Построение трехмерного изображения

Преобразования на плоскости

Линейное на плоскости отображение задаётся соответствующей матрицей. Если мы возьмём точку (x,y), то её преобразование записывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2x \\ 3/2y \end{bmatrix}$$

Самое простое (невырожденное) преобразование заданное единичной матрицей, просто оставляет каждую точку на месте. Сами же коэффициенты на диагонали матрицы задают растягивание/сжатие плоскости, последний пример проиллюстрирован на рис. 1а. Белый объект (квадрат с отрезанным углом) преобразуется в жёлтый. Красный и зелёный отрезки дают единичные векторы по оси x и y, соответственно.

рис. 1а

Два оставшихся коэффициента матрицы отвечают за сдвиг вдоль соответствующих осей. На рис. 1б показан сдвиг вдоль оси x для приведенного преобразования.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y/3 \\ y \end{bmatrix}$$

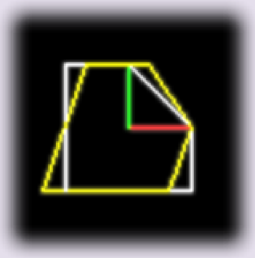


рис. 1б

Таким образом, базовых линейных преобразований на плоскости только два: растягивание по оси и сдвиг вдоль оси.

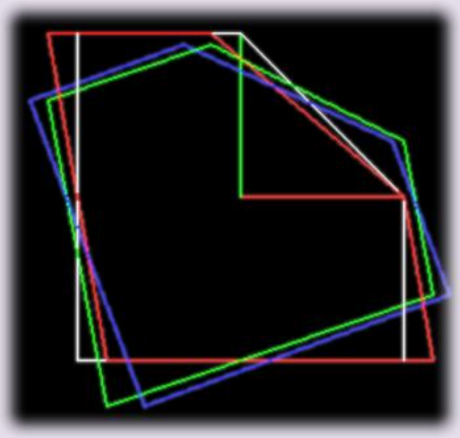


рис. 1в

Вращение может быть представлено как композиция трёх сдвигов показанных на рис 1в, здесь белый объект преобразован сначала в красный, затем в зелёный, после чего в синий.

Данное преобразование может быть напрямую описано матрицей вращения против часовой стрелки вокруг начала координат:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

На практике часто требуется подвергнуть объект сразу нескольким преобразованиям подряд. Матричный подход позволяет сначала перемножить все матрицы преобразования, после чего преобразовывать все координаты простым умножением на конечную матрицу. Перемножать матрицы, конечно, можно в любом порядке, только не надо забывать, что для матриц умножение некоммутативно: $|M_1|\cdot|M_2| \neq |M_2|\cdot|M_1|$. Что нормально, сдвинуть и затем повернуть не то же самое, что сначала повернуть, а затем сдвинуть.

Любое линейное преобразование на плоскости это композиция растягиваний и сдвигов. Что означает, что какой бы ни была матрица нашего преобразования, начало координат всегда перейдёт в начало координат. Таким образом, линейные преобразования — это прекрасно, но если мы не можем представить элементарного параллельного переноса, то наша жизнь будет печальна.

Так как параллельный перенос не является линейной операцией в двумерном пространстве, мы погружаем наше двумерное пространство в трёхмерное (добавив единицу в третью компоненту). Это означает, что наше двумерное пространство это плоскость z=1 внутри трёхмерного. Затем мы делаем линейное преобразование в трёхмерном пространстве и проецируем всё трехмерное пространство обратно на нашу физическую плоскость:

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \\ 1 \end{bmatrix}$$

При умножении этой матрицы и вектора, дополненного единицей, получается вектор с единицей в третьей компоненте, а оставшиеся имеют требуемый вид.

В общем виде для проецирования трёхмерного пространства обратно в нашу плоскость надо разделить соответствующие координаты на z. Тогда точка (x,y,0) проецируется в бесконечно далёкую точку в направлении (x,y). А что это? Правильно, это вектор! Таким образом однородные координаты дают возможность различать вектор и точку.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x/z \\ y/z \end{bmatrix}$$

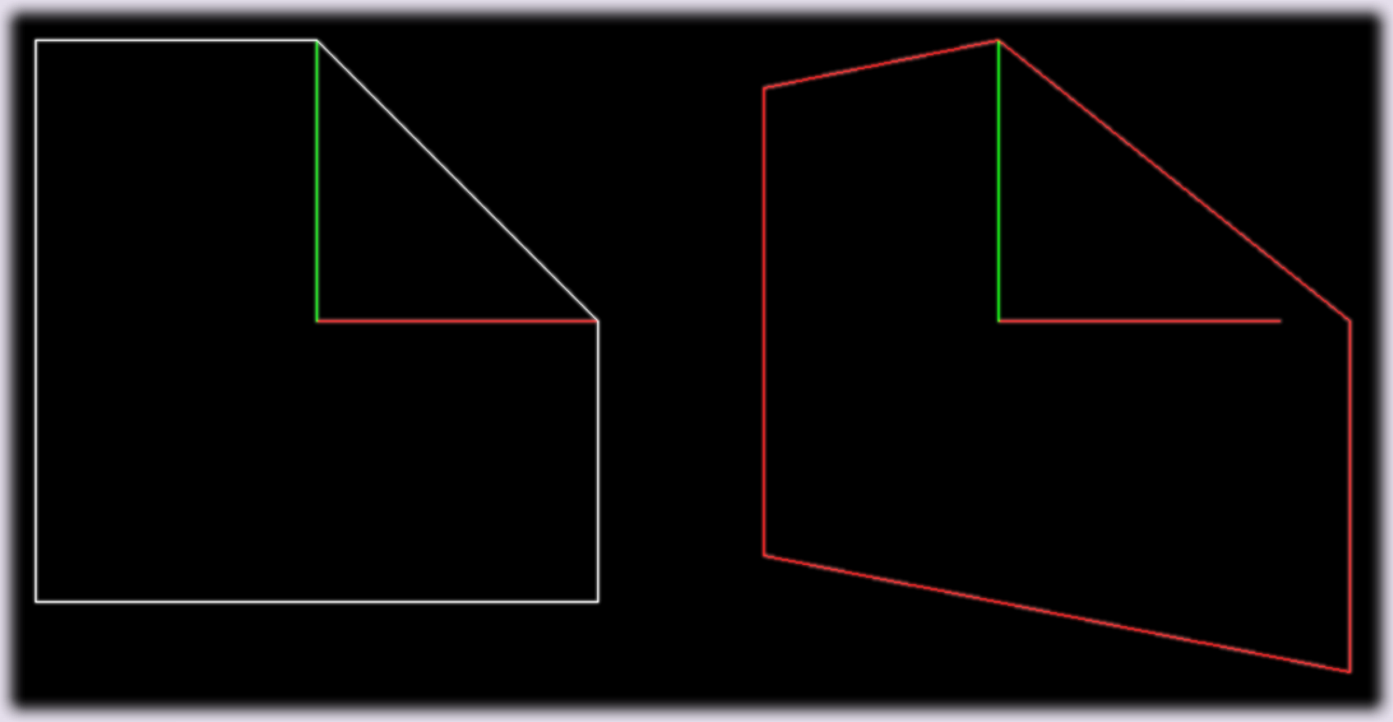


рис. 1г

С переходом в трёхмерное пространство в матрицу преобразований добавились нулевые коэффициенты в нижней строке. Которые каждое вертикальное ребро оставляет вертикальным, но при этом растягивает те, которые близко к камере, и сжимает те, что дальше от камеры. Правильно подобрав коэффициент растяжения-сжатия можно как раз достичь эффекта, что для простой ортогональной проекции получается изображение в перспективном искажении. На рис. 1г показан результат преобразования для следующей матрицы преобразований:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аффинные преобразования пространства

$$\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ j & k & l & s \end{bmatrix}$$

Аффинное преобразование евклидова пространства - комбинация линейных преобразований, при которых последняя строка в обобщенной матрице 4x4 равна (0, 0, 0, s). Результат преобразования взаимно однозначное точечное отображение плоскости или пространства на себя, при котором:

- прямые (плоскости) переходят в прямые (плоскости),
- пересекающиеся прямые (плоскости) в пересекающиеся,
- параллельные прямые (плоскости) в параллельные.

Подобно случаю с плоскостью, можно выделить следующие аффинные преобразования:

- S_{xyz} - Масштабирование или растяжение по соответствующим осям.
- Rf_{xy}, Rf_{yz}, Rf_{xz} - Зеркальное отражение по соответствующим осям.
- R_x, R_y, R_z - Вращение вокруг соответствующих осей.
- Sh_{xyz} - Сдвиг вдоль осей.
- T_{xyz} - Перенос по осям.

$$S_{xyz} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rf_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

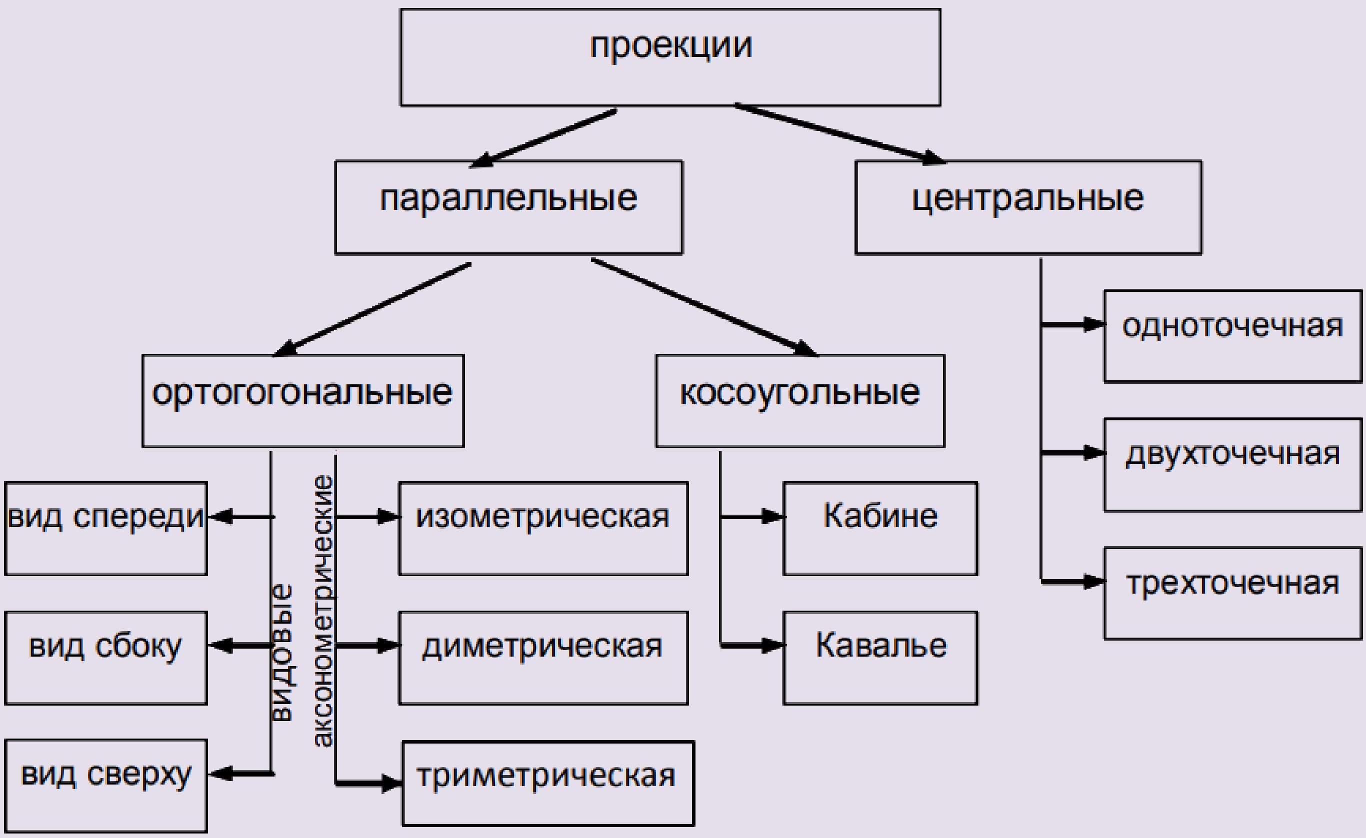
$$T_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rf_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Sh_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rf_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Проецирование пространства

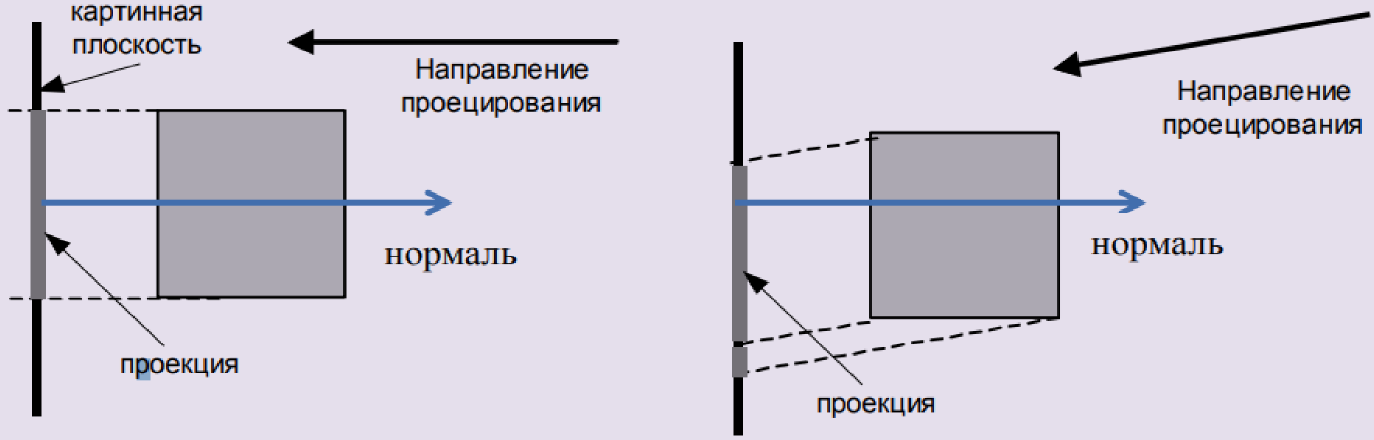
В общем случае проекции преобразуют точки, заданные в системе координат размерностью n, в системы координат размерностью меньше n.

Проекция трехмерного объекта строится на месте пересечения картинной плоскости и прямых проекционных лучей (проекторов), выходящих из центра проекции и проходящих через каждую точку объекта.



- **Перспективные** (центральные): центр проекции - в конечной точке.
- **Параллельные** (аффинные): центр проекции - в бесконечности

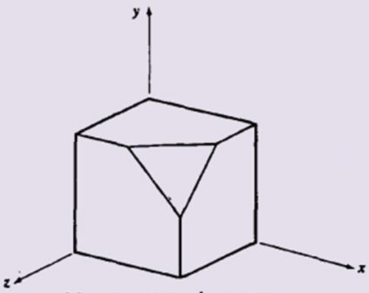
- **Ортогональные** – направление проецирования коллинеарно с нормалью к проекционной плоскости
- **Косоугольные** – направление проецирования и нормаль к проекционной плоскости не коллинеарны.



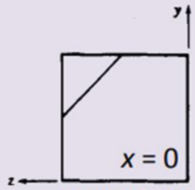
ортогональные проекции

косоугольные проекции

- **Видовые проекции** - Проекции на одну из координатных плоскостей x=0, y=0 или z=0, т.е. картинная плоскость перпендикулярна главной координатной оси, вдоль которой осуществляется проецирование. Самый простой вид проекции. Сохраняет истинные размеры и форму одной плоской грани объекта.

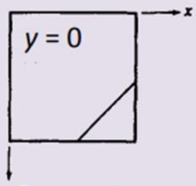


Исходная фигура



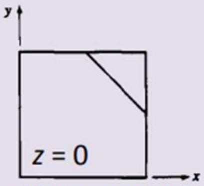
Вид сбоку

$$P_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = 0$$



Вид сверху

$$P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y = 0$$



Вид спереди

$$P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad z = 0$$

- **Аксонометрические проекции** - образуются манипулированием объекта с помощью поворотов и перемещений таким образом, чтобы были видны по крайней мере три соседние грани. Результат затем проецируется видовой проекцией на одну из координатных плоскостей, например, z = 0. При аксонометрическом проецировании сохраняется параллельность прямых, а углы изменяются; расстояние можно измерить вдоль каждой из главных координатных осей (в общем случае с различными масштабными коэффициентами).

- **Изометрическая проекция** - Все коэффициенты искажения по всем трём осям равны. Так как все 3 коэффициента искажения равны, то приравнивая первое уравнение ко второму, а второе к третьему, получим:

$$f_x^2 = (x_x^{*2} + y_x^{*2}) = \cos^2\phi + \sin^2\phi\sin^2\theta.$$
$$f_y^2 = (x_y^{*2} + y_y^{*2}) = \cos^2\theta,$$
$$f_z^2 = (x_z^{*2} + y_z^{*2}) = \sin^2\phi + \cos^2\phi\sin^2\theta.$$

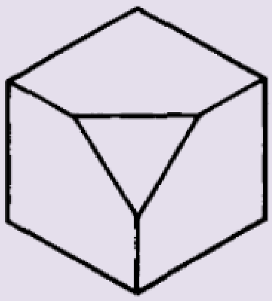
$$\sin^2\phi = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\sin^2\phi}{1+\sin^2\phi}$$

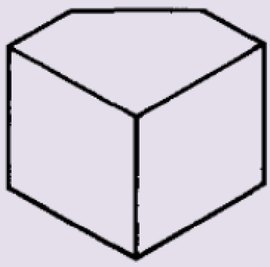
$$\sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

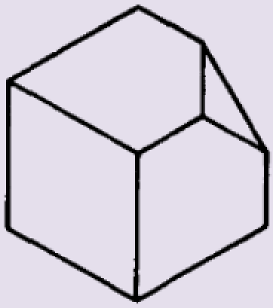
$$\sin^2\theta = 1/3 \text{ или } \sin\theta = \pm\sqrt{1/3} \text{ и } \theta = \pm 35,26^\circ$$

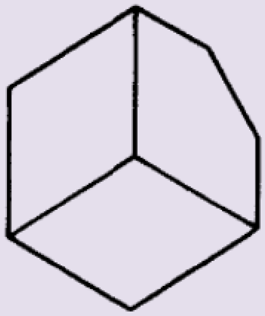
$$\sin^2\phi = \frac{1}{3} : \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \phi = \pm 45^\circ$$

Таким образом, для того, чтобы построить изометрическую проекцию, нужно повернуть исходную фигуру на углы $\phi = \pm 45^\circ$ относительно оси Y и $\theta = \pm 35^\circ$ относительно оси X. Что дает только четыре возможных изометрических проекции с коэффициентом искажения равным: $f = \sqrt{cos^2\theta} = \sqrt{2/3} \approx 0.8165$

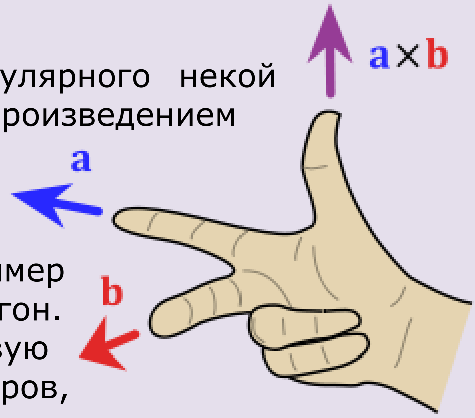

$\phi < 0, \ \theta > 0$


$\phi < 0, \theta < 0$

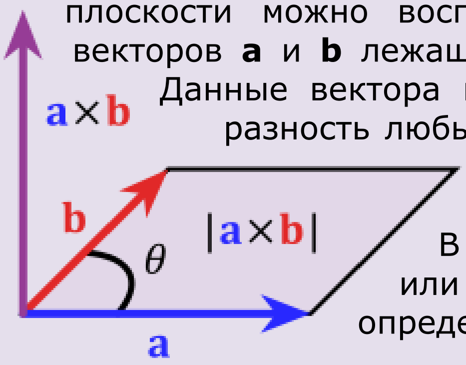

$\phi > 0, \theta > 0$


$\phi > 0, \theta < 0$

Вектор нормали



Для нахождения вектора нормали, перпендикулярного некой плоскости можно воспользоваться векторным произведением векторов **a** и **b** лежащими в данной плоскости. Данные вектора можно определить, через разность любых двух точек лежащих на данной плоскости, например вершин, образующих полигон. В результате получаем правую или левую тройку векторов, определяющих направление вектора нормали.



Очевидно, что после преобразований координат изменится и вектор нормали. Конечно в случае программной генерации объекта правила его определения известны, но в реальности, как правило приходиться работать с предварительно созданными с помощью редакторов моделями, что в частности содержат в себе заранее рассчитанные вектора нормалей, о правилах определения которых ничего не известно. А так как, на сцене может присутствовать множество высоко полигональных моделей, созданных различными людьми при помощи разных средств, разумнее всего просто трансформировать вектора нормалей не мучаясь способами их расчета:

1) Вычисляем обратную матрицу для подматрицы 3x3 полученную из матрицы преобразований. Это отменит растяжение, сдвиг, вращение и сместит объект обратно в локальную систему координат.
2) Теперь, если транспонировать полученную матрицу, мы вернем вращения в исходное состояние из-за ортогонального свойства матрицы вращения.

$$N^T V = 0$$

$$N^T M^{-1} M V = 0$$

$$\underbrace{\left(M^{-T} N\right)^T}_{N'^T} \underbrace{(MV)}_{V'} = 0$$

Это легко показать математически - Предположим, что есть вектор **V** в некой плоскости с вектором нормали **N**. Так как они перпендикулярны их скалярное произведение будет равно нулю, тогда после преобразования вектора **V** матрицей **M**, получим новый вектор **V'** и матрицу преобразований для вектора нормали **Q** = **M**$^{-T}$.

Эквивалентное преобразование вектора нормали, можно получить и при помощи более простой для вычислений матрицы **N**:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} m_{22}m_{11} - m_{12}m_{21} & m_{12}m_{20} - m_{10}m_{22} & m_{10}m_{21} - m_{20}m_{11} \\ m_{02}m_{21} - m_{22}m_{01} & m_{22}m_{00} - m_{02}m_{20} & m_{20}m_{01} - m_{00}m_{21} \\ m_{12}m_{01} - m_{02}m_{11} & m_{10}m_{02} - m_{12}m_{00} & m_{00}m_{11} - m_{10}m_{01} \end{bmatrix}$$