CC1 - TD8 - LU2MA260

Ex n°1 :

1/ On dit que $s_n = O(t_n)$ si il existe $M > 0$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $|s_m| \leq M t_m$.

2/ On dit que (u_n) une suite de réels ou complexes est de Cauchy lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, |u_p - u_q| < \varepsilon$.

Ex n°2 :

1/ La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge pour $s > 1$, diverge sinon.

2/ Pour tout $s > 2$, la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x^s}$ est definie continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et decroissante, telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(u_n = \int_1^n f(t)\,dt\right)_{n \geq 1}$ converge (Prop 2.3.1).

$$\int_1^n f(t)\,dt = \int_1^n \frac{1}{t^s}\,dt$$

$$= \left[\frac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^n$$

$$= \frac{n^{1-s}}{1-s} - 1 + s$$

Comme $1 - s < 0$, $\frac{n^{1-s}}{1-s} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ donc la suit $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge pour $s > 2$.

Exercice n° 3:

1/ $u_n = \frac{n}{n^3+1} \geq 0 \ \forall n$, on peut donc utiliser le test des equivalents des séries à termes positifs.

$u_n \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente,

donc $\sum u_n$ converge.

2/ $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, donc $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1+1/\sqrt{n}) \sim \frac{1}{n}$ et de plus

$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1+1/\sqrt{n}) \geq 0 \ \forall n \geq 1$ donc on utilise encore une fois

le test des equivalents des séries à termes positifs:

$\sum_{n\geq 1} 1/n$ diverge, donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ aussi.

3/ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! \times n^{an}}{n! \times (n+1)^{a(n+1)}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} \times (n+1)^{1-a}$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} = e^{an \ln(n/n+1)}$$
$$= e^{an \ln(1 - 1/n+1)}$$
$$= e^{-a+o(1)}$$

Ainsi, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} \xrightarrow{n\to+\infty} e^{-a}$

Utilisons la règle d'Alembert:

si $a>1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ donc $\sum u_n$ converge,

si $a=1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n\to+\infty} e^{-1} \in [0,1[$ donc $\sum u_n$ converge,

si $a<1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge.

4/ Le corollaire 2.4.5 du poly permettait directement de conclure, sinon utilisons le th. d'Abel.

Posons $a_n = e^{in\theta}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ fixé.

$$|1-e^{i\theta}| \times \left|\sum_{k=0}^{n} e^{im\theta}\right| = |1-e^{i(n+1)\theta}| \leq 2 \text{, donc la suite}$$

$\left(A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n\right)_{n\geq 1}$ est bornée.

La suite b_n est réelle, décroissante et converge vers 0.

Comme $u_n = a_n b_n$, la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 4 :

1/ Pour $n \geq 3$, on a $\frac{\sin(n)}{n} \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$ et donc $\left(2 + \frac{\sin(n)}{n}\right)^{-1} \leq 0.6$

$\sum_{n\geq 3}\left(2 + \frac{\sin(n)}{n}\right)^{-n} \leq \sum_{n\geq 3}(0.6)^n$ qui est une série géo convergente et donc $\sum_{n\geq 1}\left(2 + \frac{\sin(n)}{n}\right)^{-n}$ converge

2/ $$\sum_{k=N+1}^{M}\left(2 + \frac{\sin(n)}{n}\right)^{-n} \leq \sum_{k=N+1}^{M}(0.6)^{-n} = \left(\frac{3}{5}\right)^{N+1}\sum_{k=0}^{M-(N+1)}(3/5)^k$$

$$\leq \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{N+1}\sum_{k=0}^{M}(3/5)^k$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^{N+1} \times \frac{5}{2}$$

3/ On veut $R_N \leq 10^{-6}$ et donc on utilise la 2/ comme approximation.

$R_N \geq \frac{5}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{N+1}$ donc on résout

$$\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{N+1} \geq 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow (N+1)\ln(3/5) \geq \ln(2 \times 10^{-6} \times 1/5)$$

$$\Leftrightarrow N \geq \frac{\ln(2\times 10^{-6} \times 1/5)}{\ln(3/5)} - 1 := C$$

Ainsi pour $N \geq C$, qu'on peut calculer numériquement, on est certain d'avoir un résultat à 10^{-6} près.

Ex n° 5 :

1/ La série alternée converge.

2/ On a : $S_{2p} - S_{2(p+1)} = S_{2p} - S_{2p+2}$

$$= \sum_{k=0}^{2p} u_n - \sum_{k=0}^{2p+2} u_n$$

$$= -u_{2n+1} - u_{2n+2}$$

$$= b_{2n+1} - b_{2n+2} \geq 0$$

donc la suite (S_{2p}) est décroissante.

$$S_{2p+1} - S_{2(p+1)+1} = -b_{2n+2} + b_{2n+3} \leq 0$$

donc (S_{2p+1}) est croissante.

3/ Par definition, $R_N = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=0}^{n} u_n = S - S_n$ en définissant $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$R_{2N} = S - S_{2N} \geq S_{2N+1} - S_{2N}$$ (comme (S_{2p+1}) est croissante)

$$= u_{2N+1}$$

$$= (-1)^{2N+1} b_{2N+1} \leq 0$$

donc R_N est négatif pour N pair.

$$R_{2N+1} = S - S_{2N+1}$$

$$\leq S_{2N+2} - S_{2N}$$

$$= u_{2N+2}$$

$$= (-1)^{2N+2} b_{2N+2} \geq 0$$

donc R_N est positif pour N impair.