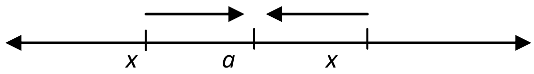
LİMİT FORMÜLLERİ

Tanım:



- ✓ x değişkeni a sayısına, a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya soldan yaklaşma deriz ve $x \to a^-$ şeklinde gösteririz.

- ✓ x değişkeni a sayısına, a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya sağdan yaklaşma deriz ve $x \to a^+$ şeklinde gösteririz.

- ✓ x değişkeni bir a noktasına sağdan yaklaştığında bir limiti varsa buna fonksiyonun sağdan limiti denir ve $lim_{x\to a^+} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

- ✓ x değişkeni bir a noktasına soldan yaklaştığında bir limiti varsa buna fonksiyonun soldan limiti denir ve $lim_{x\to a^-} f(x) = K$ biçiminde gösterilir.

- ✓ $lim_{x\to a^+} f(x) = lim_{x\to a^-} f(x)$ ise $lim_{x\to a} f(x) = L$

- ✓ $lim_{x\to a^+} f(x) \neq lim_{x\to a^-} f(x)$ ise limit yoktur.

Limitin Özellikleri

$lim_{x\to a} f(x) = L_1$, $lim_{x\to a} g(x) = L_2$ ve $L_1, L_2, c \in R$ olmak üzere.

- $lim_{x\to a} c = c$
- $lim_{x\to a}(f(x) \mp g(x)) = L_1 \mp L_2$
- $lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$
- $lim_{x\to a}(c.f(x)) = c.lim_{x\to a} f(x) = c.L_1$
- $lim_{x\to a}[f(x)]^n = [lim_{x\to a} f(x)]^n = (L_1)^n$
- $lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = L_1.L_2$
- $lim_{x\to a}|f(x)| = |lim_{x\to a} f(x)| = |L_1|$
- $lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$
- $lim_{x\to a} c^{f(x)} = c^{lim_{x\to a} f(x)} = c^{L_1}$

Not:

$$lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & , \quad n \text{ çift sayı} \\ yoktur & , \quad n \text{ tek sayı} \end{cases}$$

$$lim_{x\to \mp\infty} \frac{1}{(x-a)^n} = 0 \qquad , \qquad (n \in Z^+)$$

Sıkıştırma Teoremi

f,g,h fonksiyonları bir A kümesinde tanımlı ve $\forall x \in A$ için
$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ve
$lim_{x\to a} f(x) = lim_{x\to a} g(x) = l$ ise
$lim_{x\to a} h(x) = l$ dir.

Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

$a \in R$ olmak üzere ;

- $lim_{x\to a} \sin x = \sin a$
- $lim_{x\to a} \cos x = \cos a$
- $lim_{x\to a} \tan x = \tan a \quad (\cos a \neq 0)$
- $lim_{x\to a} \cot x = \cot a \quad (\sin a \neq 0)$
- $lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
- $lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$ dir.
- $lim_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x} = lim_{x\to \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesinde Limit

Tanım:

Reel sayılar kümesine $-\infty$ ve $+\infty$ un katılmasıyla elde edilen kümeye genişletilmiş reel sayılar kümesi denir ve $\bar{R}$ ile gösterilir.

Yani $\bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ dur. Genişletilmiş reel sayılar kümesinde $x \to \pm\infty$ için limitleri inceleriz.

- ✓ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom fonksiyonunda,
  $lim_{x\to\infty} f(x) = lim_{x\to\to\infty} a_n x^n$ dir.

- ✓ $a > 1$ *ise*

  $lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

- ✓ $0 < a < 1$ *ise*

  $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$

Belirsizlikler:

- $\frac{0}{0}$ *Belirsizliği*

  $lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ *oluyorsa kesrin pay ve paydası (x-a) parantezine alınarak sadeleştirme yapılarak sonuç bulunur. Sadeleştirme yapılamıyorsa L'HOSPİTAL yöntemi kullanılır.*

L'HOSPİTAL YÖNTEMİ

$f:[a,b]\to R$ ve $g:[a,b]\to R$ olmak üzere (a,b) aralığında sürekli ve türevlenebilen iki fonksiyon olsun.

$$\boldsymbol{lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \ ise \ lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

$$\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \ ise \ lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

- $\frac{\infty}{\infty}$ *Belirsizliği*

  $f(x) = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0}$ *olsun*

  $$lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & , \ n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & , \ n = m \\ \pm\infty & , \ n > m \end{cases}$$

- $0.\infty$ *Belirsizliği*

  Bu tür belirsizliklerde çarpanlardan birinin çarpmaya göre tersi alınarak $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine dönüştürülerek çözüm yapılır.

- $\infty - \infty$ *Belirsizliği*

  - ✓ $lim_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+c} = lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{a}.\left|x+\frac{b}{2a}\right|\right)$

  - ✓ $f(x) = \sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1} - \sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2}$ *olsun.*

  $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & , \quad a_1 > a_2 \\ \dfrac{b_1 - b_2}{2\sqrt{a}} & , \quad a_1 = a_2 \\ -\infty & , \quad a_1 < a_2 \end{cases}$$