Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558)
Grafos: isomorfismo e conexidade

Prof. Dr. Ruben Interian

Resumo

Resumo

Revisão do conteúdo

Grafos:

- Modelam diversos fenômenos do mundo real;
- Um **grafo** é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto de **vértices**, e E é um conjunto de pares não ordenados de vértices – **arestas**;
- Conceitos: **grau** de um vértice; grafo **completo**; grafo **complementar**; **subgrafo**; supergrafo;
- Principais estruturas de dados para representar um grafo: **matriz de adjacência** e **listas de adjacência**.

Revisão do conteúdo

Teoria de conjuntos:

- Partição de um conjunto.
- Relação e relação de equivalência.
- Classe de equivalência.

Objetivo

- Quando dois grafos são “iguais”? **Isomorfismo.**
- Passeios, trilhas, caminhos. **Conexidade**.
    - Grafos bipartidos.

Resumo

Isomorfismo

Quando podemos dizer que **dois grafos são iguais**?

- Quando seus conjuntos de vértices e arestas são iguais.

Isomorfismo

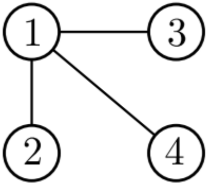
Quando podemos dizer que **dois grafos são iguais**?

- Quando seus conjuntos de vértices e arestas são iguais.

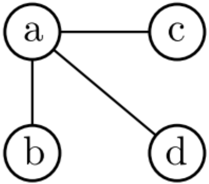
Embora correta, veremos que essa definição não é muito útil.

Exemplo 1

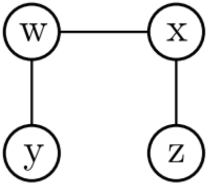
Observe os grafos A, B e C.



A



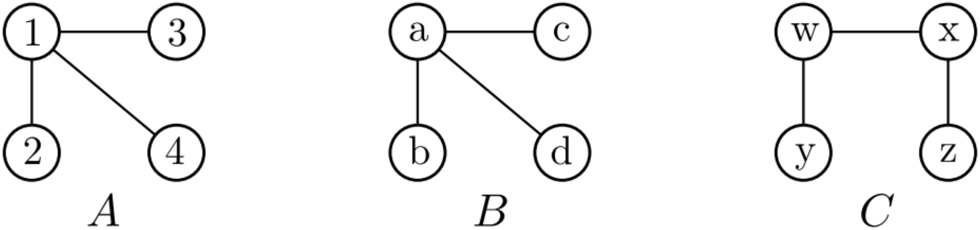
B



C

Exemplo 1

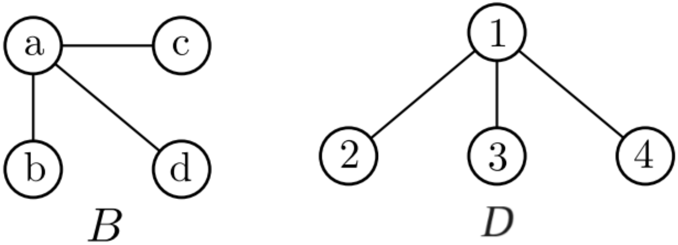
Observe os grafos A, B e C.



Os grafos A e B parecem ser "iguais"... E o grafo C?

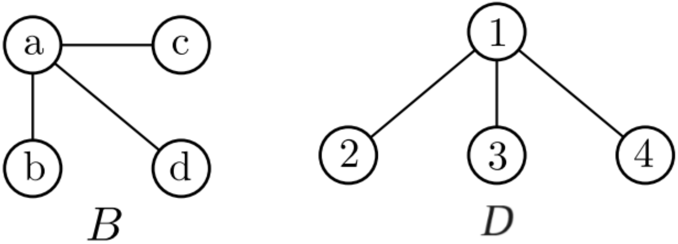
Exemplo 2

Observe os grafos B e D.



Exemplo 2

Observe os grafos B e D.



De novo, os grafos B e D parecem ser “iguais”...

Isomorfismo

- Os grafos podem ser **desenhados** de diferentes maneiras.
- Os grafos podem ter vértices rotulados em **ordem diferente**.
- Os grafos podem ter conjuntos de vértices completamente **diferentes**, porém ter a mesma **estrutura**, ou **forma**.
- A palavra **isomorfismo** vem do grego iso-morfos e significa "forma igual".

Isomorfismo

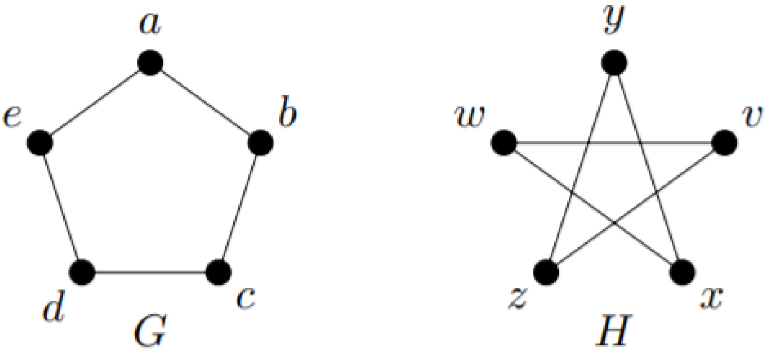
Dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ **são isomorfos** se existe uma bijeção $f : V_1 \to V_2$ tal que para todo par de vértices v, w:

$$(v, w) \in E_1 \iff (f(v), f(w)) \in E_2.$$

- (Lembrando) **Bijeção** ou correspondência biunívoca: função injetora e sobrejetora.
- Toda aresta em E_1 está relacionada com uma única aresta em E_2.
- A função f é chamada de **isomorfismo**.
- **Notação**: G_1 e G_2 são isomorfos: $G_1 \cong G_2$.
- É a mesma coisa dizer: "Os grafos G_1 e G_2 são isomorfos" e "Existe um isomorfismo entre os grafos G_1 e G_2".

Exercício

Mostre que os grafos G e H são isomorfos.



Isomorfismo

Propriedades:

- Grafos isomorfos têm o **mesmo número de vértices e arestas**.
- Grafos isomorfos têm o **mesmo número de vértices com o mesmo grau**.

Isomorfismo

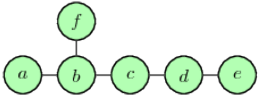
Propriedades:

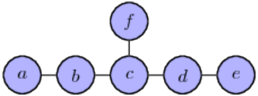
- Grafos isomorfos têm o **mesmo número de vértices e arestas**.
- Grafos isomorfos têm o **mesmo número de vértices com o mesmo grau**.
- Dois grafos com os mesmos números de vértices e arestas, e com o mesmo número de vértices de cada grau, são isomorfos?

Isomorfismo

Propriedades:

- Grafos isomorfos têm o **mesmo número de vértices e arestas**.
- Grafos isomorfos têm o **mesmo número de vértices com o mesmo grau**.
- Dois grafos com os mesmos números de vértices e arestas, e com o mesmo número de vértices de cada grau, são isomorfos? – Não!





Isomorfismo

Isomorfismo é uma relação de equivalência.

Relação de equivalência:

- Reflexividade: $G \cong G$.
- Simetria: se $G \cong H$, então $H \cong G$.
- Transitividade: se $F \cong G$ e $G \cong H$, então $F \cong H$

Essa relação define **classes de equivalência**: conjuntos de todos os grafos que tem uma determinada estrutura, independentemente dos nomes ou "rótulos" dos vértices.

* Mostre que o isomorfismo é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Algoritmos para isomorfismo de grafos

Problema do isomorfismo de grafos

Dados dois grafos G e H, decidir se eles são isomorfos.

- Não se sabe se o problema pode ser solucionado em tempo polinomial.
- Não se sabe se ele é um daqueles "problemas difíceis".
- Se tivermos uma bijeção (função $f : V_1 \rightarrow V_2$), podemos verificar rapidamente se f é um isomorfismo entre G e H.
- Se G e H não são isomorfos, não é óbvio como certificar isto.
- Existem algoritmos polinomiais quando G e H são **grafos com características específicas** (por exemplo, cujo grau máximo é 3 ou 4).

Resumo

Passeio

Passeio

Um passeio em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência:

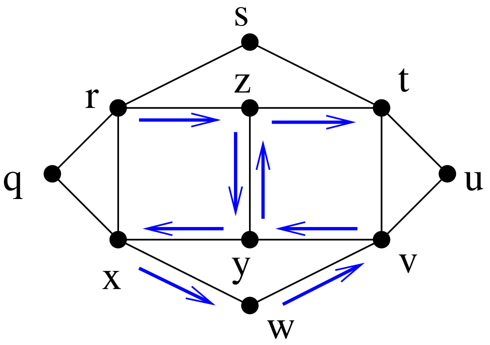
$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell),$$

onde $v_0, v_1, \dots, v_\ell$ são vértices de G e $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ são arestas de G para todo $i = 1, 2, \dots, \ell$.

Se G é um grafo simples, **podemos escrever apenas os vértices**:

$$W = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{\ell-1}, v_\ell)$$

Passeio



Passeio $W = (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$

Passeio

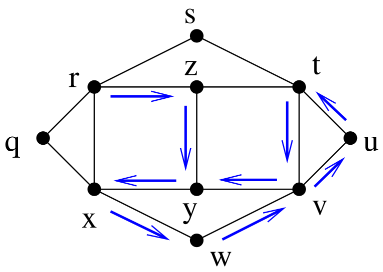
Seja $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ um **passeio** em G:

- Dizemos que W e um passeio de v_0 a v_ℓ.
- O comprimento $|W|$ do passeio W é o seu número de arestas.
- O passeio W é chamado de ímpar se $|W|$ é ímpar, e par, se $|W|$ é par.
- O passeio W, com comprimento $|W| > 0$, é fechado, se $v_0 = v_\ell$.
- Dizemos que v_ℓ é alcançável a partir de v_0 através de W.

Trilha

Trilha

Uma trilha $T = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ em um grafo $G = (V, E)$ é um passeio em que nenhuma aresta se repete.

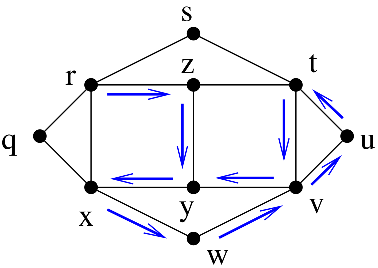


Trilha $T = (r, z, y, x, w, v, u, t, v, y)$.

Trilha

Trilha

Uma trilha $T = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ em um grafo $G = (V, E)$ é um passeio em que nenhuma aresta se repete.

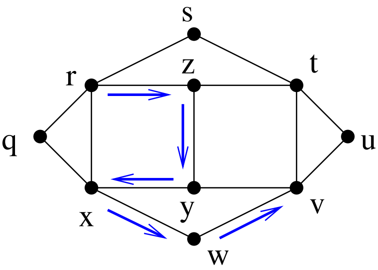


Trilha $T = (r, z, y, x, w, v, u, t, v, y)$.
Veja que os vértices podem ser repetidos, mas as arestas precisam ser todas distintas.

Caminho

Caminho

Um caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ em um grafo $G = (V, E)$ é um passeio em que nenhum vértice se repete.



Caminho $P = (r, z, y, x, w, v)$.

Distância

Distância

Seja um grafo $G = (V, E)$, e sejam $u, v \in V$ dois vértices. A **distância** de u a v em G é o **comprimento** de um caminho **mais curto** de u a v.

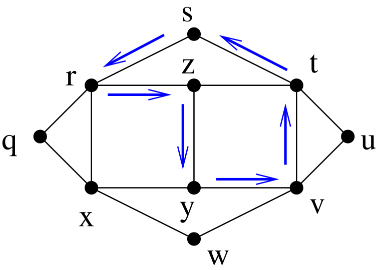
Notação:

- **Distância** de u a v em G: $dist_G(u, v)$.
- Se **não existe** caminho de u a v em G, escrevemos $dist_G(u, v) = +\infty$.

Ciclo

Ciclo

Um ciclo $C = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ em um grafo $G = (V, E)$ é um **passeio fechado** que não repete vértices nem arestas, exceto $v_0 = v_\ell$.



Ciclo $C = (r, z, y, v, t, s, r)$.

Pergunta

- Um caminho é uma trilha?

Pergunta

- Um caminho é uma trilha?
  - Sim, pois um caminho não repete vértices, portanto não repete arestas.

Pergunta

- Um caminho é uma trilha?
  – Sim, pois um caminho não repete vértices, portanto não repete arestas.

  Alguns fatos:
  Uma trilha é um passeio.
  Um caminho é uma trilha e um passeio.
  Um ciclo é uma trilha e um passeio.

Primeira prova

Seja $G = (V, E)$ um grafo, $u, v \in V$ vértices de G. Prove que:

Se existe um passeio W de u a v em G, então existe um caminho P de u a v em G.

Prova:

Primeira prova

Seja $G = (V, E)$ um grafo, $u, v \in V$ vértices de G. Prove que:

> Se existe um passeio W de u a v em G, então existe um caminho P de u a v em G.

Prova:

Suponha que $u \neq v$. (Por quê?)

Primeira prova

Seja $G = (V, E)$ um grafo, $u, v \in V$ vértices de G. Prove que:

Se existe um passeio W de u a v em G, então existe um caminho P de u a v em G.

Prova:

Suponha que $u \neq v$. (Por quê?)

Seja $W = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$, onde $v_0 = u$ e $v_\ell = v$.

Primeira prova

Seja $G = (V, E)$ um grafo, $u, v \in V$ vértices de G. Prove que:

Se existe um passeio W de u a v em G, então existe um caminho P de u a v em G.

Prova:

Suponha que $u \neq v$. (Por quê?)

Seja $W = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$, onde $v_0 = u$ e $v_\ell = v$.

Prova por **indução em** $|W| = \ell$.

Primeira prova

Seja $G = (V, E)$ um grafo, $u, v \in V$ vértices de G. Prove que:

Se existe um passeio W de u a v em G, então existe um caminho P de u a v em G.

Prova:

Suponha que $u \neq v$. (Por quê?)

Seja $W = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$, onde $v_0 = u$ e $v_\ell = v$.

Prova por **indução em** $|W| = \ell$.

Base: $|W| = 1$.

Primeira prova

Seja $G = (V, E)$ um grafo, $u, v \in V$ vértices de G. Prove que:

Se existe um passeio W de u a v em G, então existe um caminho P de u a v em G.

Prova:

Suponha que $u \neq v$. (Por quê?)

Seja $W = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$, onde $v_0 = u$ e $v_\ell = v$.

Prova por **indução em** $|W| = \ell$.

Base: $|W| = 1$. O caminho existe e $P = W$.

Primeira prova

Hipótese de indução:
Se W' é um passeio de u a v com $|W'| < \ell$, então existe um caminho P de u a v.

Primeira prova

Hipótese de indução:
Se W' é um passeio de u a v com $|W'| < \ell$, então existe um caminho P de u a v.

Veja que estamos usando indução forte!

Primeira prova

Hipótese de indução:
Se W' é um passeio de u a v com $|W'| < \ell$, então existe um caminho P de u a v.

Veja que estamos usando indução forte!

Se W **não repete vértices**, então $P = W$ é um caminho de u a v em G.

Primeira prova

Hipótese de indução:
Se W' é um passeio de u a v com $|W'| < \ell$, então existe um caminho P de u a v.

Veja que estamos usando indução forte!

Se W **não repete vértices**, então $P = W$ é um caminho de u a v em G.

Se W **repete vértices**, existem $i, j \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ tais que $i < j$ e $v_i = v_j$, ou seja:

$$W = (v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_\ell).$$

Primeira prova

Hipótese de indução:
Se W' é um passeio de u a v com $|W'| < \ell$, então existe um caminho P de u a v.

Veja que estamos usando indução forte!

Se W **não repete vértices**, então $P = W$ é um caminho de u a v em G.

Se W **repete vértices**, existem $i, j \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ tais que $i < j$ e $v_i = v_j$, ou seja:

$$W = (v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_\ell).$$

Considere o passeio: $W' = (v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_\ell)$.

Veja que W' é um passeio de u a v de comprimento $|W'| < \ell$. Pela hipótese de indução, existe um caminho P de $v_0 = u$ a $v_\ell = v$. ■

Grafo conexo e componentes conexas

Um grafo $G = (V, E)$ é **conexo** se para **todo par** de vértices u, v **existe um caminho** de u a v em G.

Se G **não é conexo**, dizemos que G é desconexo.

Grafo conexo e componentes conexas

Um grafo $G = (V, E)$ é **conexo** se para **todo par** de vértices u, v **existe um caminho** de u a v em G.

Se G **não é conexo**, dizemos que G é desconexo.

Teorema

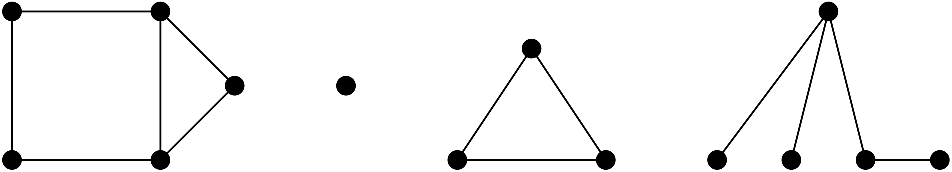
Seja $G = (V, E)$ *um grafo. A relação:*

$$\mathcal{R} = \{(u, v) : \textit{existe um caminho de } u \textit{ a } v \textit{ em } G,\ u, v \in V\}$$

é uma **relação de equivalência**.

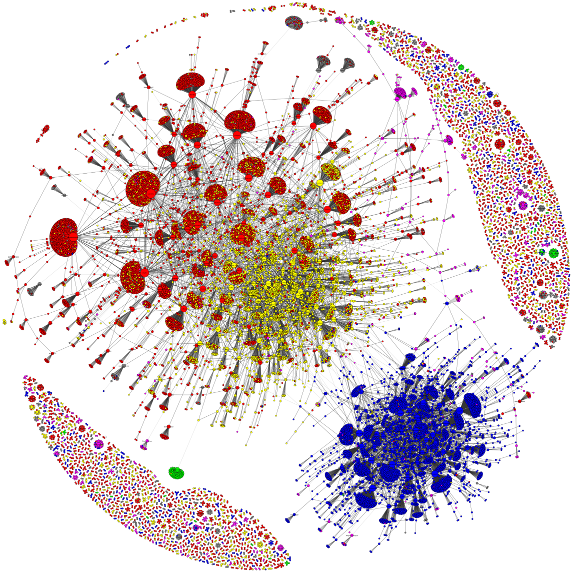
As **classes de equivalência** que essa relação define são chamadas **componentes**, ou **componentes conexas** de G.

Componentes de um grafo



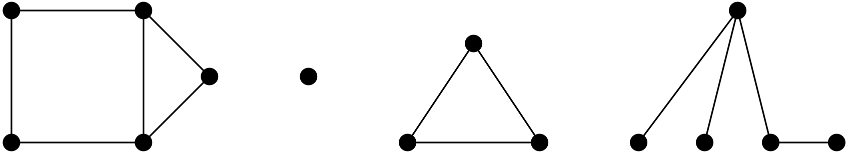
Componentes conexas de um grafo.

Componentes de um grafo



Componentes conexas de outro grafo.

Componentes de um grafo

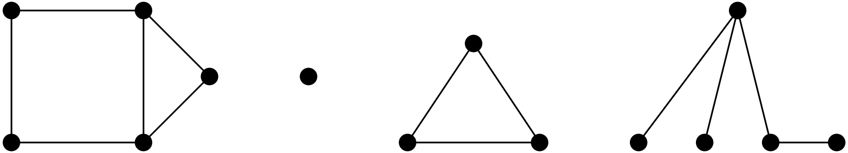


Definição alternativa:

Componentes conexas

As componentes conexas de um grafo G são **subgrafos conexos maximais** de G.

Componentes de um grafo



Definição alternativa:

Componentes conexas

As componentes conexas de um grafo G são **subgrafos conexos maximais** de G.

- Um subgrafo conexo H do grafo G é maximal se não existe outro subgrafo conexo H' de G, diferente de H, que contém a H.

Grafos bipartidos

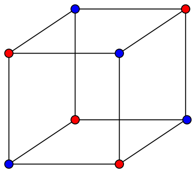
Um grafo $G = (V, E)$ é **bipartido** se V pode ser particionado em dois conjuntos, X e Y, tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y.

- A partição (X, Y) é chamada **bipartição** de G.
- **Interpretação**: se G é bipartido, é possível colorir os vértices de G com duas cores diferentes, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.
- Não podemos ter **nenhuma aresta entre dois vértices com a mesma cor**!

Grafos bipartidos

Um grafo $G = (V, E)$ é **bipartido** se V pode ser particionado em dois conjuntos, X e Y, tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y.

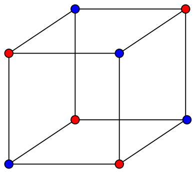
- A partição (X, Y) é chamada **bipartição** de G.
- **Interpretação**: se G é bipartido, é possível colorir os vértices de G com duas cores diferentes, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.
- Não podemos ter **nenhuma aresta entre dois vértices com a mesma cor**!

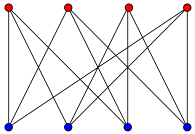


Grafos bipartidos

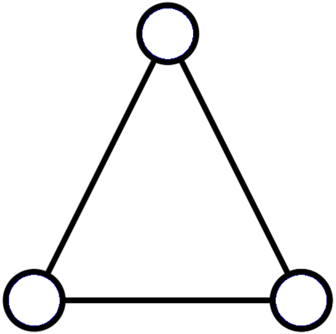
Um grafo $G = (V, E)$ é **bipartido** se V pode ser particionado em dois conjuntos, X e Y, tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y.

- A partição (X, Y) é chamada **bipartição** de G.
- **Interpretação**: se G é bipartido, é possível colorir os vértices de G com duas cores diferentes, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.
- Não podemos ter **nenhuma aresta entre dois vértices com a mesma cor**!



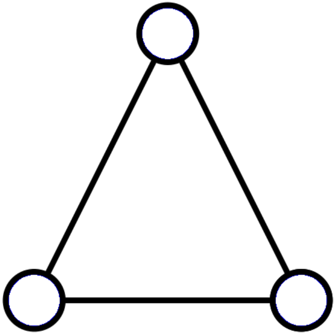


Grafos bipartidos



Este grafo é bipartido?

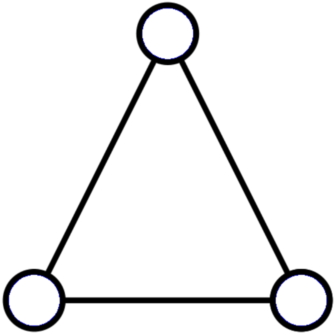
Grafos bipartidos



Este grafo é bipartido?

Não ...

Grafos bipartidos



Este grafo é bipartido?

Não . . .

Um grafo que contém um triângulo pode ser bipartido?

Grafos bipartidos

- Quais subestruturas não permitem encontrar uma bipartição de um grafo?

Grafos bipartidos

- Quais subestruturas não permitem encontrar uma bipartição de um grafo?
- Essas estruturas são os **ciclos ímpares**.
- Se um grafo tem um ciclo ímpar, então ele **não pode ser bipartido**.
- Não ter ciclo ímpar é uma condição necessária de um grafo ser bipartido.

Grafos bipartidos

- Quais subestruturas não permitem encontrar uma bipartição de um grafo?
- Essas estruturas são os **ciclos ímpares**.
- Se um grafo tem um ciclo ímpar, então ele **não pode ser bipartido**.
- Não ter ciclo ímpar é uma condição necessária de um grafo ser bipartido.

Será ela suficiente?

Grafos bipartidos

A resposta é **sim**, e no teorema a seguir provaremos este fato:

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo. G é bipartido **se e somente se** *G não contém um ciclo ímpar.*

Demonstração:

Grafos bipartidos

A resposta é **sim**, e no teorema a seguir provaremos este fato:

Teorema

Seja $G = (V, E)$ *um grafo.* G *é bipartido* **se e somente se** G *não contém um ciclo ímpar.*

Demonstração:

Precisamos provar duas coisas:

- G é bipartido $\Rightarrow$ G não contém um ciclo ímpar. [1]
- G não contém um ciclo ímpar $\Rightarrow$ G é bipartido. [2]

Grafos bipartidos

A resposta é **sim**, e no teorema a seguir provaremos este fato:

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo. G é bipartido **se e somente se** *G não contém um ciclo ímpar.*

Demonstração:

Precisamos provar duas coisas:

- G é bipartido $\Rightarrow$ G não contém um ciclo ímpar. [1]
- G não contém um ciclo ímpar $\Rightarrow$ G é bipartido. [2]

Mas [1] já está resolvido.
Vamos mostrar que [2] também é verdade.

Grafos bipartidos

Precisamos provar [2]:

Se G não contém um ciclo ímpar $\Rightarrow$ G é bipartido.

Podemos supor que G é conexo. (Por quê?)

Seja u um vértice de G. Considere a partição (X, Y):

$$X = \{v \in V : dist(u, v) \text{ é par}\},$$
$$Y = \{v \in V : dist(u, v) \text{ é ímpar}\}.$$

Precisamos provar que **não existe aresta** em G ligando dois vértices de X ou dois vértices de Y, i.e., que X e Y são **conjuntos independentes**.

Grafos bipartidos

Provar que X e Y são **conjuntos independentes**.

Suponha **por contradição** que existe uma aresta $e = (v, w)$ **com ambos extremos no mesmo conjunto** (X ou Y, indistintamente).

Grafos bipartidos

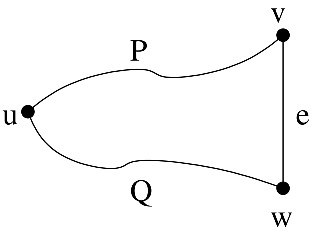
Provar que X e Y são **conjuntos independentes**.

Suponha **por contradição** que existe uma aresta $e = (v, w)$ **com ambos extremos no mesmo conjunto** (X ou Y, indistintamente).

Seja:

- P o caminho mais curto de u a v;
- Q o caminho mais curto de u a w.

Por definição de X e Y, P e Q têm a **mesma paridade**.
Considere o passeio fechado que começa com u, passa por P, pela aresta (v, w), e finaliza voltando a u através de Q. É um **passeio fechado ímpar**.



Grafos bipartidos

Esse **passeio fechado ímpar** contém um ciclo ímpar?

Grafos bipartidos

Esse **passeio fechado ímpar** contém um ciclo ímpar? – **SIM!** (*Por quê?)

Grafos bipartidos

Esse **passeio fechado ímpar** contém um ciclo ímpar? – **SIM!** (*Por quê?)

Lembrando que **precisamos provar** que se G não contém um ciclo ímpar $\Rightarrow$ G é bipartido.

Contradição.

Grafos bipartidos

Esse **passeio fechado ímpar** contém um ciclo ímpar? – **SIM!** (*Por quê?)

Lembrando que **precisamos provar** que se G não contém um ciclo ímpar $\Rightarrow$ G é bipartido.

Contradição.

Portanto, a nossa suposição está errada: **não existe** aresta $e = (v, w)$ **com ambos extremos no mesmo conjunto**, seja X ou Y.

$\Rightarrow$ G é bipartido. ■

Exercício

Pensar um exemplo de um grafo que não contém um ciclo ímpar, e **encontrar os conjuntos** X, Y usados na caracterização de grafos bipartidos.

Coloração de vértices

E se tivéssemos mais de dois conjuntos / cores?

- Uma coloração de um grafo G é uma atribuição de cores aos vértices de G de forma que vértices adjacentes recebem cores diferentes.

Coloração de vértices

E se tivéssemos mais de dois conjuntos / cores?

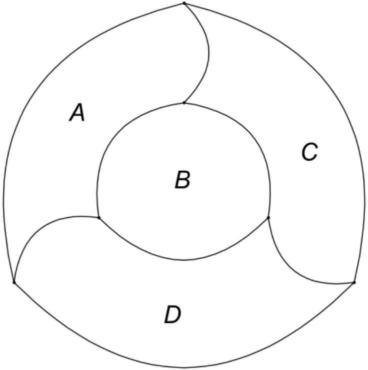
- Uma coloração de um grafo G é uma atribuição de cores aos vértices de G de forma que vértices adjacentes recebem cores diferentes.
- O número cromático do grafo, $\chi(G)$, é o menor número de cores necessárias para obter uma coloração de G.
- Para grafos que não contém ciclos ímpares, o teorema mostra que $\chi(G) = 2$, desde que o grafo tenha pelo menos uma aresta.

Aplicação: Coloração de mapas

Qual é o **menor número de cores necessário para pintar qualquer mapa** de forma que duas regiões adjacentes não recebam a mesma cor?

- Um mapa pode ser representado através de um grafo;
- Os vértices são as regiões do mapa;
- Dois vértices / regiões são adjacentes se elas possuem uma fronteira em comum.
- Estes grafos possuem características específicas, e são chamados de **planares**.

Aplicação: Coloração de mapas



- Grafos planares como este sugerem que as vezes precisamos de no mínimo 4 cores.
- Não fica claro se 4 é suficiente, ou se as vezes precisaríamos de mais cores.
- Em 1852, foi proposta a conjectura das quatro cores, que sugere que 4 cores são suficientes.
- Em 1879, Alfred Kempe publicou uma prova, que 11 anos depois foi declarada incorreta.

Aplicação: Coloração de mapas

Problema das quatro cores: **Se G é um grafo planar $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$.**

- Em 1890, Percy Heawood descobriu um erro de Kempe, porém conseguiu o resultado para 5 cores.
- Este foi um dos mais famosos problemas em aberto até 1976, quando foi finalmente provado por Kenneth Appel e Wolfgang Haken.
- Foram 1200 horas de cálculos em um computador, analisando 1834 das chamadas configurações redutíveis, gerando múltiplas controvérsias entre matemáticos.
- **A prova do problema das quatro cores também é importante porque foi a primeira grande prova de um teorema auxiliada por computador.**

Resumo

Síntese

- O conceito de **isomorfismo** de grafos permite identificar grafos com a mesma estrutura, independentemente dos nomes ou rótulos dos vértices.
- Vimos as definições dos diferentes percursos em grafos: **passeio, trilha, caminho, ciclo**.
- Estudamos a **conexidade** de grafos e as suas componentes.
- Definimos os **grafos bipartidos** e encontramos sua caracterização usando ciclos ímpares.

Exercícios

- Encontre um grafo com 4 vértices que seja **isomorfo ao seu complemento** (grafo **auto-complementar** de 4 vértices).
- Certo ou errado? Todo passeio fechado contém um ciclo.
- Prove que todo grafo conexo $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, tem um vértice v tal que $G - v$ é conexo.

Bibliografia

T. Cormen et al. Algoritmos - Teoria e Prática (3a ed.). – **Parte VIII, Cap. B.4, B.5**

J. L. Szwarcfiter. Grafos e Algoritmos Computacionais (2a ed.). – **Cap. 2 (p. 35-73)**.

Dúvidas

Dúvidas?