

Аффинные и перспективные преобразования и проекции

Лекция 6

Лектор – Болотова Юлия Александровна

Аффинные преобразования

Аффинное преобразование (АП)

АП евклидова пространства - **взаимно однозначное** точечное отображение плоскости или пространства на себя, при котором

- прямые (плоскости) переходят в прямые (плоскости),
- пересекающиеся прямые (плоскости) в пересекающиеся,
- параллельные - в параллельные.

Аффинное преобразование

- комбинация линейных преобразований, при которых последний столбец в обобщенной матрице 4×4 равен $(0 \ 0 \ 0 \ s)$:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ j & k & l & s \end{bmatrix},$$

т.к. в противном случае однородная координата $h \neq const \Rightarrow$ нет взаимно однозначного соответствия между преобразованием и (4×4) -матричным оператором.

Аффинные преобразования

$$S_{xyz} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rf_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & dz & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rf_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

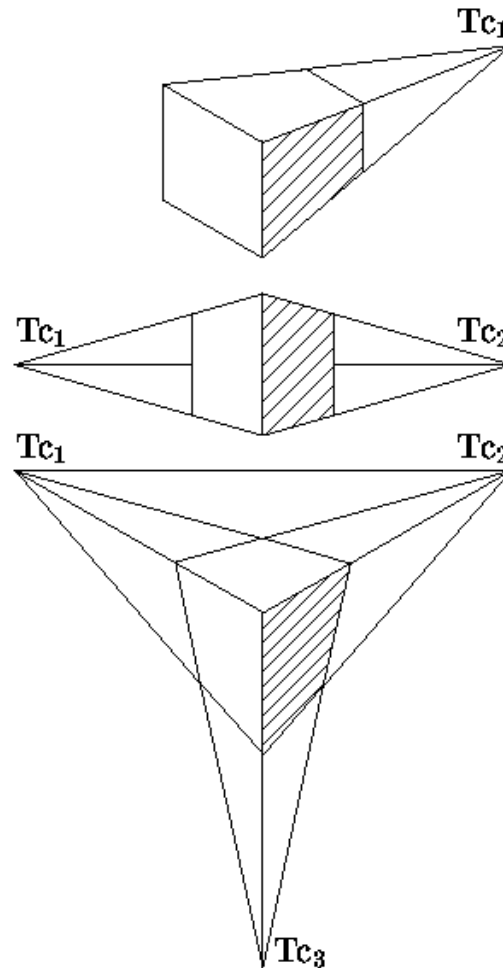
$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Sh_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rf_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перспективные преобразования



Перспективное преобразование(ПП)

ПП - это преобразование одного трёхмерного пространства в другое, при котором **параллельные прямые сходятся, размер объекта уменьшается с увеличением расстояния до центра наблюдения,** и происходит неоднородное искажение линий объекта, зависящее от ориентации и расстояния от объекта до центра проекции.

Это помогает нашему восприятию глубины, но не сохраняет форму объекта.

Перспективное преобразование

Преобразование, при котором не равен нулю любой из первых трех элементов четвертого столбца.

Матрицы *одноточечного перспективного преобразования*

$$P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

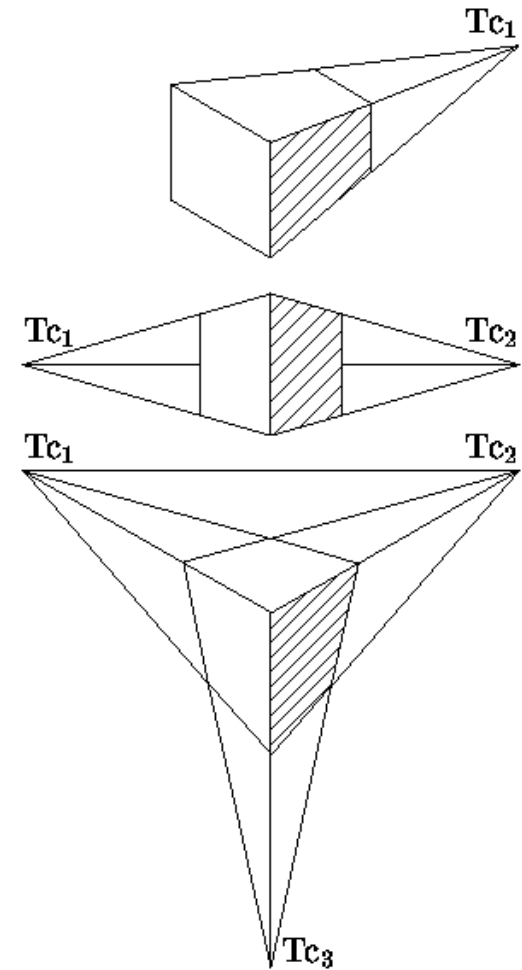
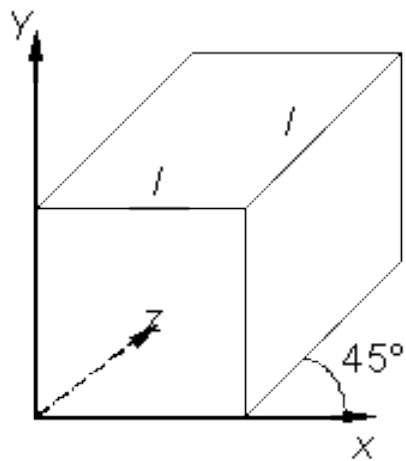
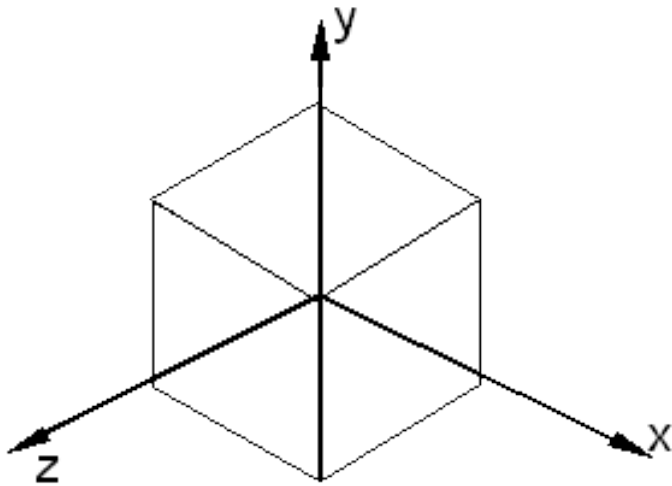
$$P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Преобразования куба:

аффинные

перспективные



Получение изображения на экране

- Аффинные и перспективные преобразования **трехмерны**, т.е. являются преобразованиями одного трёхмерного пространства в другое.
- Для отображения объектов на экране требуется **проецирование** из 3D пространства в 2D.

Проекции

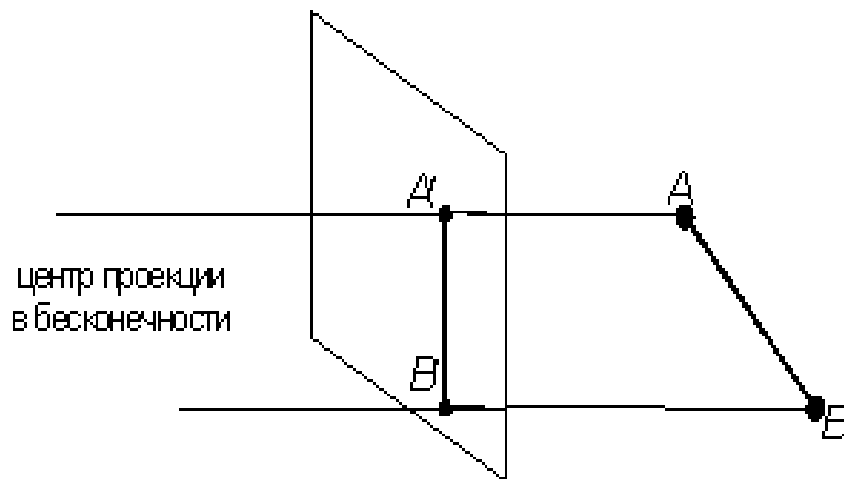
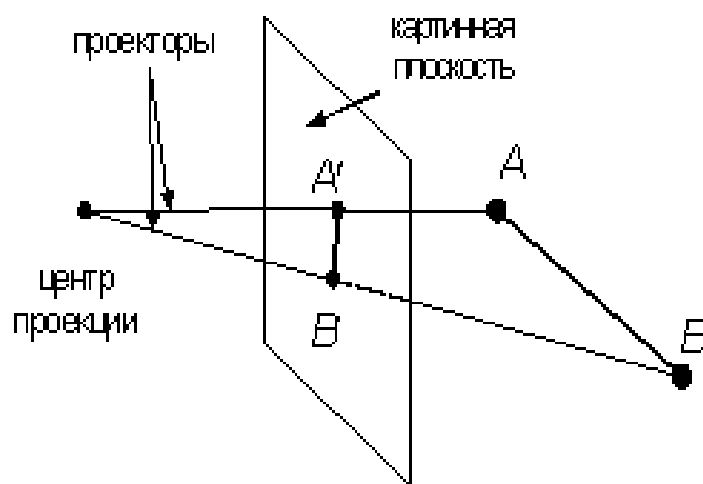
Проекции

В общем случае проекции преобразуют точки, заданные в системе координат размерностью n , в системы координат размерностью **меньше n** .

Далее будем рассматривать случай проецирования трёх измерений в два.

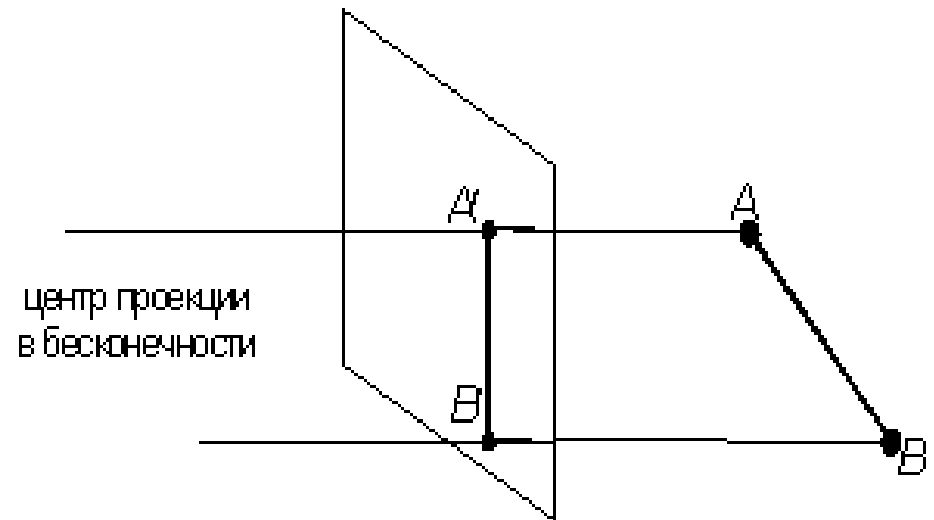
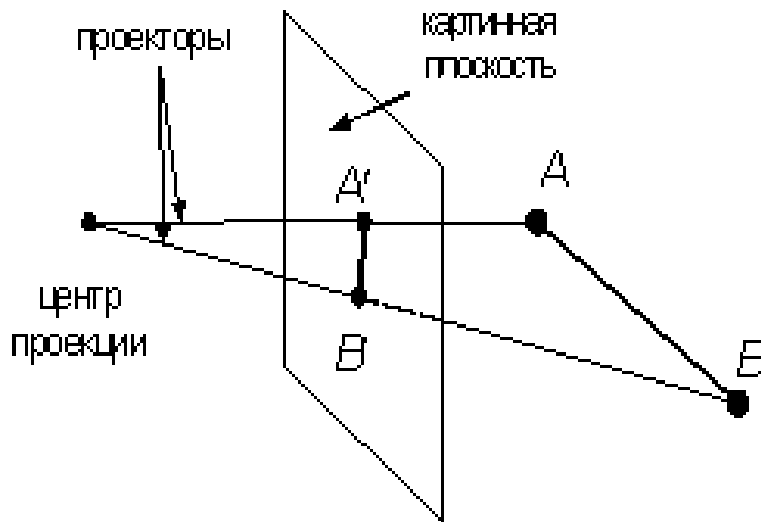
Плоские геометрические проекции

Проекция трехмерного объекта строится на месте пересечения **картинной плоскости** и **прямых проекционных лучей (проекторов)**, выходящих из **центра проекции** и проходящих через каждую точку объекта.



Проекции

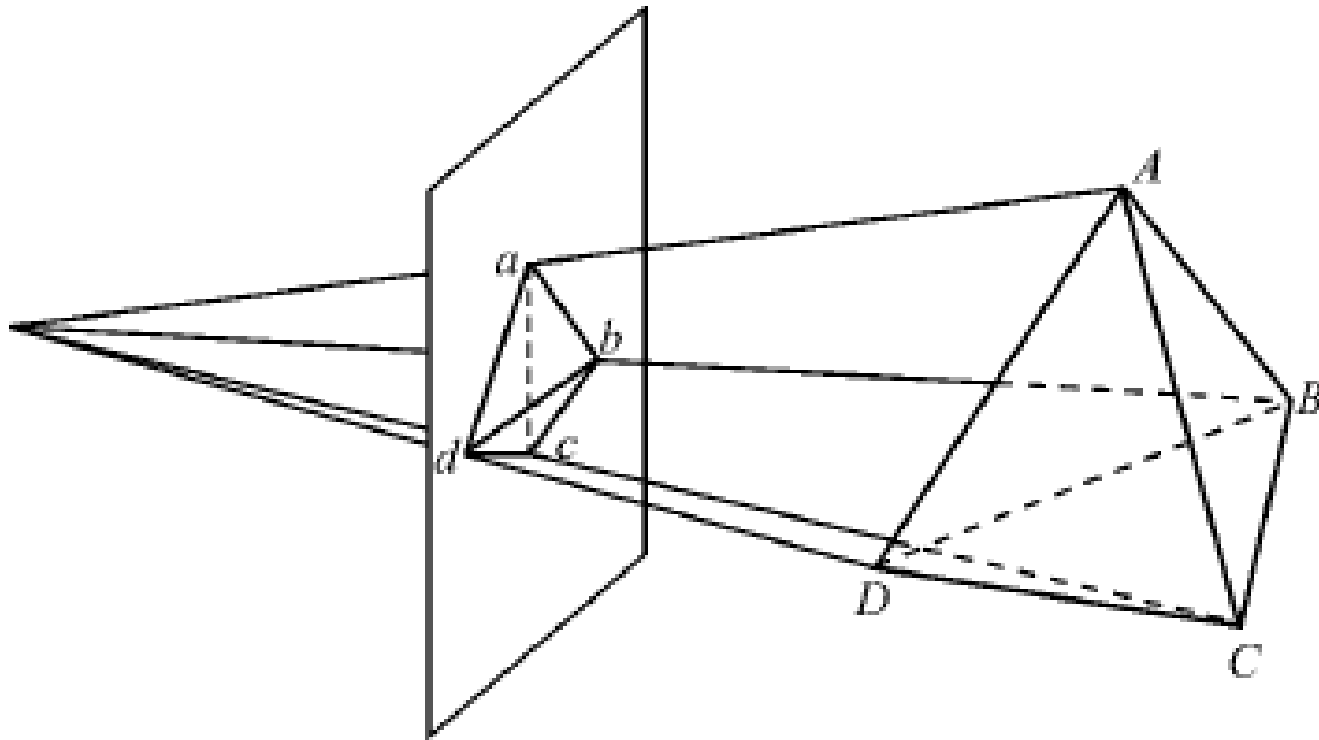
- **Перспективные (центральные):**
центр проекции - в конечной точке.
- **Параллельные (аффинные):**
центр проекции - в бесконечности



Что фиксируется?

Если объект большой (здание) – то перемещается наблюдатель (центр проекции).

Если маленький (книга) – то перемещается объект.



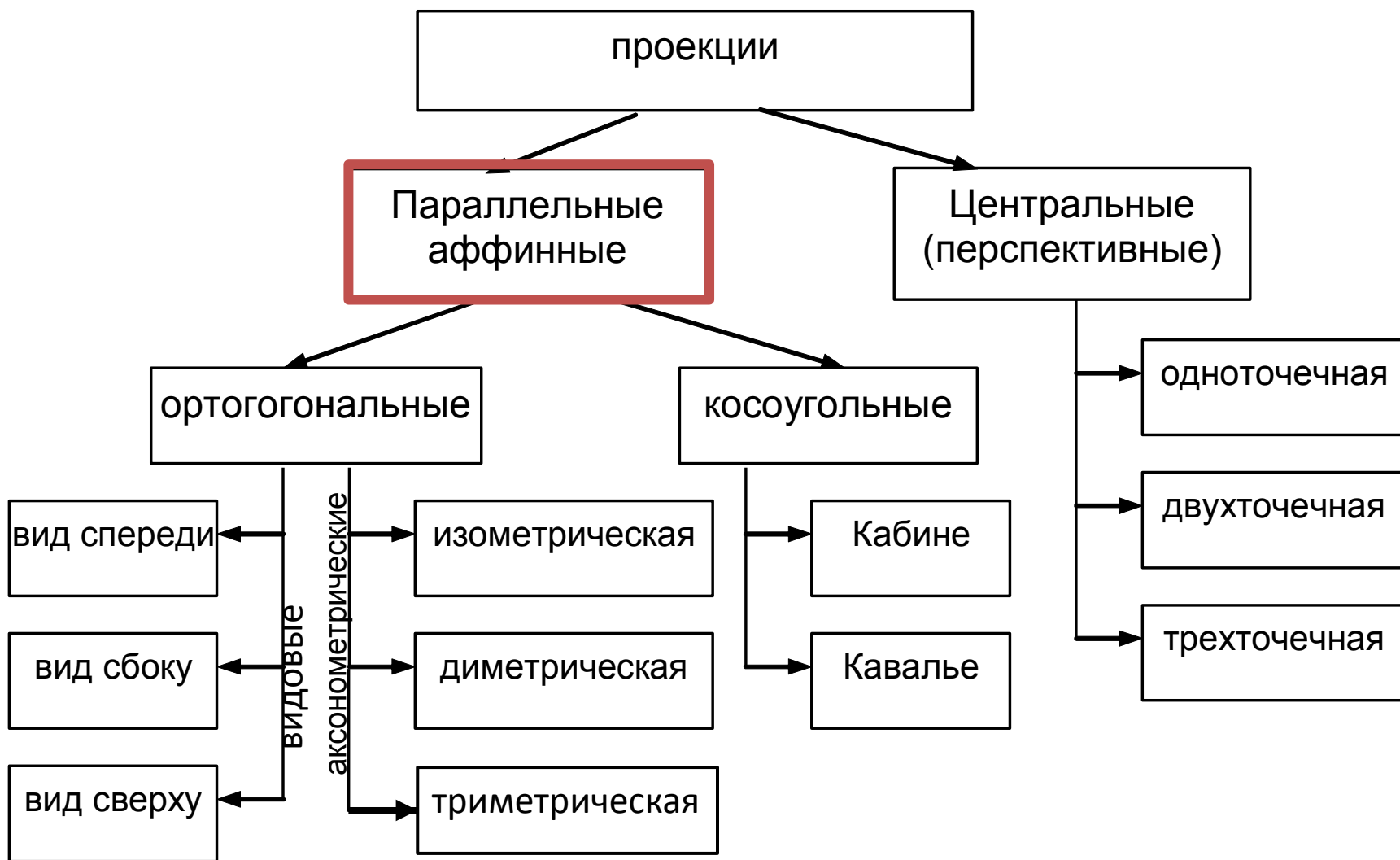
Матрица проекций

- Матрица проецирования из трёхмерного пространства в двумерное всегда содержит **столбец из нулей**, следовательно, детерминант этого преобразования всегда равен 0.

Примеры матриц различных проекций:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f \cos \alpha & -f \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Полная классификация проекций

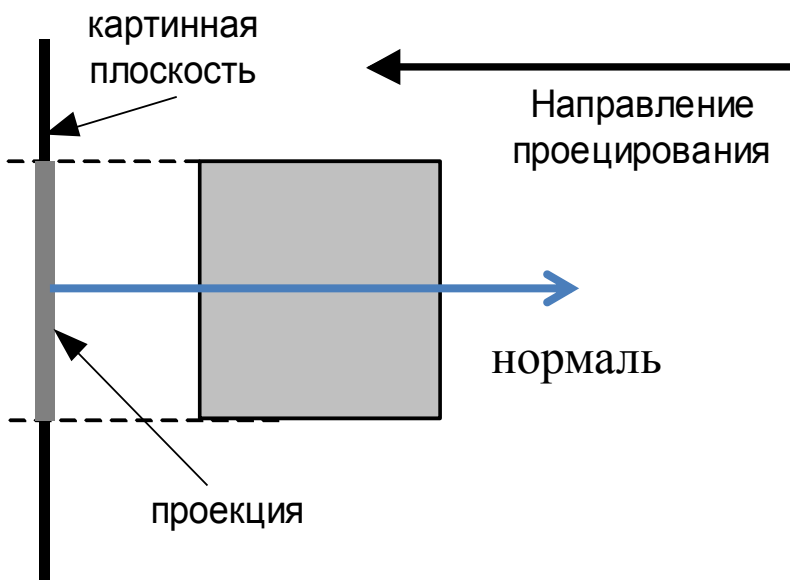


Параллельные проекции

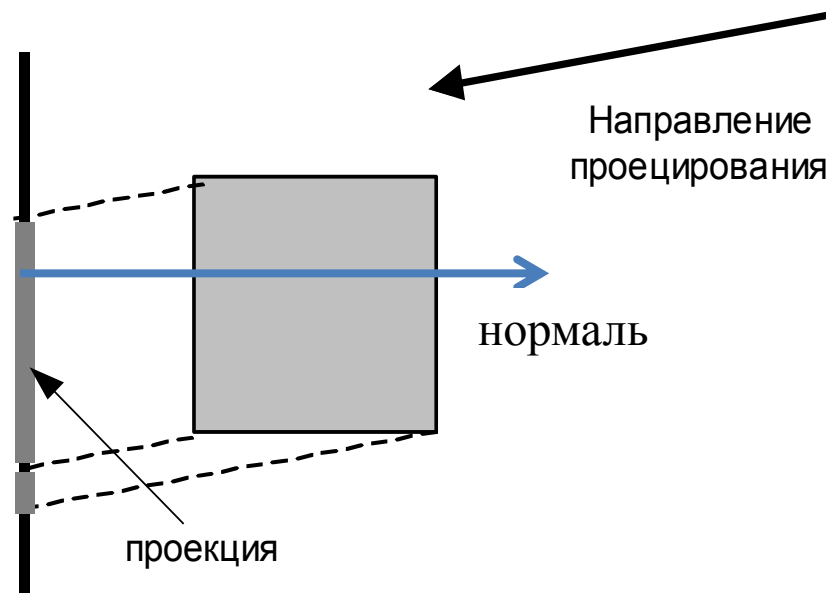
Параллельные проекции делятся на два типа в зависимости от соотношения между **направлением проецирования** и **нормалью к проекционной плоскости**:

- **ортогональные** – направление проецирования коллинеарно с нормалью к проекционной плоскости;
- **косоугольные** – направление проецирования и нормаль к проекционной плоскости не коллинеарны.

Ортогональные и косоугольные проекции

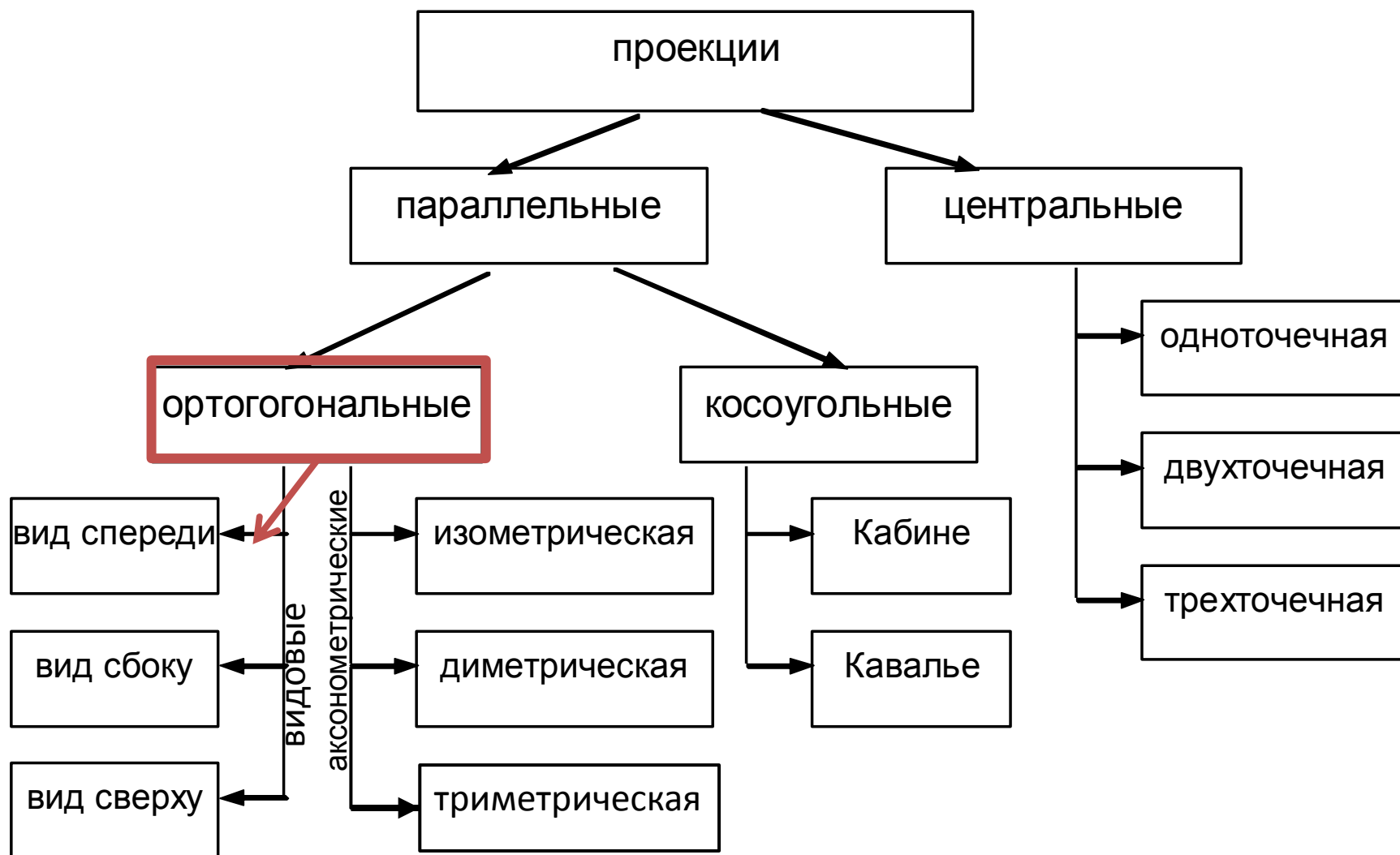


ортогональные проекции



косоугольные проекции

Полная классификация проекций



Видовые проекции

Проекции на одну из координатных плоскостей

$x = 0$, $y = 0$ или $z = 0$, т.е. **картинная плоскость перпендикулярна главной координатной оси**, вдоль которой осуществляется проецирование.

Самый простой вид проекции. Сохраняет истинные размеры и форму **одной** плоской **грани объекта**.

$$P_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = 0$$

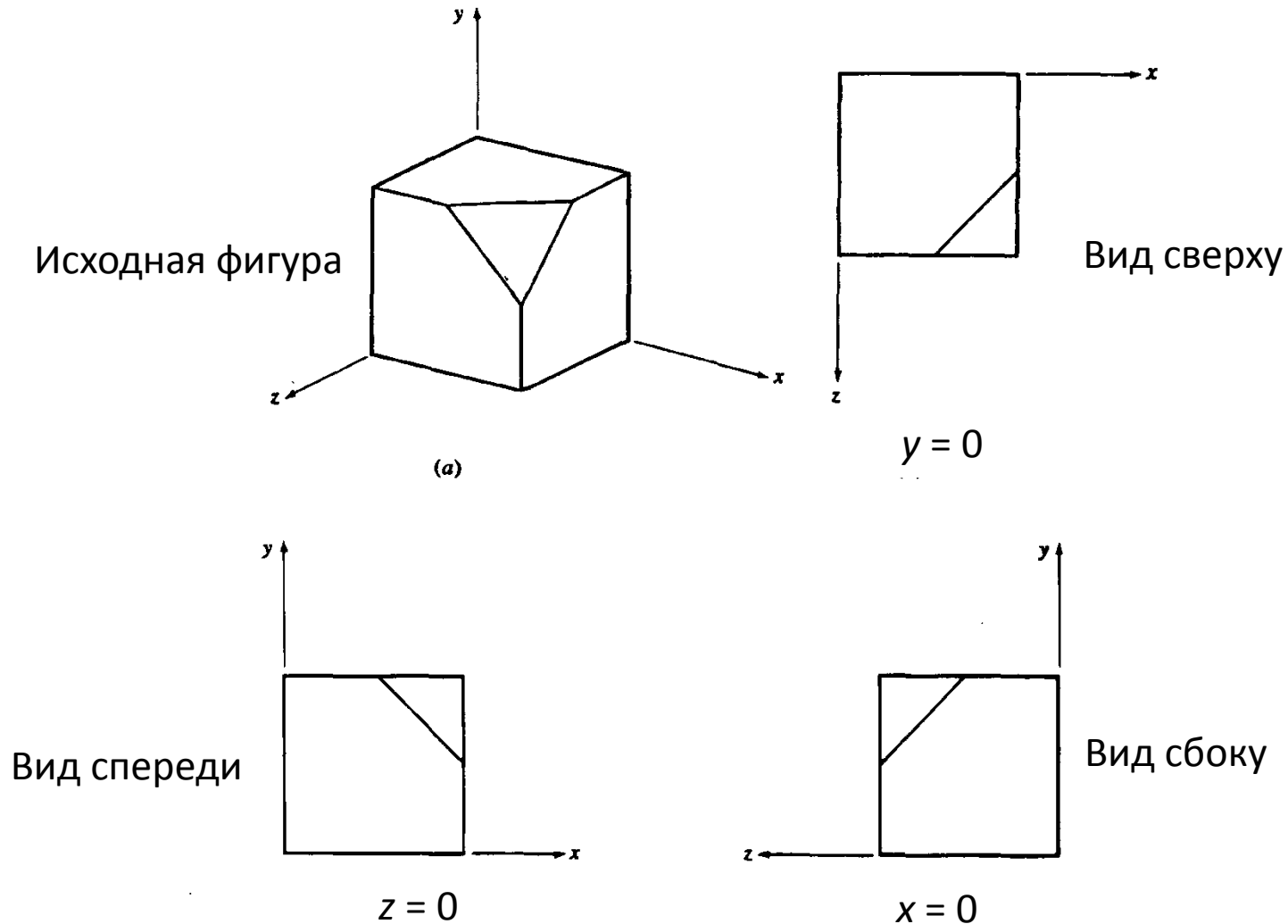
$$P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = 0$$

$$P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

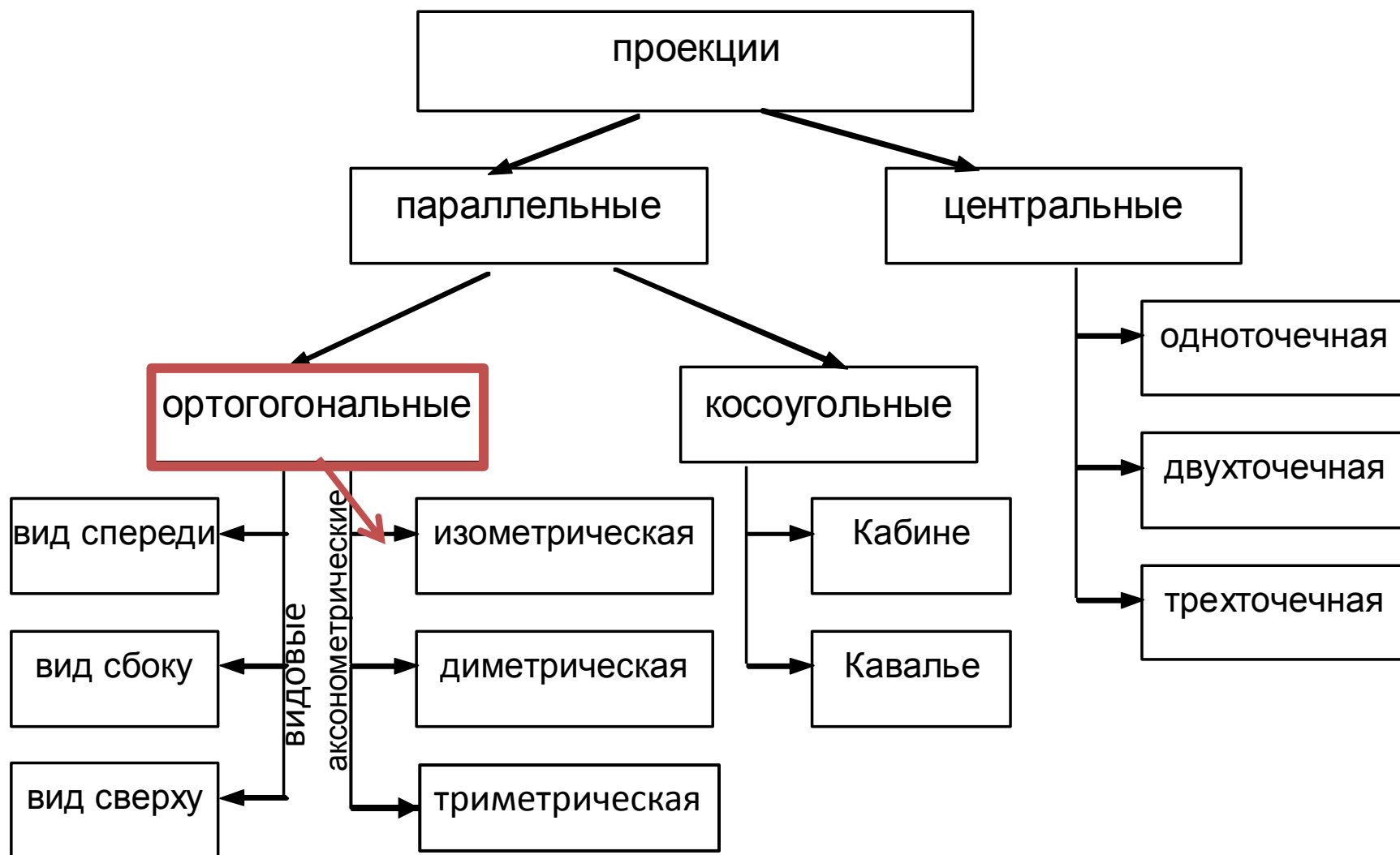
$$z = 0$$

Пример видовых проекций



НО! Одна ортогографическая проекция не может дать представление о общей трехмерной форме объекта.

Полная классификация проекций

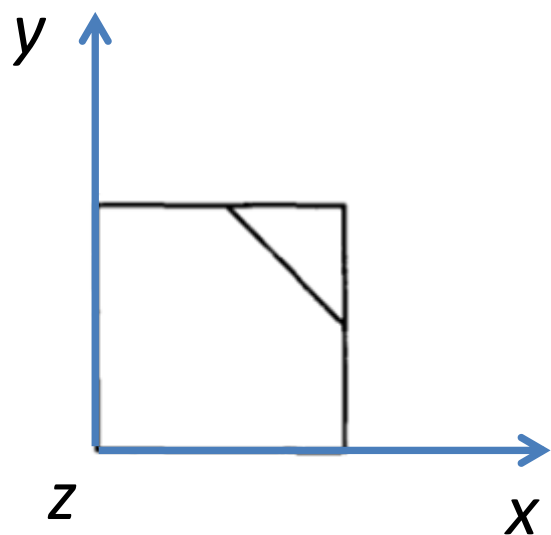


АксонOMETрические проекции

- **АксонOMETрическая проекция** образуется манипулированием объекта с помощью **поворотов и перемещений** таким образом, чтобы были видны по крайней мере **три соседние грани**.

Результат затем проецируется видовой проекцией на одну из координатных плоскостей, например, $z = 0$.

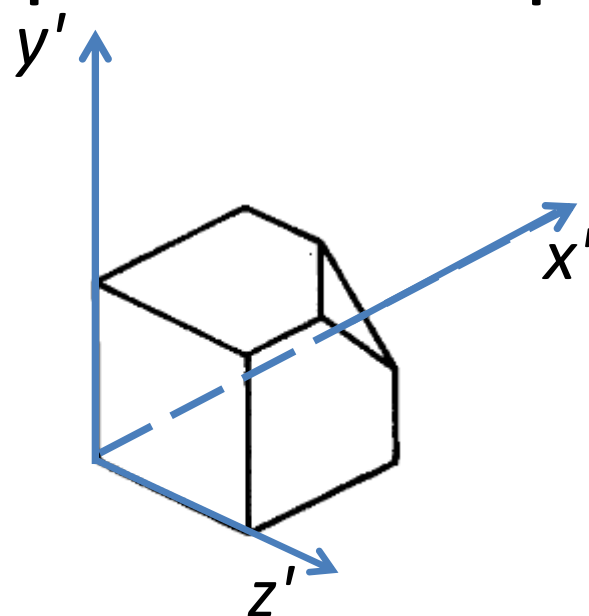
Построение аксонометрической проекции



$$\begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



1. Поворот относительно y .

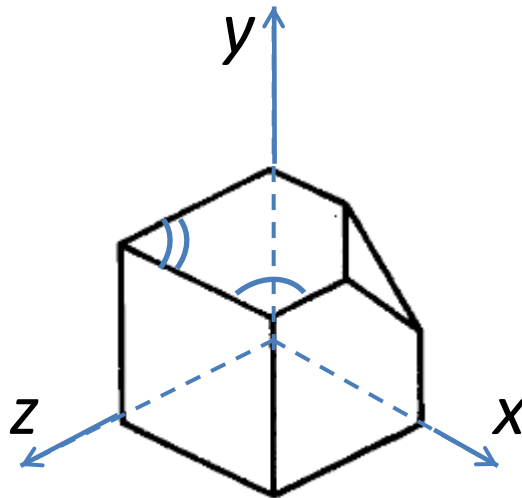
2. Поворот относительно x .

3. Проецирование.

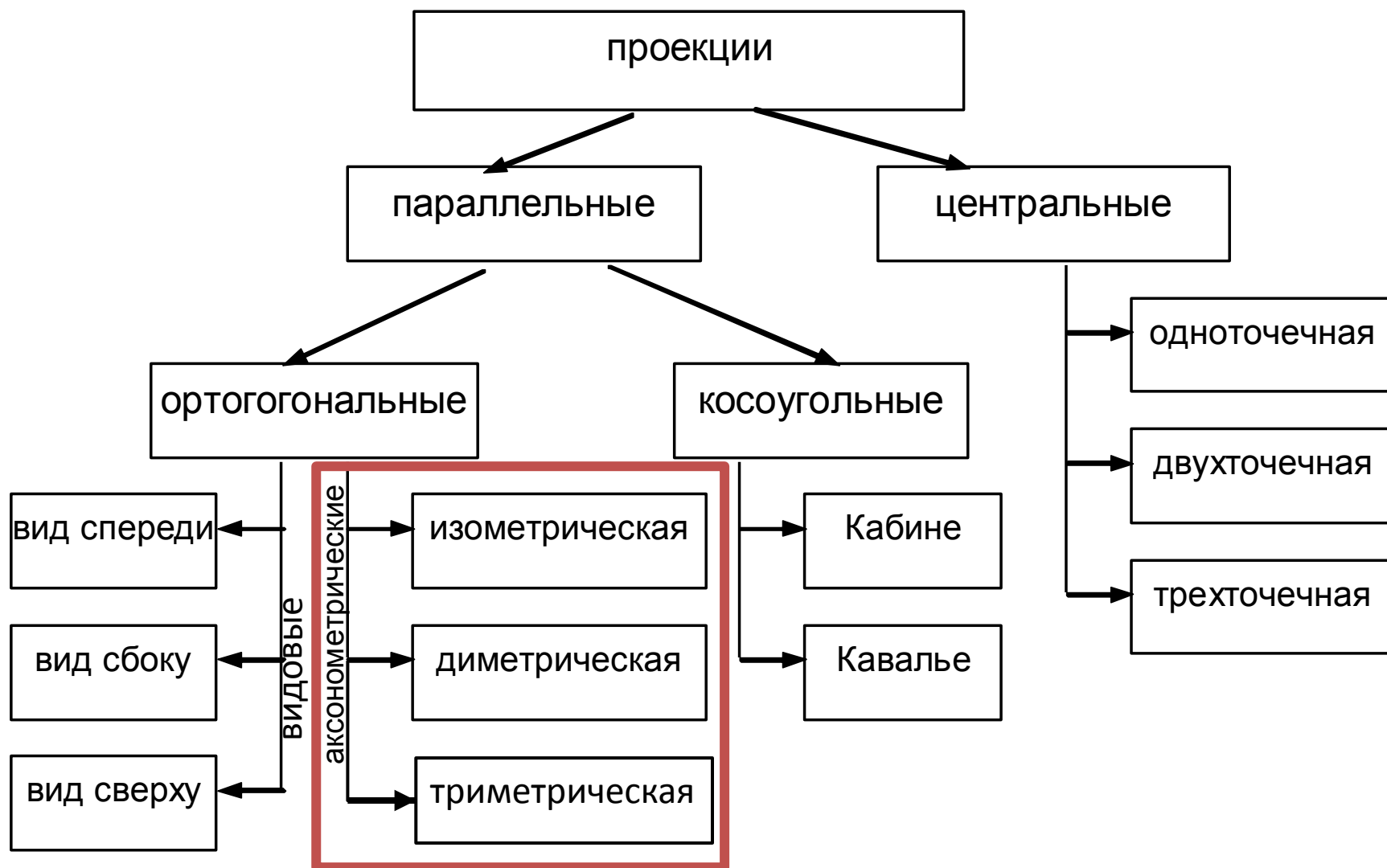
АксонOMETрические проекции

При аксонометрическом проецировании **сохраняется параллельность прямых, а углы изменяются;**

расстояние можно измерить вдоль каждой из главных координатных осей (в общем случае с различными масштабными коэффициентами).



Полная классификация проекций



Виды аксонометрических проекций

- **Триметрическая** (все 3 масштабных коэффициента различны).
- **Диметрическая** (2 одинаковых масштабных коэффициента).
- **Изометрическая** (3 одинаковых масштабных коэффициента).

Масштабные коэффициенты - коэффициенты искажения вдоль базисных осей пространства: Ox , Oy и Oz .

Триметрическая проекция

Триметрическая проекция

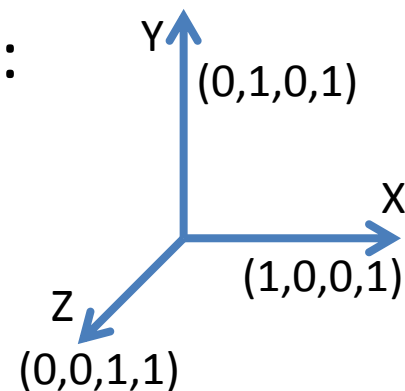
Вычисление коэффициентов искажения **единичных векторов** вдоль главных координатных осей:

Матрица преобразования

$$[U][T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\downarrow} [T] = \begin{bmatrix} x_x^* & y_x^* & 0 & 1 \\ x_y^* & y_y^* & 0 & 1 \\ x_z^* & y_z^* & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Исходные значения
базисных векторов
(единичных)

Результирующие значения
базисных векторов



Коэффициенты искажения вдоль спроецированных главных осей равны:

$$f_x = \sqrt{x_x^{*2} + y_x^{*2}},$$

$$f_y = \sqrt{x_y^{*2} + y_y^{*2}},$$

$$f_z = \sqrt{x_z^{*2} + y_z^{*2}}.$$

Матрица преобразований при триметрической проекции

Т.к. при триметрической проекции коэффициенты искажения по трём осям различны, то для ее построения можно брать любые углы вращения объекта. Для примера возьмем
 угол вращения относительно оси y : $\phi = 30^\circ$;
 угол вращения относительно оси x : $\vartheta = 45^\circ$.

Общая матрица триметрической проекции равна

$$[T]=[Ry][Rx][Pz]=$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -\sqrt{6}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Как вычислить масштабные коэффициенты по осям?}$$

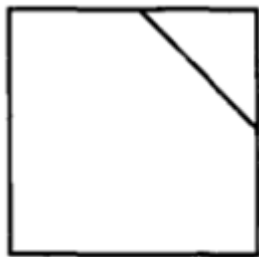
Результат триметрической проекции для $\varphi = 30^\circ$ и $\theta = 45^\circ$

$$[X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

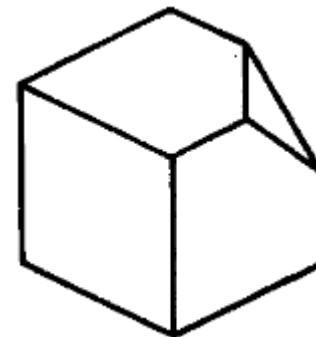
Исходные координаты объекта

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.612 & 0 & 1 \\ 1.366 & -0.259 & 0 & 1 \\ 1.366 & 0.095 & 0 & 1 \\ 0.933 & 0.272 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.095 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.866 & 0.354 & 0 & 1 \\ 0.866 & 1.061 & 0 & 1 \\ 0 & 0.707 & 0 & 1 \\ 1.116 & 0.754 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Результирующие координаты объекта



Исходный объект



Триметрическая проекция объекта

Расчет коэффициентов искажения вдоль главных осей, для $\phi = 30^\circ$ и $\vartheta = 45^\circ$

Исходные базисные вектора

Общая матрица преобразования T

$$[U][T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -\sqrt{6}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & -\sqrt{6}/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Результирующие базисные вектора

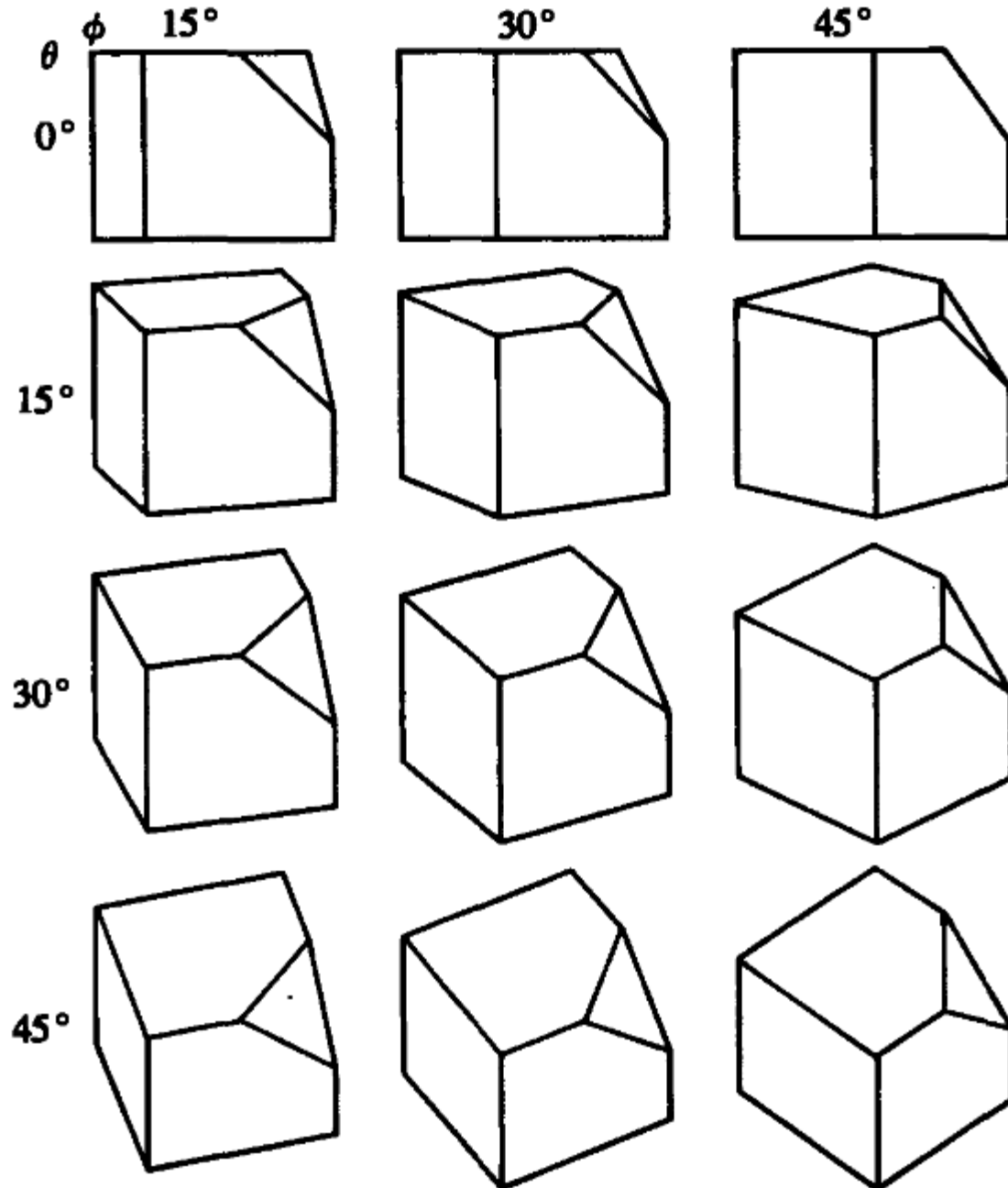
Коэффициенты искажения:

Вдоль оси X: $f_x = \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (\sqrt{2}/4)^2} = 0.935,$

Вдоль оси Y: $f_y = \sqrt{2}/2 = 0.707,$

Вдоль оси Z: $f_z = \sqrt{(1/2)^2 + (-\sqrt{6}/4)^2} = 0.791.$

Пример триметрических проекций



Диметрическая проекция

В отличие от триметрической
коэффициенты искажения по любым двум
осям должны быть равны.

Диметрическая проекция

Общая матрица преобразования:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Единичные векторы на главных осях x , y и z преобразуются в

$$[U^*] = [U] [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U^*] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \sin \theta & 0 & 1 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 1 \\ \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Расчет возможных углов для диметрической проекции (1)

$$f_x^2 = (x_x^{*2} + y_x^{*2}) = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta. \quad (1)$$

$$f_y^2 = (x_y^{*2} + y_y^{*2}) = \cos^2 \theta, \quad (2)$$

$$f_z^2 = (x_z^{*2} + y_z^{*2}) = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta. \quad (3)$$

Пусть будут равны коэффициенты искажения вдоль осей ОХ и ОУ. Приравниваем f_x^2 к f_y^2 :

$$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta = \cos^2 \theta.$$

Используя равенства $\cos^2 \phi = 1 - \sin^2 \phi$ и $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, получаем

$$\sin^2 \phi = \sin^2 \theta / (1 - \sin^2 \theta). \quad (4)$$

Расчет возможных углов для диметрической проекции (2)

$$\begin{cases} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \\ f_z^2 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cdot \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \sin^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \\ f_z^2 = \sin^2 \phi + (1 - \sin^2 \phi) \cdot \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \phi = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \sin^2 \theta)} \\ f_z^2 = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \sin^2 \theta)} + \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \sin^2 \theta)}\right) \cdot \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$f_z^2 (1 - \sin^2 \theta) = \sin^2 \theta + (1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot \sin^2 \theta$$

$$f_z^2 (1 - \sin^2 \theta) = \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - 2\sin^4 \theta$$

$$f_z^2 (1 - \sin^2 \theta) = 2\sin^2 \theta - 2\sin^4 \theta$$

$$2\sin^4 \theta - \sin^2 \theta (f_z^2 + 2) + f_z^2 = 0$$

Расчет возможных углов для диметрической проекции (3)

$$\begin{cases} \sin^2 \phi = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \sin^2 \theta)} \\ 2\sin^4 \theta - \sin^2 \theta(f_z^2 + 2) + f_z^2 = 0 \end{cases}$$

Положив $u = \sin^2 \theta$,

$$2u^2 - (fz^2 + 2)u + fz^2 = 0$$

$$D = (fz^2 + 2)^2 - 4 * 2 * fz^2 = (fz^2 - 2)^2$$

$$u_1 = [(fz^2 + 2) + (fz^2 - 2)]/4$$

$$u_1 = -(fz^2 + 2) - (fz^2 - 2)/4$$

получим решения: $\sin^2 \theta = f_z^2/2, 1$.

Решение $\sin^2 \theta = 1$ отбросим, т.к. при подстановке в систему оно дает бесконечный результат.

Расчет возможных углов для диметрической проекции (4)

$$\sin^2 \theta = f_z^2 / 2$$

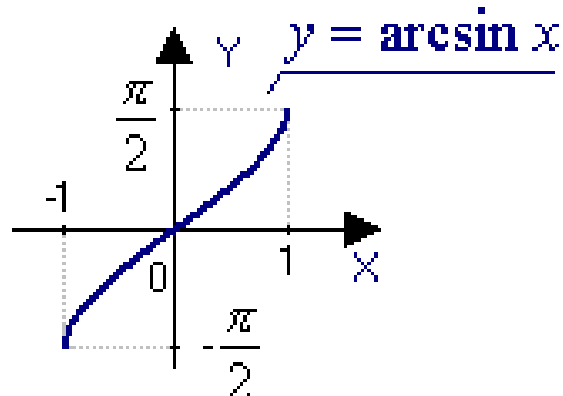
$$\theta = \arcsin(\pm f_z / \sqrt{2}). \quad \phi = \arcsin(\pm f_z / \sqrt{2 - f_z^2}).$$



Исходя из области определения функции \arcsin следует, что

$$0 \leq f_z / \sqrt{2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f_z \leq \sqrt{2}$$

Дополнительное условие равенства (7) даёт: $0 \leq f_z \leq 1$



Расчет возможных углов для диметрической проекции (5)

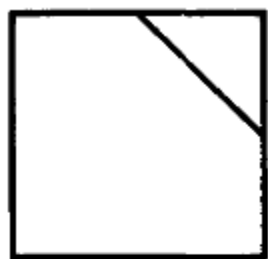
- Полученное неравенство показывает, что диапазон коэффициентов искажения равен

$$0 \leq f_z \leq 1$$

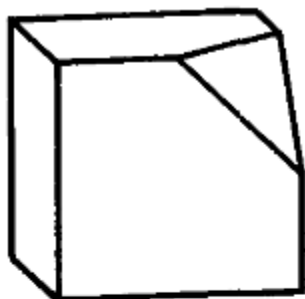
- Заметим, что каждый коэффициент f_z порождает четыре возможных диметрических проекции:

$$\theta = \arcsin(\pm f_z / \sqrt{2}). \quad \phi = \arcsin(\pm f_z / \sqrt{2 - f_z^2}).$$

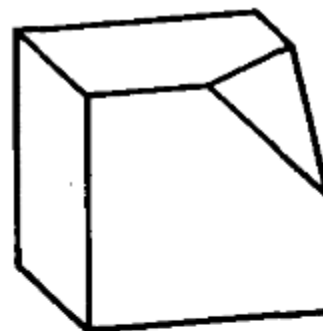
Примеры диметрических проекций с различным коэффициентом искажения вдоль оси Z



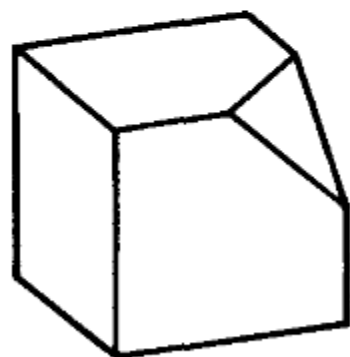
$f = 0$
(a)



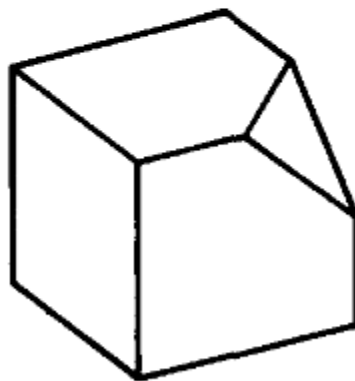
$f = \frac{1}{4}$
(b)



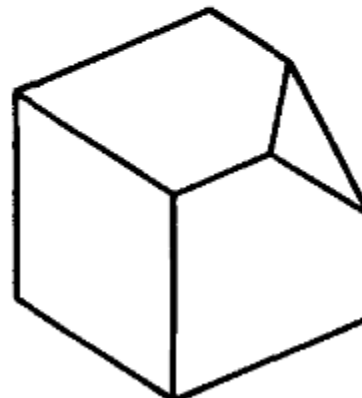
$f = \frac{3}{8}$
(c)



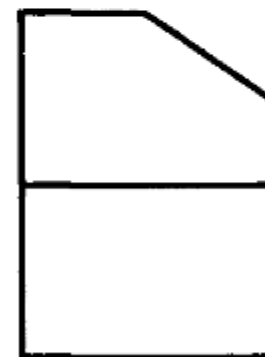
$f = \frac{1}{2}$
(d)



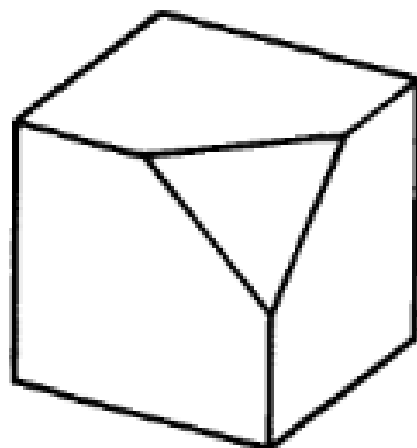
$f = \frac{5}{8}$
(e)



$f = \frac{3}{4}$
(f)

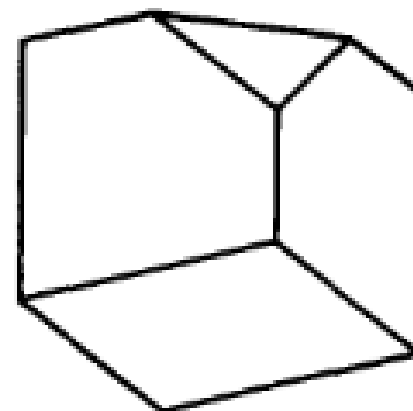


$f = 1$
(g)



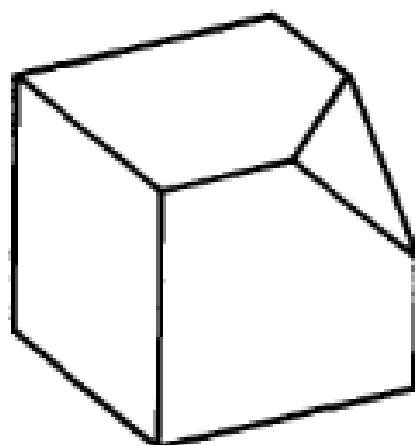
$$\phi < 0, \theta > 0$$

(a)



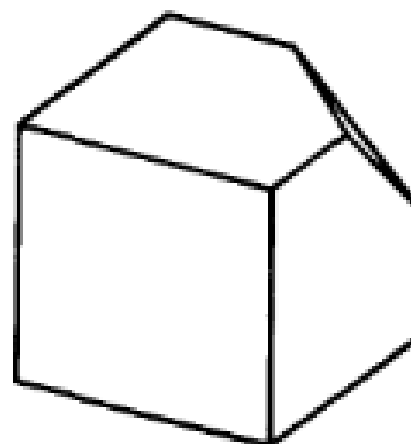
$$\phi < 0, \theta < 0$$

(b)



$$\phi > 0, \theta > 0$$

(c)



$$\phi > 0, \theta < 0$$

(d)

Рис. 3-18 Четыре возможных диметрических проекции для коэффициента искажения $5/8$ и углов поворотов $\phi = \pm 29.52^\circ$, $\theta = \pm 26.23^\circ$. (a) $\phi = -29.52^\circ$, $\theta = +26.23^\circ$; (b) $\phi = -29.52^\circ$, $\theta = -26.23^\circ$; (c) $\phi = +29.52^\circ$, $\theta = +26.23^\circ$; (d) $\phi = +29.52^\circ$, $\theta = -26.23^\circ$.

- Диметрическая проекция позволяет проводить измерения с одинаковым масштабным множителем по двум преобразованным главным осям. Измерение вдоль третьей оси требует другого масштабного множителя. Это может привести к путанице и ошибкам, если требуется точное масштабирование размеров спроецированного объекта.
- Изометрическая проекция решает эту проблему.

Изометрическая проекция

Все коэффициенты искажения по всем трём осям равны.

Изометрическая проекция

$$f_x^2 = (x_x^{*2} + y_x^{*2}) = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta. \quad (1)$$

$$f_y^2 = (x_y^{*2} + y_y^{*2}) = \cos^2 \theta, \quad (2)$$

$$f_z^2 = (x_z^{*2} + y_z^{*2}) = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta. \quad (3)$$

Так как все 3 коэффициента искажения равны, то приравнявая первое уравнение ко второму, а второе к третьему, получим:

$$\sin^2 \phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \qquad \sin^2 \theta = \frac{1 - \sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi}$$

Вывод формул
сделать
самостоятельно!

$$\sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1/3 \text{ или } \sin \theta = \pm \sqrt{1/3} \text{ и } \theta = \pm 35, 26^\circ$$

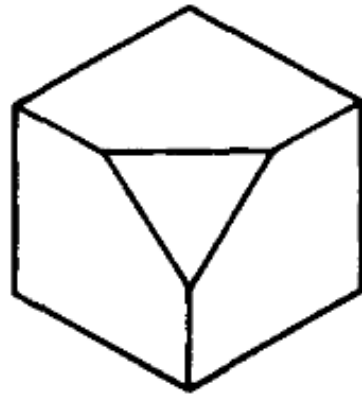
$$\sin^2 \phi = \frac{1}{3} : \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \phi = \pm 45^\circ$$

Изометрическая проекция

- Таким образом, для того, чтобы построить изометрическую проекцию, нужно повернуть исходную фигуру на углы $\phi = \pm 45^\circ$ относительно оси Y и $\theta = \pm 35,26^\circ$ относительно X .
- Существуют только четыре возможных изометрических проекции. Коэффициент искажения для изометрической проекции равен (из равенства 2):

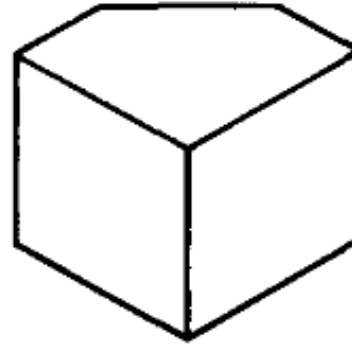
$$f = \sqrt{\cos^2 \theta} = \sqrt{2/3} \approx 0.8165$$

Примеры изометрической проекции



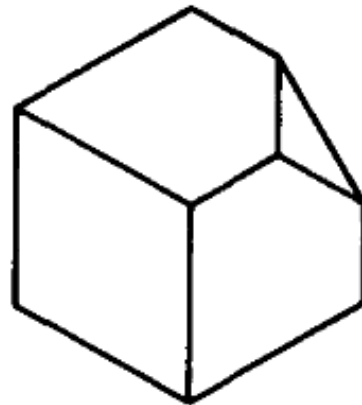
$$\phi < 0, \theta > 0$$

(a)



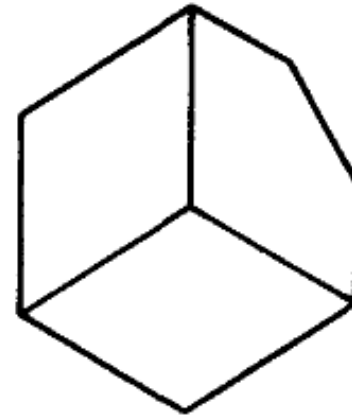
$$\phi < 0, \theta < 0$$

(b)



$$\phi > 0, \theta > 0$$

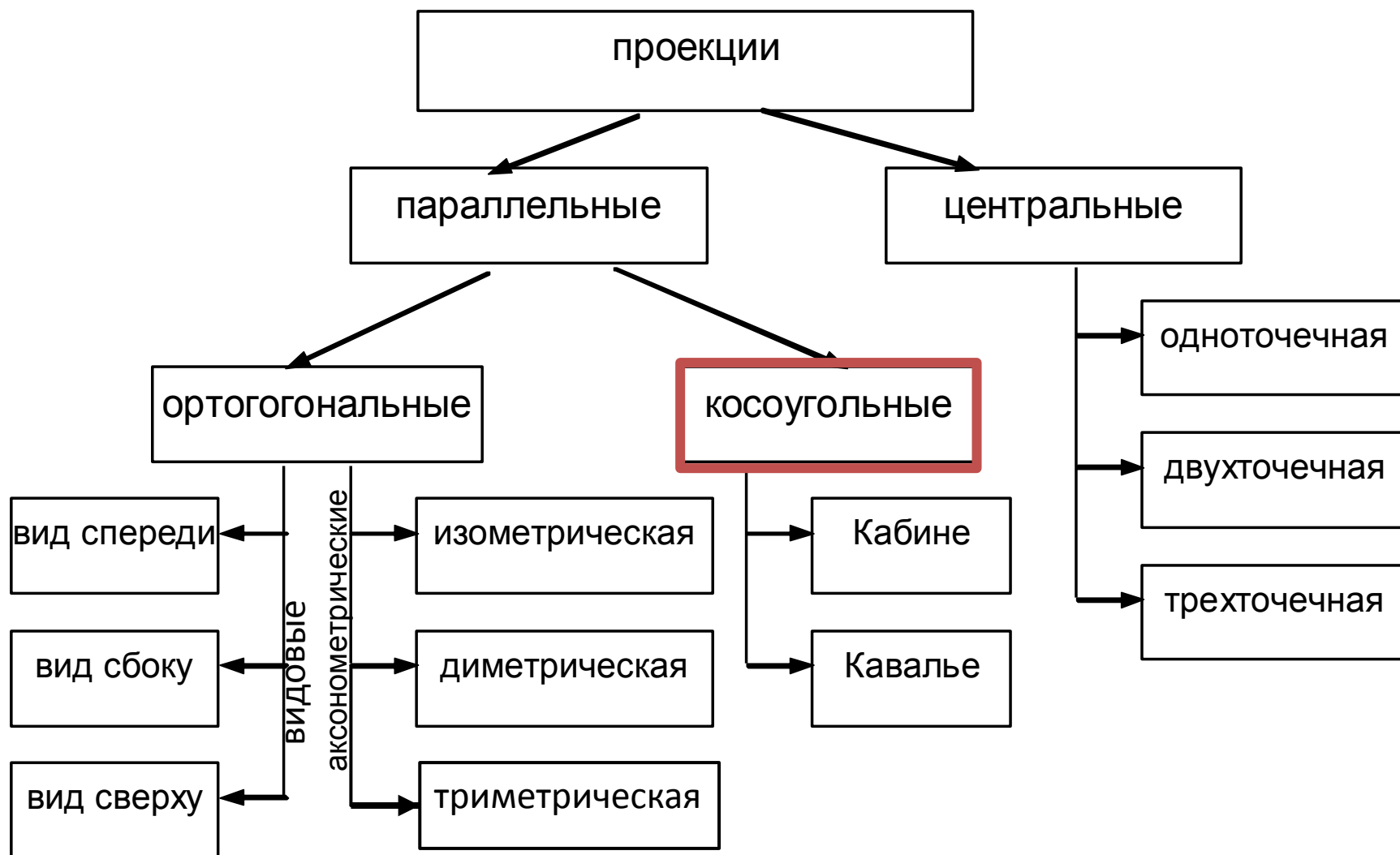
(c)



$$\phi > 0, \theta < 0$$

(d)

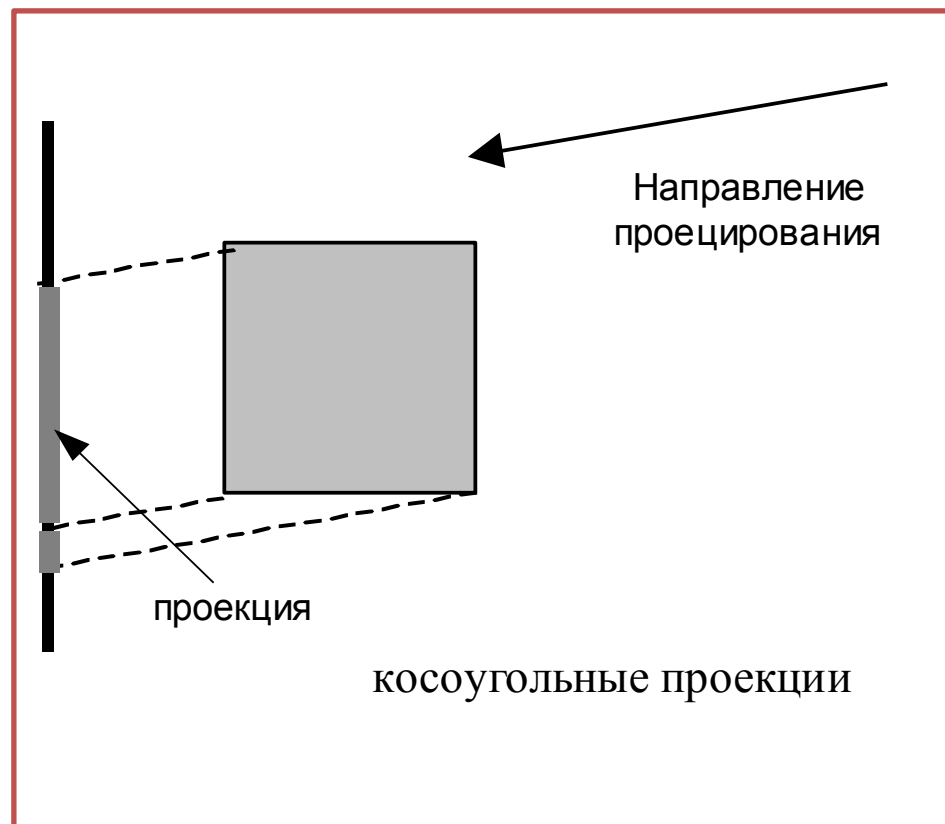
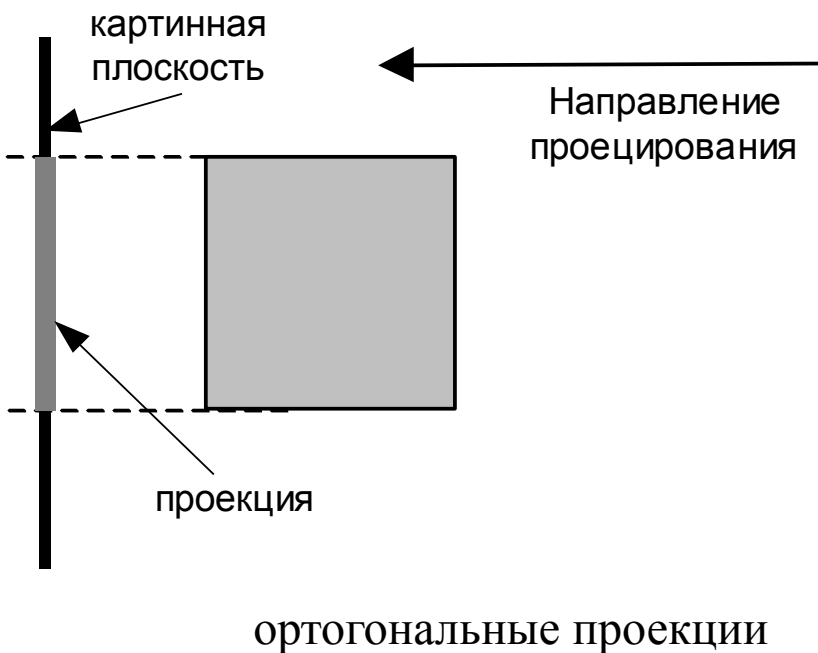
Полная классификация проекций



Косоугольные проекции

- В противоположность ортографическим и аксонометрическим проекциям, для которых проекторы перпендикулярны плоскости проекции, косоугольная проекция формируется параллельными проекторами с центром, лежащим в бесконечности и расположенным ***под косым углом к плоскости проекции.***

Косоугольные проекции



Косоугольные проекции

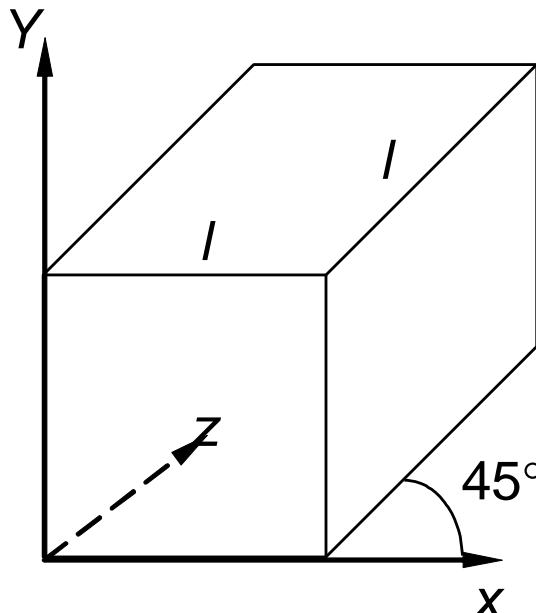
- Косоугольные проекции показывают общую трёхмерную форму объекта, однако ***углы и длины сохраняются только для граней, расположенных параллельно плоскости проекции.***
- Грани, не параллельные плоскости проекции, подвергаются искажению.

Косоугольные проекции

Особый интерес представляют проекции
Кавалье и Кабине.

Проекция Кавалье

- Проекция Кавалье получается, когда угол между проекторами (*направлением проецирования*) и плоскостью проекции составляет 45° .
- В этой проекции коэффициенты искажения для всех трёх главных направлений равны 1. Результат этой проекции выглядит неестественно утолщенным.

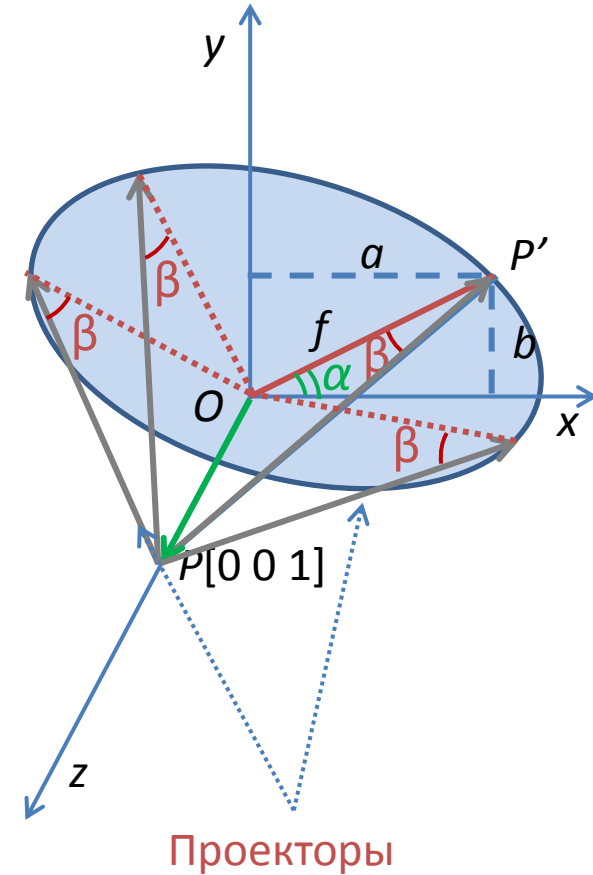


Проекция Кабине

- Коэффициент искажения для ребер, перпендикулярных плоскости проекции, равен $\frac{1}{2}$.
- Для этой проекции угол между проекторами и плоскостью проекции составляет $\text{arcctg}(1/2)=63,43^\circ$.

Косоугольные проекции

- Чтобы построить матрицу преобразования для косоугольной проекции, рассмотрим единичный вектор $P[0\ 0\ 1]$ вдоль оси z (зеленым).
- При косоугольной проекции проекторы составляют угол β с плоскостью проекции $z=0$, отличный от 90° .
- Заметим, что все возможные проекторы, проходящие через точку P или O и образующие угол β с плоскостью $z=0$, лежат на поверхности конуса с вершиной в P или O соответственно.
- Таким образом, для заданного угла β существует бесконечное количество косоугольных проекций, каждая из которых характеризуется углом α .



Косоугольные проекции

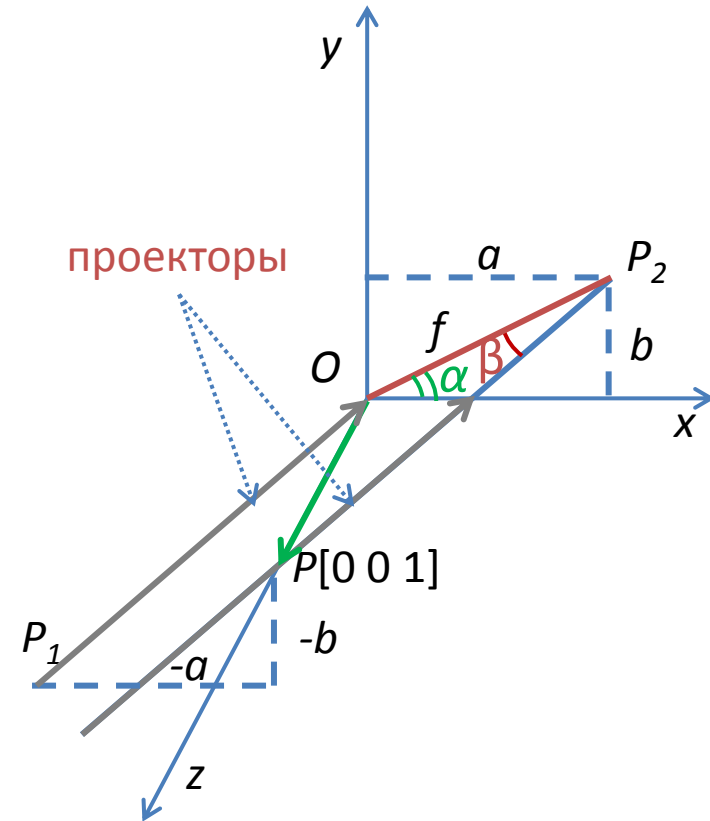
Проектор P_1O можно получить из PO с помощью переноса на $[-a \ -b \ 1]$ точки P в точку P_1 .

В двумерной плоскости, проходящей через P перпендикулярно оси z , 3×3 матрица преобразования равна

$$[T'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}.$$

В трёхмерном пространстве это двумерное преобразование эквивалентно сдвигу вектора PO в направлениях x и y :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Косоугольные проекции

Проецирование на плоскость $z=0$ даёт

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

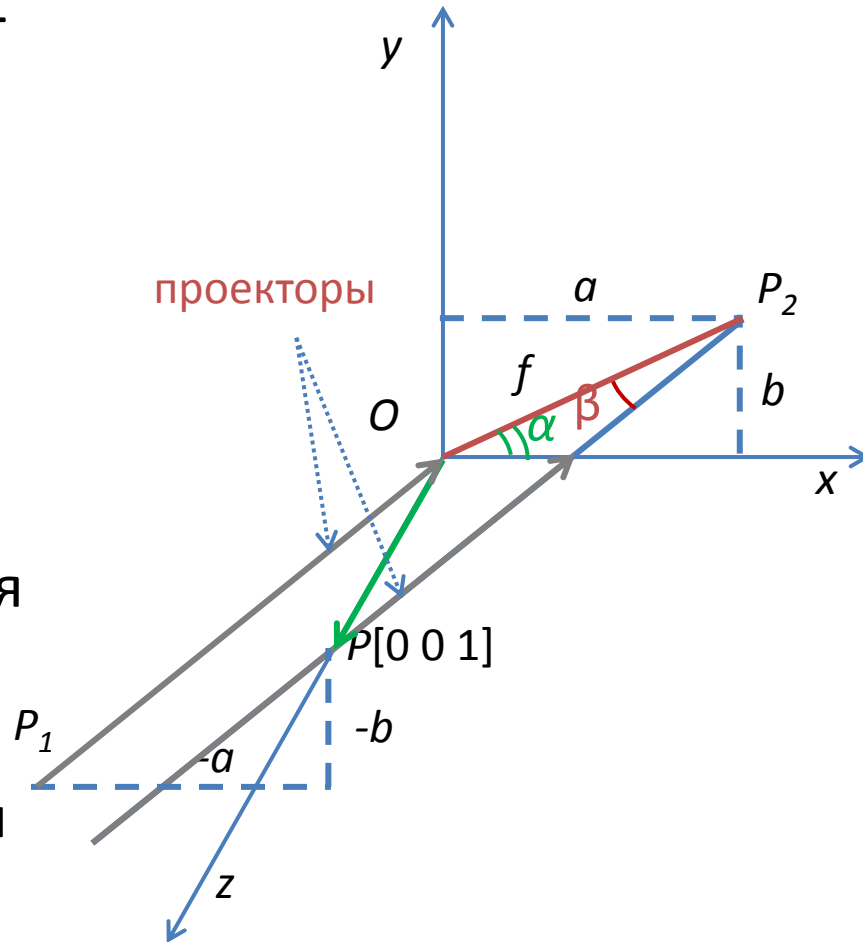
Из рис. получаем, что

$$a = f \cos \alpha, \quad b = f \sin \alpha,$$

где f – коэффициент масштабирования
единичного вектора P при его
проецировании на плоскость $z = 0$,
а α – угол между проекцией вектора и
осью X .

Из рисунка также ясно, что β - угол между косыми проекторами и плоскостью проекции равен:

$$\beta = \text{arcctg}(f)$$



Косоугольные проекции

- Таким образом, общая матрица преобразования для косоугольной проекции имеет вид:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f \cos \alpha & -f \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

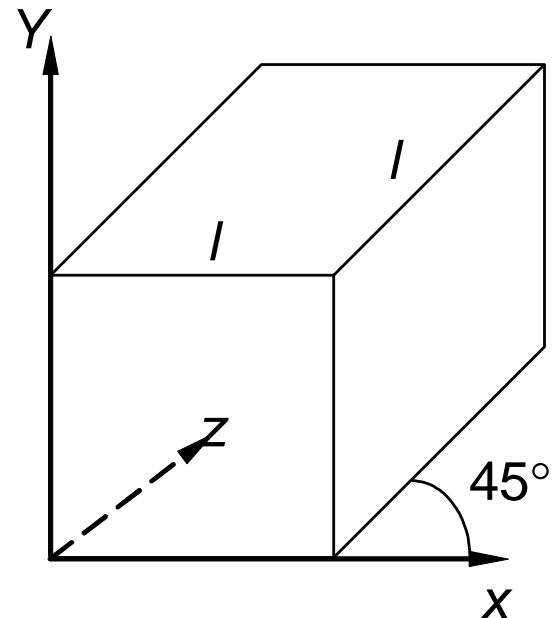
- При $f = 0$, $\beta = 90^\circ$ получаем ортографическую проекцию.
- Если $f = 1$, то не подвергаются искажению ребра, перпендикулярные плоскости проекции. Это является проекцией Кавалье, при которой $\beta = \text{arcctg}(f = 1) = 45^\circ$.
- Проекцию Кабине можно получить при коэффициенте искажения $f = 1/2$, $\beta = \text{arcctg}(1/2) = 63,435^\circ$.

!!! Заметим, что угол α является углом между горизонталью и проекциями прямых, перпендикулярных плоскости проекции $z = 0$.

Проекция Кавалье

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f \cos \alpha & -f \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

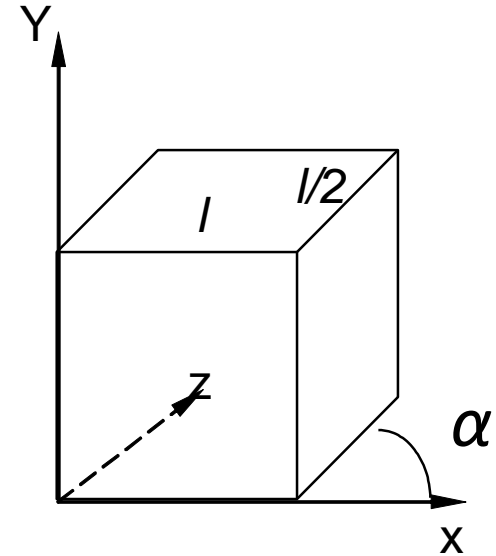
$$f = 1, \theta = \operatorname{arcctg}(f) = 45^\circ$$

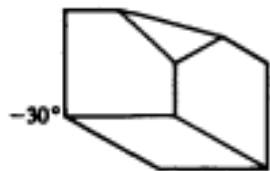
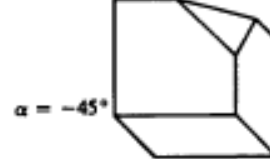
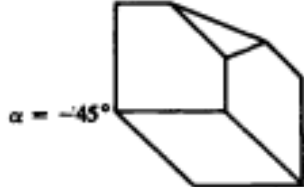


Проекция Кабине

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f \cos \alpha & -f \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

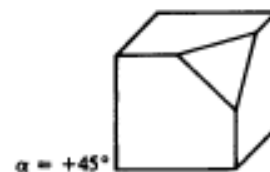
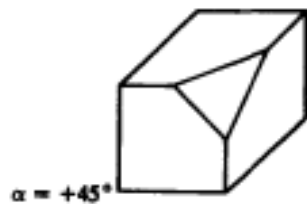
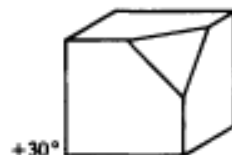
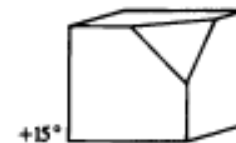
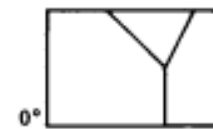
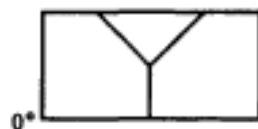
$$f = 0,5, \theta = \operatorname{arcctg}(f) = 63,435^\circ$$





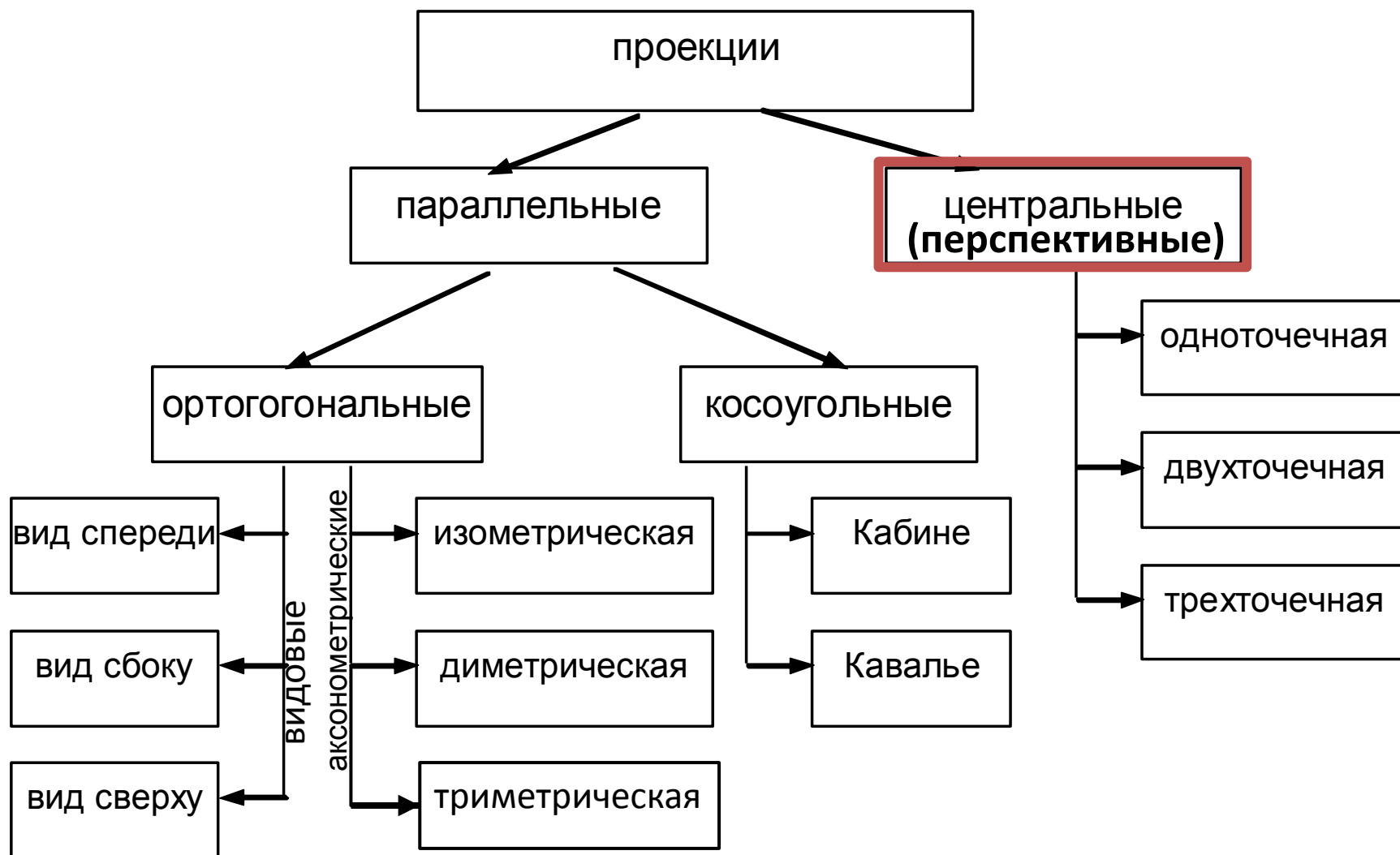
Проекции Кавалье°
 $\beta = 45^\circ$.

Проекции Кабине
 $\beta = 63,4^\circ$.



Сверху вниз угол α изменяется от -45° до $+45^\circ$ с интервалом 15

Полная классификация проекций



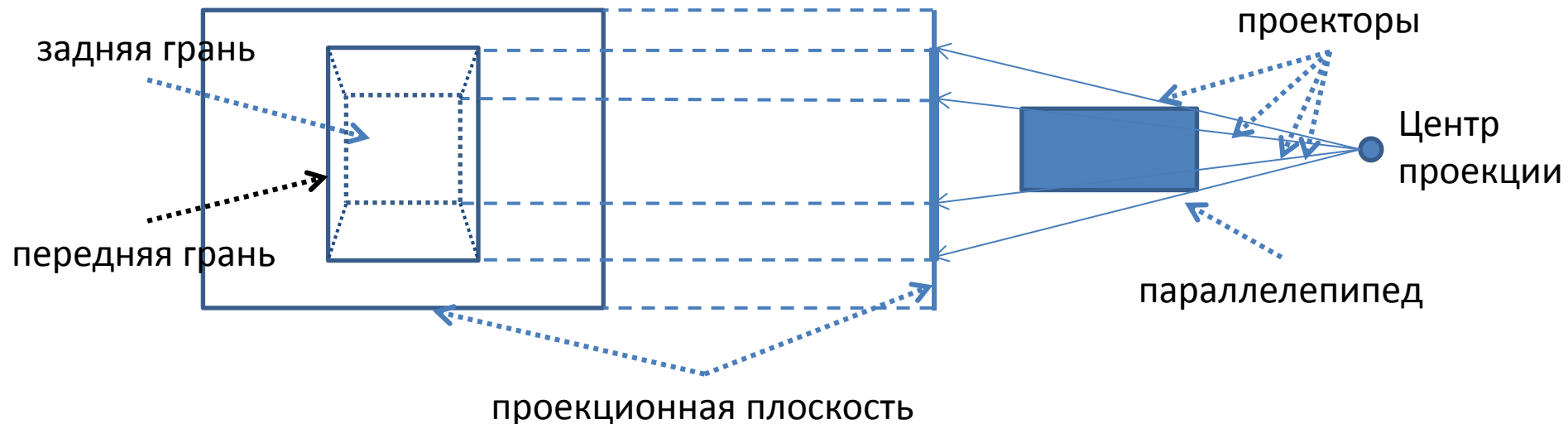
Перспективные проекции

<http://www.youtube.com/watch?v=SS4r9Fq3beU>

Центральные (перспективные) проекции

- В противоположность всем рассмотренным ранее проекциям, при построении центральных проекций проекторы исходят не из бесконечности, а из конечной точки, называемой центром проекции, и следовательно не являются параллельными друг другу.

Пример центральной проекции параллелепипеда



Перспективное преобразование

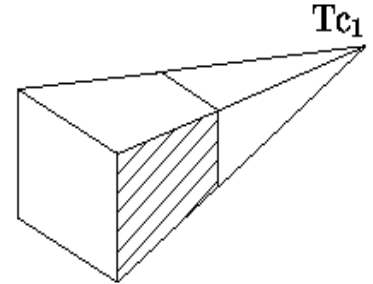
- Для того, чтобы построить перспективную проекцию нужно подвергнуть исходную фигуру **перспективному преобразованию** и после этого **спроецировать** ее на некоторую плоскость.
- Перспективное преобразование имеет место, когда не равен нулю любой из первых трёх элементов четвертого столбца матрицы 4×4 .
 - **Параллельные прямые сходятся.**
 - **Размер объекта уменьшается с увеличением расстояния до центра проекции.**
 - **Происходит неоднородное искажение линий объекта, зависящее от ориентации и расстояния от объекта до центра проекции.**

Все это помогает восприятию глубины, но не сохраняет форму объекта.

Перспективное преобразование

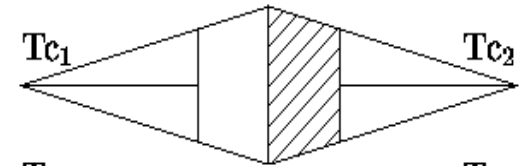
- Одноточечное

$$P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



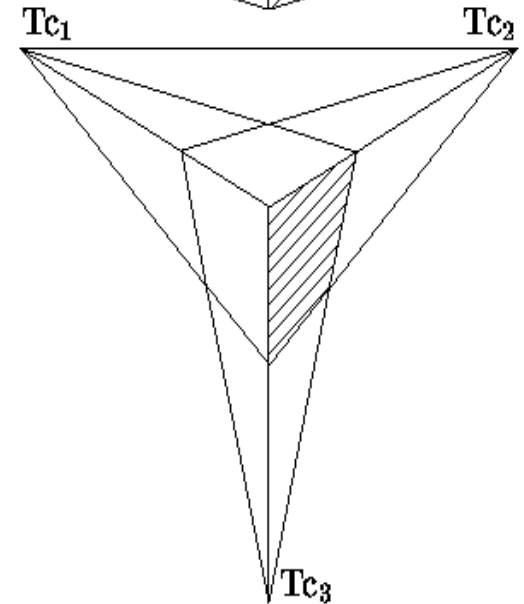
- Двухточечное

$$P_{yz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



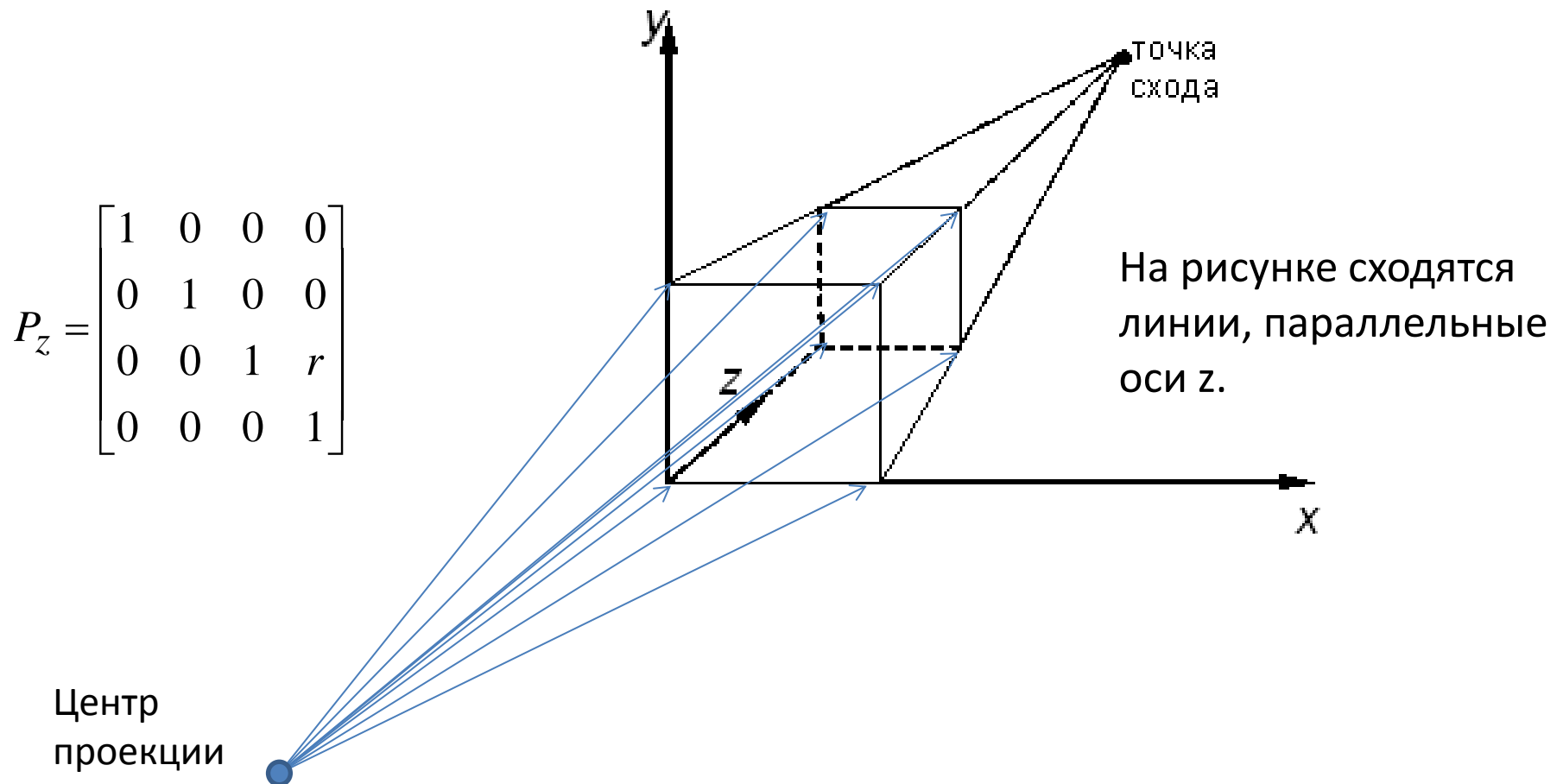
- Трёхточечное

$$P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Точки схода

Аксиома. Перспективные проекции любой совокупности параллельных прямых, которые не параллельны проекционной плоскости будут сходиться в **точке схода**.



Одноточечное перспективное преобразование

Одноточечное перспективное преобразование задается равенством

$$[x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z \quad rz + 1].$$

Здесь $h = rz + 1 \neq 1$. Обычные координаты получаются делением на h :

$$[x^* \quad y^* \quad z^* \quad 1] = \left[\frac{x}{rz+1} \quad \frac{y}{rz+1} \quad \frac{z}{rz+1} \quad 1 \right].$$

Перспективное проецирование на некоторую двумерную видовую плоскость можно получить, объединив **ортографическую проекцию с перспективным преобразованием.**

Перспективное проецирование на плоскость $z = 0$

$$[T] = [P_r] [P_z] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перспективное
преобразование

Ортографическое
проецирование

Перспективная
проекция

и

$$\begin{array}{l} \text{Исходные} \\ \text{координаты точки} \end{array} \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 0 & rz + 1 \end{bmatrix}.$$

результатирующие
координаты точки

Обычные координаты равны

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{rz+1} & \frac{y}{rz+1} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример перспективной проекции точки Р на плоскость $z=0$

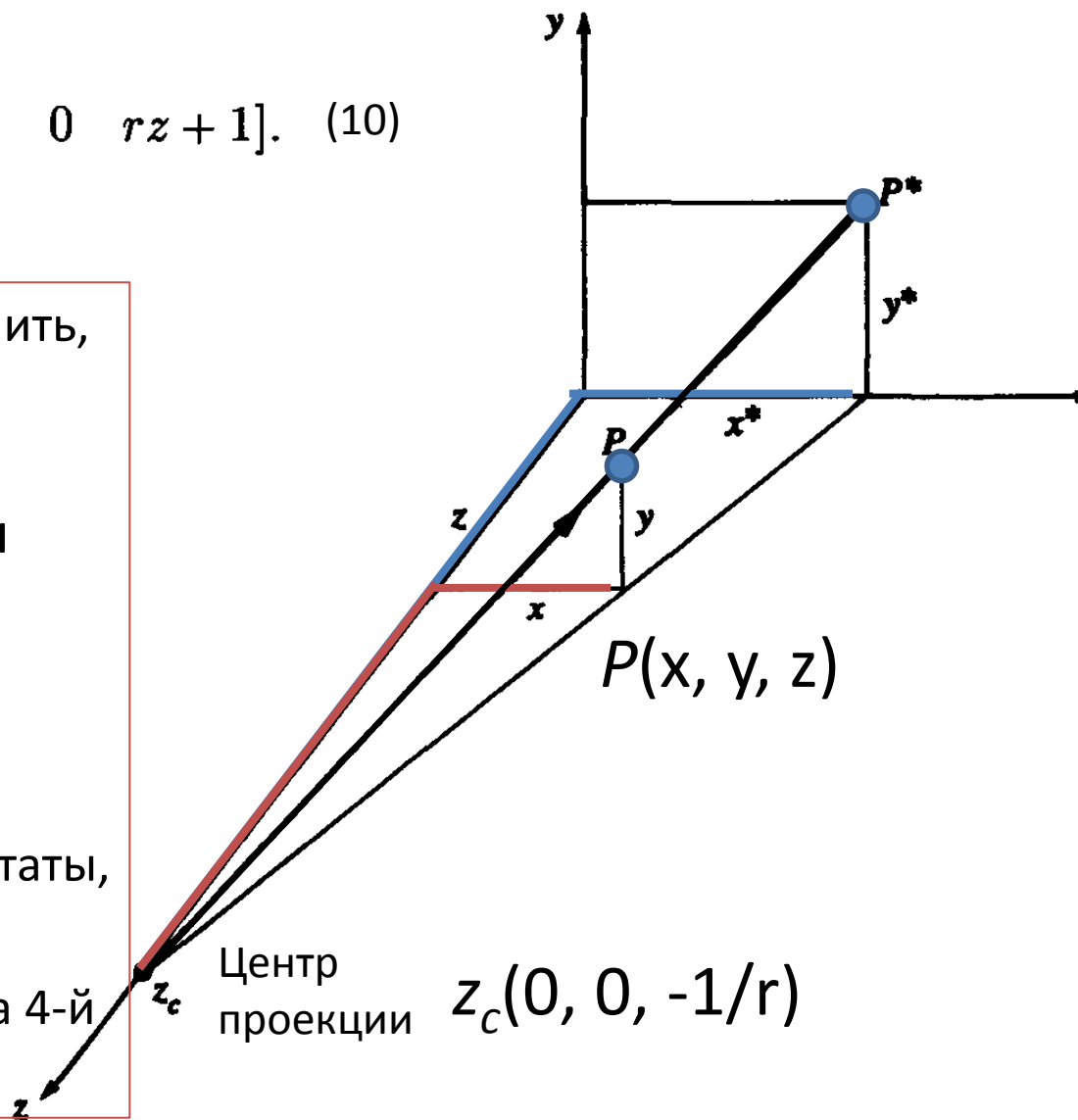
$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ 0 \ rz + 1]. \quad (10)$$

Координаты точки P^* можно получить, используя подобие треугольников:

$$\frac{x^*}{z_c} = \frac{x}{z_c - z} \Rightarrow x^* = x / \left(1 - \frac{z}{z_c}\right) \text{ и}$$

$$\frac{y^*}{z_c} = \frac{y}{z_c - z} \Rightarrow y^* = y / \left(1 - \frac{z}{z_c}\right).$$

Полагая $r = -\frac{z}{z_c}$, получим результаты, аналогичные формуле (10) после деления однородных координат на 4-й элемент.



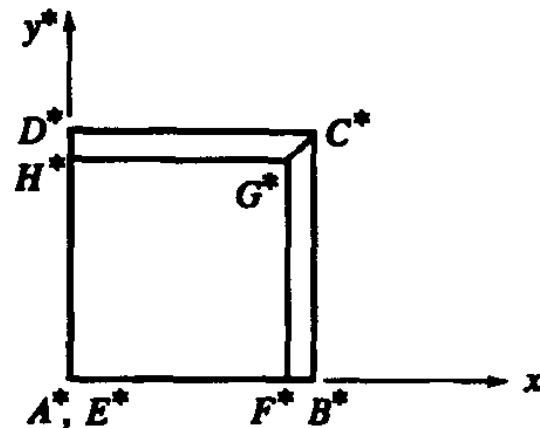
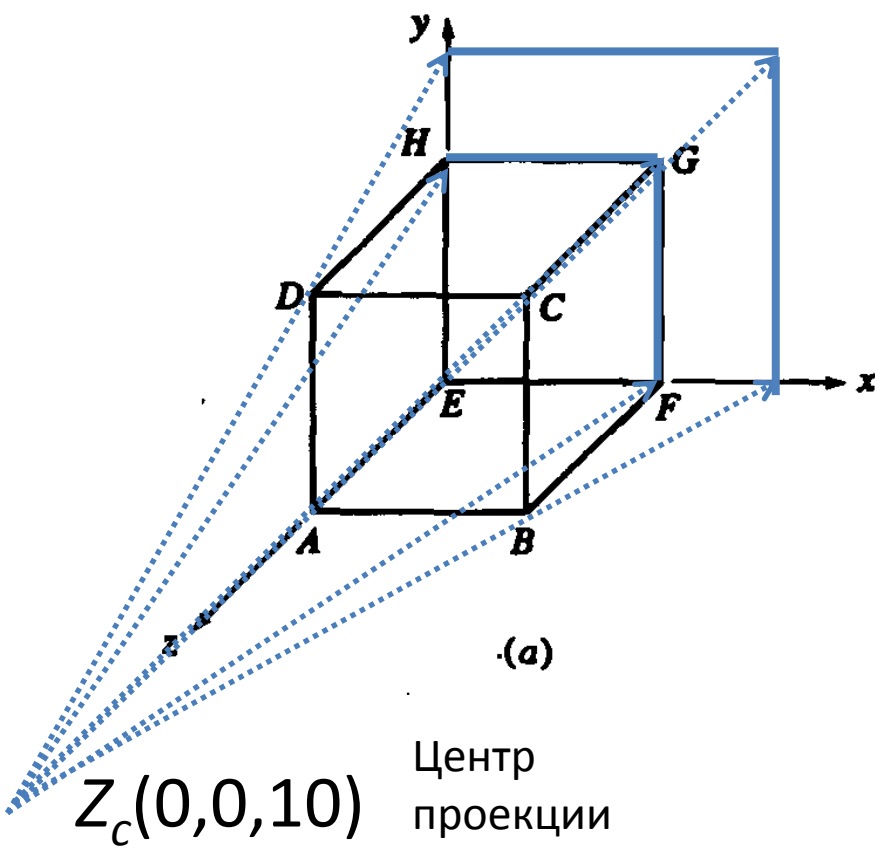
Пример перспективной проекции точки P на плоскость $z=0$

- Следовательно формула (10) осуществляет перспективное проецирование на плоскость $z=0$ с центром проекции в точке $(-1/r)$ на оси z .
- Заметим, что при $z_c \rightarrow \infty$, $r = -\frac{z}{z_c} \rightarrow 0$, в результате получаем **ортогональную** проекцию на плоскость $z=0$.
- ! На точки, лежащие в плоскости проекции перспективное преобразование не действует, т.е. **если плоскость проекции проходит через объект, то эта часть объекта изображается с правильным размером и формой**, а все другие части объекта искажаются.

Одноточечная перспективная проекция куба (1)

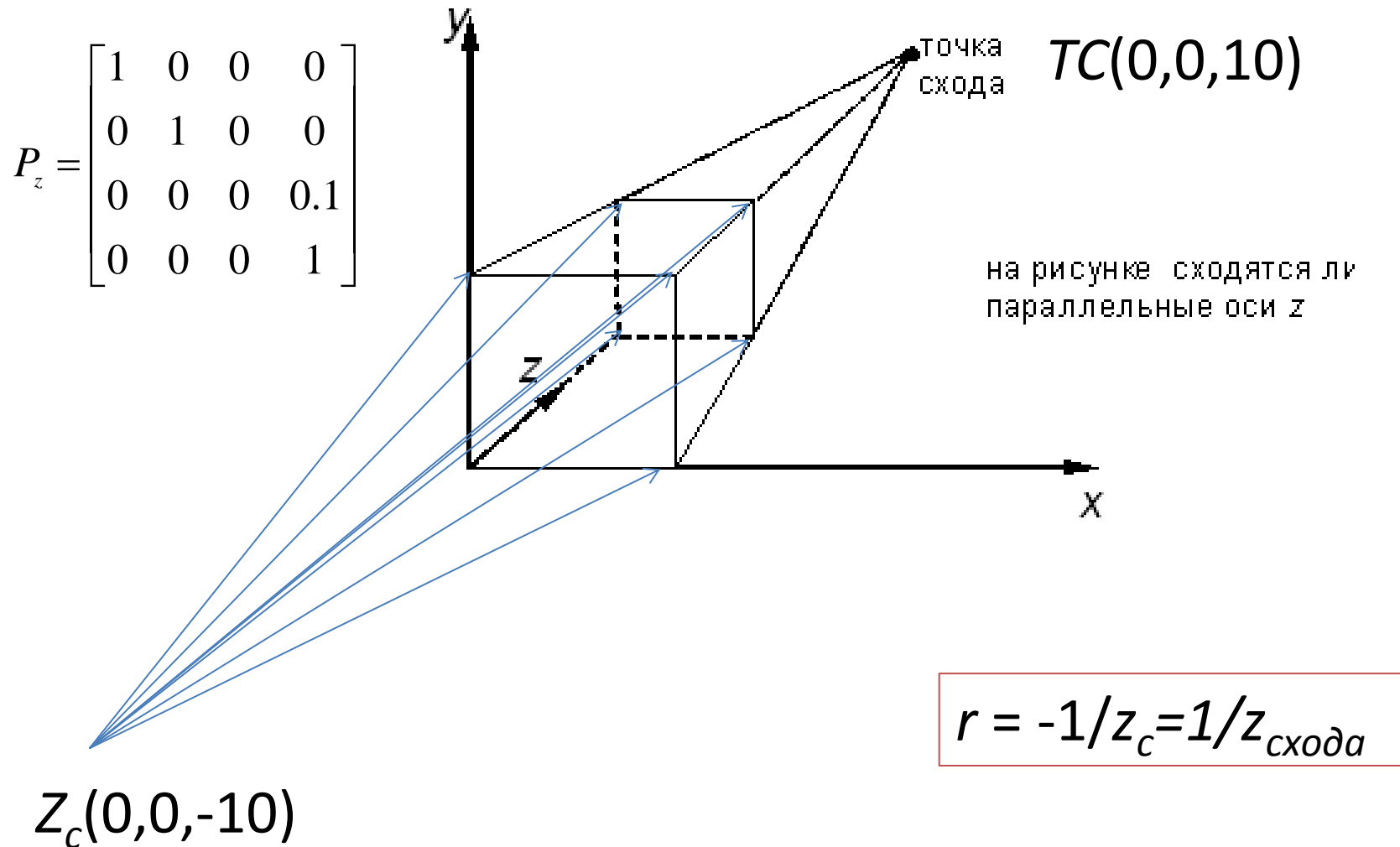
Выполним перспективное проецирование на плоскость $z=0$ единичного куба с центром проекции в точке $z_c=10$ на оси z . Одноточечный перспективный множитель r равен:

$$r = -1/z_c = -1/10 = -0.1$$



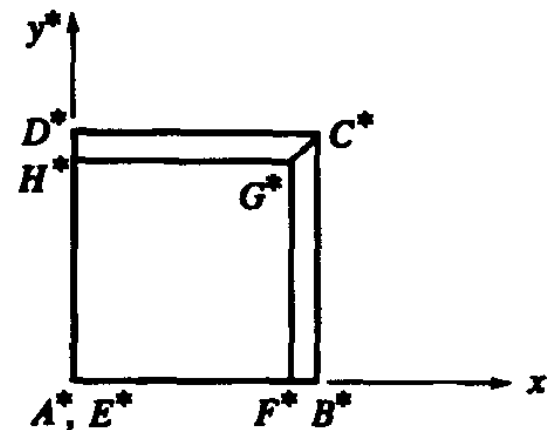
$$P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Центр проекции и точка схода



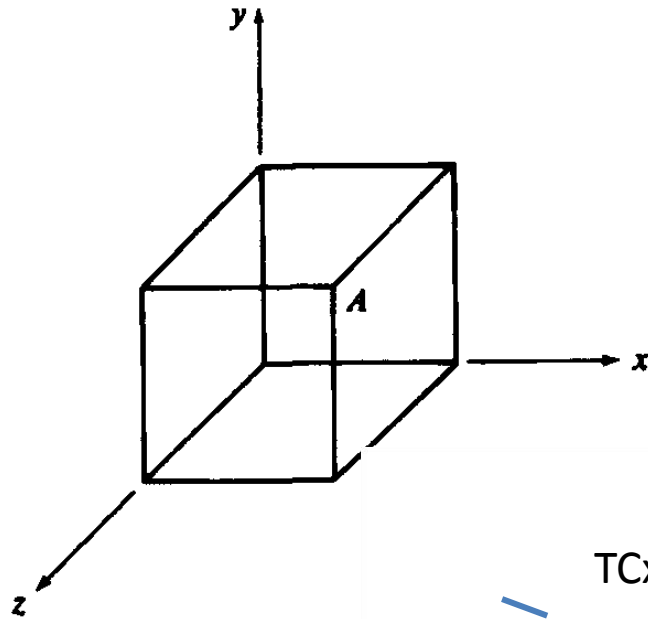
Одноточечная перспективная проекция куба (2)

$$[X^*] = [X][T] = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$



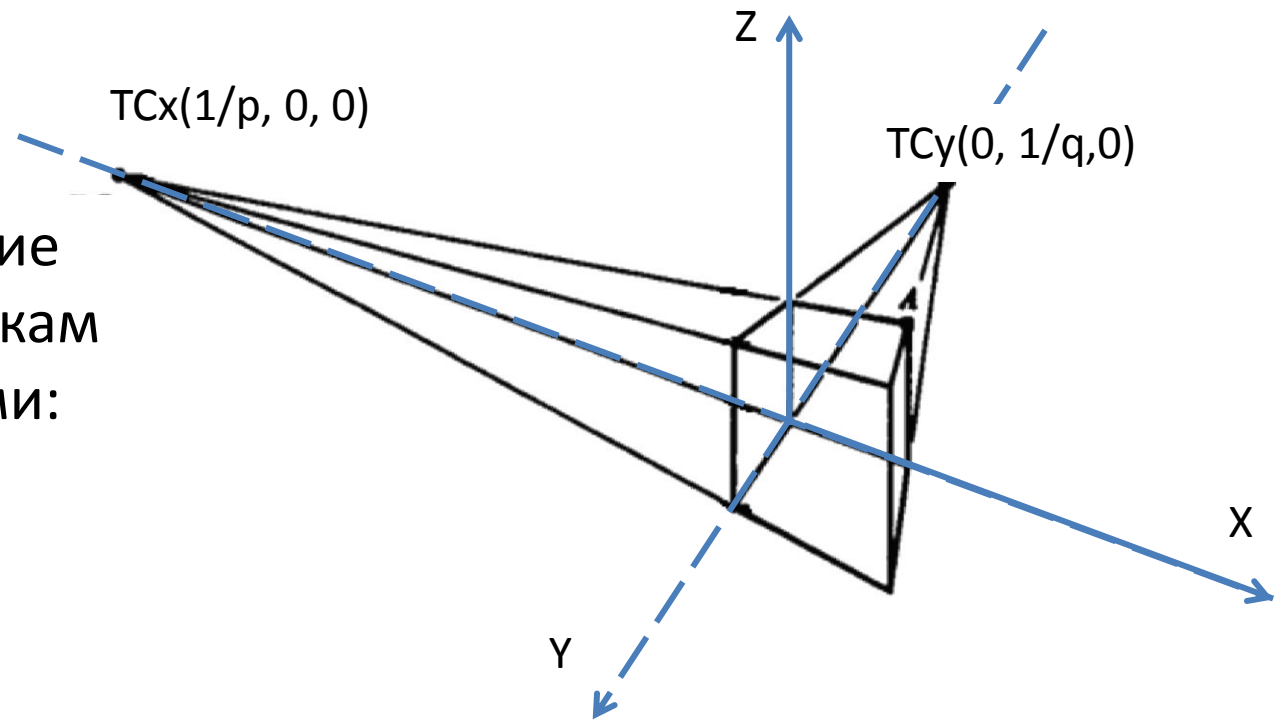
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.11 & 0 & 0 & 1 \\ 1.11 & 1.11 & 0 & 1 \\ 0 & 1.11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Двухточечное перспективное преобразование



$$P_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица преобразования



Такое преобразование
приводит к двум точкам
схода с координатами:
по оси x: $(1/p, 0, 0)$;
по оси y: $(0, 1/q, 0)$.

Двухточечная перспективная проекция

Исходные
координаты куба

Результирующие
ненормированные
координаты

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1,1 \\ 0 & 1 & 0 & 1,1 \\ 1 & 0 & 0 & 1,1 \\ 1 & 0 & 0 & 1,1 \\ 1 & 1 & 0 & 1,2 \\ 1 & 1 & 0 & 1,2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,91 & 0 & 1 \\ 0 & 0,91 & 0 & 1 \\ 0,91 & 0 & 0 & 1 \\ 0,91 & 0 & 0 & 1 \\ 0,83 & 0,83 & 0 & 1 \\ 0,83 & 0,83 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \\ E' \\ F' \\ G' \\ I' \end{matrix}$$

Результирующие
нормированные
координаты

Матрица двухточечной
перспективной проекции

Координаты центра проекции:

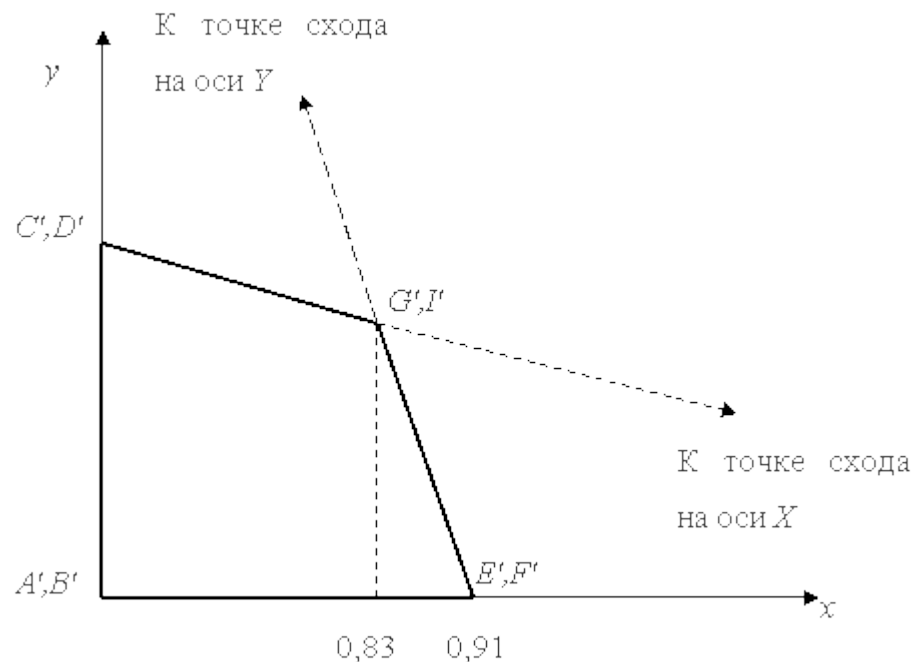
Вдоль оси OX – (-10,0,0);

Вдоль оси OY – (0,-10,0).

Координаты точек схода:

Вдоль оси OX – (10,0,0);

Вдоль оси OY – (0,10,0).



Изображение трехмерных объектов

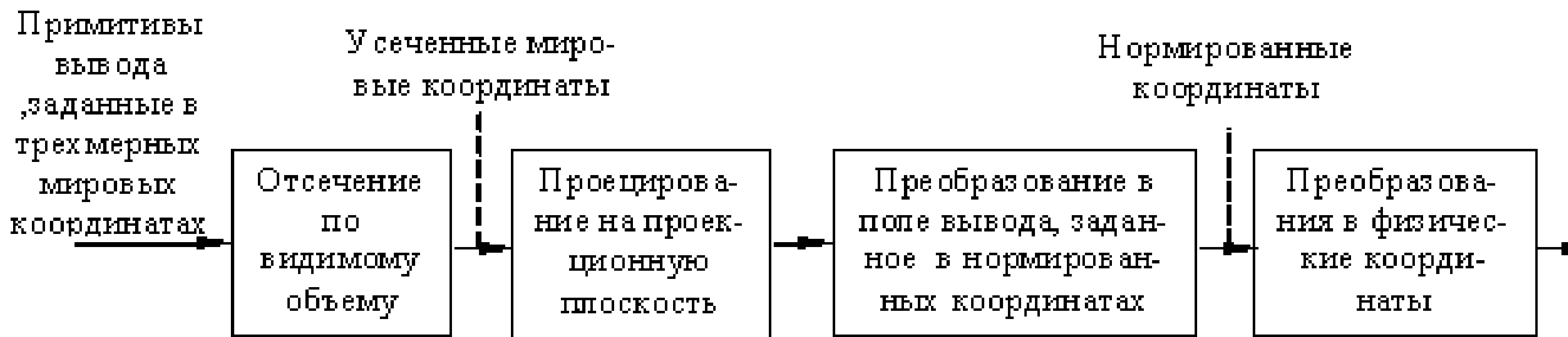
Изображение трехмерных объектов

- Процесс вывода трехмерной графической информации более сложный, чем соответствующий двумерный процесс.
- В двумерном случае просто задается окно в двумерном мировом координатном пространстве и поля вывода на двумерной видовой поверхности.
В общем случае объекты, описанные в мировых координатах, отсекаются по границе видимого объема, а после этого преобразуются в поле вывода для дисплея. Сложность, характерная для трехмерного случая, возникает потому, что видовая поверхность не имеет третьего измерения.
- Несоответствие между пространственными объектами и плоскими изображениями устраняется путем введения проекций, которые отображают трехмерные объекты на двумерной проекционной **картинной плоскости** (КП).

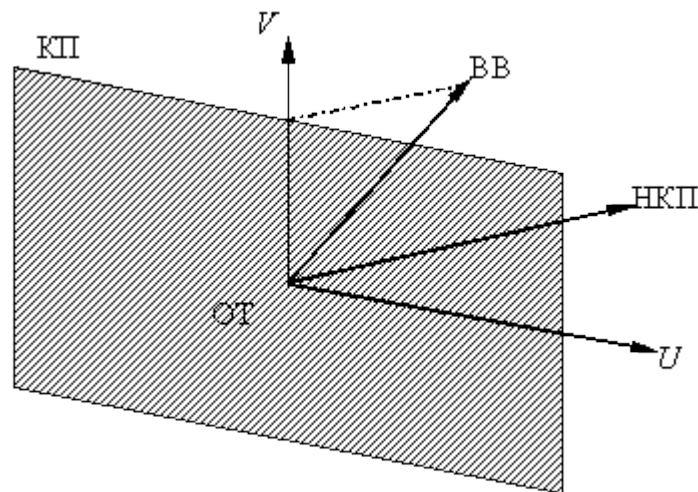
Процесс вывода трехмерной графической информации (1)

- В процессе вывода трехмерной графической информации мы задаем **видимый объем** (ВО) в мировом пространстве, проекцию на КП и поле вывода на видовой поверхности.
В общем случае объекты, определенные в трехмерном мировом пространстве, **отсекаются** по границам трехмерного **видимого объема** и после этого **проецируются**.
То, что попадает в пределы окна, которое само является проекцией видимого объема на картинную плоскость, затем **преобразуется (отображается) в поле вывода** и отображается на графическом устройстве (схема).

Процесс вывода трехмерной графической информации (2)



1. Определение картинной плоскости (КП)



Картинная плоскость определяется некоторой точкой на плоскости, которую будем называть **опорной точкой** (ОТ) и **нормалью к картинной плоскости** (НКП).

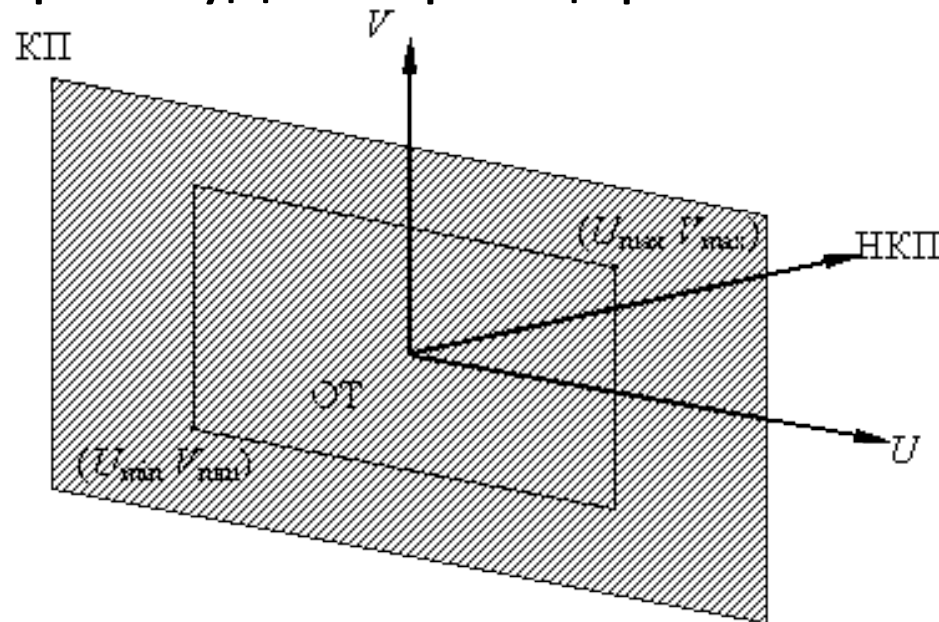
КП может произвольным образом располагаться относительно проецируемых объектов, заданных в мировых координатах. Она может пересекать их, проходить впереди или позади объектов.

Для того чтобы задать окно, нам необходима система координат на КП, которую назовем системой координат **UV**. Началом ее служит ОТ. Направление оси V на КП определяет **вектор вертикали** (ВВ): проекция ВВ на КП совпадает с осью V .

2. Задание максимального и минимального значения картинной плоскости

Опорная точка (ОТ) и два направления вектора нормали (НКП) и вектора вертикали (ВВ) определяются в правосторонней мировой системе координат. Имея на КП систему UV , можем задать минимальное и максимальное значения U и V , определяющие окно.

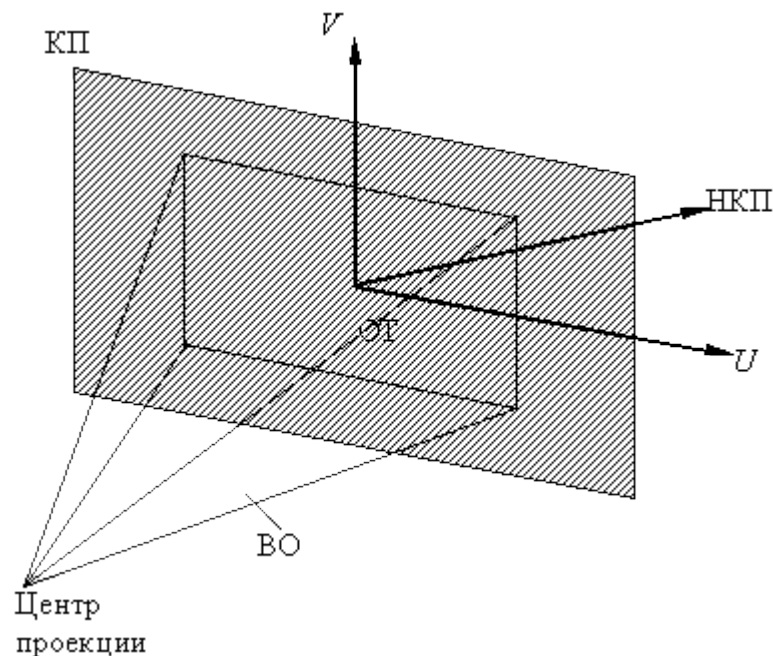
Отметим, что окно не обязательно должно быть симметрично относительно ОТ. Видимый объем частично определяется окном и ограничивает ту часть мирового пространства, которая будет спроецирована.



3. Отсечение видимого объема

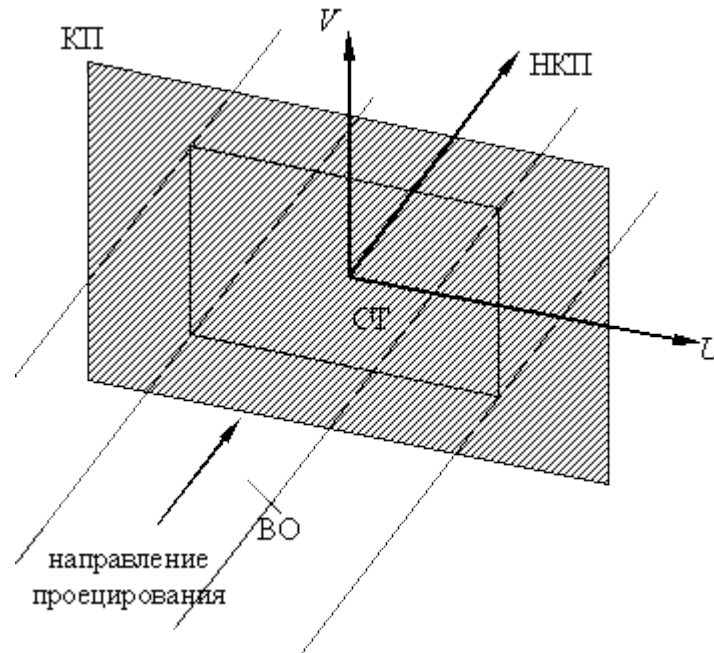
В случае центральной проекции

- В случае центральной проекции видимый объем (ВО) определяется также центром проекции. Этот параметр задается в мировых координатах относительно опорной точки (ОТ). ВО представляет собой неограниченную в одну сторону пирамиду, вершина которой находится в центре проекции, а боковые стороны проходят через окно.
- Точки, лежащие позади центра проекции, не включаются в ВО и, следовательно, не будут проецироваться.



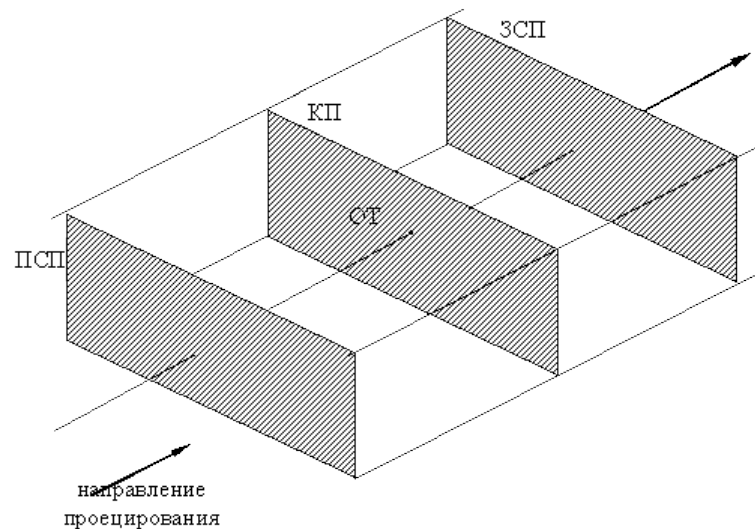
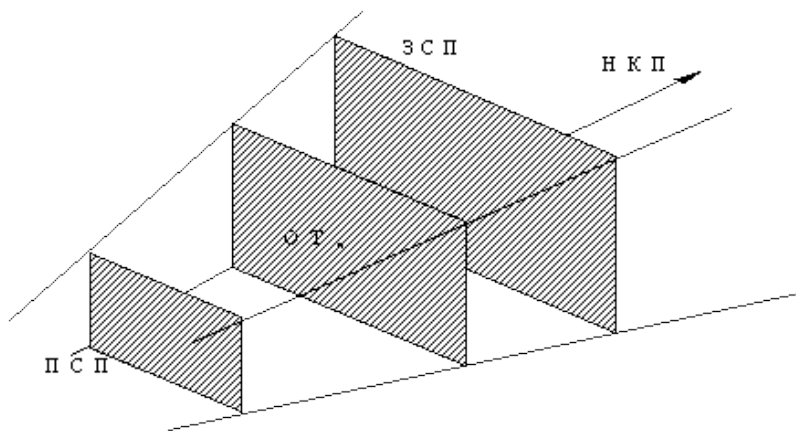
В случае параллельной проекции

- В случае параллельных проекций ВО определяется также направлением проецирования. Он представляет собой неограниченный параллелепипед, стороны которого параллельны направлению проецирования.
- В общем случае направление проецирования может не совпадать с НКП.



В случае параллельной проекции

- В случае ортографических параллельных проекций (но не косоугольных) боковые стороны ВО перпендикулярны КП.
- В некоторых случаях может потребоваться сделать ВО конечным. Для этого задаются ПСП (передняя секущая плоскость) и ЗСП (задняя секущая плоскость).
- Нормаль НКП направлена относительно направления проецирования и также является нормалью к ПСП и ЗСП.



Контрольная работа №2

Практические задания:

1. Двумерные преобразования;
2. Трёхмерные преобразования;
3. Построение проекций.

Для подготовки к КР необходимо:

- Знать матрицы всех 2D и 3D преобразований и проекций.
- Вспомнить, как перемножаются матрицы.
- Вспомнить значения \sin и \cos для углов (0,30,60 и 90°).
- Все стандартные матрицы преобразования совершают преобразования относительно начала координат. Чтобы совершить любое преобразование относительно другой точки необходимо предварительно переместить эту точку в начало координат, не забыв сделать обратный перенос после совершения преобразования.