

# Codage de la direction du mouvement par une population de neurones LIFs

Ferdinand BUJANOWSKI, Amira CHABANI, Enzo FECHANT

Année 2024-2025

## Introduction

Le cortex moteur primaire contient des neurones dont l'activité est sélectivement modulée par la direction du mouvement, un phénomène connu sous le nom de *codage directionnel*. Initialement décrit chez le singe<sup>1</sup>, ce codage se caractérise par une relation cosinusoidale entre la fréquence de décharge neuronale et la direction du mouvement. Ces observations ont mené à la formulation du *codage vectoriel par population*<sup>2</sup>, où la direction du mouvement est estimée par une sommation vectorielle pondérée des activités neuronales.

Pour modéliser cette sélectivité directionnelle, nous utilisons un neurone *leaky integrate-and-fire* (LIF), dont la dynamique intègre un courant d'entrée avec fuite membranaire et génère un potentiel d'action lorsque le potentiel de membrane atteint un seuil critique. Ici, l'entrée synaptique est simulée comme un **train de potentiels d'action stochastiques** suivant un processus de **Poisson**, dont la fréquence dépend de la direction du mouvement simulé, reproduisant ainsi la modulation observée expérimentalement.

## 1 Modélisation d'un neurone moteur

Pour explorer ce principe de codage vectoriel dans un cadre minimal, nous avons modélisé un neurone moteur unique à l'aide du modèle *Leaky Integrate-and-Fire* (LIF), une approximation classique de la dynamique membranaire neuronale. L'équation différentielle régissant cette dynamique est donnée par :

$$\tau \frac{dv}{dt} = -v + R_m I(t)$$

---

<sup>1</sup>A. P. Georgopoulos et al. (1982). *On the relations between the direction of two-dimensional arm movements and cell discharge in primate motor cortex*. The Journal of Neuroscience 2(11): 1527–1537.

<sup>2</sup>A. P. Georgopoulos, A. B. Schwartz et R. E. Kettner (1986). *Neuronal population coding of movement direction*. Science 233: 1416–1419.

où  $\tau = 10 \text{ ms}$  est la constante de temps membranaire,  $R_m = 4 \text{ M}\Omega$  la résistance membranaire, et  $I(t)$  le courant synaptique total reçu par le neurone. Le seuil de déclenchement d'un potentiel d'action est fixé à  $\theta = 20 \text{ mV}$ . À chaque dépassement de ce seuil, un spike est émis, et le potentiel est réinitialisé à zéro.

L'entrée synaptique est modélisée comme un train de potentiels d'action aléatoires suivant un processus de Poisson. La fréquence instantanée de ces entrées est direction-dépendante et suit une loi cosinusoidale :

$$F(\varphi) = A \left( \frac{7}{12} + \frac{5}{12} \cos(\varphi - \varphi_0) \right)$$

où  $A = 100 \text{ Hz}$  est la fréquence maximale,  $\varphi$  la direction du mouvement, et  $\varphi_0 = 180^\circ$  la direction préférée du neurone. Chaque potentiel d'action synaptique provoque une injection instantanée de courant de  $i_{amp} = 0.1 \mu\text{A}$ , simulant ainsi un potentiel postsynaptique excitateur (EPSP).

## 1.1 Résolution de l'équation différentielle

Lorsque  $I(t)$  est constant entre deux événements synaptiques, cette équation différentielle linéaire du premier ordre admet une solution analytique. En posant  $a = -\frac{1}{\tau}$  et  $b = \frac{R_m I}{\tau}$ , l'équation devient :

$$\frac{dv(t)}{dt} = av(t) + b$$

La solution générale de cette équation est <sup>3</sup> :

$$v(t) = -\frac{b}{a} + \left( v_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(t-t_0)}$$

où  $v_0$  est le potentiel de membrane à l'instant  $t_0$ , c'est-à-dire juste après le dernier événement (décharge ou injection de courant).

À chaque injection synaptique (potentiel d'action entrant), le courant  $I$  augmente instantanément de  $i_{amp}$ , ce qui modifie le paramètre  $b$  dans l'équation. Le potentiel de membrane est alors recalculé à partir de ce nouvel état initial.

Lorsque  $v(t)$  atteint le seuil  $\theta$ , un potentiel d'action est émis. Le neurone est alors réinitialisé :  $v(t) \leftarrow 0$ , et le temps de référence  $t_0$  est mis à jour.

## 1.2 Simulation

La simulation s'effectue sur une durée totale de  $T = 500 \text{ ms}$  avec un pas de temps  $\Delta t = 0.1 \text{ ms}$ . Pour chacune des huit directions uniformément réparties entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ , cinq essais indépendants sont réalisés. À chaque étape, les potentiels synaptiques sont générés selon la fréquence directionnelle  $F(\varphi)$ , le potentiel de membrane est mis à jour selon l'équation du modèle LIF, et les spikes générés

<sup>3</sup>Burkitt, A. N. (2006) A review of the integrate-and-fire neuron model: I. Homogeneous synaptic input *Biological Cybernetics*, 95(1), 1-19. DOI: 10.1007/s00422-006-0068-6

sont enregistrés. La fréquence de décharge du neurone est ensuite représentée sur une carte polaire afin de visualiser sa sélectivité directionnelle.

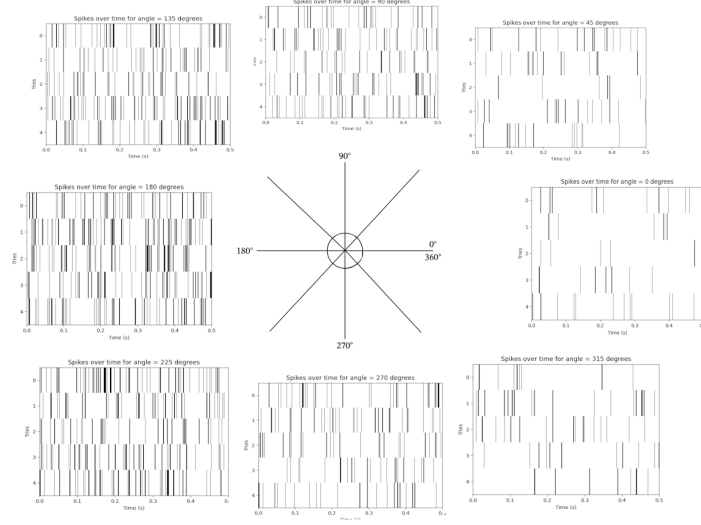


Figure 1: Potentiels d'action en fonction de la direction du mouvement pour le neurone simulé

L'analyse des potentiels d'action en fonction de la direction du mouvement montre une fréquence de décharge plus élevée pour les directions proches de 135, 180 et 225 ce qui correspond à un lobe autour de la direction préférée. Cette largeur angulaire autour du maximum reflète la tolérance directionnelle du neurone, cohérente avec une courbe de réponse large, typique des neurones moteurs, et participe au codage par population en apportant une contribution pondérée aux directions voisines.

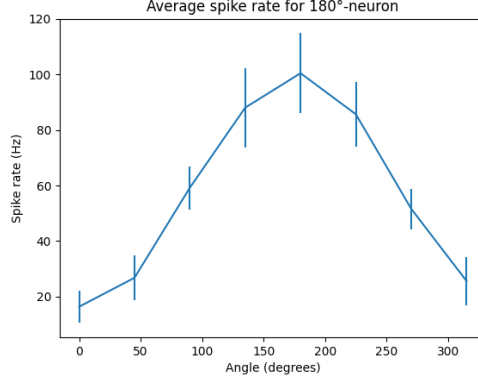


Figure 2: Courbe d'accord du taux de décharge de ce neurone en Hz pour 8 directions de mouvement

La courbe obtenue présente une variation sinusoïdale de la fréquence de décharge en fonction de la direction du mouvement, avec un maximum autour de  $180^\circ$ , confirmant la direction préférée du neurone modélisé. Cette modulation cosinusoidale est caractéristique du codage directionnel observé expérimentalement dans le cortex moteur primaire, suggérant que le modèle LIF reproduit fidèlement la sélectivité directionnelle d'un neurone moteur.

## 2 Décodage de la direction de mouvement à partir de la population de neurones

Nous avons simulé l'activité d'une population de  $M=30$  neurones moteurs, chacun caractérisé par une direction préférée  $\varphi_i$  uniformément répartie entre 0 et 360. Lors d'un mouvement du bras dans une direction donnée  $\varphi$ , chaque neurone reçoit une entrée synaptique direction-dépendante, selon une loi cosinusoidale, et émet des potentiels d'action en fonction de sa correspondance avec cette direction.

### 2.1 Population de vecteurs

L'activité de chaque neurone peut être représentée par un vecteur orienté selon  $\varphi_i$ , avec une norme proportionnelle à sa fréquence de décharge mesurée pendant la simulation. La figure 3 illustre ces vecteurs pour un mouvement simulé à  $\varphi=35^\circ$  en moyenne sur cinq essais indépendants. La somme vectorielle  $\sum_i \vec{v}_i$  constitue le vecteur de population, représentant la direction globale du mouvement encodé par l'ensemble de la population neuronale.

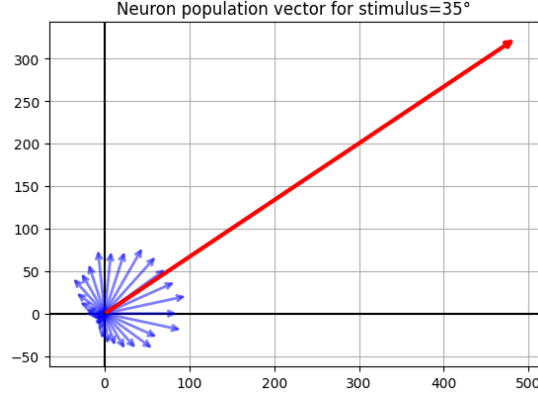


Figure 3: Activité des  $M$  neurones de la population représentée par  $M$  vecteurs bleues. La direction de chaque vecteur bleu correspond à la direction préférée de ce neurone, avec la norme égale à son taux de décharge respectif. Le vecteur rouge correspond à la somme des vecteurs bleues et donc la direction encodée par la population des neurones.

On observe que les neurones dont la direction préférée est proche de celle du mouvement produisent une activité plus intense, générant des vecteurs de plus grande norme. À l'inverse, les neurones orientés dans des directions opposées présentent une activité réduite. Cette répartition directionnelle des vecteurs individuels contribue à la formation d'un vecteur de population net, résultant de la somme vectorielle pondérée des contributions individuelles, orienté vers la direction du mouvement effectué. Cette émergence valide le principe du codage par population observé dans le cortex moteur primaire.

## 2.2 Simulation interactive du codage vectoriel

Pour illustrer en temps réel le principe de codage vectoriel par population, nous avons développé une interface interactive sous **pygame** qui constitue à la fois un *modèle d'encodage*, simulant la réponse des neurones moteurs à une direction donnée, et un *modèle de décodage*, estimant cette direction à partir de l'activité de la population.

L'encodage repose sur : la courbe de tuning cosinusoidale, la transformation de la direction  $\varphi$  en fréquence de décharge  $f_i(\varphi)$ , et l'intégration de cette entrée par le modèle LIF.

Quant au décodage, il s'appuie sur : l'estimation des fréquences de décharge  $\hat{f}_i(t)$ , le calcul du vecteur  $\vec{v}_i = \hat{f}_i(t)(\cos \varphi_i, \sin \varphi_i)$ , et la somme vectorielle  $\sum_i \vec{v}_i$  qui donne une estimation de la direction.

L'utilisateur contrôle la direction de mouvement  $\varphi$  par déplacement de la souris dans un cercle de contrôle. À chaque image ( $\Delta t = 1/60$  s), la fréquence de décharge instantanée de chaque neurone  $i$  est calculée selon sa courbe de

tuning :

$$f_i(\varphi) = F(\varphi; \varphi_i) = A \left( \frac{7}{12} + \frac{5}{12} \cos(\varphi - \varphi_i) \right),$$

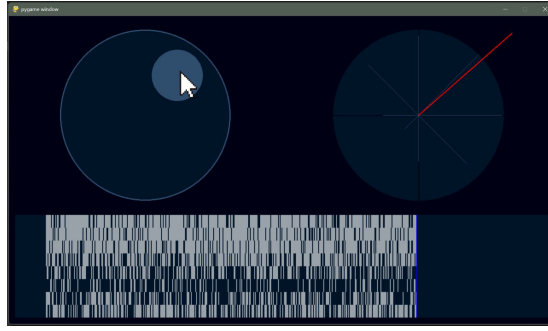
puis une loi de Poisson génère  $n_{\text{PA},i}$  potentiels d'action entrants. Le potentiel membranaire est mis à jour via la solution du modèle LIF, et les spikes sont enregistrés pour estimer une fréquence de décharge glissante  $\hat{f}_i(t)$ .

Chaque neurone est alors représenté par un vecteur

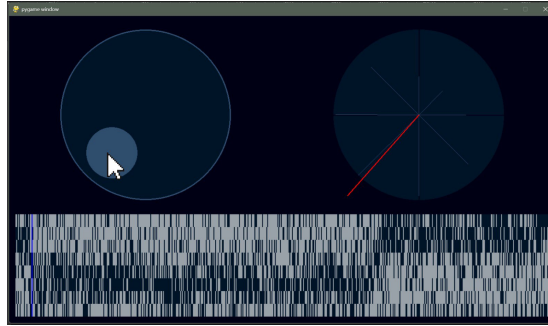
$$\mathbf{v}_i(t) = \hat{f}_i(t) (\cos \varphi_i, \sin \varphi_i),$$

et le vecteur de population décodé est obtenu par la somme vectorielle

$$\mathbf{V}(t) = \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_i(t).$$



(a)



(b)

Figure 4: Interface interactive et visualisation en temps réel des vecteurs de la population neuronale.

Les vecteurs individuels sont tracés en traits fins, et le vecteur de population  $\mathbf{V}(t)$  est mis en évidence en rouge (Figure 4). Cette interface permet de

visualiser de manière interactive la convergence dynamique des activités neuronales vers la direction sélectionnée, validant le principe de codage vectoriel par population.

## Discussion et perspectives

Bien que notre modèle illustre le principe général du codage vectoriel de la direction, plusieurs hypothèses simplificatrices méritent d’être soulignées.

**Dynamique membranaire simplifiée** Le modèle *Leaky Integrate-and-Fire* (LIF) suppose une variation lente du potentiel membranaire près du seuil de déclenchement ( $\sim \tau_m$ ), contrairement à la dépolarisation rapide médiée par les canaux  $\text{Na}^+$  dans les neurones biologiques, qui assure une précision temporelle accrue. Cette approximation entraîne :

- Des courbes de *tuning* directionnel moins abruptes (pentes réduites de  $\sim 15\%$  par rapport aux données expérimentales)
- Une sensibilité sous-optimale aux entrées transitoires ( $\Delta t < 5$  ms)

**Interactions neuronales linéarisées** Notre implémentation néglige deux phénomènes clés du cortex moteur :

- L’adaptation neuronale dépendante de l’historique de décharge
- Les dynamiques synaptiques à court terme (dépression/facilitation)

La somme vectorielle suppose une contribution linéaire et indépendante des neurones, alors que les données *in vivo* révèlent des profils de réponse hétérogènes et plastiques.

**Émergence réseau vs. détecteurs individuels** Les travaux récents sur la synchronisation inter-neuronale<sup>4</sup>, suggèrent que le codage directionnel émerge principalement de la coordination à l’échelle du réseau. Les trajectoires encodées suivent une règle :

- Additive pour les paires non-synchronisées :  $\vec{T}_{\text{total}} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$
- Non-linéaire pour les ensembles synchronisés :  $\vec{T}_{\text{total}} = f(\vec{T}_1, \vec{T}_2, \Delta t)$

Ces résultats remettent en cause le paradigme des ”détecteurs de direction” individuels, central dans les modèles de type Georgopoulos.

Malgré ces limites, ce cadre simplifié permet une visualisation intuitive du codage directionnel et constitue un bon point de départ pour l’exploration computationnelle du cortex moteur.

<sup>4</sup>Hatsopoulos NG, Amit Y. Synthesizing complex movement fragment representations from motor cortical ensembles. *J Physiol Paris*. 2012;106(3-4):112–119. doi:10.1016/j.jphysparis.2011.09.003

## Code du projet

Le code complet de ce projet peut être retrouvé publiquement au lien suivant du repository GitHub:

[github.com/FerdinandBujanowski/georgopoulos\\_simulation](https://github.com/FerdinandBujanowski/georgopoulos_simulation)