알고리즘에 필요한 수학

CS202 Lecture Notes

Department of Computer Sciences
KAIST

What we learn

- 이항 계수의 계산
- 반복적 제곱법
- 포함 배제 원리

큰 수를 대하는 우리의 자세

- 이번에 우리가 다루게 될 수는 대부분 매우 커서, int에 안 들어갑니다.
- 때문에, 적당한 수로 나눈 나머지를 출력하게 할 것입니다.

Code

```
// C++
(a + b) % m == (a % m + b % m) % m
(a - b) % m == (a % m - b % m + m) % m
                      // WHY +m?
(a * b) % m == ((long long) (a % m) * (b % m)) % m
                      // WHY long long?
(a / b) % m == ((a % m) / (b % m)) % m
                      // DOES IT WORK?
```

${}_nC_r$, 혹은 $\binom{n}{r}$ (1/3)

- n 명의 사람들이 CS202를 듣고 있다.
- r 명의 사람들에게 A+을 주고 싶다.
- 가능한 경우의 수는?

${}_nC_r$, 혹은 $\binom{n}{r}$ (1/3)

- n 명의 사람들이 CS202를 듣고 있다.
- r 명의 사람들에게 A+을 주고 싶다.
- 가능한 경우의 수는?
- 고등학교 때 배운 식 : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

${}_nC_r$, 혹은 $\binom{n}{r}$ (2/3)

- 우리가 쓸 또 다른 식 : $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

${}_nC_r$, 혹은 $\binom{n}{r}$ (2/3)

- 우리가 쓸 또 다른 식 : $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$
- $n = 0$ or $r = 0$ 일 때는 안 되지만, $\binom{n}{0} = 1$ 이라 OK.

${}_nC_r$, 혹은 $\binom{n}{r}$ (2/3)

- 우리가 쓸 또 다른 식 : $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$
- $n = 0$ or $r = 0$ 일 때는 안 되지만, $\binom{n}{0} = 1$ 이라 OK.
- Good : 식으로 써서 증명
- Better : n번째 사람에게 A+을 줬는지, 안 줬는지로 케이스를 나눠보기!

${}_nC_r$, 혹은 $\binom{n}{r}$ (3/3)

- 고등학교 때 배운 식 : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
- 우리가 쓸 또 다른 식 : $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

${}_nC_r$, 혹은 $\binom{n}{r}$ (3/3)

- 고등학교 때 배운 식 : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
- 우리가 쓸 또 다른 식 : $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$
- 두번째 식은 나눗셈을 쓰지 않는다!
- 2차원 배열을 사용해서 문제를 해결할 수 있음.
  $binom[n][r] = binom[n-1][r-1] + binom[n-1][r];$

이진 제곱법 (1/3)

- $5^{1000000000000}$ 을 12345 로 나눈 나머지는?

이진 제곱법 (1/3)

- $5^{1000000000000}$ 을 12345 로 나눈 나머지는?
- $A^{2k} = A^k \times A^k$
- $A^{2k+1} = A^k \times A^k \times A$
- A^n는 $A^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 를 알면 바로 구할 수 있다!

이진 제곱법 (1/3)

- $5^{1000000000000}$ 을 12345 로 나눈 나머지는?
- $A^{2k} = A^k \times A^k$
- $A^{2k+1} = A^k \times A^k \times A$
- A^n는 $A^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 를 알면 바로 구할 수 있다!
- 시간 복잡도 : $O(\log N)$

조금 더 어렵게 (2/3)

- $\sum_{i=0}^{1000000000000} 5^i$ 를 12345 로 나눈 나머지는?

조금 더 어렵게 (2/3)

- $\sum_{i=0}^{1000000000000} 5^i$ 를 12345 로 나눈 나머지는?
- 고등학교 때 배운 식 : $(5^{1000000000001} - 1)/4$
- 또 나눗셈이 문제!

조금 더 어렵게 (3/3)

- $\sum_{i=0}^{2k-1} 5^i = \sum_{i=0}^{k-1} 5^i + \sum_{i=k}^{2k-1} 5^i$
- $\sum_{i=0}^{2k-1} 5^i = (1+5^k) \sum_{i=0}^{k-1} 5^i$
- $\sum_{i=0}^{2k-1} 5^i$은 $\sum_{i=0}^{k-1} 5^i$ 를 구하면 $O(\log k)$에 구할 수 있다.

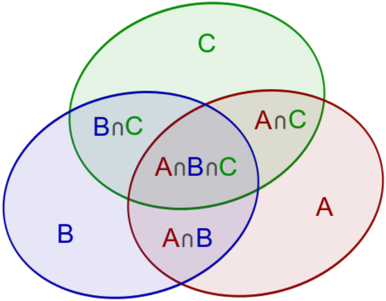
조금 더 어렵게 (3/3)

- $\sum_{i=0}^{2k-1} 5^i = \sum_{i=0}^{k-1} 5^i + \sum_{i=k}^{2k-1} 5^i$
- $\sum_{i=0}^{2k-1} 5^i = (1 + 5^k) \sum_{i=0}^{k-1} 5^i$
- $\sum_{i=0}^{2k-1} 5^i$은 $\sum_{i=0}^{k-1} 5^i$ 를 구하면 $O(\log k)$에 구할 수 있다.
- 나머지는 실습 시간에 ㅎㅎ

포함 배제 원리

- 유한 집합들의 합집합의 원소를 세는 기법
- 집합이 두 개인 경우: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 집합이 세 개인 경우는?

포함 배제 원리: 집합이 세 개인 경우



[1]

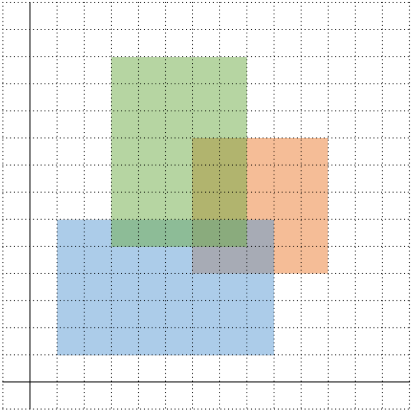
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Inclusion-exclusion_principle

일반적인 경우

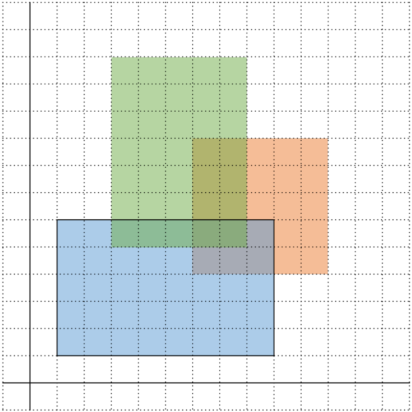
$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = &\sum_{i=1}^{n} |A_i| \\
&- \sum_{i,j\,:\,1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| \\
&+ \sum_{i,j,k\,:\,1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&- \cdots \\
&+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

Example: Shade

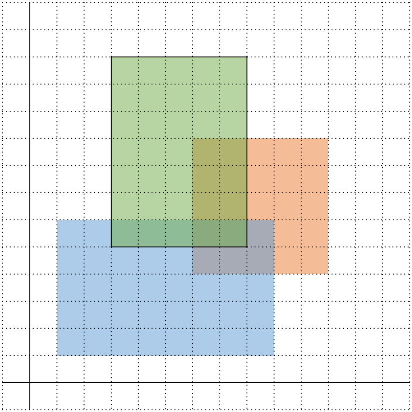


- 세 직사각형 넓이의 합집합의 넓이를 구해보자.

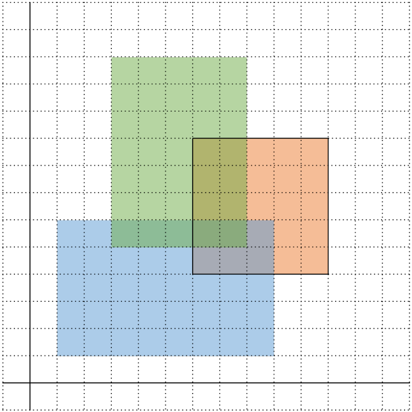
Example: Shade



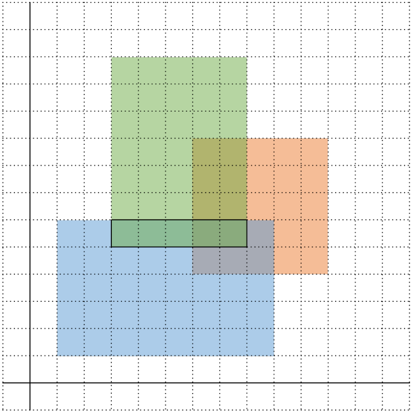
Example: Shade



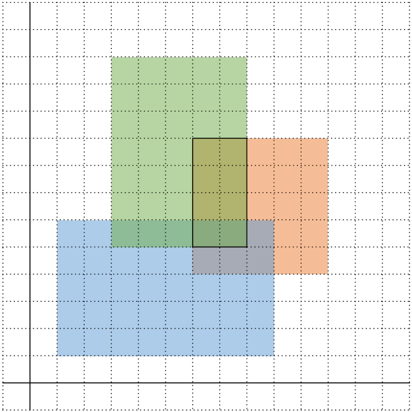
Example: Shade



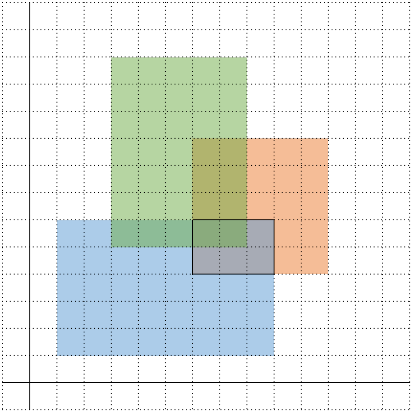
Example: Shade



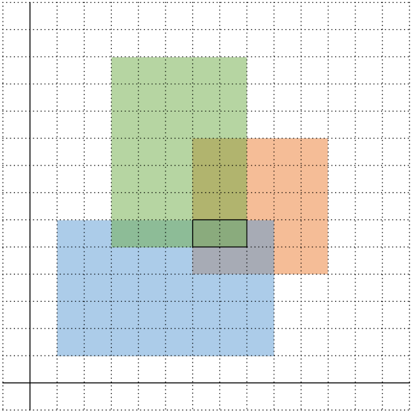
Example: Shade



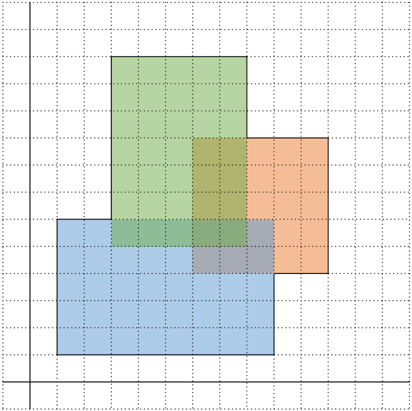
Example: Shade



Example: Shade



Example: Shade



- 합집합의 넓이: $40 + 35 + 25 - 5 - 8 - 6 + 2 = 83$