Sorbonne Université
LU2MA260 - Séries numériques et séries de fonctions
Controle Continu 1
Durée : 1h15

Instructions : Ecrivez votre nom, prénom et numéro d'étudiant. La qualité de la rédaction sera largement prise en compte. Ecrire au crayon à papier est autorisé.
Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1 [1 point]

1. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Rappeler la définition de $s_n = O(t_n)$.
2. Rappeler la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 2 [2 points]

1. Rappeler (sans démonstration) le comportement de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

en fonction de $s > 0$.
2. Prouver la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ pour $s > 2$.
Attention : On n'a pas le droit de s'aider de la 1), il s'agit bien d'une démonstration !

Exercice 3 [4 points]

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\textbf{1. } u_n = \frac{n}{n^3+1} \qquad \textbf{2. } u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\textbf{3. } u_n = \frac{n!}{n^{an}},\ a \in \mathbb{R} \qquad \textbf{4. } u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{in\theta}, \theta \in]0, 2\pi[$$

Exercice 4 [2 points]

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-n}$.
1. Montrer que pour tout $n \geq 3 : 0 < \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-1} \leq 0.6$. En déduire la nature de la série.
2. Prouver la majoration suivante du reste $R_N = \sum_{n\geq N+1} \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-n}$:

$$\forall N \geq 2 \quad R_N \leq \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{N+1}$$

3. Avec combien de termes dans la somme partielle est-on certain d'obtenir une valeur approchée à 10^{-6} près de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 5 [2 points]

On considère une série de terme général u_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n b_n$ où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ,positive, décroissante et tendant vers 0 .
1. Rappeler la nature de la série $\sum u_n$.
2. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$la suite des sommes partielles, montrer que la suite (s_{2p}) est croissante et que la suite (s_{2p+1}) est décroissante.
3. En déduire le signe du reste de notre série alternée, en fonction de n.