Correction détailée TD 1, exo2, (r)

Etude de la série
$$\sum_{n\geqslant 1}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^\alpha}\right)-1\right] \text{ avec } \alpha\in\mathbb{R}$$

Correction :

Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*, a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^\alpha}\right)-1$.

On a
$$\begin{aligned}
a_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^\alpha}\right)-1\\
&= \exp\left[\ln\left(\underbrace{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^\alpha}\right)}_{\text{strictement positif}}\right)\right]-1\\
&= \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^\alpha}\right)\right]-1.
\end{aligned}$$

Pour la suite, supposons $\alpha>2$. Cela permettra de ne pas avoir de problème avec les développements limités. Nous déduirons ensuite le comportement pour $\alpha\leq 2$.

En utilisant le développement limité de la fonction ln au voisinage de 1 on a
$$\begin{aligned}
a_n &\geq \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^\alpha}\right]-1\\
&\geq \exp\left[\frac{n(n+1)}{n^\alpha}\right]-1\\
&\geq \frac{n(n+1)}{n^\alpha}+o(n^{\alpha-2}).
\end{aligned}$$

Par comparaison avec les séries de Riemann, $\sum b_n$ diverge pour tout $2<\alpha\leq 3$ et donc il en est de même pour $\sum a_n$.

Comme pour tout $\alpha'\leq\alpha$, on a $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^{\alpha'}}\right)-1\leq\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^\alpha}\right)-1$, on en déduit que $\sum a_n$ diverge pour tout $\alpha\leq 3$.

Maintenant, supposons $\alpha>3$. On a
$$\begin{aligned}
a_n &\leq \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right)\right]-1\\
&\leq \exp\left[n\ln\left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right)\right]-1\\
&\leq \exp\left(\frac{n^2}{n^\alpha}\right)-1\\
&\leq \frac{1}{n^{\alpha-2}}+o(n^{-1})\\
&\leq o(n^{-1}) \;\text{ car } \alpha>3.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum a_n$ converge pour $\alpha>3$.