$, então $L_1 \in P$.

Prova. Vamos mostrar que existe algoritmo A_1 que decide L_1.

- Se $L_2 \in P$ então existe algoritmo A_2 que decide L_2.
- Se $L_1 \leq_{\mathrm{P}} L_2$ então existe função f computável polinomialmente tal que
$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$$
- Seja A_1 o algoritmo tal que $A_1(x)$ devolve $A_2(f(x))$.
- Note que $x \in L_1$ se e somente se $A_1(x) = 1$, pois
$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2 \iff A_2(f(x)) = 1 \iff A_1(x) = 1$$

$\square$

NP-Completude e Reduções de Tempo Polinomial

Classe NP-Difícil:

Definição

Uma linguagem $L \subseteq \{0,1\}^*$ *pertence a* NP-Difícil *se:*

$$L' \leq_{\mathrm{P}} L \text{ para todo } L' \in \mathrm{NP}$$

Obs.: Uma linguagem em NP-Difícil não necessariamente está em NP.

Classe NP-Completo:

Definição

Uma linguagem $L \subseteq \{0,1\}^*$ *pertence a* NP-Completo *se:*

$$L \in \mathrm{NP} \cap \text{NP-Difícil}$$

NP-Completude e Reduções de Tempo Polinomial

Teorema

Se qualquer linguagem em NP-Completo *for decidida em tempo polinomial, então* $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Se alguma linguagem em NP *não puder ser decidida em tempo polinomial, então nenhuma linguagem em* NP-Completo *é decidível polinomialmente.*

Prova. [Segue do lema anterior]
Suponha que L é linguagem tal que $L \in \mathrm{P} \cap \mathrm{NP}$-Completo.

Para toda $L' \in \mathrm{NP}$, vamos mostrar que $L' \in \mathrm{P}$.

$L' \in \mathrm{NP} \Rightarrow L' \leq_{\mathrm{P}} L$ # pois
$L \in \mathrm{NP}$-Completo

$\Rightarrow \exists f : (x \in L' \iff f(x) \in L)$ # f eficiente

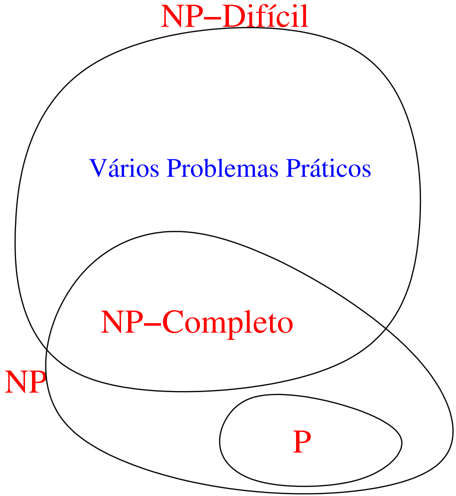
$\Rightarrow \exists A : (x \in L' \iff A(f(x)) = 1)$ # $L \in P$ e A eficiente

$\Rightarrow L' \in \mathrm{P}$.

O outro caso é a contrapositiva. □

NP-Completude e Reduções de Tempo Polinomial

Como acredita-se que seja a relação das classes:



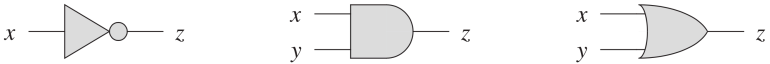
Problema CIRCUIT-SAT

Portas Lógicas e Operadores Lógicos:

(a) NOT denotado por $\neg$.

(b) AND denotado por $\wedge$.

(c) OR denotado por $\vee$.



x	$\neg x$
0	1
1	0

(a)

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(b)

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(c)

Na figura, x e y são fios de entrada e z o fio de saída da porta.
Resultado de cada porta depende dos fios de entrada conforme tabelas

Problema CIRCUIT-SAT

Circuito Combinatorial Lógico: composto por portas lógicas e fios

- Fios podem ser de

  ligação: conectam a saída de um porta com a entrada de outra (transferem valores da saída de uma porta para a entrada de outra).

  entrada: tem uma extremidade livre e ligam na entrada de uma porta (recebem valor externo e repassam para a entrada de uma porta)

  saída: conectam a saída de uma porta e tem uma extremidade livre (resultado do circuito)

Circuito Combinatorial Lógico

- Possuem pelo menos um fio de entrada
- Possuem exatamente um fio de saída (na prática podem ter mais)
- São acíclicos (uma porta nunca depende do seu próprio resultado)

Problema CIRCUIT-SAT

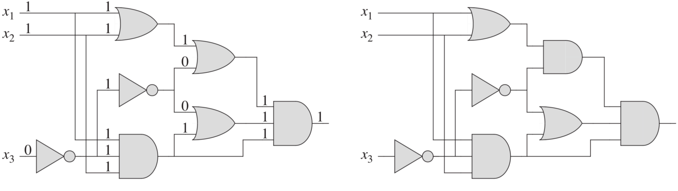
Definição. Seja C um circuito combinatorial lógico.

Uma atribuição para C é uma atribuição 0 ou 1 para seus fios de entrada

Uma atribuição verdadeira para C é uma atribuição que resulta em saída 1

C é satisfazível se possui atribuição verdadeira

Exemplo [CLRS'09]:



(a) (b)

O circuito (a) é satisfazível e o circuito (b) não é.

Exercício: Apresente um algoritmo com complexidade de tempo $O(2^n(n+m))$ que diz se um circuito é satisfazível ou não, onde n é o número de portas e m o número de ligações.

Problema CIRCUIT-SAT

A linguagem que contempla os circuitos satisfatíveis é dado por

$\text{CIRCUIT-SAT} = \{\langle C \rangle : C \text{ é um circuito combinatorial lógico satisfazível}\}$

Lema

$\text{CIRCUIT-SAT} \in \text{NP}$.

Prova.

- Se $x \in \text{CIRCUIT-SAT}$, então existe atribuição verdadeira y para x (o certificado é a própria atribuição verdadeira y.)

  Algoritmo $A(x, y)$ - esboço

  1. Faça ordenação topológica das portas (em tempo linear)
  2. Simule/percorra o circuito x em tempo linear com a entrada y.
  3. Devolva o resultado do circuito.

- Se $x \notin \text{CIRCUIT-SAT}$, não há atribuição que resulte em saída 1 (neste caso, $A(x, y) = 0$ para qualquer y.)

□

Problema CIRCUIT-SAT

Lema

CIRCUIT-SAT $\in$ NP-Difícil.

- Prova possui detalhes técnicos que fogem ao escopo do curso.
- Daremos um esboço da prova deste lema posteriormente,
- considerando conhecimento do hardware de um computador.

Dos dois lemas anteriores, segue que

Teorema

CIRCUIT-SAT $\in$ NP-Completo.

Problema CIRCUIT-SAT

Temos nosso primeiro problema NP-Completo:

$$\text{CIRCUIT-SAT} \in \text{NP-Completo}$$

Agora, para provar que $L \in \text{NP}$ é NP-Completo, temos duas opções:

(A) Provar que $\text{CIRCUIT-SAT} \leq_{\text{P}} L$ ou

(B) Provar que para todo $L' \in \text{NP}$ temos $L' \leq_{\text{P}} L$

Seguiremos pela opção (A).

NP-Completude

De maneira geral: Para provar que $L \in \mathrm{NP\text{-}Completo}$ fazemos

1. Prove que $L \in \mathrm{NP}$
2. Selecione um problema $L_{\mathrm{NPC}} \in \mathrm{NP\text{-}Completo}$ (mais próximo de L)
3. Prove que $L_{\mathrm{NPC}} \leq_{\mathrm{P}} L$
   1. Apresente algoritmo f que transforma entrada de L_{NPC} para L
   2. Prove que $x \in L_{\mathrm{NPC}}$ se e somente se $f(x) \in L$, para todo x
   3. Prove que f executa em tempo polinomial

NP-Completude

Lema

Seja L uma linguagem. Se

- *existe $L_{\text{NPC}} \in$ NP-Completo e*
- $L_{\text{NPC}} \leq_{\text{P}} L$

então $L \in \text{NP-Difícil}$.

Se além disso, $L \in \text{NP}$ então $L \in \text{NP-Completo}$.

Prova. Como L_{NPC} é NP-Completo, então

- para todo $L' \in \text{NP}$ temos $L' \leq_{\text{P}} L_{\text{NPC}}$.
- Como $L_{\text{NPC}} \leq_{\text{P}} L$ então (exercício) $L' \leq_{\text{P}} L$ para todo $L' \in \text{NP}$.
- Portanto $L \in \text{NP-Difícil}$

Se além disso $L \in \text{NP}$, por definição, temos $L \in \text{NP-Completo}$ □

Problema SAT

Entrada:

Fórmula lógica $\phi(x_1, \ldots, x_n)$
com variáveis lógicas $x_1, \ldots, x_n$, operadores lógicos, parênteses
sem quantificadores

Pergunta:

Existe atribuição de valores $0/1$ às variáveis $x_1, \ldots, x_n$
de maneira a tornar ϕ verdadeira?

Operadores

1. AND ($\wedge$).
2. OR ($\vee$).
3. NOT ($\neg$).
4. Implicação ($\rightarrow$).
5. Se e Somente Se ($\leftrightarrow$).

Problema SAT

Operadores Lógicos

x	$\neg x$
0	1
1	0

Tabela verdade do operador unário $\neg$

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Tabela verdade dos operadores binários $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

Problema SAT

Exemplo: $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$
Atribuição: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$

$$
\begin{aligned}
f &= ((0 \rightarrow 0) \vee \neg((\neg 0 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge \neg 0 \\
&= (\quad 1 \quad \vee \neg((\ 1 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge \ 1 \\
&= (\quad 1 \quad \vee \neg(\quad 1 \quad \vee 1)) \wedge \ 1 \\
&= (\quad 1 \quad \vee \neg(\quad 1 \quad)) \wedge \ 1 \\
&= (\quad 1 \quad \vee \quad 0 \quad) \wedge \ 1 \\
&= (\quad 1 \quad) \wedge \ 1 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Definição

Dada fórmula $f(x_1, \ldots, x_n)$, dizemos que f é satisfazível se existe atribuição $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \{0, 1\}^n$ tal que $f(y) = 1$.

Problema SAT

Linguagem que contempla fórmulas que admitem atribuição verdadeira

$$\mathrm{SAT} = \{\langle f \rangle : f \text{ é satisfazível}\}$$

Lema

$\mathrm{SAT} \in \mathrm{NP}$.

Prova.

- Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ fórmula do SAT que é satisfazível.
- Então, existe atribuição $y = (y_1, \ldots, y_n)$ para $(x_1, \ldots, x_n)$, onde $y_i \in \{0, 1\}$, tal que $f(y) = 1$.
- y é o certificado e
- é possível implementar verificador eficiente que testa se $f(y) = 1$ (exercício).

□

Problema SAT

Lema

SAT $\in$ NP-Difícil.

Prova.

Vamos mostrar que CIRCUIT-SAT $\leq_{\mathrm{P}}$ SAT. Para isso

mostraremos algoritmo T que transforma circuitos em fórmulas tal que

- $C \in$ CIRCUIT-SAT se e somente se $T(C) \in$ SAT, $\forall$ circuito C
- T executa em tempo polinomial.

A seguir, apresentamos alguns passos do algoritmo T.

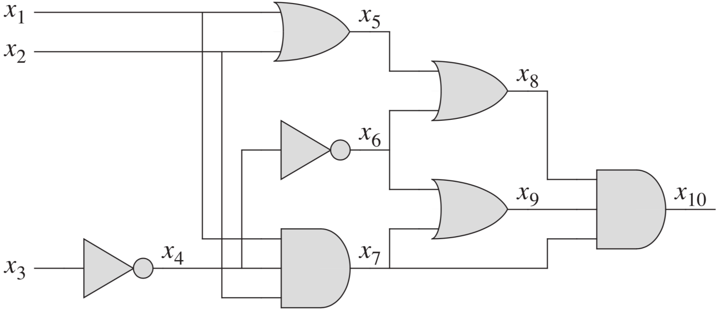
Problema SAT

Continuação da Prova.

Seja C um circuito combinatorial lógico.

Criamos uma variável x_i para cada fio i de C

Exemplo [CLRS'09]:



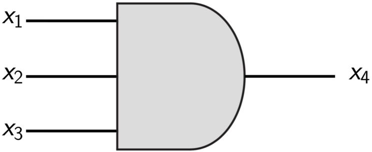
Problema SAT

Continuação da Prova.

Seja x_i a variável/fio resultante da porta lógica i. Geramos cláusula c_i:

- obtenha fórmula ϕ_i que computa a saída de i pelos fios de entrada
- obtenha fórmula c_i que força equivalência de x_i com ϕ_i

Exemplo:



$$c_4 = (x_4 \leftrightarrow (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3))$$

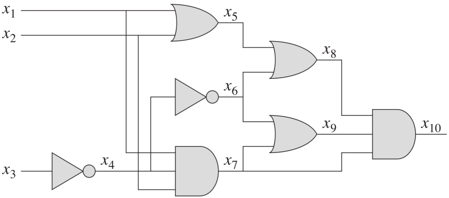
Com isso, x_4 terá o valor igual a saída da porta lógica correspondente.

Problema SAT

Continuação da Prova. A fórmula final é obtida

- Fazendo conjunção das fórmulas/cláusulas c_i's, para cada porta i, e
- com a saída do circuito (correspondência com circuitos satisfatíveis)

Exemplo [CLRS'09]:



$$
\begin{aligned}
f = x_{10} \quad & \wedge \quad (x_4 \leftrightarrow (\neg x_3)) \\
& \wedge \quad (x_5 \leftrightarrow (x_1 \vee x_2)) \\
& \wedge \quad (x_6 \leftrightarrow (\neg x_4)) \\
& \wedge \quad (x_7 \leftrightarrow (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4)) \\
& \wedge \quad (x_8 \leftrightarrow (x_5 \vee x_6)) \\
& \wedge \quad (x_9 \leftrightarrow (x_6 \vee x_7)) \\
& \wedge \quad (x_{10} \leftrightarrow (x_7 \wedge x_8 \wedge x_9))
\end{aligned}
$$

Problema SAT

Continuação da Prova.

- O algoritmo que produz a fórmula é de tempo polinomial (exercício)
- Dado circuito C seja f a fórmula obtida pelo algoritmo

- Se C é satisfazível, existe atribuição dos fios de entrada que resulta em 1:
- Atribua o valor do fio i para a correspondente variável x_i
- A cláusula c_i garante valor correto para saída da porta i
- A conjunção com variável do fio resultante garante que f é verdadeira
- e com isso temos que f é satisfeita

- Se f é satisfazível –de maneira análoga– temos C satisfazível □

Teorema

SAT $\in$ NP-Completo.

Prova. Segue dos dois lemas anteriores. □

Problema 3-CNF-SAT

Definição (fórmula em CNF)

Uma fórmula ϕ está na forma CNF (forma normal conjuntiva) *se*

- *ϕ pode ser expressa como uma conjunção ($\wedge$) de cláusulas, onde*
- *uma cláusula é uma disjunção ($\vee$) de uma ou mais literais, e*
- *uma literal é uma variável ou sua negação.*

Exemplo:[Fórmula em CNF]

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3).$$

Problema 3-CNF-SAT

Definição (fórmula em 3-CNF-SAT)

Uma fórmula ϕ está em 3-CNF se

- *ϕ está na forma CNF e*
- *cada cláusula possui exatamente 3 literais distintas.*

Exemplo:[Fórmula em 3-CNF-SAT]

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3).$$

Problema 3-CNF-SAT

Problema (3-CNF-SAT)

Dada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ em 3-CNF, decidir se existe atribuição para as variáveis de maneira a tornar ϕ verdadeira.

Em termos de linguagem:

$$3\text{-CNF-SAT} = \{\langle f \rangle : f \text{ é fórmula em } 3\text{-CNF satisfazível}\}$$

Lema

$3\text{-CNF-SAT} \in \mathrm{NP}$.

Prova. Exercício. $\square$

Problema 3-CNF-SAT

Lema

3-CNF-SAT $\in$ NP-Difícil.

Prova. Vamos mostrar que SAT $\leq_{\mathrm{P}}$ 3-CNF-SAT.

Dada fórmula f_{SAT} para CNF vamos construir em tempo polinomial fórmula $f_{3\mathrm{CNF}}$ para 3-CNF-SAT tal que

$$f_{\mathrm{SAT}} \in \mathrm{SAT} \text{ se e somente se } f_{3\mathrm{CNF}} \in \text{3-CNF-SAT}$$

$f_{3\mathrm{CNF}}$ será construída em três etapas de transformação equivalentes.

- T1: f_{SAT} é transformada em fórmula f_{T1} que é conjunção de cláusulas, cada cláusula contém no máximo 3 variáveis.
- T2: Cada cláusula de f_{T1} é substituida por conjunção de cláusulas na forma CNF, obtendo f_{T2}
- T3: Cada cláusula de f_{T2} é substituída por conjunção de cláusulas com exatamente 3 variáveis cada, obtendo $f_{3\mathrm{CNF}}$.

Problema 3-CNF-SAT

Continuação da Prova: Transformação T1

A transformação $T1$ irá considerar uma árvore de avaliação:

Árvore de avaliação: Representação de fórmula lógica por árvore binária

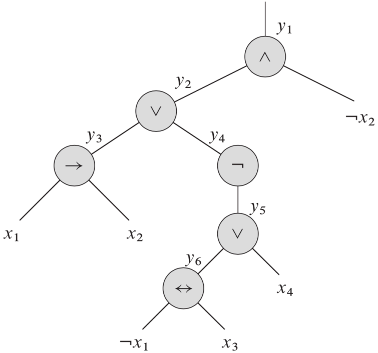
- Se N é nó folha, N representa fórmula de um literal dado por v_N
- Cada nó interno N tem um operador lógico f_N.
- Se $f_N = \neg$ então N tem um filho $N.dir$ e sua fórmula é dada por $\neg(expr(N.dir))$, onde $expr(N.dir)$ é a fórmula lógica do nó $N.dir$.
- Se f_N é op. binário, N tem nós filhos $N.esq$ e $N.dir$ e sua fórmula é dada por $((expr(N.esq))\ f_N\ (expr(N.dir)))$, onde $expr(N.esq)$ e $expr(N.dir)$ são as fórmulas lógicas de seus filhos da esquerda e direita, resp.
- A fórmula representada pela árvore é dada pela fórmula da raiz.

Problema 3-CNF-SAT

Continuação da Prova: Transformação T1

Dada fórmula f_{SAT}, construir sua árvore de avaliação $A(f_{\mathrm{SAT}})$.

Exemplo [CLRS'09]: $\phi = ((x_1 \to x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$



Fato

A árvore $A(f_{\mathrm{SAT}})$ de f_{SAT} pode ser construída em tempo polinomial (exercício).

Problema 3-CNF-SAT

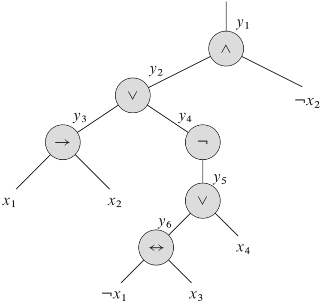
Continuação da Prova: Transformação T1

Podemos considerar a árvore $A(f_{\mathrm{SAT}})$ como um circuito que transformamos para uma fórmula f_{T1} (como na redução CIRCUIT-SAT $\leq_{\mathrm{P}}$ SAT)

- Cada fio que liga uma folha é representado pela respectiva literal
- Cada fio que liga nós internos é o resultado de um operador lógico
- O fio que representa o resultado da raiz é o resultado do circuito.

Exemplo [CLRS'09]:

$$\begin{aligned} f_{T1} = y_1 \quad & \wedge \quad (y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2)) \\ & \wedge \quad (y_2 \leftrightarrow (y_3 \vee y_4)) \\ & \wedge \quad (y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \\ & \wedge \quad (y_4 \leftrightarrow (\neg y_5)) \\ & \wedge \quad (y_5 \leftrightarrow (y_6 \vee x_4)) \\ & \wedge \quad (y_6 \leftrightarrow (\neg x_1 \leftrightarrow x_3)) \end{aligned}$$



Problema 3-CNF-SAT

Continuação da Prova: Transformação T1

Fato

A fórmula f_{T1} pode ser obtida de $A(f_{\mathrm{SAT}})$ em tempo polinomial (exercício).

Obs.: A fórmula f_{T1} é uma conjunção de cláusulas:

$$f_{T1} = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m,$$

t.q. cláusula c_i é a fórmula de equivalência associada ao nó (operador) i ou ao fio resultante do nó raiz.

Obs.: Cada cláusula c_i tem no máximo 3 variáveis, mas não necessariamente está na forma CNF.

Fato

f_{SAT} é satisfazível se e somente se f_{T1} é satisfazível (exercício).

Problema 3-CNF-SAT

Continuação da Prova: Transformação T2

T2: Substituimos cada cláusula c_i em f_{T1} por uma equivalente em CNF.

Algoritmo $T2$

1. Para cada cláusula c_i, construimos a tabela verdade com todos os valores possíveis de suas variáveis e o resultado para c_i.
2. Construimos a fórmula normal disjuntiva (disjunção de $\wedge$'s) das entradas com resultado 0.
3. Construimos a negação da fórmula anterior
4. Distribuimos a negação, aplicando a Lei DeMorgan e obtendo fórmula d_i em CNF

Problema 3-CNF-SAT

Continuação da Prova: Transformação T2

Exemplo [CLRS'09] Seja a cláusula $c_i = (y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2))$.

y_1	y_2	x_2	$(y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2))$
1	1	1	**0**
1	1	0	1
1	0	1	**0**
1	0	0	**0**
0	1	1	1
0	1	0	**0**
0	0	1	1
0	0	0	1

Construindo do jeito tradicional (pelas entradas 1's) obtemos fórmula em Forma Normal Disjuntiva (e queremos em Forma Normal Conjuntiva).

Então, vamos primeiro obter fórmula de $\neg c_i$ com entradas **0**'s e negar:

$$\neg c_i = (y_1 \wedge y_2 \wedge x_2) \vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge x_2) \vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge \neg x_2) \vee (\neg y_1 \wedge y_2 \wedge \neg x_2)$$

Problema 3-CNF-SAT

Continuação da Prova: Transformação T2

Para obter a fórmula c_i, é equivalente obter $\neg(\neg c_i)$.

$$
\begin{aligned}
c_i &= \neg(\neg c_i) \\
&= \neg\Big((y_1 \wedge y_2 \wedge x_2) \vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge x_2) \vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge \neg x_2) \vee (\neg y_1 \wedge y_2 \wedge \neg x_2) \Big) \\
&= \neg(y_1 \wedge y_2 \wedge x_2) \wedge \neg(y_1 \wedge \neg y_2 \wedge x_2) \wedge \neg(y_1 \wedge \neg y_2 \wedge \neg x_2) \wedge \neg(\neg y_1 \wedge y_2 \wedge \neg x_2) \\
&= (\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee \neg y_2 \vee x_2)
\end{aligned}
$$

Seja d_i a fórmula em CNF obtida de c_i.

Seja f_{T2} a conjunção das fórmulas d_i's.

Fato

f_{T1} é satisfazível se e somente se f_{T2} é satisfazível (exercício).

Problema 3-CNF-SAT

Continuação da Prova: Transformação T2

Fato

f_{T2} é obtida em tempo polinomial.

Prova. Seja c_i cláusula de f_{T1} que foi transformada em fórmula d_i em f_{T2}.

Como c_i tem no máximo 3 variáveis distintas, a tabela verdade usada para obter d_i tem no máximo 8 linhas (valor constante).

Portanto, d_i tem no máximo 8 cláusulas, cada uma com 3 literais.

Assim, d_i tem tamanho linear em relação a c_i. $\square$

Problema 3-CNF-SAT

Continuação da Prova: Transformação T3

f_{T2} é uma fórmula em CNF, dada por uma conjunção de cláusulas:

$$f_{T2} = e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$$

onde e_i é uma disjunção de literais.

Obs.: e_i tem no máximo 3 literais e está na forma CNF.

A transformação $T3$ troca cada cláusula e_i com menos que 3 literais para uma correspondente fórmula em CNF com 3 literais em cada cláusula.

Problema 3-CNF-SAT

Continuação da Prova: Transformação T3

Exemplo: Considere a cláusula com apenas uma literal: (x_1)
Podemos aumentar o número de literais por cláusula usando uma outra variável, digamos p:

$$(x_1) \text{ é satisfazível se e somente se } (x_1 \vee p) \wedge (x_1 \vee \neg p) \text{ é satisfazível.}$$

Exemplo: Considere a cláusula com duas literais: $(x_1 \vee x_2)$
Podemos aumentar o número de literais por cláusula usando outra variável, digamos q:

$$(x_1 \vee x_2) \text{ é satisfazível} \quad \leftrightarrow \quad (x_1 \vee x_2 \vee q) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg q) \text{ é satisfazível.}$$

Podemos usar
variável p para aumentar cada cláusula com uma para duas literais.
variável q para aumentar cada cláusula com duas para três literais
(e garantimos que cada cláusula final tem exatamente 3 literais)

Problema 3-CNF-SAT

Continuação da Prova: Transformação T3

Algoritmo $T3(f_{T2})$

1. $f \leftarrow f_{T2}$
2. Adicione mais duas variáveis lógicas, dadas por p e q em f
3. Enquanto f não é entrada válida para 3-CNF-SAT faça
4. Seja C cláusula com menos que 3 literais
5. Se C tem 1 literal, digamos ℓ, então
6. Troque C, em f, pela fórmula $(\ell \vee p) \wedge (\ell \vee \neg p)$
7. Se C tem 2 literais, digamos ℓ_1 e ℓ_2, então
8. Troque C, em f, pela fórmula $(\ell_1 \vee \ell_2 \vee q) \wedge (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \neg q)$
9. $f_{3\mathrm{CNF}} \leftarrow f$
10. Devolva $f_{3\mathrm{CNF}}$

Problema 3-CNF-SAT

Continuação da Prova: Transformação T3

Fato

- *$f_{3\mathrm{CNF}}$ é obtida em tempo polinomial.*
- *f_{T2} é satisfazível se e somente se $f_{3\mathrm{CNF}}$ é satisfazível.*

Prova. Seja C uma cláusula em f_{T2} com menos que 3 literais.

- O algoritmo $T3$ troca C por uma expressão equivalente com
- 8 cláusulas se C tem apenas uma literal, ou
- 4 cláusulas se C tem duas literais.
- Cada uma destas cláusulas finais tem exatamente 3 literais.

Assim, C foi trocada por expressão de tamanho linear em relação a C.

E $T3$ pode ser implementado para executar em tempo linear. □

Fim da prova do Lema: 3-CNF-SAT $\in$ NP-Difícil. □

Teorema

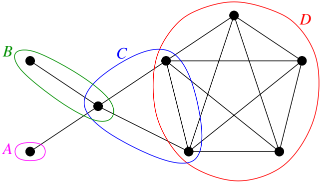
3-CNF-SAT $\in$ NP-Completo.

Problema CLIQUE

Definição

Dado grafo não-direcionado $G = (V, E)$, um conjunto de vértices $C \subseteq V$ é uma clique se qualquer par de vértices distintos de C estão conectados por aresta em E.
O tamanho da clique C é sua cardinalidade.

Exemplo:



Cada um dos conjuntos de vértices A, B, C e D forma uma clique.

Problema CLIQUE

Versão de Otimização:

Problema (MAX-CLIQUE)

Dado grafo não-direcionado $G = (V, E)$, encontrar clique $C \subseteq V$ de G de cardinalidade máxima.

Versão de Decisão/Linguagem: Usamos parâmetro k

$$\text{CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle : \; G \text{ é um grafo que possui uma clique de tamanho pelo menos } k\}$$

Lema

CLIQUE $\in$ NP

Prova. Exercício. □

Problema CLIQUE

Lema

CLIQUE $\in$ NP-Difícil

Prova.

Vamos fazer a redução 3-CNF-SAT $\leq_{\mathrm{P}}$ CLIQUE.

Seja f uma fórmula qualquer para 3-CNF-SAT.

Vamos construir grafo G e definir parâmetro k tal que

$$f \in \text{3-CNF-SAT} \text{ se e somente se } \langle G, k \rangle \in \text{CLIQUE}$$

Problema CLIQUE

Continuação da Prova.

Transformação de fórmula f para $\langle G, k \rangle$, com $k = m$

Seja $f = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ fórmula em 3-CNF.
Denote por ℓ_1^i, ℓ_2^i e ℓ_3^i as três literais da cláusula C_i.

O parâmetro k é igual ao número de cláusulas m.

O grafo $G = (V, E)$ é definido com:

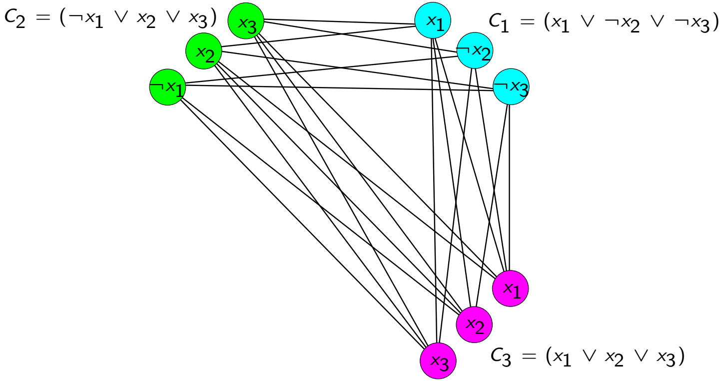
1. conjunto V de vértices formado por $3m$ vértices
   Para cada literal ℓ_j^i, defina um vértice v_j^i:
   $$V = \{v_j^i : \ i \in \{1, \ldots, k\} \ \text{ e } \ j \in \{1, 2, 3\}\}$$

2. conjunto E de arestas definido como
   $$E = \Big\{ \{u, v\} : \quad u \text{ e } v \text{ não vieram de literais da mesma cláusula e} \\ \text{a literal de } u \text{ não é a negação da literal de } v \Big\}$$

Problema CLIQUE

Continuação da Prova.

Exemplo da construção do grafo

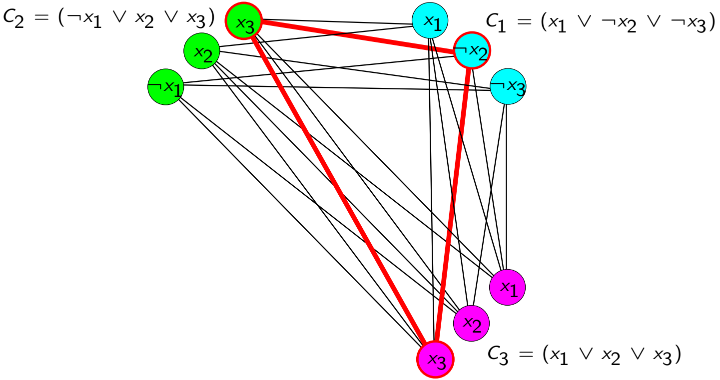


Grafo para fórmula $f = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$, onde
$C_1 = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$, $C_2 = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ e $C_3 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

Problema CLIQUE

Continuação da Prova.

Exemplo com clique



Grafo para fórmula $f = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$, onde
$C_1 = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$, $C_2 = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ e $C_3 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$
Clique em vermelho tem literais: $\{x_3, \neg x_2\}$

Problema CLIQUE

Continuação da Prova.

Fato. A construção de G é feita em tempo polinomial (exercício).

Vamos mostrar

$$f \in \text{3-CNF-SAT} \text{ se e somente se } \langle G, m \rangle \in \text{CLIQUE}$$

$(\Rightarrow)$: Considere $f \in \text{3-CNF-SAT}$

Se f é satisfeita, existe atribuição y tal que $f(y) = 1$ e y torna verdadeira pelo menos uma literal $\ell_i \in \{\ell_1^i, \ell_2^i, \ell_3^i\}$ de cada cláusula C_i.

Seja v_i o vértice correspondente a literal ℓ_i e $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Temos que C é uma clique de tamanho m, pois

- ℓ_i e ℓ_j ficam verdadeiras na atribuição y e
- v_i e v_j, por construção, possuem aresta ligando-os (só não há arestas entre literais que se complementam)

Portanto $\langle G, k \rangle \in \text{CLIQUE}$.

Problema CLIQUE

Continuação da Prova. $(\Leftarrow)$: Considere que $\langle G, m \rangle \in \text{CLIQUE}$

Se $\langle G, m \rangle \in \text{CLIQUE}$, existe clique $K = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de tamanho k em G, onde $v_i \in \{v_1^i, v_2^i, v_3^i\}$. Note que K possui um vértice de cada cláusula (pois não há arestas entre vs da mesma cláusula).

Seja $\ell_i \in \{\ell_1^i, \ell_2^i, \ell_3^i\}$ a correspondente literal de v_i.

Seja y atribuição das variáveis, fazendo literais $\ell_i = 1$, para $i = 1, \ldots, m$. (É possível fazer $\ell_i = 1$, pois não há atribuições de literais conflitantes) Complete a atribuição y atribuindo 0 para variáveis ainda sem atribuição.

Fato. Vale que $f(y) = 1$ (cada cláusula tem pelo menos 1 literal verdadeira)

Portanto $f \in \text{3-CNF-SAT}$.

Fim da prova do Lema: $\text{CLIQUE} \in \text{NP-Difícil}$. $\square$

Teorema

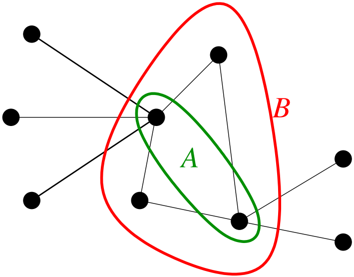
$\text{CLIQUE} \in \text{NP-Completo}$.

Problema VERTEX-COVER

Definição

Dado grafo não-direcionado $G = (V, E)$, um conjunto de vértices $C \subseteq V$ é uma cobertura por vértices se qualquer aresta $e \in E$ tem pelo menos uma das extremidades em C.
O tamanho da cobertura por vértices C é sua cardinalidade.

Exemplo:



Cada um dos conjuntos de vértices A e B forma cobertura por vértices.

Problema VERTEX-COVER

Versão de Otimização:

Problema (MIN-VERTEX-COVER)

Dado grafo não-direcionado $G = (V, E)$, encontrar cobertura por vértices $C \subseteq V$ de G de cardinalidade mínima.

Versão de Decisão/Linguagem: Usamos parâmetro k

$$\text{VERTEX-COVER} = \{\langle G, k\rangle : \; G \text{ é grafo que possui uma cobertura por vértices de tamanho no máximo } k\}$$

Lema

VERTEX-COVER $\in$ NP

Prova. Exercício. □

Problema VERTEX-COVER

Lema

VERTEX-COVER $\in$ NP-Difícil.

Prova.

Vamos fazer a redução CLIQUE $\leq_{\mathrm{P}}$ VERTEX-COVER.

- Dado um grafo $G = (V, E)$ compute seu complemento $\overline{G} = (V, \overline{E})$, onde $\overline{E} = \{\{u, v\} : \{u, v\} \notin E\}$.
- Vamos mostrar que

  G possui uma clique de tamanho k

  se e somente se

  $\overline{G}$ possui um cobertura por vértices de tamanho $|V| - k$.

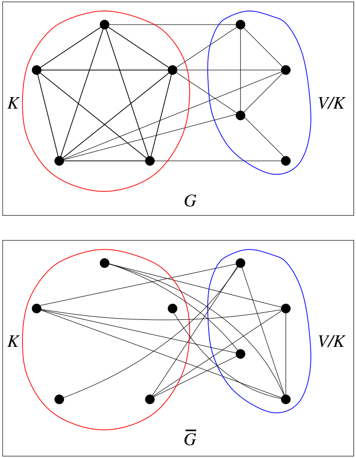
I.e. vamos mostrar que

$\langle G, k\rangle \in$ CLIQUE se e somente se $\langle \overline{G}, |V| - k\rangle \in$ VERTEX-COVER

Problema VERTEX-COVER

Continuação da Prova.

Exemplo: Redução de CLIQUE para VERTEX-COVER



Problema VERTEX-COVER

Continuação da Prova.

Fato. A construção de $\overline{G}$ é feita em tempo polinomial (exercício).

$(\Rightarrow)$: Considere $\langle G, k\rangle \in \mathrm{CLIQUE}$
I.e., $G = (V, E)$ possui uma clique $K \subseteq V$ tal que $|K| = k$.

Seja $C = V \setminus K$ e $\overline{G} = (V, \overline{E})$ o grafo complementar de G.
Vamos mostrar que C é cobertura em $\overline{G}$.

K é clique em G

$\Rightarrow$ Não há arestas entre vértices de K em $\overline{G}$

$\Rightarrow$ Todas arestas de $\overline{G}$ tem pelo menos uma extremidade em $C = V \setminus K$

$\Rightarrow$ C é cobertura em $\overline{G}$

Como $K = V \setminus C$ e $|K| = k$

$\Rightarrow |C| = |V| - |K|$

$\Rightarrow |C| = |V| - k$

Portanto $\langle \overline{G}, |V| - k\rangle \in \mathrm{VERTEX\text{-}COVER}$

Problema VERTEX-COVER

Continuação da Prova.

($\Leftarrow$): Considere $\langle \overline{G}, |V| - k \rangle \in \text{VERTEX-COVER}$

Seja $C \subseteq V$ cobertura de tamanho $|V| - k$ em $\overline{G}$.

Seja $K = V \setminus C$. Vamos mostrar que K é clique de tamanho k em G.

Se C é uma cobertura em $\overline{G}$

$\Rightarrow$ Toda aresta de $\overline{G}$ tem pelo menos uma extremidade em C

$\Rightarrow$ Não há arestas ligando vértices de $K = V \setminus C$ em $\overline{G}$

$\Rightarrow$ K é uma clique em G

Como $|C| = |V| - k$ e $K = V \setminus C$ temos que

$\Rightarrow |K| = |V| - |C| = |V| - (|V| - k)$

$\Rightarrow |K| = k$

Portanto $\langle G, k \rangle \in \text{CLIQUE}$

Fim da prova do Lema: $\text{VERTEX-COVER} \in \text{NP-Difícil}$. □

Teorema

$\text{VERTEX-COVER} \in \text{NP-Completo}$.

Problema HAM-CYCLE

Definição

Dado grafo $G = (V, E)$, um ciclo hamiltoniano em G é um ciclo que passa por cada vértice de V exatamente uma vez.

Definição

Um grafo G é hamiltoniano se G possui um ciclo hamiltoniano.

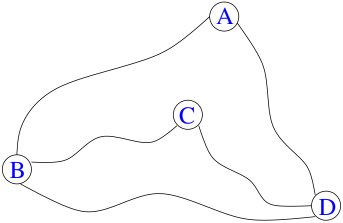
Problema HAM-CYCLE

- Entrada: Grafo $G = (V, E)$
- Pergunta: O grafo G é hamiltoniano?

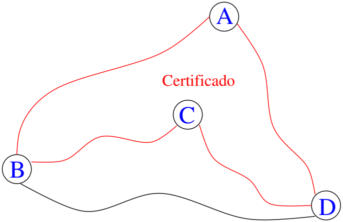
Problema HAM-CYCLE

Exemplo:

Entrada



Resposta: Sim!



Versão de Decisão/Linguagem:

$$\text{HAM-CYCLE} = \{\langle G \rangle : G \text{ é hamiltoniano}\}$$

Lema

HAM-CYCLE $\in$ NP

Prova. Exercício. ∎

Problema HAM-CYCLE

Lema

HAM-CYCLE $\in$ NP-Difícil.

Prova.

Vamos fazer a redução VERTEX-COVER $\leq_{\mathrm{P}}$ HAM-CYCLE.

- Dado entrada $\langle G, k\rangle$ para VERTEX-COVER vamos construir grafo G' para HAM-CYCLE tal que

G possui cobertura por vértices de tamanho k
se e somente se
G' é hamiltoniano.

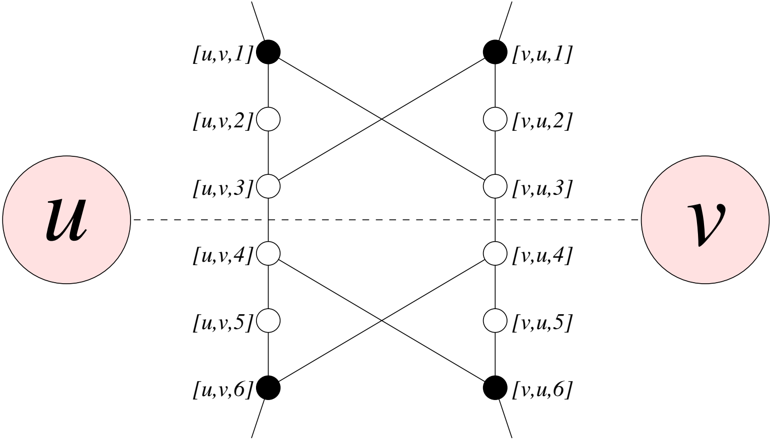
I.e. vamos mostrar que

$\langle G, k\rangle \in$ VERTEX-COVER se e somente se $\langle G'\rangle \in$ HAM-CYCLE

Problema HAM-CYCLE

Continuação da Prova. Widget $W_{u,v}$

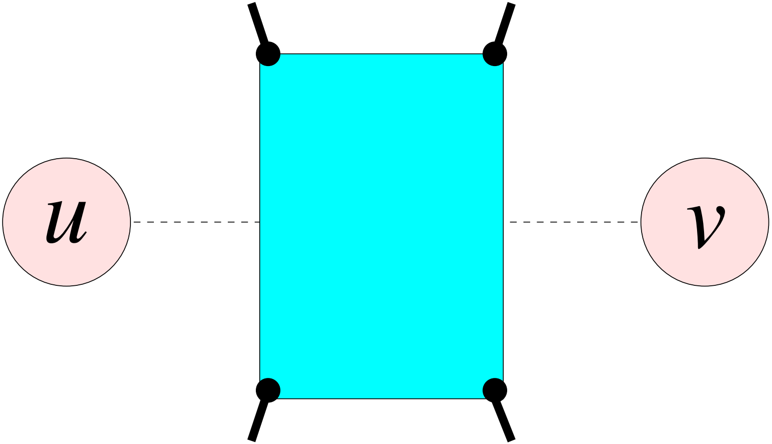
Vamos usar a estrutura (*widget*) W_{uv} em G' para cada $\{u, v\} \in E$ de G



Problema HAM-CYCLE

Continuação da Prova. Representação do Widget $W_{u,v}$

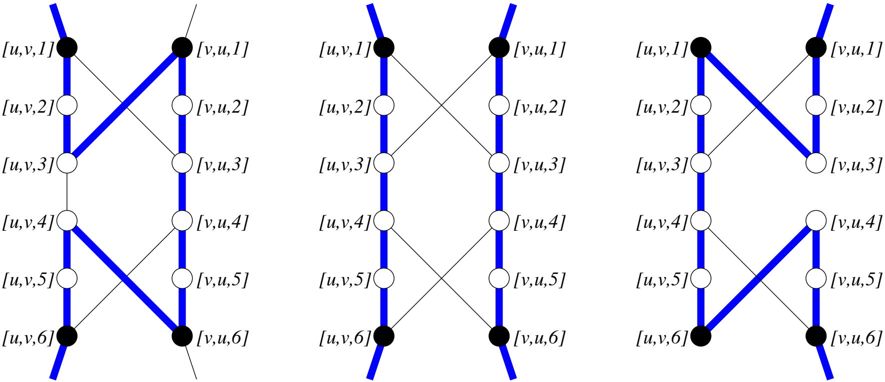
Vamos usar a estrutura (*widget*) W_{uv} em G' para cada $\{u, v\} \in E$ de G



Ciclo Hamiltoniano

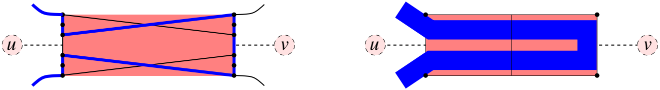
Apenas vértices $[u,v,1]$, $[u,v,6]$, $[v,u,1]$ e $[v,u,6]$ tem ligação p/ fora.

Fato. As únicas maneiras do circuito passar pelos vértices do widget são:

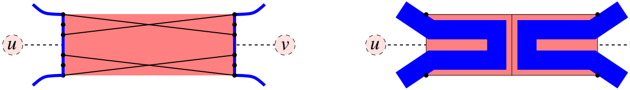


Problema HAM-CYCLE

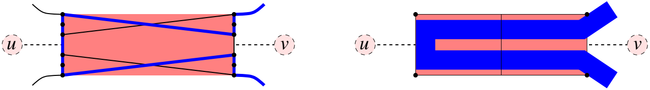
Continuação da Prova Representação simplificada do widget



(a) Entra por u, percorre widget e sai por u (e bloqueia uso do widget por v)



(b) Entra por u, percorre metade do widget e sai por u
entra por v, percorre metade do widget e sai por v



(c) Entra por v, percorre widget e sai por v (e bloqueia uso do widget por u)

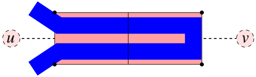
Possíveis configurações do C.H. ao passar por widget da aresta $\{u, v\}$

Fato. Se um caminho/ciclo entra em $W_{u,v}$ pelo lado de u, então ele passa por metade ou todos os vértices de $W_{u,v}$ e sai pelo mesmo lado de u.

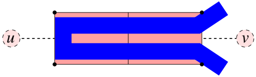
Problema HAM-CYCLE

Continuação da Prova. Como widget $W_{u,v}$ da aresta $\{u, v\}$ é percorrido:

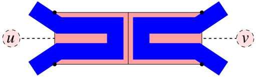
- Apenas u é selecionado no Vertex Cover: todos vértices do widget são percorridos pelo lado de u.



- Apenas v é selecionado no Vertex Cover: todos vértices do widget são percorridos pelo lado de v.



- u e v são selecionados no Vertex Cover: Metade dos vértices do widget são percorridos pelo lado de u e outra metade pelo lado de v.

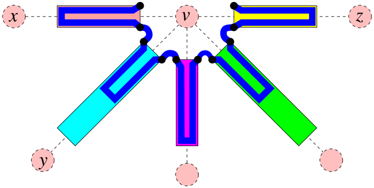


Obs.: Nos desenhos acima, os vértices u e v não pertencem ao grafo G', apenas os que estão nos widgets e os k seletores.

Problema HAM-CYCLE

Continuação da Prova. Construção do grafo G'

As pontas dos widgets de um mesmo vértice $v \in G$ são ligados em série.
Por exemplo, se adjacentes de $v \in G$ são x, y e z então:
Série de v: $[v,x,1]$–...–$[v,x,6]$—$[v,y,1]$–...–$[v,y,6]$—...—$[v,z,1]$–...–$[v,z,6]$
Pontas da (série de) v: $[v,x,1]$ e $[v,z,6]$.

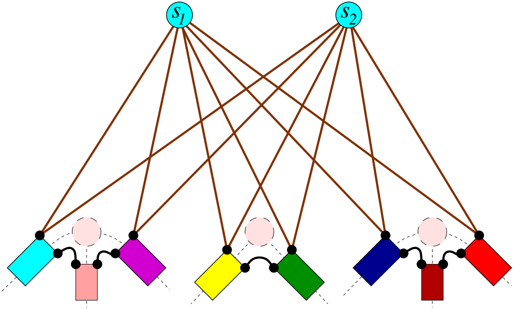


Fato. Ao entrar por uma ponta de v, o circuito percorre os widgets de todas arestas incidentes a v (para cada widget, passa por todos os vértices do widget ou metade deles) e sai pela outra ponta de v.

Fato. Se um caminho/ciclo passa pelos vértices de $W_{u,v}$, ele deve ter entrado por uma das pontas de u ou de v (ou ambos).

Problema HAM-CYCLE

Continuação da Prova. Construção do grafo G'

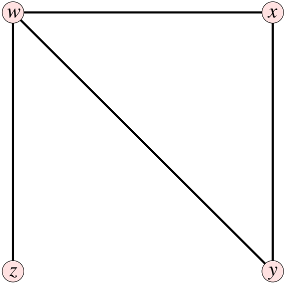


- São inseridos k seletores s_i.
- Cada seletor é ligado às duas pontas de cada série.

Fato. Em um circuito hamiltoniano de G', as séries (uma para cada vértice de G) se alternam com vértices seletores. Portanto, número de séries no circuito é igual ao número de seletores.

Problema HAM-CYCLE

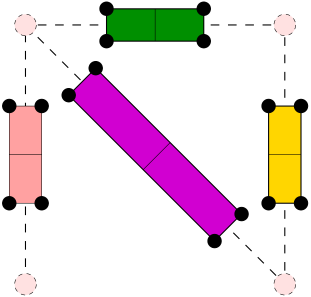
Continuação da Prova. Exemplo:



Grafo de entrada *G* para VERTEX-COVER

Problema HAM-CYCLE

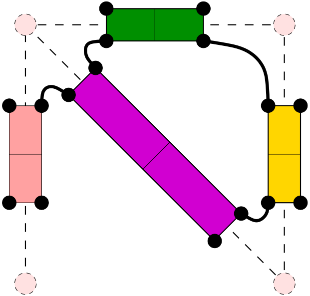
Continuação da Prova. Exemplo:



Inserção dos widgets W's, uma para cada aresta do grafo original

Problema HAM-CYCLE

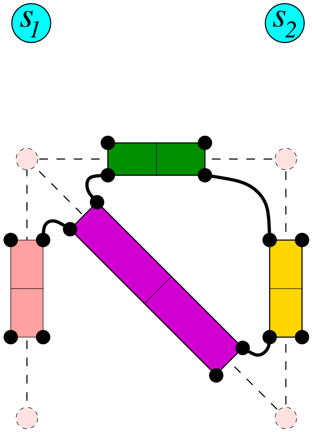
Continuação da Prova. Exemplo:



Ligação em série das pontas de widgets (voltadas aos mesmos vértices de G)

Problema HAM-CYCLE

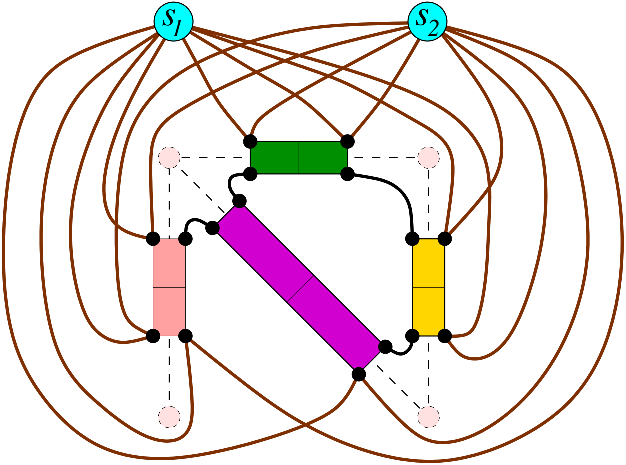
Continuação da Prova. Exemplo:



Inserção de k vértices seletores

Problema HAM-CYCLE

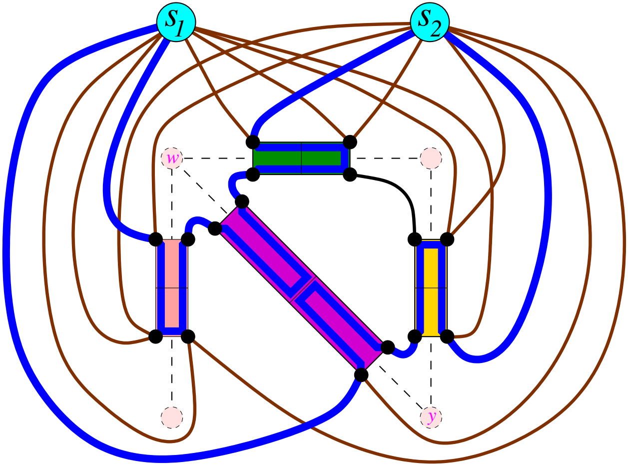
Continuação da Prova. Exemplo:



Ligação dos seletores para as pontas dos widgets e grafo final G'

Problema HAM-CYCLE

Continuação da Prova. Exemplo:



Cobertura por vértices $\{w, y\}$ em G e Circuito hamiltoniano em G'

Problema HAM-CYCLE

Continuação da Prova.

Fato. A construção de G' é feita em tempo polinomial (exercício).

Vamos mostrar que

$$\langle G, k\rangle \in \text{VERTEX-COVER} \quad \text{se e somente se} \quad \langle G'\rangle \in \text{HAM-CYCLE}$$

($\Rightarrow$): Seja $\langle G, k\rangle \in \text{VERTEX-COVER}$ e $C = \{v_1, \ldots, v_k\}$ cobertura de G

Seja A_v os vértices adjacentes de $v \in V$ que pertencem a C.

Seja S_v a série de v, que para cada adjacente w, passa por *todos vértices* de $W_{v,w}$, se $w \notin A_v$ ou por *metade dos vértices* de $W_{v,w}$, se $w \in A_v$.

Seja H o circuito formado pela seguinte sequência de vértices:

$$H = (s_1, S_{v_1}, s_2, S_{v_2}, \ldots, s_k, S_{v_k}, s_1)$$

Fato. H é um ciclo.

Fato. Dada aresta $\{u, v\} \in E$, os vértices de $W_{u,v}$ pertencem a H.

Como H contém todos os widgets e todos os seletores, H é hamiltoniano.

Problema HAM-CYCLE

Continuação da Prova.

Seja H um circuito hamiltoniano em G'.
Fato. H tem a forma:

$$H = (s_1, S_{v_1}, s_2, S_{v_2}, \ldots, s_k, S_{v_k}, s_1)$$

Como H é hamilt., todos os vértices de widgets pertencem a alguma série.

Seja $C = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$. Cada S_{v_j} é uma série relativa a um vértice v_j.

Fato. Se $\{u, v\} \in E$, então $u \in C$ ou $v \in C$ (ou ambos).
(note que o widget $W_{u,v}$ pertence a G' e foi percorrido por H).

Portanto $\langle G, k\rangle \in \text{VERTEX-COVER}$.

Fim da prova do Lema: $\text{HAM-CYCLE} \in \text{NP-Difícil}$. □

Teorema

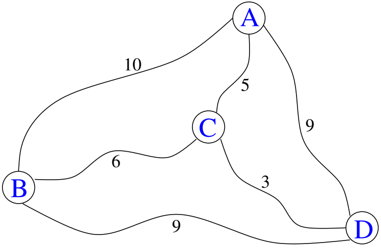
$\text{HAM-CYCLE} \in \text{NP-Completo}$.

Problema TSP

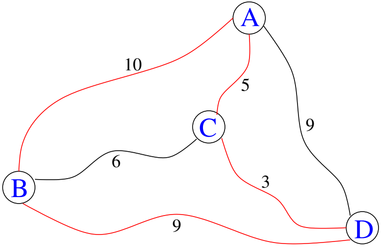
Problema (de Otimização) do Caixeiro Viajante (TSP)

- Entrada:
  Grafo completo não-orientado com custos nas arestas
- Objetivo:
  Encontrar um *tour* (circuito hamiltoniano) de custo mínimo que visita cada vértice exatamente uma vez.

Entrada



Solução Ótima de custo 27



Problema TSP

Definição como linguagem: inserimos parâmetro k

$$\mathrm{TSP} = \{\langle G, c, k\rangle : \begin{array}{l} G = (V, E) \text{ é um grafo completo,} \\ c \text{ é função nas arestas, } c : E \to \mathbb{Z}, \\ k \in \mathbb{Z}, \text{ e} \\ G \text{ tem tour de custo máximo } k\}. \end{array}$$

Lema

$\mathrm{TSP} \in \mathrm{NP}$.

Problema TSP

Lema

TSP $\in$ NP-Difícil.

Prova.

Vamos fazer a redução $\text{HAM-CYCLE} \leq_{\text{P}} \text{TSP}$.

Dado entrada $G = (V, E)$ para HAM-CYCLE, vamos construir entrada (G', c, k) para TSP tal que

$$G \text{ é hamiltoniano} \iff G' \text{ tem tour de custo no máximo } k.$$

Construção de (G', c, k): Seja $G' = (V', E')$, c e k tal que:

$V' = V$ (o conjunto de vértices é o mesmo de G),

$E' = \{\{u, v\} : u, v \in V \text{ e } u \neq v\}$

$$c(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{se } \{u, v\} \in E \\ 1 & \text{se } \{u, v\} \notin E \end{cases} \quad \text{para todo } \{u, v\} \in V \times V \text{ e } u \neq v,$$

$k = 0$

Problema TSP

Continuação da Prova.

Fato. G é hamiltoniano se e somente se G' tem tour de custo 0.

($\Rightarrow$): Seja C um ciclo hamiltoniano em G.
Então, todas as arestas de C pertencem a G' com custo 0.
Então, G' possui tour de custo 0.

($\Leftarrow$): Seja C' um tour em G' de custo 0.
Então, todas as arestas de C' possuem custo 0.
Então, Todas arestas de C' estão em G.
Então, G é hamiltoniano.

Fim da prova do Lema: $\mathrm{TSP} \in \mathrm{NP\text{-}Difícil}$. $\square$

Teorema

$\mathrm{TSP} \in \mathrm{NP\text{-}Completo}$.

Problema SUBSET-SUM

Problema SUBSET-SUM

- Entrada: Conjunto S de inteiros positivos e um inteiro $t > 0$.
- Pergunta: Existe subconjunto $S' \subseteq S$ tal que $t = \sum_{s \in S'} s$?

Versão de Decisão/Linguagem:

$$\text{SUBSET-SUM} = \{\langle S, t\rangle : \text{ existe } S' \subseteq S \text{ tq. } t = \sum_{s \in S'} s\}$$

Problema $\mathrm{SUBSET\text{-}SUM}$

Exemplo [CLRS'09]: Considere a entrada $\langle S, t \rangle$ tal que

$S = \{1, 2, 7, 14, 49, 98, 343, 686, 2409, 2793, 16808, 17206, 117705, 117993\}$

$t = 138457$.

Pergunta: $\langle S, t \rangle \in \mathrm{SUBSET\text{-}SUM}$?

Resposta: Sim!

$S' = \{1, 2, 7, 98, 343, 686, 2409, 17206, 117705\}$ é uma solução.

Lema

$\mathrm{SUBSET\text{-}SUM} \in \mathrm{NP}$.

Prova. Exercício. □

Problema SUBSET-SUM

Lema

SUBSET-SUM $\in$ NP-Difícil.

Prova.

Vamos fazer a redução 3-CNF-SAT $\leq_P$ SUBSET-SUM.

Seja $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula em 3-CNF.

Vamos construir uma entrada $\langle S, t \rangle$ tal que

$$\phi \in \text{3-CNF-SAT se e somente se } \langle S, t \rangle \in \text{SUBSET-SUM}$$

Vamos considerar, s.p.g., que ϕ está na forma 3-CNF e

- não possui cláusulas com uma literal e sua negação
- não possui variáveis que não são utilizadas nas cláusulas

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova: Formato dos números de S e t

Seja

- $x_1, \ldots, x_n$ as variáveis de ϕ
- $C_1, \ldots, C_k$ as cláusulas de ϕ

Os números de S e o inteiro t terão $n + k$ dígidos (na base 10):

- Os n primeiros dígitos estão associados às variáveis
- Os k últimos dígitos estão associados às cláusulas

Se s é um inteiro tal que $s \in S \cup \{t\}$, vamos denotar por

- $s[x_i]$ o i-ésimo dígito de s, associado à variável x_i.
- $s[C_j]$ o $n + j$-ésimo dígito de s, associado à cláusula C_j.

Exemplo: Se ϕ tem duas variáveis x_1 e x_2 e três cláusulas C_1, C_2 e C_3, então um número $s \in S$ possui 5 dígitos na seguinte sequência:

		x_1	x_2	C_1	C_2	C_3
s	$=$	$s[x_1]$	$s[x_2]$	$s[C_1]$	$s[C_2]$	$s[C_3]$

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova: Construção de v_i e v'_i

O conjunto S tem $2n + 2k$ inteiros:

$$S = \{v_1, v'_1,\ v_2, v'_2,\ \ldots, v_n, v'_n,\ \ s_1, s'_1,\ s_2, s'_2,\ \ldots, s_k, s'_k\}$$

onde

- v_i e v'_i são inteiros associados à variável x_i, onde $i = 1, \ldots, n$
- s_j e s'_j são inteiros associados à cláusula C_j, onde $j = 1, \ldots, k$

Os dígitos de v_i são dados por

$$v_i[x_{i'}] = \begin{cases} 1 & \text{se } i = i' \\ 0 & \text{se } i \neq i'. \end{cases} \qquad v_i[C_j] = \begin{cases} 1 & \text{se } C_j \text{ contém a literal } x_i \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os dígitos de v'_i são dados por

$$v'_i[x_{i'}] = \begin{cases} 1 & \text{se } i = i' \\ 0 & \text{se } i \neq i'. \end{cases} \qquad v'_i[C_j] = \begin{cases} 1 & \text{se } C_j \text{ contém a literal } \neg x_i \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova: Construção de s_j, s'_j e t.

Os dígitos de s_j são dados por

$$s_j[x_{i'}] = 0 \text{ para todo } i' \qquad s_j[C_{j'}] = \begin{cases} 1 & \text{se } j = j' \\ 0 & \text{se } j \neq j'. \end{cases}$$

Os dígitos de s'_j são dados por

$$s'_j[x_{i'}] = 0 \text{ para todo } i' \qquad s'_j[C_{j'}] = \begin{cases} 2 & \text{se } j = j' \\ 0 & \text{se } j \neq j'. \end{cases}$$

Os dígitos de t são dados por

$$t[x_{i'}] = 1 \text{ para todo } i' \qquad t[C_{j'}] = 4 \text{ para todo } j'.$$

Fato

A entrada $\langle S, t \rangle$ é construída em tempo polinomial.

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova: Exemplo [CLRS'09]: Construção de $\langle S, t \rangle$

$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

	x_1	x_2	x_3	C_1	C_2	C_3	C_4
v_1	1	0	0	1	0	0	1
v_1'	1	0	0	0	1	1	0
v_2	0	1	0	0	0	0	1
v_2'	0	1	0	1	1	1	0
v_3	0	0	1	0	0	1	1
v_3'	0	0	1	1	1	0	0
s_1	0	0	0	1	0	0	0
s_1'	0	0	0	2	0	0	0
s_2	0	0	0	0	1	0	0
s_2'	0	0	0	0	2	0	0
s_3	0	0	0	0	0	1	0
s_3'	0	0	0	0	0	2	0
s_4	0	0	0	0	0	0	1
s_4'	0	0	0	0	0	0	2
t	1	1	1	4	4	4	4

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova: Exemplo [CLRS'09]: Construção de $\langle S, t\rangle$

$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

Fato

Todos os números em S são distintos.

Fato (Não ocorre 'vai um' nas somas)

A soma de todos dígitos na coluna x_i é no max. 2:

$$\sum_{s\in S} s[x_i] \leq 2.$$

A soma de todos dígitos na coluna C_j é no max. 6:

$$\sum_{s\in S} s[C_j] \leq 6.$$

	x_1	x_2	x_3	C_1	C_2	C_3	C_4
v_1	1	0	0	1	0	0	1
v_1'	1	0	0	0	1	1	0
v_2	0	1	0	0	0	0	1
v_2'	0	1	0	1	1	1	0
v_3	0	0	1	0	0	1	1
v_3'	0	0	1	1	1	0	0
s_1	0	0	0	1	0	0	0
s_1'	0	0	0	2	0	0	0
s_2	0	0	0	0	1	0	0
s_2'	0	0	0	0	2	0	0
s_3	0	0	0	0	0	1	0
s_3'	0	0	0	0	0	2	0
s_4	0	0	0	0	0	0	1
s_4'	0	0	0	0	0	0	2

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova: $(\Rightarrow)$: Considere $\langle\phi\rangle \in$ 3-CNF-SAT

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Atribuição Satisfazível		x_1	x_2	x_3	C_1	C_2	C_3	C_4
	v_1	1	0	0	1	0	0	1
$x_1=0$	v'_1	1	0	0	0	1	1	0
	v_2	0	1	0	0	0	0	1
$x_2=0$	v'_2	0	1	0	1	1	1	0
$x_3=1$	v_3	0	0	1	0	0	1	1
	v'_3	0	0	1	1	1	0	0
	Soma	**1**	**1**	**1**	1	2	3	1

Fato (Coluna das variáveis soma 1)

Seja x atribuição satisfazível para ϕ e S^x o conjunto

$$S^x = \{v_i : x_i = 1,\ i \in [1,n]\} \cup \{v'_i : x_i = 0,\ i \in [1,n]\}$$

Então, para toda variável x_i temos

$$\sum_{s \in S^x} s[x_i] = 1$$

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova:

$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

Atribuição Satisfazível		x_1	x_2	x_3	C_1	C_2	C_3	C_4
	v_1	1	0	0	1	0	0	1
$x_1 = 0$	v_1'	1	0	0	0	**1**	**1**	0
	v_2	0	1	0	0	0	0	1
$x_2 = 0$	v_2'	0	1	0	**1**	**1**	**1**	0
$x_3 = 1$	v_3	0	0	1	0	0	**1**	**1**
	v_3'	0	0	1	1	1	0	0
	Soma	1	1	1	**1**	**2**	**3**	**1**

Fato (Coluna de cláusula soma entre 1 e 3)

Seja x atribuição satisfazível para ϕ e S^x o conjunto

$$S^x = \{v_i : x_i = 1,\ i \in [1, n]\} \cup \{v_i' : x_i = 0,\ i \in [1, n]\}$$

Então, para toda cláusula C temos

$$1 \leq \sum_{s \in S^x} s[C] \leq 3$$

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova: Complementar S^x para coluna de cláusula somar 4

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Atribuição Satisfazível		x_1	x_2	x_3	C_1	C_2	C_3	C_4
	v_1	1	0	0	1	0	0	1
x_1=0	v'_1	1	0	0	0	**1**	**1**	0
	v_2	0	1	0	0	0	0	1
x_2=0	v'_2	0	1	0	**1**	**1**	**1**	0
x_3=1	v_3	0	0	1	0	0	**1**	**1**
	v'_3	0	0	1	1	1	0	0
Complementa coluna C_1	s_1	0	0	0	**1**	0	0	0
com 3 (=1+2)	s'_1	0	0	0	**2**	0	0	0
Complementa coluna C_2	s_2	0	0	0	0	1	0	0
com 2	s'_2	0	0	0	0	**2**	0	0
Complementa coluna C_3	s_3	0	0	0	0	0	**1**	0
com 1	s'_3	0	0	0	0	0	2	0
Complementa coluna C_4	s_4	0	0	0	0	0	0	**1**
com 3 (=1+2)	s'_4	0	0	0	0	0	0	**2**
	t	1	1	1	4	4	4	4

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova:

Fato

Seja x atribuição satisfazível para ϕ. Então, existe $S' \subseteq S$ tal que

$$\sum_{s \in S'} s[x_i] = 1 \quad e \quad \sum_{s \in S'} s[C_j] = 4$$

para toda variável x_i e cláusula C_j.

Para verificar este fato, considere

$$
\begin{array}{rcl}
S^x & = & \{v_i : x_i = 1,\ i \in [1,n]\} \ \cup\ \{v_i' : x_i = 0,\ i \in [1,n]\} \\
S^{C_j} & = & \left\{ \begin{array}{ll} \{s_j, s_j'\} & \text{se } \sum_{s \in S^x} s[C_j] = 1 \\ \{s_j'\} & \text{se } \sum_{s \in S^x} s[C_j] = 2 \\ \{s_j\} & \text{se } \sum_{s \in S^x} s[C_j] = 3 \end{array} \right. \\
 & \text{e} & \\
S^C & = & S^{C_1} \cup S^{C_2} \cup \ldots \cup S^{C_k}.
\end{array}
$$

O fato vale usando $S' = S^x \cup S^C$. Portanto $\langle S, t \rangle \in$ SUBSET-SUM.

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova: $(\Leftarrow)$: Considere $\langle S, t\rangle \in$ SUBSET-SUM

$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

Seja $S' \subseteq S$ tal que $t = \sum_{s \in S'} s$.

Fato (S' tem exatamente um em $\{v_i, v_i'\}$ para cada x_i)

Se $S' \subseteq S$ tal que $t = \sum_{s \in S'} s$, então exatamente um em $\{v_i, v_i'\}$ é escolhido em S', para cada x_i.

Fato (Soma dos v e v' em S' é ≥ 1 em cada cláusula)

Se $S' \subseteq S$ tal que $t = \sum_{s \in S'} s$, então soma $\sum_{i=1}^{n} \sum_{u \in \{v_i, v_i'\} \cap S'} u[C] \geq 1$ para cada C.

	x_1	x_2	x_3	C_1	C_2	C_3	C_4
v_1	1	0	0	1	0	0	1
v_1'	1	0	0	0	1	1	0
v_2	0	1	0	0	0	0	1
v_2'	0	1	0	1	1	1	0
v_3	0	0	1	0	0	1	1
v_3'	0	0	1	1	1	0	0
s_1	0	0	0	1	0	0	0
s_1'	0	0	0	2	0	0	0
s_2	0	0	0	0	1	0	0
s_2'	0	0	0	0	2	0	0
s_3	0	0	0	0	0	1	0
s_3'	0	0	0	0	0	2	0
s_4	0	0	0	0	0	0	1
s_4'	0	0	0	0	0	0	2
t	**1**	**1**	**1**	**4**	**4**	**4**	**4**

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova:

Seja $S' \subseteq S$ tal que $t = \sum_{s \in S'} s$.

Seja atribuição $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \in S' \\ 0 & \text{se } v_i' \in S'. \end{cases}$$

Fato

A atribuição x satisfaz ϕ.

Para toda cláusula C_j temos que $\displaystyle\sum_{r \in S'} r[C_j] = 4$.

Como os elementos de $s_j[C_j]$ e $s_j'[C_j]$ somam no máximo 3, existe número em S' vindo das variáveis v_i ou v_i', para algum i, com 1 na coluna C_j.

Problema SUBSET-SUM

Continuação da Prova:

Temos dois casos: (i) $v_i \in S'$ e $v_i[C_j] = 1$ ou (ii) $v'_i \in S'$ e $v'_i[C_j] = 1$

(i) Se $v_i \in S'$ e $v_i[C_j] = 1$, por construção, temos que a atribuição produzida com $x_i = 1$ torna C_j verdadeira

(ii) Se $v'_i \in S'$ e $v'_i[C_j] = 1$, por construção, temos que a atribuição produzida com $x_i = 0$ torna C_j verdadeira

Em ambos os casos, C_j fica verdadeira na atribuição de x. Como isso ocorre para todas as cláusulas, temos que x satisfaz ϕ e portanto $\langle \phi \rangle \in$ 3-CNF-SAT.

Fim da prova do Lema: SUBSET-SUM $\in$ NP-Difícil. □

Teorema

SUBSET-SUM $\in$ NP-Completo.

Problema CIRCUIT-SAT

Lema

CIRCUIT-SAT $\in$ NP-Difícil.

Prova. Apresenta detalhes técnicos fora do escopo do curso.
Note a importância de se considerar o modelo computacional.

Esboço:

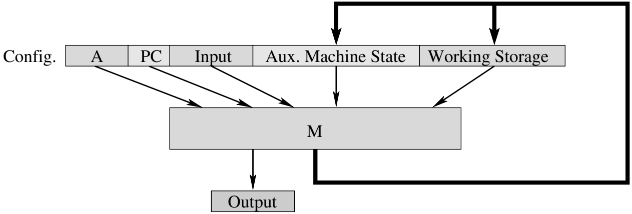
1. Seja Π um problema qualquer de NP.
   (Π é verificável em tempo polinomial para resposta SIM):
   Existe algoritmo A, de tempo polinomial tal que
   Se $x \in \Pi$, existe certificado y tal que $A(x, y) = 1$ e
   Se $x \notin \Pi$, temos $A(x, y) = 0$, para todo y.
2. Vamos reduzir Π a CIRCUIT-SAT.
3. Ideia: Simular a execução de A através um circuito combinatorial
   O circuito combinatorial é baseado no computador
   Em vez fazer a execução de A com o mesmo circuito,
   Repetimos o circuito do computador para cada iteração

Problema CIRCUIT-SAT

Continuação da Prova.

Computador:

- Acesso a memória, dispositivos de entrada e de saída
- Apresenta circuito para realizar suas operações



A cada passo de execução do algoritmo A:

- a máquina recebe e atualiza configurações (memória) do computador (Configuração: todas as memórias utilizadas, como para armazenar A, PC, dados de entrada, memória de trabalho e saída)
- Atualiza a configuração atual para ser usada no próximo passo
- Reaproveita o mesmo circuito M da máquina

Problema CIRCUIT-SAT

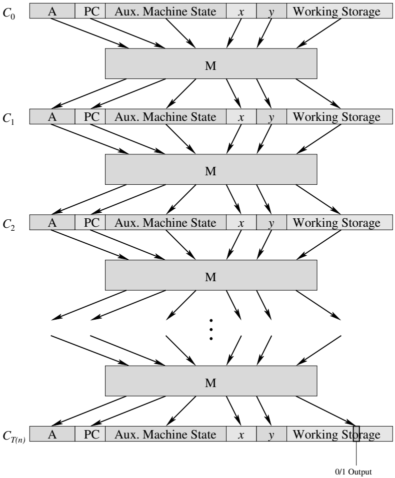
Continuação da Prova.

A execução de $A(x, y)$:

- Fará no máximo $T(n) \in O(n^k)$ passos, onde $n = |x|$ e k é constante. Vamos supor que A sempre gasta exatamente $T(n)$ passos (se terminar antes, faz passos "dummy")
- y tem tamanho polinomial ($|y| = O(n^{k'})$, para algum k' constante.)
- Em vez de aproveitar a mesma máquina M fazemos $T(n)$ cópias de M, que em vez de atualizar a configuração, a gera como entrada para a próxima cópia de M.
- Alguns bits (fios) são fixados para definir configuração inicial (algoritmo A, PC inicial, x, etc.)
- Fios de entrada são definidos apenas para os que definem y.
- No último passo, a saída é apenas um bit (fio) do circuito.

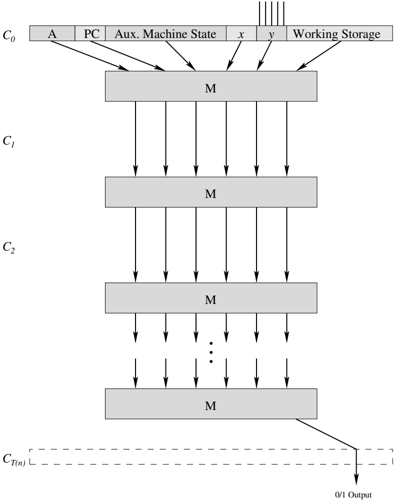
Problema CIRCUIT-SAT

Continuação da Prova. $T(n)$ cópias de M para simular execução de A



Problema CIRCUIT-SAT

Continuação da Prova. Entrada, saída e ligação direta das máquinas.



Problema CIRCUIT-SAT

Continuação da Prova.

Seja C o circuito final e $C(y')$ a saída de C para entrada y'.

Fato

Alguns fios de C começam com valores de $0/1$ atribuídos (codificação de A, PC e x).

Note que para um fio f receber 1, basta pegar um fio qualquer q e fazer o fio f receber $q \vee \neg q$. Para f receber 0, basta f receber $q \wedge \neg q$.

Fato

Foram removidos todos os fios da configuração final, exceto pelo fio de saída.

Para isto, note que o grafo associado é acíclico. Basta remover as portas e fios que não são necessários para o fio de saída (em tempo linear).

Problema CIRCUIT-SAT

Continuação da Prova.

Fato

O número de fios/bits em cada configuração é de tamanho polinomial.

Para isto, note que:

- Codificações de A e PC usam quantidade constante de bits (objetos acessados por A podem ter tamanho polinomial).
- y tem tamanho polinomial em relação a x.
- Memória de trabalho, em qualquer momento, é de tamanho polinomial (pois A é de tempo polinomial).

Problema CIRCUIT-SAT

Continuação da Prova.

Fato

A construção de C é feita em tempo polinomial.

- A máquina M tem comportamento específico, mas de tamanho polinomial, uma vez que M depende da configuração de entrada (visto ser polinomial).
- Foram feitas $T(n)$ cópias de M (cada uma de tamanho polinomial)
- Se a maior configuração+máquina de um passo tem tamanho $Q(n)$, a construção de C gasta $O(T(n) \cdot Q(n))$.

Fato

$A(x, y) = C(y)$, *para todo* y.

Note que o circuito C simplesmente simula a execução de A.

Problema CIRCUIT-SAT

Continuação da Prova.

Fato

Se C é o circuito construído para x, então

$$x \in \Pi \text{ se e somente se } C \in \text{CIRCUIT-SAT}.$$

$\Rightarrow$ Seja $x \in \Pi$.
Então, existe certificado y tal que $A(x, y) = 1$.
Como $C(y) = A(x, y) = 1$, temos que C é satisfazível.

$\Leftarrow$ Suponha C satisfazível.
Então, existe entrada y tal que $C(y) = 1$.
Como $A(x, y) = C(y) = 1$, temos que
A verifica x pelo certificado y.

Fim da prova do Lema: $\text{CIRCUIT-SAT} \in \text{NP-Difícil}$. $\square$

Teorema

$\text{CIRCUIT-SAT} \in \text{NP-Completo}$

Outros aspectos de complexidade computacional

No próximo conjunto de slides, apenas citaremos, de maneira superficial, alguns resultados diferentes na área de complexidade. O leitor deve buscar mais informação sobre os tópicos de interesse.

Decisão $\times$ Otimização

Nem sempre a versão de decisão tem a mesma complexidade do de otimização.

Definição (fórmula em 2-SAT)

Uma fórmula ϕ está em 2-SAT se

- *ϕ está na forma CNF e*
- *cada cláusula possui no máximo 2 literais distintas.*

Problema (2-CNF-SAT)

Dada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ em 2-SAT, decidir se existe atribuição para as variáveis de maneira a tornar ϕ verdadeira.

Lema

O problema 2-SAT pode ser resolvido em tempo polinomial.

Prova. Exercício 34.4-7 de [CLRS'09], $\square$

Decisão × Otimização

Problema (MAX-2-SAT)

Dada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *em* 2-SAT *e inteiro* k*, decidir se existe atribuição para as variáveis de maneira a satisfazer pelo menos* k *cláusulas de* ϕ.

Teorema (Garey, Johnson, and Stockmeyer'76)

O problema MAX-2-SAT *é* NP-Completo.

NP-Intermediário

Vamos supor que $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.
Neste caso, há problemas "entre" P e NP-Completo: NP-Intermediário.

Teorema (Ladner'75)

Se $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, existem problemas de NP que não estão nem em P nem em NP-Completo.

Neste caso, acredita-se que os seguintes problemas estão em NP-Intermediário:

- Fatoração de inteiros e
- Logaritmo discreto
- Isomorfismo em grafos

Complexidade de Espaço e Não-Determinismo

Originalmente, NP foi definido através dos algoritmos *Nondeterministic Polynomial*.

Definição

Um algortimo não-determinístico é como um algoritmo determinístico, mas que também pode fazer, a cada passo, escolhas entre várias alternativas de maneira não-determinística.

Definição

O espaço (memória) utilizado por um algoritmo determinístico, é o número de células (bits) distintas acessado pelo algoritmo.

Definição

O espaço (memória) utilizado por um algoritmo não-determinístico, é o número de células (bits) distintas acessado por um ramo de execução mais curto pelo algoritmo.

Complexidade de Espaço e Não-Determinismo

A Classe NP é a classe dos problemas que podem ser decididos por um algoritmo não-determinístico em tempo polinomial.

Em termos da complexidade de tempo, a inclusão do não-determinismo parece ter elevado em muito a dificuldade dos problemas. E quanto a complexidade de espaço?

O seguinte teorema diz que o conjunto de problemas decididos por algoritmos determinísticos e não-determinísticos com espaço polinomial é o mesmo.

Teorema (Savitch'70)

$$\mathrm{NPSPACE} = \mathrm{PSPACE}.$$

Problemas Indecidíveis

A maioria dos problemas computacionais pode ser resolvida, possivelmente com um grande esforço computacional. Mas existem alguns que são indecidíveis, independente do tempo de execução.

Definição

O problema da parada, consiste em: Dado algoritmo A e entrada x, decidir se $A(x)$ para ou entra em loop.

Teorema (Turing'36)

O problema da parada é indecidível.

Problemas Indecidíveis

Prova. [Esboço] Suponha que exista função $H(A, x)$ que devolve 1 se $A(x)$ para e 0 se $A(x)$ entra em loop.

Considere a seguinte funcão $F(A)$:

> *Função $F(A)$*
> *1. Se $H(A, A) = 1$ entre em loop;*
> *2. senão, pare.*

O que acontece com $F(F)$?
(Sabemos que $F(F)$ só pode entrar em loop, ou parar.)

Caso 1: Suponha que $F(F)$ entra em loop.
Neste caso, o algoritmo entrou na condição da linha 1.
Para isso, a condição $H(F, F) = 1$ foi verdadeira.
Portanto $F(F)$ para. O que nos leva a uma contradição.

Caso 2: Suponha que $F(F)$ para.
Neste caso, o algoritmo executou a linha 2.
Para isso, deve ter ocorrido $H(F, F) = 0$.
Portanto $F(F)$ entrou em loop. O que nos leva a uma contradição. □