بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تهران
دانشکدگان علوم
دانشکده فیزیک

مشخصه‌یابی آزمایش‌های نمونه‌برداری بوزونی تصادفی

نگارش:

فرشته بوربورمرادی

استاد راهنما:

دکتر صالح رحیمی کشاری

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته فیزیک گرایش اپتیک و لیزر

بهمن ۱۴۰۱

اداره کل تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب فرشته بوربورمرادی متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد. کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشکدگان علوم دانشگاه تهران می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: فرشته بوربورمرادی

امضاء

بوربور

چکیده

انتظار می‌رود که کامپیوترهای کوانتومی بتوانند یک دسته از مسائل محاسباتی را بسیار سریع‌تر از کامپیوترهای کلاسیک حل کنند. اما هنوز تا ساخت کامپیوترهای جهان‌شمولِ کوانتومی راه درازی در پیش است. از این جهت یک سوال اساسی در علم اطلاعات کوانتومی این است که با در نظر گرفتن فناوری‌های موجود چگونه می‌توان برتری محاسبات کوانتومی را نسبت به کامپیوترهای کلاسیک در عمل اثبات نمود. نمونه‌برداری بوزونی تصادفی، که در واقع نوعِ تعمیم‌یافته نمونه‌برداری بوزونی است، یک مثال از دسته مسائلی هستند که در جهت اثبات برتری کوانتومی معرفی شده اند. به دلیل حساسیت زیاد سیستم‌های کوانتومی به خطا و اثر محیط پیرامون، از چالش‌های پیش رو در انجام هر آزمایش کوانتومی، مشخصه‌یابی دقیق اجزای آزمایش و بررسی میزان انواع خطا به وسیله‌ی روش‌های آزمایشگاهی است. به طور مشخص، مشخصه‌یابی شبکه‌های خطی اپتیکی به عنوان اصلی‌ترین بخش آزمایش‌های نمونه‌برداری بوزونی و نمونه‌برداری بوزونی تصادفی، نقش مهمی در شناخت و بررسی توان محاسباتی این مسائل دارد. در این راستا، اخیرا یک روش عملی بر مبنای تغییر بخشی از اندازه‌گیری‌ها در نمونه‌برداری بوزونی تصادفی از آشکارسازی فوتون به هِترودایِن (اندازه‌گیری در پایه حالت‌های همدوس) برای مشخصه‌یابی شبکه‌های اپتیک خطی ارائه شده است. در این پروژه، ابتدا به مطالعه دقیق ابعاد مختلف آزمایش‌های نمونه‌برداری بوزنی تصادفی پرداخته و نقش انواع خطا را در عملکرد آن مطالعه خواهیم کرد. سپس با در نظر گرفتن روش‌های ارائه شده‌ی اخیر، به بررسی مسئله صحت‌سنجی این دسته از آزمایش‌ها خواهیم پرداخت. انتظار می‌رود نتایج این پروژه سهم قابل توجهی در شناخت ابعاد مختلف و توانایی محاسباتی مسئله نمونه‌برداری بوزونی داشته باشد.

کلیدواژه‌ها: نمونه‌برداری بوزونی، برتری کوانتومی، اندازه‌گیری هترودایِن، مشخصه‌یابی شبکه اپتیک خطی

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

مقدمه

دانشمندان در علم اطلاعات کوانتومی، از یک دوگانگی بنیادی که همواره به آن پرداخته شده است، تمرد می‌کنند. این دوگانگی بیان می‌کند که: جهان ماکروسکوپی کلاسیکی است و جهان میکروسکوپی کوانتومی است.

ما با شوق فراوان آرزوی سیستم‌های کوانتومی کنترل شده‌ای را داریم که بزرگ هستند و در عین حال از خود رفتار کوانتومی نشان می‌دهند.علتی که سبب می شود تا این تلاش را مقاومت‌ناپذیر بیابیم، می تواند به طور موجز به این شکل بیان شود که: به طور عمومی، سیستم‌های کلاسیکی نمی‌توانند سیستم‌های کوانتومی را به طور کارآمد[1] شبیه سازی کنند. این عبارت را چه به طریق ریاضیاتی و چه به لحاظ آزمایشگاهی، هنوز نمی‌توانیم اثبات کنیم. اما دلایلی داریم تا باور کنیم که این مسئله درست است و کامپیوترهای کوانتومی می‌توانند اعمال محاسباتی مشخص را بسیار سریع‌تر از کامپیوترهای کلاسیک حل کنند. مسلما این موضوع یکی از جالب ترین تمایزهای بین کوانتوم و کلاسیک است که تاکنون مطرح شده است [۶، ۲۲، ۱۸، ۱، ۸، ۱۲، ۱۷].

بهترین گواه برای جدایی بین پیچیدگی کوانتومی و کلاسیکی از الگوریتم‌های کوانتومی می‌آید که اعمال محاسباتی‌ای را که فراتر از آنچه ما می‌دانیم توسط کامپیوترهای دیجیتالی کلاسیک اجرا می‌شود انجام می دهند. معروف‌ترین مثال‌ها در این مورد الگوریتم Shor برای پیدا کردن فاکتورهای اول اعداد صحیح و نیز ارزیابی لگاریتم‌های گسسته که بر پایه‌ی استفاده از تبدیل فوریه کوانتومی استوار است تا تناوب یک تابع را بیابد، هستند [۱۷].

[1] Efficiently

امیدواریم که شروع عصر برتری کوانتومی[2] را تسریع کنیم، زمانی که قادر باشیم تا کارهایی را با سیستم‌های کوانتومی کنترل‌شده انجام دهیم که فراتر از آن چیزی است که با استفاده از کامپیوترهای دیجیتال معمولی به دست می‌آید. برای تحقق این رویا، باید بتوان مشکل ناهمدوسی را که سبب می‌شود، سیستم های کوانتومی بزرگ از خود رفتار کلاسیک نشان دهند، برطرف کرد. یک اختلاف بین تعداد کیوبیت‌هایی که درحال حاضر به طور همدوس کنترل‌پذیر هستند و تعداد کیوبیت‌های مورد نیاز برای یک محاسبه، همچون فاکتورگیری به اعداد اول، در مقیاسی که برای کامپیوترهای کلاسیک چالش برانگیز محسوب می شوند، وجود دارد [۱۲، ۱۷].

یک سوال دیگر که به این بحث مرتبط است، این است که کنترل سیستم‌های کوانتومی بزرگ‌مقیاس تا چه اندازه دشوار است. دریک حالت بعد از چند دهه کار سخت، ممکن است موفق شویم که کامپیوترهای کوانتومی بزرگ مقیاس را بسازیم، اما در حالت دیگر، امکان دارد قرن‌ها و یا اصلا هرگز موفق به ساخت این نوع کامپیوترها نشویم. بخشی از این سوال به مهندسی مربوط است، بخش دیگر اما به فیزیک مربوط است. اگر معلوم شود که برتری کوانتومی دست یافتنی نیست، ممکن است با توجه به قوانین فیزیکی‌ای باشد که تاکنون کشف شده است. در هر صورت، تلاش برای محاسبات کوانتومی در مقیاس بزرگ، فیزیک را به یک رژیم جدید که قبلا هرگز درباره ی آن کاوش نشده‌است، می کشاند. چه کسی می‌داند که چه چیزی می‌یابیم [۱۷]؟

در بیان این که چرا اثبات برتری کوانتومی ارزشمند است باید گفت که علم محاسبات کوانتومی بر پایه‌ی یک قضیه بنا شده است، که مکانیک کوانتومی تعریف‌های اطلاعات و محاسبات را با دلایلی که هم فلسفی و هم عملیاتی است، تغییر داده است. برای مثال، درهمتنیدگی یک فرم سودمند از هم‌بستگی است که در نظریه‌ی کلاسیک اطلاعات وجود ندارد و وجود آن می تواند با آزمایش‌هایی که طرح شد تا نقض نامساوی بل را تست کند، اثبات شود. به آزمایش‌های برتری کوانتومی می توان به عنوان متناظر محاسباتی آزمایش‌های بل فکر کرد. همان طورکه آزمایش‌های بل، مدل‌های متغیر پنهان موضعی را رد می کند، آزمایش‌های برتری کوانتومی نیز، ECT[3] را رد می‌کند، که این قضیه از این موضوع دفاع می کند که کامپیوترهای کلاسیک می توانند هر فرآیند فیزیکی‌ای را با هزینه(برحسب زمان) چندجمله‌ای متناسب با سایز مسئله شبیه سازی کنند [۸].

چنین اثباتی، شاهد قانع‌کننده‌ای است که مدل اجماع مکانیک کوانتومی [4][۱۴] را تایید می‌کند، که نشان‌دهنده‌ی این است که جهان نه تنها شامل درهمتنیدگی است، بلکه شامل شاهکارهای محاسباتی

[2]Quantum Supremacy
[3]Extended Church Turing
[4]Consensus model

خارج از دسترس کامپیوترهای کلاسیک است. درستی تصویر استاندارد مکانیک کوانتومی در این روش، هم به دلایل بنیادین (چون مکانیک کوانتومی، تا کنون تنها نظریه‌ی فیزیکی برای تغییر دادن مدل محاسباتی ما است) و هم دلایل کاربردی (چراکه اعتماد ما به امکان سنجی نهایی محاسبات کوانتومی بزرگ مقیاس را به طور چشمگیری زیاد می‌کند) ارزشمند است.

به طور کلی، حوزه‌ی کاری الگوریتم‌های کوانتومی پیدا کردن روش‌هایی برای افزایش سرعت در یافتن پاسخ‌های مسائل محاسباتی با استفاده از یک کامپیوتر کوانتومی را هدف قرار می‌دهد. یک نقطه عطف کلیدی در این حوزه زمانی خواهد بود که یک کامپیوتر کوانتومی یک عمل محاسباتی را که فراتر از توانایی کامپیوتر کلاسیک است محاسبه کند. این همان چیزی است که به عنوان برتری کوانتومی شناخته می‌شود. به لحاظ آزمایشگاهی دستیابی به این موضوع ساده‌تر از محاسبات کوانتومی مقیاس کامل است، اما شامل چالش‌های نظری جدیدی است [۸].

برتری کوانتومی برخلاف بیشتر اعمال الگوریتمی است، چراکه بر حسب مسئله مشخصی تعریف نشده که حل شود، بلکه براساس این است که کامپیوترهای کلاسیک قادر به حل آن نباشند. در حال حاضر بدون قید و شرط نمی‌توانیم ثابت کنیم که مکانیک کوانتومی نمی‌تواند به طور کلاسیک شبیه‌سازی شود [۸]. هنوز یک کامپیوتر کوانتومی جهان‌شمول تحمل‌پذیر دربرابر خطا در دسترس نیست. به همین دلیل است که تلاش می‌شود تا با بهره‌گیری از مدل‌های میانی افزایش سرعت کامپیوترهای کوانتومی اثبات شود. یک دسته از مدل‌های میانی در اثبات برتری کوانتومی شامل مسائل نمونه‌برداری بوزونی است. نمونه برداری بوزونی یک مدل ساده‌شده برای محاسبات کوانتومی است که ممکن است کلید اجرای اولین کامپیوترهای کوانتومی با توانایی فراتر از کامپیوترهای کلاسیک باشد. نمونه‌برداری بوزونی یک کامپیوتر کوانتومی غیرجهان شمول است، به این معنا که نمی‌تواند هر محاسبه‌ی ممکن فیزیکی‌ای را انجام دهد. ساخت آن عمدتا بسیار سرراست تر از ساخت کامپیوترهای جهان شمولی است که تا کنون پیشنهاد شده‌است [۲۳، ۱۸، ۸، ۱۷].

تاریخچه‌ای طولانی در تحقیقات جامعه فیزیک در استفاده از تداخل‌سنج‌های خطی و به طور مشخص تداخل‌سنج‌های اپتیک خطی به عنوان یک پردازنده‌ی اطلاعات کوانتومی وجود دارد. در پژوهش‌هایی که تا سال‌ها قبل انجام شده‌بود، باور جمعی بر این بود که یک تداخل‌سنج اپتیک خطی نمی‌تواند به عنوان یک کامپیوتر کوانتومی جهان شمول استفاده شود [۶].

برای مثال در ۱۹۹۳ (یک سال قبل از کشف Shor برای الگوریتم فاکتورگیری معروفش) در مقاله‌ای بیان شد که با استفاده از یک تداخل‌سنج خطی مسئله NP-complete در زمان چندجمله‌ای قابل حل است، اما این طرح با افزایش نمایی در انرژی مواجه بود. به طور مشابه در ۱۹۹۶، Clauser و Dowling نشان

دادند که یک تداخل‌سنج اپتیک خطی می‌تواند برای فاکتورگیری اعداد صحیح استفاده شود، اما باز هم با افزایش نمایی در انرژی یا سایز فیزیکی مواجه بود. مجموعه‌ی این تئوری‌ها، دیدگاه‌ها را به این سمت پیش برد که تداخل‌سنجی خطی به تنهایی نمی‌تواند راهی به محاسبات کوانتومی جهان‌شمول پیش ببرد و به عنوان نتیجه باید گفت که همه‌ی تداخل‌سنج‌های اپتیک خطی غیرفعال، تصور می‌شود که بتوانند توسط کامپیوترهای کلاسیک قابل شبیه‌سازی باشند [۶].
برای بسیاری در جامعه اپتیک کوانتومی شگفت انگیز بود، زمانیکه Aaronson و Arkhipov در سال ۲۰۱۰ بیان داشتند که به طور عمومی، عمل یک تداخل‌سنج اپتیک خطی غیرفعال با ورودی های حالت فاک[۵] احتمالا نمی‌تواند توسط یک کامپیوتر کلاسیکی شبیه سازی شود. به طور مشخص اگر از توزیع خروجی که از آشکارسازهای شمارش فوتون تشکیل شده نمونه گرفته شود، نمی‌توان خروجی را با یک کامپیوتر کلاسیک بدون هزینه نمایی در زمان یا منابع پیش‌بینی کرد. این مسئله به عنوان مسئله نمونه‌گیری بوزون شناخته می شودGard و Motes از نقطه نظر فیزیکی بیان داشتند که این سختی در شبیه‌سازی چنین تداخل‌سنج‌هایی از دو الزام ضروری برخاسته است:

۱. فوتون‌ها در تقسیم‌کننده باریکه از طریق اثر Hong-Ou-Mandel برهمکنش می‌کنند که منجر به یک فضای هیلبرت بزرگ می‌شود.

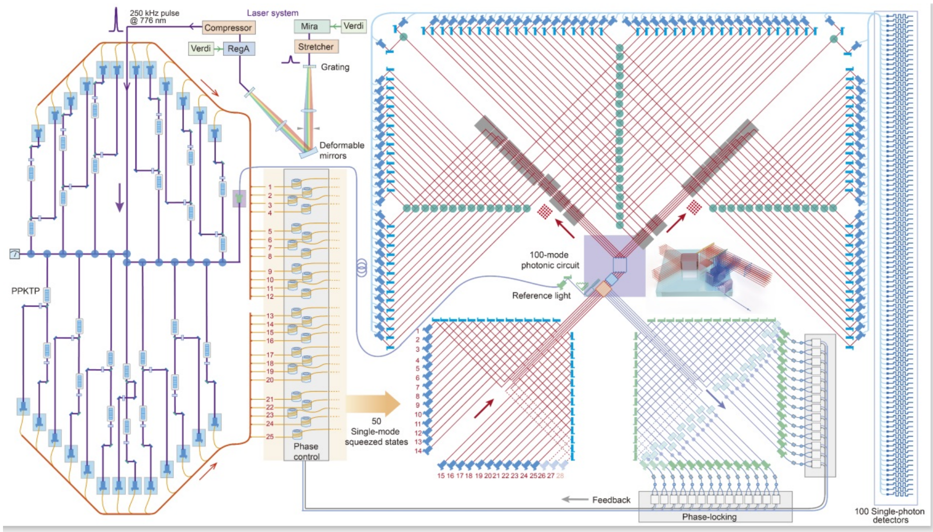
۲. شبیه‌سازی تداخل‌سنج با محاسبه پرمننت یک ماتریس بزرگ با عناصر مختلط گره خورده است. مسئله‌ای که در کلاس پیچیدگی $\sharp$P است. که محاسبات با این کلاس پیچیدگی سخت محسوب می شوند.

در حالی که الزام اول یک شرط ضروری است، به خودی خود کافی نیست که دلالت بر یک شبیه سازی سخت کند، زیرا گاهی میانبرهایی در فضای هیلبرت نمایی وجود دارد، اما با گره‌زدن شبیه‌سازی، با مسئله‌ی محاسبه پرمننت، انتظار داریم که وجود چنین میانبرهایی بعید باشد [۶].
یک تیم در چین اظهار داشتند که اولین اثبات قطعی برای برتری کوانتومی را با بهره گیری از عملکرد قوانین مکانیک کوانتومی ساخته‌اند. آن‌ها از فوتون‌های چلانده‌ی تمیزناپذیر استفاده کرده‌اند، که یک محاسبه را اجرا می‌کند که به صورت ریاضی ثابت شده است که در عمل روی کامپیوترهای عادی غیرممکن است [۳].
سال ۲۰۱۹ پژوهشگران در آزمایشگاه محاسبات کوانتومی Google اولین اثبات برتری کوانتومی را اعلام کردند. آن‌ها از ۵۳ کیوبیت استفاده کردند که از مدارهای ابررسانایی ساخته شده بودند و در دمای خیلی

[5]Fock state

پایین نگهداری می‌شوند. اما این طرح مورد مناقشه بسیاری از پژوهشگران کوانتوم بود [۲].
برای انجام این اثبات، تیم چینی تصمیم گرفتند تا از فوتون‌های چلانده‌ی تمیزناپذیر به عنوان کیوبیت استفاده کنند. آن‌ها این کار را با استفاده از کامپیوتر کوانتومی فوتونی که در دمای اتاق کار می‌کند انجام می‌دهند. با استفاده از SPDC این حالت از فوتون‌ها تولید شدند. این حالت‌ها با هم تداخل می‌کنند و توزیع فوتون که در خروجی نمایش داده می‌شود، تولید می شود. با این شیوه این تیم توانستند جواب مسئله نمونه برداری بوزون را در ۲۰۰ ثانیه حل کنند و تخمین می زنند که 2.5 بیلیون سال طول می‌کشد تا این مسئله توسط ابرکامپیوتر Taihu-Light چین حل شود [۳].
گفته می‌شود که این اولین بار است که برتری کوانتومی به اثبات رسیده است و نامحتمل است که الگوریتم کلاسیک بهتری پیدا شود. البته باید گفت که مدار فوتونی قابل برنامه نویسی نیست، در نتیجه نمی‌تواند برای حل مسائل کاربردی مورد استفاده قرار گیرد. اما اگر بتوان یک چیپ قابل برنامه نویسی ساخت، مسائل محاسباتی مهمی می‌توانند حل شوند. از میان این مسائل مهم می‌توان به مواردی که در ادامه بیان شده اند، اشاره کرد: پیش‌بینی نحوه اتصال پروتئین‌ها و نیز چگونگی ارتعاش مولکول‌ها [۳].

شکل ۱-۱: کامپیوتر کوانتومی‌ای که توسط گروهی در چین در مسئله نمونه‌برداری بوزون استفاده شده‌است [۲۳].



شکل ۱-۲: طرح مداری کامپیوتر کوانتومی چینی [۲۳].

یک سوال مهم که هر نمونه‌برداری با آن مواجه است، این است که چگونه به طور کارآمد، صحت این موضوع را بررسی کنیم که نمونه‌های تولیدشده حقیقتا از توزیع احتمال خروجی درستی به دست آمده‌اند. یک تست سنجش برای صحت این موضوع، یک الگوریتم کلاسیک است که نمونه‌های آزمایش را می‌گیرد و "بله" برمی‌گرداند، چنانچه آن‌ها از یک توزیع به اندازه‌ی کافی نزدیک به توزیع احتمال درست که نمی‌تواند به طور کارآمد به شیوه‌ی کلاسیک نمونه‌برداری شود گرفته شده باشند و در غیر اینصورت "نه" برمی‌گرداند [۱۸]. بعید است که یک تست کارآمد برای مسائل نمونه‌برداری‌ای که برای حالت کلاسیک سخت است، بدون فرض‌ها و قیدهای اضافه وجود داشته باشد [۷، ۱۸]و واضح نیست که چه فرض‌ها و قیدهایی نیاز است.

رهیافت دیگر با یک روش متفاوت، صحت‌سنجی عملکرد یک دستگاه محاسبات کوانتومی به جای تلاش برای تایید جواب‌های یک مسئله (در اینجا نمونه‌برداری از توزیع احتمال) است. این رهیافت‌ها معمولا براساس سناریوی حضور دو شرکت‌کننده در آزمایش است، یک طرف به عنوان کسی که صحت را می‌سنجد و توانایی محدود کوانتومی دارد و طرف دیگر به عنوان یک اثبات‌کننده که توان کوانتومی دارد اما می‌تواند تقلب کند. هدف نهایی در رهیافت‌های صحت‌سنجی، که براساس فرض‌های سختی محاسباتی and/or بنا شده است، سنجش صحت عمل انجام‌شده توسط اثبات‌کننده و چک‌کردن این است که آیا اثبات‌کننده صادق بوده است [۱۸].

اگر صداقت بین آزمایشگران را فرض قرار دهیم و انواع مشخصی از خطا را (این‌ها فرض‌های معمول در

آزمایش‌های فیزیکی است) فرض قرار دهیم، یک عمل پایه‌ای تر دیگر در آزمایش‌های برتری کوانتومی، مشخصه‌یابی کامل دستگاه کوانتومی است. بهتر است که مشخصه‌یابی به صورت "درجا"[۶] انجام شود، یعنی زمانی که آزمایش در حال اجراست و بدون هیچ تغییری در دستگاه کوانتومی [۱۸]. همچنین نویز مهم‌ترین مسئله در چنین اثباتی است، در نتیجه ضروری است که اثر نویز نیز فهمیده شود [۵].
ما درفصل دوم این پژوهش به مقدمات اپتیک کوانتومی و معرفی حالت‌های نور، اندازه‌گیری کوانتومی، شبکه‌های اپتیک خطی و منابع SPDC پرداختیم. در فصل سوم پس از تعریف پیچیدگی محاسباتی، مسئله نمونه‌برداری بوزون و فرم تعمیم‌یافته‌ی آن یعنی نمونه‌برداری تصادفی بوزون را بررسی کردیم، سپس به مسئله مشخصه‌یابی پرداختیم و روش پیشنهاد شده برای مشخصه‌یابی شبکه اپتیک خطی را مطالعه کردیم و از آن جایی که سیستم‌های کوانتومی حساسیت زیادی به خطا و اثر محیط پیرامون دارند، شناخت این آثار برای مشخصه‌یابی که بخش مهمی از آزمایش‌های نمونه‌برداری محسوب می شود، مهم می‌باشد. در فصل چهارم خطاهای با منابع مختلف را وارد مسئله مشخصه‌یابی کردیم و سپس با بهره‌گیری از یک سنجه برای مقایسه توزیع‌ها، درستی پروتکل مشخصه‌یابی را برای شبکه‌های مختلف مورد بررسی قرار دادیم.

[6] In situ characterization

فصل ۲

مقدمه‌ای بر اپتیک کوانتومی

در این فصل پس از مرور کوتاهی بر اپتیک کوانتومی، مفاهیم و ابزارهای مورد نیاز برای پیش‌برد بحث در فصل‌های آتی را که شامل تعریف مد اپتیکی، تقسیم‌کننده پرتو، شبکه‌های اپتیک خطی، حالت‌های مختلف نور و منابع SPDC هستند، معرفی می‌کنیم. در انتها نیز دو نوع اندازه‌گیری که به اندازه‌گیری‌های هموداین[1] و هتروداین[2] معروف هستند را معرفی می‌کنیم.

۲-۱ اپتیک کوانتومی

نور رایج‌ترین و همین‌طور ساده‌ترین سیستم در جهان است. به این علت است که فهم رفتار نور نقشی اساسی در پیشرفت فیزیک دارد. بسیاری از مفاهیم پایه در فیزیک از نور سرچشمه گرفته اند. اولین انقلاب مفهومی در مکانیک کوانتومی ناشی از تابش جسم سیاه است. بسیاری از پروتکل‌های اطلاعات کوانتومی که موضوعی داغ در زمینه‌های تحقیقاتی به شمار می‌رود، ابتدا با سیستم‌های اپتیکی شناخته شدند. علت این موضوع واضح است، سادگی سیستم‌های اپتیکی، راه‌اندازی آن‌ها را نسبت به سایر مدل‌های پیچیده در فیزیک ساده‌تر می‌کند. در نتیجه شناخت نور به ما کمک خواهد کرد که سایر سیستم‌های فیزیکی را مطالعه کنیم. اپتیک کوانتومی کامل‌ترین نظریه نور است و می‌تواند همه‌ی پدیده‌های اپتیکی که تا کنون مشاهده شده‌است را توضیح دهد. پس از کارهای پلانک در ۱۹۰۰ در

[1] Homodyne
[2] Heterodyne

حوزه‌ی نظریه‌ی تابش جسم سیاه، درباره‌ی کوانتیده بودن انرژی در جذب و گسیل های اتمی نور، در ۱۹۰۵ انیشتن مفهوم کوانتای نور را برای توضیح اثر فوتوالکتریک معرفی کرد، که تولدی برای مفهوم فوتون بود تا اپتیک کوانتومی آغاز شود [۱۵].

۲-۲ مد اپتیکی

در نظر گرفتن تابش الکترومغناطیس محصور در یک کاواک منجر به این می شود که میدان الکترومغناطیس تنها در مدهای فضایی گسسته کاواک برانگیخته شود که سادگی در محاسبات را در پی دارد. برای راحتی در محاسبات، یک کاواک به صورت مکعب با وجه L در نظر می‌گیریم، مطابق آنچه در شکل (۲-۲) نشان داده شده‌است.

یک میدان الکتریکی در فضای تهی باید معادله موج را برآورده کند:

$$\nabla^۲\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^۲} \qquad (۱-۲)$$

که در این رابطه c سرعت نور است.

و طبق معادله ماکسول داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = ۰. \qquad (۲-۲)$$

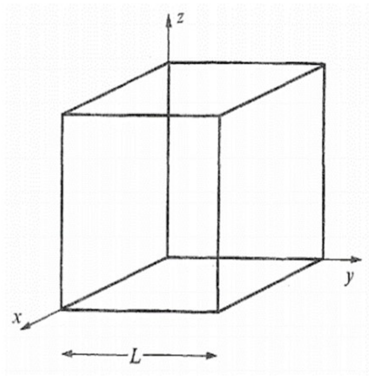
جوابی که شرایط مرزی را برآورده کند، مولفه‌های زیر را داراست:

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r},t) &= E_x(t)\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z). \\ E_y(\mathbf{r},t) &= E_y(t)\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z). \\ E_z(\mathbf{r},t) &= E_z(t)\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z). \end{aligned} \qquad (۳-۲)$$

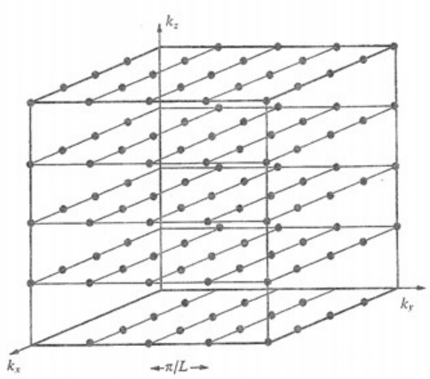
که $\mathrm{E(t)}$ مستقل از زمان است و بردار موج $\mathbf{k}$ مولفه های زیر را دارد:

$$\begin{gathered} k_x = \frac{\pi\nu_x}{L}, k_y = \frac{\pi\nu_y}{L}, k_z = \frac{\pi\nu_z}{L}. \\ \nu_x, \nu_y, \nu_z = ۰, ۱, ۲, \ldots. \end{gathered} \qquad (۴-۲)$$

تنها قیدی که روی مقادیر ν وجود دارد این است که فقط یکی از آن ها می‌تواند صفر باشد، چراکه اگر دو تا یا هر سه صفر باشند، میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r},\mathrm{t})$ در کاواک از بین می‌رود. بردار موج‌های مجاز



شکل ۲-۱: هندسه کاواک اپتیکی [۱۱].



شکل ۲-۲: بردار موج‌های مجاز برای کاواکی با وجه L [۱۱].

می‌توانند به صورت یک شبکه از نقاط با ثابت شبکه L در سه بعد ترسیم شوند. شکل (۲-۲) این شبکه را برای مقادیر صحیح ν تا ۴ نمایش می‌دهد. جواب‌های قیدشده در روابط (۲-۳) این قید را دارند که:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(t) = ۰. \qquad (۲-۵)$$

این شرط فقط برای این است که $\mathbf{E}(\mathrm{t})$ عمود بر $\mathbf{k}$ باشد.

برای هر بردار موج دو جهت مستقل میدان مجاز است. این دو جهت قطبش عرضی با برچسب‌های $\lambda = 1, 2$ مشخص می‌شوند.

هر مجموعه از سه عدد صحیح ν و برچسب قطبش λ یک مد فضایی میدان تابشی را مشخص می‌کند [۷].

۲-۳ حالت‌های نور (تک‌مدی)

۲-۳-۱ حالت عددی

فهم حالت‌های عددی ساده است واین حالت‌ها، حالت‌های پایه‌ی نظریه‌ی کوانتومی نور هستند. این حالت‌ها یک پایه کامل برای حالت‌های تک‌مدی تشکیل می‌دهند و استفاده از آن‌ها در محاسبات ویژگی‌های کوانتوم‌اپتیکی ساده است. به هر ترتیب، تولید این حالت‌ها به لحاظ آزمایشگاهی ساده نیست.

حالت عددی یا Fock state به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|۰\rangle, \qquad (۲-۶)$$

که در آن $\hat{a}^\dagger$ عملگر خلق است.

این حالت‌ها یک پایه‌ی متعامد و بهنجار می‌سازند، یعنی:

$$\langle n'|n\rangle = \delta_{n'n}, \qquad (۲-۷)$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty}|n\rangle\langle n| = I. \qquad (۲-۸)$$

این حالت‌ها، ویژه‌بردارهای عملگر هامیلتونی و عملگر عددی هستند[۱۱]:

$$H|n\rangle = \hbar\omega(n+۱/۲)|n\rangle, \qquad (۲-۹)$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \qquad (۲-۱۰)$$

که $N = a^\dagger a$ است.

۲-۳-۲ حالت همدوس

شناخته‌شده‌ترین حالت‌های تک‌مدی متناظر با برهم‌نهی خطی از حالت‌های عددی هستند. گرچه امکانات متنوعی برای برهم‌نهی حالت‌های عددی وجود دارد، اما حالت‌های همدوس به لحاظ کاربردهای عملیاتی

اهمیت دارند.

حالت‌های همدوس ویژه‌بردارهای عملگر فنا هستند، با ویژه‌مقدار متناظر α:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{۲-۱۱}$$

و همان طور که گفته‌شد، می‌توان آن‌ها را به صورت بسط بر حسب حالت‌های عددی نوشت:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^۲/۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \tag{۲-۱۲}$$

که در روابط اخیر α مقدار مختلطی است که حالت همدوس را تعیین می‌کند.

شرط بهنجارش برای این حالت‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(\alpha^*)^n\alpha^n}{n!} = ۱. \tag{۲-۱۳}$$

اما این حالت‌ها برخلاف حالت‌های عددی، پایه‌ای غیرمتعامد و over−complete می‌سازند:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^۲ = e^{-|\alpha-\beta|^۲}, \tag{۲-۱۴}$$

$$\frac{۱}{\pi}\int d^۲\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = I. \tag{۲-۱۵}$$

یک عملگر جابجایی مطابق زیر برای حالت‌های همدوس تعریف می‌شود:

$$D(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}), \tag{۲-۱۶}$$

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|۰\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})|۰\rangle. \tag{۲-۱۷}$$

که ویژگی‌های زیر برای آن برقرار است [۱۱]:

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = I, \tag{۲-۱۸}$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \tag{۲-۱۹}$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \tag{۲-۲۰}$$

۲-۳-۳ حالت دمایی

چنانچه یک باریکه نور تصادفی را در یک کاواک اپتیکی در نظر بگیریم و همه‌ی مدها را به جز یک مد که با یک بردار موج مشخص $\mathbf{k}$ و قطبش λ فیلتر کنیم، عملگر چگالی‌ای که حالت کوانتومی چنین سیستم تک مدی‌ای را توصیف می‌کند، مطابق زیر است:

$$\rho_{th} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}}{(1+\bar{n})^{1+n}} |n\rangle\langle n| \tag{۲-۲۱}$$

که:

$$\langle N \rangle = \mathbf{Tr}[\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rho_{th}] = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = \bar{n}. \tag{۲-۲۲}$$

از این حالت به عنوان حالت دمایی نام برده می‌شود.

در ادامه بسط حالت دمایی را برحسب حالت‌های همدوس به دست می‌آوریم، که در ادامه‌ی کار از این بسط استفاده خواهیم کرد.

هر عملگر چگالی را با استفاده از نمایش Glauber−Sudarshan می‌توان مطابق زیر نوشت:

$$\rho = \int d^2\alpha P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{۲-۲۳}$$

که در این رابطه $P(\alpha)$ تابع P[۳] است، که آن را می‌توان برحسب تابع مشخصه[۴] به صورت زیر نوشت:

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\xi \Phi(\xi) e^{|\xi|^2/2} e^{\alpha\xi^* - \xi\alpha^*}. \tag{۲-۲۴}$$

[3] P-function
[4] Characteristic function

همان طور که دیده می‌شود، تابع P تبدیل فوریه‌ی تابع مشخصه (با ترتیب نرمال) است. تابع مشخصه مانند زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\Phi^N(\xi) &= \Phi(\xi)e^{|\xi|^۲/۲}\\ &= \mathrm{Tr}[\rho D(\xi)]e^{|\xi|^۲/۲}\\ &= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\bar{n}}{(۱+\bar{n})^{۱+n}}\mathrm{Tr}[|n\rangle\langle n|D(\xi)e^{|\xi|^۲/۲}] = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\bar{n}}{(۱+\bar{n})^{۱+n}}\langle n|e^{a^\dagger\xi-\xi^* a}e^{|\xi|^۲/۲}|n\rangle\\ &= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\bar{n}}{(۱+\bar{n})^{۱+n}}\langle n|e^{a^\dagger\xi}e^{-\xi^* a}|n\rangle = \sum_{n=۰}^{\infty}\langle n|(۱+a^\dagger\xi+...)(۱-\xi^* a+...)|n\rangle\\ &= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\bar{n}}{(۱+\bar{n})^{۱+n}}(\langle n|n\rangle-|\xi|^۲\langle n|a^\dagger a|n\rangle+\frac{|\xi|^۲}{۲!۲!}\langle n|(a^\dagger)^۲(a)^۲|n\rangle-.....)\\ &= \sum_{\bar{n}}^{\infty}\frac{\bar{n}}{(۱+\bar{n})^{۱+n}}(۱-|\xi|^۲ n+\frac{(|\xi|^۲)^۲}{۲!}\frac{n(n-۱)}{۲!}-....)\\ &= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\bar{n}}{(۱+\bar{n})^{۱+n}}\sum_{k=۰}^{\infty}(\frac{(-۱)^k}{k!}\binom{n}{k}(|\xi|^۲)^k) = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\bar{n}}{(۱+\bar{n})^{۱+n}}L_n(|\xi|^۲)\\ &= \frac{\bar{n}}{(۱+\bar{n})}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{L_n(|\xi|^۲)}{(۱+\bar{n})^n} = \frac{\bar{n}}{(۱+\bar{n})}\frac{(۱+\bar{n})}{\bar{n}}e^{-|\xi|^۲/\bar{n}} = e^{-|\xi|^۲/\bar{n}}.\end{aligned}$$

(۲۵-۲)

در روابط اخیر L_n تابع لاگر است.

با جایگذاری تابع مشخصه به دست‌آمده در رابطه (۲-۲۴) خواهیم داشت:

$$P(\alpha) = \frac{۱}{\pi^۲}\int d^۲\xi e^{-|\xi|^۲/\bar{n}}e^{\alpha\xi^*-\xi\alpha^*} = \frac{e^{-|\alpha|^۲/\bar{n}}}{\pi\bar{n}}. \quad (۲۶-۲)$$

در نتیجه ماتریس چگالی مربوط به حالت دمایی بر حسب حالت‌های همدوس خواهد بود:

$$\rho_{th} = \int d^۲\alpha\frac{e^{-|\alpha|^۲/\bar{n}}}{\pi\bar{n}}|\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (۲۷-۲)$$

تعمیم رابطه‌ی بالا برای M مد مطابق زیر خواهد بود [۱۱]:

$$\rho_{th} = \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha}\frac{e^{-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\dagger/\bar{n}}}{\pi\bar{n}}|\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{\alpha}|, \quad (۲۸-۲)$$

که $|\boldsymbol{\alpha}\rangle = |\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_M\rangle$ است.

۲-۳-۴ حالت چلانده

حالت‌های یک میدان تابشی که واریانس میدان الکتریکی آن در رابطه زیر صدق می‌کند، حالت‌های quadreture−squeezed نامیده می‌شوند:

$$0 \leqslant (\Delta E(\theta))^2 < 1/2 \tag{۲-۲۹}$$

که:

$$\theta = \omega t - kz - \pi/2. \tag{۲-۳۰}$$

عدم قطعیت میدان الکتریکی در این حالت‌ها وابسته به فاز می‌باشد.
در حالت‌های چلانده‌ی نور، نویز میدان الکتریکی در فازهای مشخصی کمتر از حالت خلا است. این به این معناست که زمانی‌که نور در حالت چلانده را روشن کنیم، نسبت به زمانی‌که نوری نباشد، نویز کمتری خواهیم داشت. این ویژگی ظاهرا متناقض نتیجه مستقیم طبیعت کوانتومی نور است و نمی‌تواند در چارچوب کلاسیک توضیح داده شود.
یک حالت تک مدی چلانده‌ی خلا را مطابق زیر تعریف می‌کنیم:

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle \tag{۲-۳۱}$$

که عملگر چلاندگی درآن مطابق زیر است:

$$\hat{S}(\xi) = \exp(\frac{1}{2}\xi^*(\hat{a})^2 - \frac{1}{2}\xi(\hat{a^\dagger})^2). \tag{۲-۳۲}$$

و ξ پارامتر چلاندگی است که مختلط می‌باشد و مطابق زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$\xi = se^{i\nu}. \tag{۲-۳۳}$$

بسط حالت‌های چلانده بر حسب حالت‌های عددی

تابع موج برای حالت چلانده $|\xi\rangle$ در پایه‌ی مکان بی‌بعد مانند زیر نمایش داده می‌شود:

$$\psi(x) = \langle x|\xi\rangle = \frac{\sqrt{R}}{\pi^{1/4}}e^{-\frac{(Rx)^2}{2}} \tag{۲-۳۴}$$

که R فاکتور چلاندگی است.

و برای حالت همدوس داریم:

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{(x-\sqrt{2}\alpha)^2}{2}}. \tag{۳۵-۲}$$

کت حالت برای حالت همدوس مطابق زیر برحسب حالت‌های عددی بسط داده می‌شود:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{۳۶-۲}$$

با توجه به روابط بالا ضرب داخلی زیر را می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\xi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\alpha(x)\psi_R(x)dx \\ &= \sqrt{\frac{R}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(Rx)^2}{2} - \frac{(x-\sqrt{2}\alpha)^2}{2}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2R}{1+R^2}} e^{-\frac{R^2}{1+R^2}\alpha^2}. \end{aligned} \tag{۳۷-۲}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\xi\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} = \sqrt{\frac{2R}{1+R^2}} e^{\frac{1-R^2}{2(1+R^2)}\alpha^2}. \tag{۳۸-۲}$$

اگر تابع نمایی سمت راست در تساوی بالا را بسط تیلور دهیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\xi\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} = \sqrt{\frac{2R}{1+R^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1-R^2}{2(1+R^2)}\right]^m \frac{\alpha^{2m}}{m!}. \tag{۳۹-۲}$$

میدان‌های خروجی توسط رابطه‌ی خطی مطابق زیر به میدان‌های ورودی ربط داده می‌شوند:

$$\langle 2m|\xi\rangle = \sqrt{\frac{2R}{1+R^2}} \left[\frac{1-R^2}{2(1+R^2)}\right]^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{m!}. \tag{۴۰-۲}$$

چون $R = e^s$، داریم:

$$\frac{2R}{1+R^2} = \frac{1}{\cosh(s)}. \tag{۴۱-۲}$$

$$\frac{1-R^2}{1+R^2} = -\tanh(s). \tag{۴۲-۲}$$

با بازنویسی رابطه (۲-۴۰) و جایگذاری (۲-۴۱) و (۲-۴۲) در آن خواهیم داشت:

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(s)}} \sum_{m=0}^{\infty} (-\tanh(s))^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} |2m\rangle. \tag{۲-۴۳}$$

و اما تابع‌موج مکان برای حالت چلانده دو مدی مطابق زیر است:

$$\psi_R(x_a, x_b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x_a+x_b)^2/4R^2} e^{-R^2(x_a-x_b)^2/4}. \tag{۲-۴۴}$$

اگر کت حالت متناظر حالت دومدی چلانده را با $|TMSV_R\rangle$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle\alpha\alpha|TMSV_R\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_a(x_a)\psi_b(x_b)\psi_R(x_a, x_b) dx_a dx_b \\ &= \frac{2R}{1+R^2} e^{-\frac{1-R^2}{1+R^2}\alpha^2}. \end{aligned} \tag{۲-۴۵}$$

با بسط حالت‌های همدوس بر حسب حالت‌های عددی در رابطه (۲-۴۵) خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle nn|TMSV_R\rangle \frac{\alpha^{2n}}{n!} = \frac{2R}{1+R^2} e^{-\frac{1-R^2}{1+R^2}\alpha^2}. \tag{۲-۴۶}$$

با نوشتن بسط تیلور سمت راست تساوی و استفاده از روابط (۲-۴۱) و (۲-۴۲) خواهیم داشت:

$$|TMSV_R\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh(s)} \tanh^n(s) |nn\rangle. \tag{۲-۴۷}$$

به لحاظ عملیاتی با استفاده از منابع SPDC می‌توان حالت‌های چلانده‌ی دو مدی تولید کرد [۱۳].

۲-۴ اندازه‌گیری

اندازه‌گیری‌های کوانتومی توسط یک مجموعه M_m از عملگرهای اندازه‌گیری توصیف می‌شوند. این‌ها عملگرهایی هستند که روی فضای حالت سیستم تحت اندازه‌گیری عمل می‌کنند. اندیس m به خروجی‌های اندازه‌گیری که ممکن است در آزمایش اتفاق بیفتند، اشاره دارد. اگر حالت سیستم کوانتومی درست در لحظه‌ی قبل از اندازه‌گیری $|\psi\rangle$ باشد، آنگاه احتمال اینکه نتیجه m اتفاق بیفتد با عبارت زیر داده می‌شود:

$$p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle. \tag{۲-۴۸}$$

حالت سیستم پس از اندازه‌گیری مطابق زیر است:

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}. \tag{۲-۴۹}$$

عملگرهای اندازه‌گیری معادله‌ی کامل بودن را برآورده می‌کند:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I \tag{۲-۵۰}$$

که به این نتیجه منجر می‌شود که جمع احتمال‌ها یک است.

۲-۴-۱ اندازه‌گیری تصویری

یک اندازه‌گیری تصویری توسط یک مشاهده‌پذیر M، یک عملگر هرمیتی روی فضای حالت سیستم تحت مشاهده، توصیف می‌شود.مشاهده‌پذیر تجزیه‌ی طیفی زیر را داراست:

$$M = \sum_m m P_m \tag{۲-۵۱}$$

که تصویرگر روی ویژه‌فضای M با m ویژه‌مقدار است. خروجی‌های ممکن اندازه‌گیری متناظر با ویژه مقادیر m مشاهده‌پذیر است.
در اندازه‌گیری حالت $|\psi\rangle$،احتمال اندازه‌گیری m با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$p(m) = \langle\psi|P_m|\psi\rangle. \tag{۲-۵۲}$$

در صورت به دست آوردن m در اندازه‌گیری، حالت سیستم کوانتومی بلافاصله پس از اندازه‌گیری مطابق زیر است:

$$|\psi'\rangle = \frac{P_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}. \tag{۲-۵۳}$$

اندازه‌گیری‌های تصویری را به عنوان مورد خاصی از اندازه‌گیری می‌توان در نظر گرفت که درآن علاوه‌بر برآورده کردن شرط کامل بودن ($\sum_m M_m^\dagger M_m = I$)، شرط تعامد را نیز برآورده می‌کند، یعنی M_m تصویرگرهای متعامد بهنجار باشند.

۲-۴-۲ اندازه‌گیری POVM

چنانچه یک اندازه‌گیری که توسط عملگرهای اندازه‌گیری M_m توصیف شود، بر روی یک سیستم کوانتومی در حالت $|\psi\rangle$ اجرا شود، در این صورت احتمال خروجی m با $p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$ داده می‌شود.

اگر تعریف کنیم که:

$$E_m \equiv M_m^\dagger M_m. \tag{۲-۵۴}$$

آنگاه از آنچه که از تعریف اندازه‌گیری گفته شد و جبرخطی مقدماتی، E_m یک عملگر مثبت است که $\sum_m E_m = I$ و $p(m) = \langle\psi|E_m|\psi\rangle$. آنگاه مجموعه عملگرهای E_m کافی هستند تا احتمال‌های خروجی‌های اندازه‌گیری‌های مختلف را تعیین کنند. اما این فرمالیزم اطلاعاتی درباره‌ی حالت بعد از اندازه‌گیری نمی‌دهد. عملگرهای E_m به عنوان المان‌های POVM وابسته به اندازه‌گیری شناخته می‌شوند. مجموعه کامل به عنوان یک POVM شناخته می‌شود.

۲-۵ حالت‌های چندمدی

در سیستم‌های مرکب از M زیر سیستم، فضای هیلبرت سیستم مرکب مطابق زیر است:

$$H = H_۱ \otimes H_۲ \otimes .... \otimes H_M. \tag{۲-۵۵}$$

اگر $|h_i\rangle$ پایه‌ای برای فضای iام باشد، آنگاه پایه‌ی مربوط به سیستم مرکب مطابق زیر است:

$$|\mathbf{h}\rangle = |h_۱\rangle \otimes |h_۲\rangle \otimes .... \otimes |h_m\rangle. \tag{۲-۵۶}$$

۲-۵-۱ حالت عددی

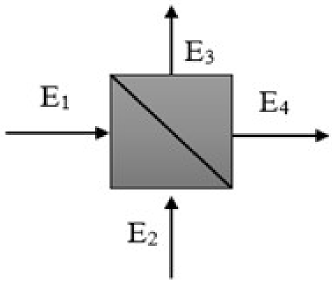
اگر سیستم مرکب، متشکل از M مد اپتیکی باشد، حالت هر مد با یک حالت عددی داده می‌شود:

$$|n_۱, ..., n_M\rangle = \frac{(a_۱^\dagger)^{n_۱}}{\sqrt{n_۱!}}....\frac{(a_M^\dagger)^{n_M}}{\sqrt{n_M!}}|۰_۱, ..., ۰_M\rangle. \tag{۲-۵۷}$$

پایه‌ی مربوط به سیستم مرکب، یک پایه‌ی متعامد و بهنجار است:

$$\langle n'_۱....n'_M|n_۱....n_M\rangle = \delta_{n'_۱n_۱}....\delta_{n'_Mn_m}. \tag{۲-۵۸}$$

$$\sum_{n_۱,...n_M} |n_۱, ..., n_M\rangle\langle n_۱, ..., n_M| = I = I_۱ \otimes I_۲ \otimes .... \otimes I_M. \tag{۲-۵۹}$$



شکل ۲-۳: تقسیم‌کننده‌ی باریکه با ورودی‌های $E_۱$ و $E_۲$ [۱۱].

۲-۵-۲ حالت همدوس

حالت همدوس برای یک سیستم متشکل از M زیرسیستم مطابق زیر است:

$$|\alpha_۱, ..., \alpha_M\rangle = e^{\hat{a}_۱^\dagger - \hat{a}_۱} ....e^{\hat{a}_M^\dagger - \hat{a}_M} |۰_۱, ..., ۰_M\rangle \qquad (۲-۶۰)$$

و داریم:

$$\hat{a}_۱.....\hat{a}_M|\alpha_۱, ..., \alpha_M\rangle = \alpha_۱....\alpha_M|\alpha_۱, ..., \alpha_M\rangle. \qquad (۲-۶۱)$$

۲-۶ تقسیم‌کننده‌ی باریکه

شکل (۲-۶) یک طرح شماتیک از یک تقسیم کننده باریکه اپتیکی است، که میدان های الکتریکی مربوط به باریکه‌های نور در بازوهای ورودی و خروجی آن نشان داده شده است. چهار باریکه‌ای در نظر گرفته شده اند که قطبش خطی متعارف دارند. تقسیم کننده باریکه‌ی در نظر گرفته‌شده فاقد اتلاف است و انرژی‌ای از باریکه‌های نور نمی‌گیرد.

میدان‌های خروجی توسط رابطه‌ی خطی مطابق زیر به میدان‌های ورودی ربط داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} E_۳ &= R_{۳۱}E_۱ + T_{۳۲}E_۲. \\ E_۴ &= T_{۴۱}E_۱ + R_{۴۲}E_۲. \end{aligned} \qquad (۲-۶۲)$$

که ضرایب موجود در رابطه (۲-۶۲) ضرایب عبور و بازتاب هستند. این ضرایب به طور عمومی مختلط هستند.

رابطه (۲-۶۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} E_۳ \\ E_۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{۳۱} & T_{۲۳} \\ T_{۴۱} & R_{۴۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_۱ \\ E_۲ \end{pmatrix} \tag{۲-۶۳}$$

که ماتریس (۲ × ۲)، ماتریس تقسیم کننده‌ی باریکه شناخته می‌شود.
ویژگی‌های مهم ضرایب در ماتریس تقسیم کننده‌ی باریکه با در نظر گرفتن بقای انرژی بین بازوهای ورودی و خروجی بدست می آید. در نتیجه با در نظر گرفتن دو ورودی نشان داده شده، انرژی کل جریان یافته در بازوهای خروجی برابر انرژی کلی است که در بازوهای ورودی جریان می‌یابد.

$$|E_۳|^۲ + |E_۴|^۲ = |E_۱|^۲ + |E_۲|^۲. \tag{۲-۶۴}$$

و رابطه (۲-۶۴) برای همه‌ی میدان‌های E_1 و E_2 برقرار است، اگر:

$$\begin{aligned} |R_{۳۱}|^۲ + |T_{۴۱}|^۲ = |R_{۴۲}|^۲ + |T_{۳۲}|^۲ = ۱. \\ R_{۳۱}T^*_{۳۲} + T_{۴۱}R^*_{۴۲} = ۰. \end{aligned} \tag{۲-۶۵}$$

می‌توان نشان داد که:

$$\frac{|R_{۳۱}|}{|T_{۴۱}|} = \frac{|R_{۴۲}|}{T_{۳۲}}. \tag{۲-۶۶}$$

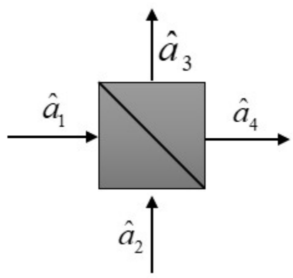
به‌دست می‌آید که:

$$\begin{aligned} |R_{۳۱}| = |R_{۴۲}| = R. \\ |T_{۳۲}| = |T_{۴۱}| = T. \end{aligned} \tag{۲-۶۷}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |R|^۲ + |T|^۲ = ۱. \\ RT^* + TR^* = ۰. \end{aligned} \tag{۲-۶۸}$$

تقسیم‌کننده‌ی باریکه‌ی اپتیکی یک عنصر مهم در بسیاری از آزمایش‌هایی است که طبیعت کوانتومی نور را مطالعه می‌کند و ویژگی مهم تقسیم کننده‌ی باریکه، توانایی آن در تبدیل حالت فوتون ورودی به یک برهم‌نهی از حالت‌ها در خروجی است.



شکل ۲-۴: تقسیم‌کننده‌ی باریکه با ورودی‌های $a_۱$ و $a_۲$ [۱۱].

شکل (۲-۶) یک نمایش از تقسیم‌کننده‌ی باریکه است، که در بازوهای ورودی و خروجی آن عملگرهای فنا دیده می‌شود که به عملگرهای میدان کوانتیزه مربوط می‌شوند.

ارتباط بین میدان‌های ورودی و خروجی کلاسیک در یک تقسیم‌کننده‌ی باریکه تماما توسط شرایط مرزی برای میدان‌های الکترومغناطیس تعیین می‌شود. شرایط مرزی برای میدان‌های کلاسیکی و برای عملگرهای میدان الکتریکی کوانتومی یکسان است. در نتیجه مطابق آنچه برای تقسیم‌کننده‌ی باریکه در حالت کلاسیکی گفته شد رابطه (۲-۶۸) برقرار است.

و برای عملگرهای فنا داریم:

$$\begin{aligned} \hat{a}_۳ &= R\hat{a}_۱ + T\hat{a}_۲. \\ \hat{a}_۴ &= T\hat{a}_۱ + R\hat{a}_۲. \end{aligned} \qquad (۶۹\text{-}۲)$$

وارون روابط خواهد بود:

$$\begin{aligned} \hat{a}_۱ &= R^*\hat{a}_۳ + T^*\hat{a}_۴. \\ \hat{a}_۲ &= T^*\hat{a}_۳ + R^*\hat{a}_۴. \end{aligned} \qquad (۷۰\text{-}۲)$$

با در نظر گرفتن مستقل بودن میدان‌های ورودی، روابط زیر بر عملگرهای خلق و فنا حاکم است:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_۱, \hat{a}_۱^\dagger] &= [\hat{a}_۲, \hat{a}_۲^\dagger] = ۱. \\ [\hat{a}_۱, \hat{a}_۲^\dagger] &= [\hat{a}_۲, \hat{a}_۱^\dagger] = ۰. \end{aligned} \qquad (۷۱\text{-}۲)$$

مشابه بررسی کلاسیکی برای عملگرهای خلق خواهیم داشت [۷]:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_۳^\dagger \\ \hat{a}_۴^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{۳۱} & T_{۲۳} \\ T_{۴۱} & R_{۴۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_۱^\dagger \\ \hat{a}_۲^\dagger \end{pmatrix}. \qquad (۷۲\text{-}۲)$$

۷-۲ اپتیک خطی و شبکه‌های اپتیک خطی

یک سیستم خطی گفته می‌شود، اگر اصل برهم‌نهی را رعایت کند، به این معنا که پاسخ به جمع دو ورودی به سیستم، جمع پاسخ‌ها به هریک از ورودی‌ها به طور جداگانه باشد.
یک شبکه اپتیک خطی می‌تواند توسط یک تبدیل‌خطی ورودی به خروجی عملگرهای خلق $\hat{a}_j^\dagger$ و $\hat{a}_k^\dagger$ نمایش داده شود که توسط رابطه زیر داده می شود:

$$\hat{a}_j^\dagger = \sum_{k=۱}^{N} M_{jk}\hat{b}_k^\dagger \qquad (۷۳-۲)$$

که در رابطه (۲-۷۳) ، $\hat{b}_k^\dagger$ عملگر خلق در ورودی شبکه‌ی اپتیکی است و $\hat{a}_j^\dagger$ هم نشان‌دهنده‌ی عملگر خلق در خروجی شبکه است و اندیس‌ها نشان‌دهنده‌ی مد زام و kام است و N نشان‌دهنده‌ی تعداد کل مدهای شبکه است.
برای یک شبکه بدون اتلاف و ایده‌آل، ماتریس M یکانی است. در عمل یک شبکه واقعی دارای اتلاف، یک زیرماتریس از ماتریس یکانی بزرگتر است[۵، ۲۱].

۸-۲ SPDC

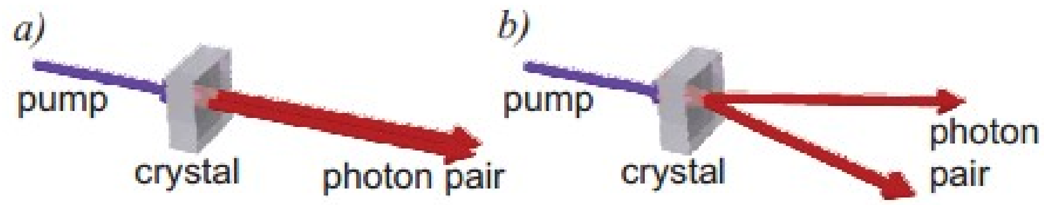
در اپتیک خطی، قطبش القایی به صورت خطی به قدرت میدان الکتریکی ربط دارد، به گونه‌ای که می‌توان نوشت:

$$\tilde{P}(t) = \varepsilon.\chi^{(۱)}\tilde{E}(t). \qquad (۷۴-۲)$$

که در این رابطه ثابت تناسب $\chi^{(1)}$ پذیرفتاری خطی و ε_0 ثابت گذردهی فضای آزاد است. در اپتیک غیرخطی، پاسخ اپتیکی می تواند به واسطه تعمیم معادله (۲-۷۴) توصیف شود. به این ترتیب که قطبش $\tilde{P}(t)$ به صورت یک سری توانی مطابق زیر بیان شود:

$$\tilde{P}(t) = \varepsilon.[\chi^{(۱)}\tilde{E}(t) + \chi^{(۲)}\tilde{E}^{۲}(t) + \chi^{(۳)}\tilde{E}^{۳}(t) + ...]. \qquad (۷۵-۲)$$

کمیت‌های $\chi^{(2)}$ و $\chi^{(3)}$ به عنوان پذیرفتاری اپتیکی مرتبه دوم و سوم شناخته می‌شوند. به طورعام پذیرفتاری‌های غیرخطی به فرکانس نور تابیده‌شده مربوط است، اما با فرض پاسخ لحظه‌ای ماده به میدان تابشی، می‌توان پذیرفتاری را ثابت در نظر گرفت. برهمکنش‌های اپتیکی غیرخطی مرتبه دوم تنها



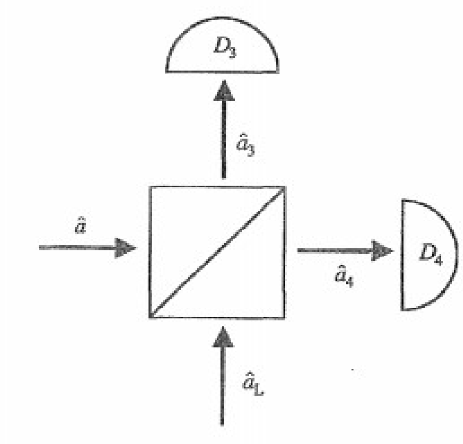
شکل ۲-۵: $SpontaneousParametricDownConversion$ a.آرایش تبهگن که منجر به تولید حالت خلا چلانده تک مدی می شود. b.آرایش غیرتبهگن که منجر به تولید حالت خلا چلانده دومدی می‌شود [۱۳].

در کریستال های غیرمتقارن [۵] اتفاق می‌افتد، که کریستال‌هایی هستند که تقارن وارونی نشان نمی‌دهند. چون مایعات، گازها، جامدات آمورف و حتی بسیاری از کریستال‌ها تقارن وارونی از خود نشان می‌دهند، $\chi^{(2)}$ برای محیط‌هایی این‌چنین وجود ندارد و نتیجتا این مواد نمی‌توانند برهمکنش‌های اپتیکی غیرخطی مرتبه دوم تولید کنند.

SPDC[6] یک فرآیند اپتیک غیرخطی است که طی آن یک فوتون از میدان یک لیزر پرقدرت در یک محیط اپتیکی غیرخطی مرتبه دوم منتشر می‌شود و طی آن ممکن است به دو فوتون با انرژی پایین‌تر تقسیم شود. فرکانس‌ها، بردارهای موج و قطبش‌های فوتون‌های تولیدشده، تحت شرایط تطبیق فاز هستند.

چلاندگی تک مدی، زمانیکه SPDC تبهگن است، ایجاد می‌شود و SPDC غیرتبهگن حالت چلانده دو مدی ایجاد می‌کند. دو فوتون تولیدشده در همه‌ی پارامترهایشان، یعنی فرکانس، جهت و قطبش از یکدیگر تمیزناپذیرند. حالت کوانتومی مد اپتیکی که در آن جفت فوتون تابش می‌شود، چلاندگی تولید می‌کند [۴، ۱۳].

[5] Noncentrosymmetric
[6] Spontaneous Parametric Down Conversion



شکل ۲-۶: آشکارساز هوموداین [۱۱].

۲-۹ اندازه‌گیری هوموداین

چنانچه عملگر تغییر فازی به صورت $\hat{U}_{PS}(\phi) = \exp(-i\hat{N}\phi)$ تعریف کنیم که حالت کوانتومی را به اندازه ϕ بچرخاند، چگالی حالت مربوطه مطابق زیر خواهد بود:

$$\hat{\rho}'_\phi = \hat{U}_{PS}(\phi)\hat{\rho}\hat{U}^\dagger_{PS}(\phi). \tag{۷۶-۲}$$

می‌توان به جای چرخاندن حالت کوانتومی، عملگر اندازه‌گیری را چرخاند، در این حالت برای عملگر مکان خواهیم داشت:

$$\hat{x}_\phi = \hat{U}^\dagger_{PS}(\phi)\hat{x}\hat{U}_{PS}(\phi) = \cos(\phi)\hat{x} + \sin(\phi)\hat{p}. \tag{۷۷-۲}$$

توزیع احتمال متناظر اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر مکان مطابق زیر خواهد بود:

$$M(x,\phi) = \langle x_\phi|\hat{\rho}|x_\phi\rangle. \tag{۷۸-۲}$$

با استفاده از روش اندازه‌گیری‌ای موسوم به آشکارسازی متعادل هوموداین، می‌توان توزیع‌های احتمال را برای مقادیر مختلف ϕ پیدا کرد. این روش اندازه‌گیری متشکل از یک تقسیم‌کننده‌ی باریکه ۵۰/۵۰ ، دو آشکارساز فوتونی و یک لیزر قوی به عنوان باریکه مرجع با یک فاز خوش تعریف نسبت به سیگنال است.

طرح شماتیک یک آشکارساز هوموداین در شکل (۲-۹) نشان داده شده‌است. $\hat{a}_L$ مربوط به میدان الکتریکی باریکه‌ی نور لیزر قوی است که بزرگی آن α_{LO} است، $\hat{a}$ مربوط به سیگنال است و D_3 و

D_4آشکارسازهای فوتونی هستند.
باریکه لیزر نوسانگر موضعی (LO) نامیده می‌شود و توان بالایی دارد، درنتیجه می‌توان به صورت کلاسیک با آن رفتار کرد، به این معنا که می‌توان افت‌وخیزهای کوانتومی را نادیده گرفت و $\hat{a}_L$ را α_{LO} در نظر گرفت.
نوسانگر موضعی می‌تواند فاز مرجع ϕ را که برای محاسبه کوادرچر[۷] های مختلف نیاز است را ایجاد کند. کمیت مورد علاقه در آشکارسازی هوموداین، اختلاف جریان‌های فوتونی اندازه‌گیری‌شده است که با تعداد فوتون ظاهر شده در آشکارسازها متناسب است.

$$I_{۳۴} = I_۳ - I_۴. \qquad (۲-۷۹)$$

$$\hat{n}_{۳۴} = \hat{n}_۳ - \hat{n}_۴ = \hat{a}^\dagger \alpha_{LO} + \hat{a}\alpha^*_{LO} = \sqrt{۲}|\alpha_{LO}|\hat{x}_\phi. \qquad (۲-۸۰)$$

در نتیجه مشاهده‌پذیری که به اندازه‌گیری هوموداین وابسته است متناسب با $\hat{x}_\phi$ است و چیزی که از این اندازه‌گیری به دست می‌آید، توزیع احتمال مکان است[۱۰].

$$\mathrm{Tr}[|x_\phi\rangle\langle x_\phi|\hat{\rho}] = \langle x_\phi|\hat{\rho}|x_\phi\rangle = M(x, \phi) \qquad (۲-۸۱)$$

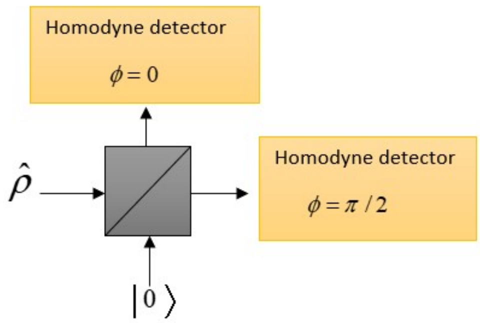
۲-۱۰ اندازه‌گیری هتروداین

طبق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ می‌دانیم که اندازه‌گیری دقیق و همزمان تکانه و مکان یک موجود امکان پذیر نیست. اما می‌توان مکان و تکانه را به صورت همزمان اندازه گرفت، اگر نخواهیم دقیق باشیم. یک حالت خاص زمانی است که نویز در اندازه‌گیری تکانه و مکان برابر باشد و شرط اصل عدم قطعیت کمینه را برآورده کند. در این حالت عملگرهای تصویر اندازه‌گیری ماتریس کووارایانسی مطابق زیر خواهد داشت:

$$\sigma = \begin{pmatrix} ۱/۲ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲ \end{pmatrix} \qquad (۲-۸۲)$$

که این ماتریس کوواریانس، مربوط به حالت همدوس است. که به این معنا است که عملگرهای تصویر حالت‌های هدوس هستند. به این اندازه‌گیری، اندازه‌گیری هتروداین گفته می‌شود که در آن حالت‌ها با

[7] Quadrature



شکل ۲-۷: آشکارساز هترودواین.

احتمال زیر به حالت‌های همدوس تصویر می‌شوند:

$$\mathrm{Tr}[\hat{\rho}|\alpha\rangle\alpha] = \langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle = \pi Q(\alpha) \qquad (۸۳-۲)$$

که $Q(\alpha)$ ، تابع Q متناظر حالت کوانتومی است.

به لحاظ عملیاتی اندازه‌گیری هترودواین با استفاده از یک تقسیم‌کننده‌ی باریکه ۵۰/۵۰ و دو آشکارساز هوموداین انجام می‌پذیرد.

طرح شماتیک سیستم اندازه‌گیری هترودواین در شکل (۲-۱۰) نشان داده شده است [۱۹].

فصل ۳

نمونه‌برداری بوزونی

در این فصل ابتدا با پیچیدگی محاسباتی و کلاس‌های پیچیدگی آشنا می‌شویم. سپس نمونه‌برداری بوزونی معرفی می‌شود و به فرم تعمیم‌یافته‌ی آن، تحت عنوان نمونه‌برداری بوزونی تصادفی می‌پردازیم و پروتکل مشخصه‌یابی درجا [1] معرفی می‌شود و در نهایت یک سنجه برای درستی‌سنجی مشخصه‌یابی معرفی می‌شود.

۳-۱ نظریه پیچیدگی

هدف نظریه پیچیدگی، تعیین میزان منابع محاسباتی مورد نیاز برای حل مسائل محاسباتی و دسته بندی آن‌ها با توجه به سختی آن‌ها است. منابعی که اغلب درباره‌ی آن‌ها بحث می‌شود، زمان محاسبات، حافظه (فضا) و مدار (سخت افزار) هستند.

۳-۱-۱ پیچیدگی محاسباتی

در یک تعریف غیررسمی از محاسبات می‌توان تابعی مانند f را در نظر گرفت که رشته‌ای از بیت‌ها و خروجی‌ها را می‌گیرد. یک الگوریتم برای محاسبه f مجموعه‌ای از قواعد مکانیکی است که با دنبال کردن آن‌ها می توان f(x) را محاسبه کرد. هر قاعده، یکی از عمل‌های مقدماتی که در ادامه ذکر شده را شامل

[1] In situ characterization

می‌شود:

۱. خواندن یک بیت ورودی.

۲. خواندن یک بیت از scratch pad یا work space که به الگوریتم اجازه می‌دهیم از آن استفاده کند.

۳. نوشتن یک بیت یا سمبل در scratch pad.

۴. توقف و خروجی ۱ و ۰.

۵. تصمیم‌گیری درباره‌ی اینکه برحسب مقادیر خوانده شده کدام یک از اعمال بالا باید اعمال شود.

در نهایت زمان اجرا تعداد این عملیات پایه‌ای است که اجرا شده است.

۳-۱-۲ کلاس پیچیدگی

به طور نوعی، یک کلاس پیچیدگی توسط یک مدل محاسباتی، یک منبع (یا مجموعه ای منابع) و یک تابع به عنوان مرز پیچیدگی برای هر منبع، شناخته می‌شود.
مدل‌هایی که استفاده می‌شوند تا کلاس‌های پیچیدگی را توصیف کنند، در دو دست قرار می‌گیرند:

۱. مدل‌های بر پایه‌ی ماشین

۲. مدل‌های بر پایه‌ی مدار

کلاس پیچیدگی فضایی و زمانی

چنانچه M یک ماشین تورینگ باشد، اگر برای همه‌ی n ها، هر دنباله از حرکت مجاز روی یک ورودی x به طول n، با $t(n)$ گام، مکث کند، می گوییم که M از پیچیدگی زمانی $t(n)$ است. به طور مشابه، اگر هر دنباله‌ی مشابهی در بیشترین حالت $s(n)$ سلول از نوار کار استفاده کند، M از پیچیدگی فضایی $s(n)$ است.
یک مسئله به لحاظ محاسباتی آسان درنظر گرفته می‌شود، چنانچه به کلاس P تعلق داشته باشد، به این

معنا که در زمان چندجمله‌ای برحسب تعداد بیت‌های مورد نیاز برای توصیف مسئله، برای یک کامپیوتر کلاسیک قابل حل باشد. اما یک مسئله به لحاظ محاسباتی سخت درنظر گرفته‌می‌شود، چنانچه منابع موردنیاز(زمانی) برای حل آن، فراتر از چندجمله‌ای متناسب با سایز ورودی باشد(که اغلب به صورت نمایی است). این دست مسائل کلاس پیچیدگی محاسباتی NP تعلق دارند [۱۴].

۳-۲ فرمالیزم نمونه‌برداری بوزون

در نمونه‌برداری بوزون به منابع تولید تک فوتون، عناصر اپتیک خطی غیرفعال (تقسیم‌کننده‌ی پرتو و انتقال‌دهنده‌ی فاز) و آشکارسازی فوتون نیاز داریم.
با آماده‌سازی یک حالت ورودی شامل n تک فوتون در m مد شروع می کنیم:

$$\begin{aligned}|\psi_{in}\rangle &= |1_1, ..., 1_n, 0_{n+1}, ..., 0_m\rangle \\ &= \hat{a}_1^\dagger....\hat{a}_n^\dagger|0_1, ..., 0_m\rangle.\end{aligned} \tag{۳-۱}$$

چنین در نظر گرفته شده که تعداد مدها در مقیاس مربع تعداد فوتون‌ها است، یعنی $m = O(n^2)$. همان‌طور که در فصل قبل نشان داده شد، حالت ورودی از طریق یک شبکه اپتیک خطی تحول پیدا می‌کند که یک نگاشت یکانی روی عملگرهای خلق اعمال می‌کند:

$$\hat{u}\hat{a}_i^\dagger\hat{u}^\dagger = \sum_{j=1}^{m} U_{ij}\hat{a}_j^\dagger. \tag{۳-۲}$$

U ماتریس یکانی‌ای است که شبکه اپتیک خطی را مشخص می‌کند.
حالت خروجی، برهم‌نهی‌ای از آرایش‌های مختلفی است که n فوتون می‌توانند به مدهای خروجی برسند:

$$|\psi_{out}\rangle = \sum_S \gamma_S|n_1^{(S)}, ..., n_m^{(S)}\rangle. \tag{۳-۳}$$

S یک آرایش است، $\mathrm{n}_i^{\mathrm{S}}$ تعداد فوتون ها در مد i ام وابسته به آرایش S است و γ_S بزرگی وابسته به آرایش S است.

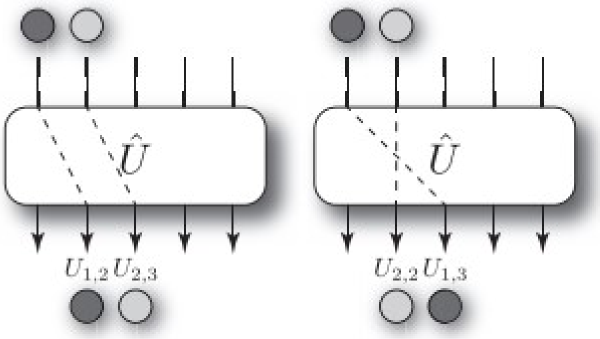
احتمال اندازه‌گیری آرایش S توسط $P_S = |\gamma_S|^2$ داده می‌شود.
نشان داده می‌شود که بزرگی γ_S با پرمننت ماتریس ارتباط دارد:

$$\gamma_S = \frac{\mathrm{Per}(U_S)}{\sqrt{n_1^{(S)}!....n_m^{(S)}!}}. \tag{۳-۴}$$

در صورتی‌که، در هر مد خروجی فقط شمارش صفر یا ۱ فوتون داشته باشیم، $\mathrm{U_S}$ یک زیرماتریس $(n\times n)$ از U و $\mathrm{Per(U_S)}$ پرمننت ماتریس $\mathrm{U_S}$ است.

در ادامه پرمننت را مورد بررسی بیشتری قرار می‌دهیم.

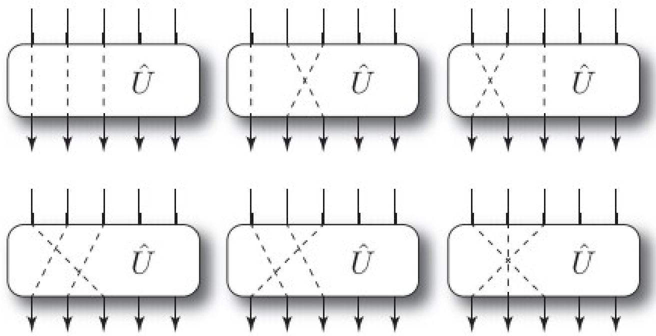
در شکل (۳-۱) یک شبکه را می‌بینیم که به دو مد اول آن تک فوتون وارد می‌شود و بقیه‌ی مدها در



شکل ۳-۱: مسیرهای مختلف دو مد ورودی هنگام عبور از شبکه [۶].

حالت خلاء باقی می‌مانند. حال اگر بزرگی اندازه‌گیری یک فوتون در مد دوم خروجی و دیگری در مد سوم را بررسی کنیم، خواهیم دید که دو راه برای تحقق این رخداد وجود دارد. اینکه فوتون اول به مد دوم برسد و فوتون دوم به مد سوم، یا بالعکس. در نتیجه $2!=2$ راه وجود دارد که فوتون‌ها به چنین آرایشی در خروجی برسند. این بزرگی می‌تواند مطابق زیر نوشته شود:

$$\gamma(۲,۳) = U_{۱,۲}U_{۲,۳} + U_{۱,۳}U_{۲,۲} = \mathrm{Per}\begin{pmatrix} U_{۱,۲} & U_{۲,۲} \\ U_{۱,۳} & U_{۲,۳} \end{pmatrix}. \tag{۵-۳}$$



شکل ۳-۲: مسیرهای مختلف سه مد ورودی هنگام عبور از شبکه [۶].

می‌توان حالت‌های پیچیده‌تر با سه فوتون را در نظر گرفت که به $3! = 6$ طریق فوتون‌ها می‌توانند به خروجی برسند. مطابق آنچه در شکل (۳-۲) نشان داده شده است.
به طور عمومی برای n فوتون، $n!$ راه وجود خواهد داشت و بزرگی وابسته به آن، با پرمننت یک ماتریس $(n \times n)$ ارتباط می‌یابد. محاسبه‌ی پرمننت ماتریس به عنوان یک مسئله P-complete♯ شناخته می‌شود که حتی از NP-complete هم سخت‌تر است.
با بهترین الگوریتم شناخته شده هم به $O(2^n n^2)$ اجرا نیاز است. در نتیجه فورا دیده می‌شود که اگر نمونه برداری‌بوزون قرار باشد به طریق کلاسیکی شبیه‌سازی شود به منابع نمایی احتیاج است.
چون تعداد مدها به صورت مربعی با تعداد فوتون‌ها در ارتباط است، برای سیستم‌های بزرگ به لحاظ آماری تضمین می‌شود که همه فوتون‌ها به مدهای خروجی متفاوتی می‌رسند و تعداد آرایش‌ها در مدهای خروجی از مرتبه زیر خواهد بود:

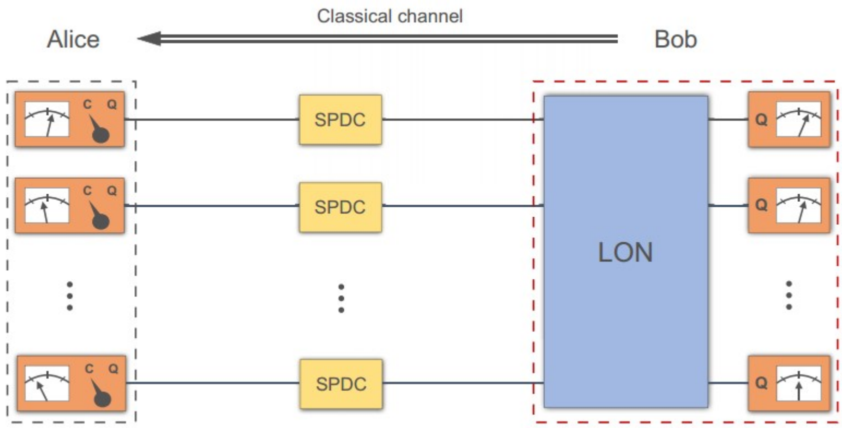
$$|S| = \binom{n+m-۱}{n}. \qquad (۳-۶)$$

در نتیجه با تعداد آزمایش موثر (چندجمله‌ای) بعید است که بتوان از یک آزمایش بیش از یک بار نمونه گرفت [۶].

۳-۳ نمونه‌برداری تصادفی بوزونی توزیع‌شده بین دو طرف

در این بخش پروتکل نمونه‌برداری تصادفی بوزونی [۱۸] را مرور می‌کنیم. منابع SPDC ای را در نظر می‌گیریم که حالت‌های چلانده دو مدی یکسانی برای ما تولید می‌کند. فرض می‌کنیم که M جفت از این مدهای چلانده داریم که پارامتر چلاندگی آن‌ها χ می‌باشد. اگر پایانه‌ی آلیس را با A و باب را با B نمایش دهیم، آنگاه حالت مربوط به هر جفت از مدها خواهد بود:

$$|\psi_{AB}\rangle = \sqrt{۱-\chi^۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\chi^n|n\rangle_A\otimes|n\rangle_B. \qquad (۳-۷)$$



شکل ۳-۳: طرح شماتیک از فرآیند صورت گرفته در نمونه برداری بوزونی که طی آن حالت های درهمتنیده‌ی تولید شده توسط منابعSPDC بین باب و آلیس به اشتراک گذاشته شده‌است و باب نتیجه‌ی اندازه گیری خود را از طریق یک کانال کلاسیکی برای آلیس می‌فرستد [۱۸].

اگر همه‌ی مدها را در کنار هم نگاه کنیم ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}|\Psi_{AB}\rangle &= \otimes_{i=1}^{M}|\psi_{AB}\rangle_i \\ &= \otimes_{i=1}^{M}\sqrt{1-\chi^2}\sum_{n_i=0}^{\infty}\chi^{n_i}|n\rangle_{A_i}\otimes|n\rangle_{B_i} \\ &= (1-\chi^2)^{M/2}\sum_{\mathbf{n}_A=0}^{\infty}\otimes_{i=1}^{M}(\chi^{n_i}|n\rangle_{A_i}\otimes|n\rangle_{B_i}) \\ &= (1-\chi^2)^{M/2}\sum_{n=0}^{\infty}\chi^N\sum_{\mathbf{n}_A}|\mathbf{n}_A\rangle\otimes|\mathbf{n}_B=\mathbf{n}_A\rangle\end{aligned} \quad (۳-۸)$$

به صورتی‌که:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_A &= n_{A,1}, n_{A,2}, \ldots.., n_{A,M}. \\ \mathbf{n}_B &= n_{B,1}, n_{B,2}, \ldots.., n_{B,M}. \\ |\mathbf{n}_A| &= \sum_{i=1}^{M} n_{A,i}.\end{aligned} \quad (۳-۹)$$

همان‌طور که در شکل (۳-۳) نشان داده شده‌است، مدهای آلیس مستقیما به آشکارساز فوتونی می‌روند و مدهای باب ابتدا وارد یک شبکه اپتیک خطی می‌شوند که با اپراتور یکانی u توصیف می‌شود

و بعد از عبور از این شبکه به آشکارساز فوتونی می‌روند.
شبکه اپتیک خطی (LON) با یک ماتریس انتقال یکانی به طور کامل توصیف می‌شود، که اپراتورهای خلق و فنا از ورودی به خروجی در پایانه باب را مطابق زیر دچار تحول می‌کند:

$$ub_j^\dagger u^\dagger = \sum_{k=1}^{M} U_{jk} b_k^\dagger. \tag{۳-۱۰}$$

با استفاده از رابطه اخیر مطابق زیر می‌توان نشان داد که:

$$\begin{aligned} u|\boldsymbol{\beta}\rangle = uD(\boldsymbol{\beta})|0\rangle = uD(\boldsymbol{\beta})u^\dagger \underbrace{u|0\rangle}_{|0\rangle} &= uD(\boldsymbol{\beta})u^\dagger|0\rangle \\ &= \exp(\boldsymbol{\beta} u\mathbf{b}^\dagger u^\dagger - \boldsymbol{\beta}^* u\mathbf{b}u^\dagger)|0\rangle \\ &= \exp(\boldsymbol{\beta}\mathbf{U}\mathbf{b}^\dagger - \boldsymbol{\beta}^*\mathbf{U}\mathbf{b})|0\rangle = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{U}\rangle \end{aligned} \tag{۳-۱۱}$$

به طوری که:

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_M) \tag{۳-۱۲}$$

بردار سطری از بزرگی حالت‌های همدوس می‌باشد.
در این setup آلیس و باب از توزیع احتمال مشترک نمونه می‌گیرند:

$$\begin{aligned} P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{U}) &= |\langle \mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|(I_A \otimes u)|\Psi_{AB}\rangle|^2 \\ &= (1-\chi^2)^M |\langle \mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B| u \sum_{k=0}^{\infty} \chi^k \sum_{\mathbf{k}_A} |\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B\rangle|^2 \\ &= (1-\chi^2)^M |\langle \mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B| u \sum_{k=0}^{\infty} \chi^k \sum_{\mathbf{k}_A} |\mathbf{k}_A\rangle \otimes u|\mathbf{k}_B = \mathbf{k}_A\rangle|^2 \\ &= (1-\chi^2)^M |\sum_{k=0}^{\infty} \chi^k \sum_{\mathbf{k}_A} \langle \mathbf{n}_A|\mathbf{k}_A\rangle\langle \mathbf{n}_B|u|\mathbf{k}_A\rangle|^2 \\ &= (1-\chi^2)^M |\sum_{k=0}^{\infty} \chi^k \sum_{\mathbf{k}_A} \delta_{\mathbf{k}_A,\mathbf{n}_a} \langle \mathbf{n}_B|u|\mathbf{k}_A\rangle|^2 \\ &= (1-\chi^2)^M \chi^{2|\mathbf{n}_A|} |\langle \mathbf{n}_B|u|\mathbf{n}_A\rangle|^2. \end{aligned} \tag{۳-۱۳}$$

تعداد فوتون‌ها در حین عبور از LON دچار تغییر نمی‌شوند، نتیجه آنکه، احتمال بالا تنها وقتی صفر نیست که $|\mathbf{n}_A| = |\mathbf{n}_B|$ باشد.

حالت‌های مارجینال سمت آلیس مطابق زیر است:

$$\begin{aligned}\rho_{th,A} &= \mathbf{Tr}_B(|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|)\\ &= (۱-\chi^۲)^M \sum_{N=۰}^{\infty} \chi^{۲N} \mathrm{Tr}_B(\sum_{\mathbf{n}_A} |\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B\rangle\langle \mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|)\\ &= (۱-\chi^۲)^M \sum_{N=۰}^{\infty} \chi^{۲N} \sum_{\mathbf{n}_A}\sum_{\mathbf{m}_B} |\mathbf{n}_A\rangle |\underbrace{\langle \mathbf{m}_B|\mathbf{n}_B\rangle}_{\delta_{\mathbf{m}_B,\mathbf{n}_B}}|^۲ \langle \mathbf{n}_A|\\ &= (۱-\chi^۲)^M \sum_{N=۰}^{\infty} \chi^{۲N} \underbrace{\sum_{\mathbf{n}_A} |\mathbf{n}_A\rangle\langle \mathbf{n}_A|}_{\Pi_N}\\ &= (۱-\chi^۲)^M \sum_{N=۰}^{\infty} \chi^{۲N}\Pi_N\\ &= (۱-\chi^۲)^M \sum_{N=۰}^{\infty} \chi^{۲\sum_j a_j^\dagger a_j}\end{aligned} \quad (۱۴\text{-}۳)$$

که داریم:

$$\Pi_N = \sum_{\substack{\mathbf{n}_A\\ |\mathbf{n}_A|=N}} |\mathbf{n}_A\rangle\langle \mathbf{n}_A|. \quad (۱۵\text{-}۳)$$

Π_N یک عملگر تصویر[۲] روی زیرفضای دارای N فوتون و M مد است، که بعد آن مطابق زیر می‌باشد:

$$\mathbf{Tr}[\Pi_N] = \binom{N+M-۱}{N} \equiv G(N,M). \quad (۱۶\text{-}۳)$$

که این معادل انتخاب N جایگاه از میان M جایگاه است، چراکه ما این تعداد پایه مستقل و عمود برهم می‌توانیم داشته باشیم، که رد این ماتریس را تعیین می‌کند.
چگالی حالت مربوط به M مد هم مطابق زیر بدست می‌آید:

$$\rho_{th} = \otimes_{i=۱}^{M} \rho_{th,i} = \otimes_{i=۱}^{M}((۱-\chi^۲)\sum_{n=۰}^{\infty}\chi^{۲N}|n\rangle\langle n|). \quad (۱۷\text{-}۳)$$

حذف اندیس A و B از رابطه بالا به این دلیل است که برای سمت آلیس و باب تفاوتی وجود ندارد.

[2] Projector

احتمال آنکه در سوی مدهای A شمارش فوتون $\mathbf{n}_A$ اتفاق بیفتد هست :

$$\begin{aligned} P_Q(\mathbf{n}_A) &= \sum_{\mathbf{n}_B} P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{U}) = \langle \mathbf{n}_A|\rho_{th,A}|\mathbf{n}_A\rangle \\ &= (۱-\chi^۲)^M \chi^{۲|\mathbf{n}_A|} \sum_{\mathbf{n}_B} |\langle \mathbf{n}_B|u|\mathbf{n}_A\rangle|^۲ \\ &= (۱-\chi^۲)^M \chi^{۲|\mathbf{n}_A|}. \end{aligned} \tag{۳-۱۸}$$

میانگین و واریانس تعداد فوتون‌هایی که در یک مد در سوی آلیس شمرده می‌شوند، مطابق زیر است:

$$\begin{aligned} \bar{n} = \mathbf{Tr}[\rho_{th} a_i^\dagger a_i] &= (۱-\chi^۲) \sum_{n=۰}^{\infty} \chi^{۲n} \mathbf{Tr}(|n\rangle\langle n| a_i^\dagger a_i) \\ &= (۱-\chi^۲) \sum_{n=۰}^{\infty} \chi^{۲n} \langle n|a_i^\dagger a_i|n\rangle \\ &= (۱-\chi^۲) \sum_{n=۰}^{\infty} n(\chi^۲)^n = (۱-\chi^۲)\frac{\chi^۲}{(۱-\chi^۲)^۲} = \frac{\chi^۲}{(۱-\chi^۲)}. \end{aligned} \tag{۳-۱۹}$$

$$(\Delta n)^۲ = \bar{n}(\bar{n}+۱) = \frac{\chi^۲}{(۱-\chi^۲)^۲}. \tag{۳-۲۰}$$

اگر میانگین شمارش فوتون برای M مد موجود را بخواهیم در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$M\bar{n} = M\frac{\chi^۲}{(۱-\chi^۲)}. \tag{۳-۲۱}$$

موردی که به آن علاقمند هستیم، چلاندگی ضعیف می‌باشد، به گونه‌ای که:

$$\chi^۲ \lesssim ۱/\sqrt{M}. \tag{۳-۲۲}$$

درحالت چلاندگی ضعیف:

$$\begin{aligned} &M\bar{n} = M\frac{\chi^۲}{(۱-\chi^۲)} \simeq M\chi^۲ \lesssim \sqrt{M} \lesssim M, \\ &N \lesssim \sqrt{M}. \end{aligned} \tag{۳-۲۳}$$

با این نتیجه‌گیری، منطقی است که بگوییم با احتمال بیشتری در هر مد، تک فوتون ظاهر می‌شود. تحت شرایط ظاهر شدن N تک فوتون در مدهای A و B ، $\langle \mathbf{n}_B|u|\mathbf{n}_A\rangle$ پرمننت زیرماتریس $(N \times N)$ مربوط به ماتریس انتقال $\mathbf{U}$ می‌باشد.

این زیرماتریس از حذف سطر و ستون متناظر با شمارش صفر فوتون می‌باشد، یعنی $n_{A,j} = n_{B,j} = 0$.
از آنجایی که تقریب پرمننت ماتریس‌های پیچیده در محدوده P-hard (خیلی سخت) قرار دارد، نمونه‌گیری دقیق از توزیع احتمال خروجی مشترک نمی‌تواند به طرز موثر به طریق کلاسیکی شبیه‌سازی شود.
احتمال آنکه N فوتون در مدهای A ظاهر شود هست:

$$P_Q(N) = \sum_{\substack{\mathbf{n}_A \\ |\mathbf{n}_A = N|}} P_Q(\mathbf{n}_A) = \mathrm{Tr}[\rho_{th,A}\Pi_N] = G(N,M)(۱-\chi^۲)^M\chi^{۲N}. \qquad (۳\text{-}۲۴)$$

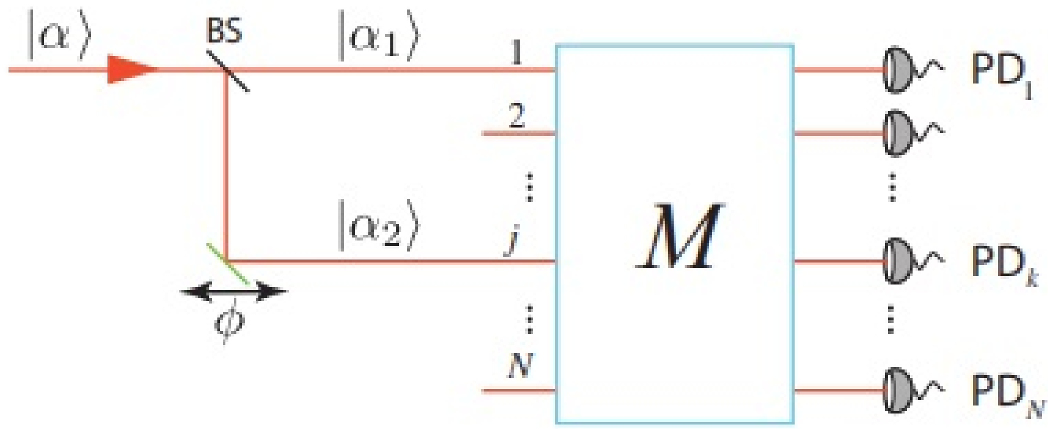
در حالیکه احتمال ظاهر شدن N تک فوتون در مدهای A هست:

$$\tilde{P}_Q(N) = \binom{M}{N}(۱-\chi^۲)^M\chi^{۲N}. \qquad (۳\text{-}۲۵)$$

۳-۴ مشخصه‌یابی

راه‌اندازی تکنولوژی‌های کوانتومی به توانایی فهمیدن عملگرهای یکانی دلخواه نیاز دارد، تا کاربردهایی همچون محاسبات و شبیه‌سازی کوانتومی به طرز موثر را مقدور سازد. در اصل از شبکه‌های اپتیک خطی، یعنی شبکه‌های غیرفعال ساخته‌شده از تقسیم‌کننده‌های باریکه و انتقال‌دهنده‌های فاز[۳] و آینه، می‌توان بهره برد تا به لحاظ آزمایشگاهی هر عملگر یکانی $(N \times N)$ ای را شناخت.
یک چالش عملیاتی باقی‌مانده این است که بتوان دستگاه ساخته شده را مشخصه‌یابی کنیم. یک پاسخ شناخته شده، اجرای فرآیند کوانتومی توموگرافی از یک دستگاه با استفاده از حالت‌های غیرکلاسیک یا حالت‌های همدوس است.
به هر ترتیب، علیرغم پیشرفت روی متدهای کارآمدی همچون سنجش فشاری[۴]، این رهیافت، نسبتا کند و برای شبکه‌های اپتیکی بزرگ غیرعملی است. یک رهیافت بهتر، شروع با فرض خطی بودن، وفق‌دادن متدهای موجود از اپتیک کلاسیک است. از آن‌جایی که یک مدار اپتیک خطی همواره می‌تواند به شکل یک تداخل‌سنج با $(N^2 - N)/2$ تقسیم‌کننده‌ی باریکه دربیاید، می‌توان به قراردادن آن در یک تداخل‌سنج خارجی و استفاده از یک نوسانگر موضعی، آن را مشخصه‌یابی کرد. به هرترتیب، چنین روشی برای یک شبکه‌ی بزرگ، باتوجه به نیاز به پایداری تداخل‌سنجی چالش‌برانگیز است.
روش‌های دیگری هم پیشنهاد شده که استفاده از یک تداخل‌سنج را از بین ببرد، اما به هر ترتیب، به

[3] Phase shifter
[4] Compressive sensing



شکل ۳-۴: طرح شماتیک مشخصه‌یابی مستقیم [۵].

تداخل‌سنج غیرکلاسیک برای مشخصه‌یابی نیاز دارد.
در مقاله‌ای که توسط محققان این حوزه منتشر شده است [۳]، روش کارآمدی پیشنهاد شده که یک شبکه اپتیک خطی N مدی را توسط تعیین ماتریس $(N \times N)$ توصیف‌کننده شبکه، مشخصه‌یابی می‌کند. در این روش از دو حالت همدوس استفاده شده است که اختلاف فاز دارند و با بهره‌گیری از اندازه‌گیری هتروداین و اندازه‌گیری شدت در فازهای مختلف،عناصر مختلف ماتریس توصیف‌کننده شبکه اپتیک خطی را مشخصه‌یابی می‌کند.
اگر شبکه توصیف‌کننده شبکه مورد نظر را با M نشان دهیم و عناصر آن را مطابق زیر نشان دهیم:

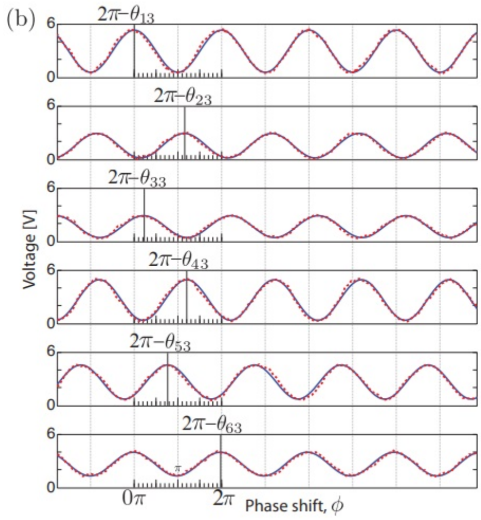
$$M_{jk} = r_{jk} e^{i\theta_{jk}}. \tag{۳-۲۶}$$

طرح شماتیکی از این روش در شکل (۳-۴) آمده است.

$$I_1 = I[r_{11}^2 + r_{j1}^2 + 2 r_{11} r_{j1} \cos(\phi)]. \tag{۳-۲۷}$$

$$I_k = I[r_{1k}^2 + r_{jk}^2 + 2 r_{1k} r_{jk} \cos(\phi + \theta_{jk})]. \tag{۳-۲۸}$$

روابط (۳-۲۷) و (۳-۲۸) شدت را در هر آشکارساز مربوط به مدهای خارجی نشان می‌دهند، که به کمک این روابط عناصر ماتریس انتقال تعریف می‌شوند.



شکل ۳-۵: نتیجه گزارش شده از مشخصه‌یابی مستقیم یک شبکه۶×۶ در آزمایشگاه[۵].

این روش در آزمایشگاه نیز مورد بررسی قرار گرفته‌است و برای شبکه‌های مورد بررسی در این آزمایش که یک شبکه 6×6 بوده است، نتیجه نشان داده شده در شکل (۳-۴) گزارش شده‌است.
خط در این نمودار چیزی است که از نظریه توقع می‌رود به‌دست آید و نقطه‌چین نمایش‌دهنده‌ی داده‌های اندازه‌گیری شده از آزمایش هستند، که نشان‌دهنده‌ی انطباق خوبی از تجربه و نظریه می‌باشد [۵].

۳-۵ پروتکل مشخصه‌یابی درجا

در این قسمت، پروتکلی برای مشخصه‌یابی معرفی می‌شود که به مشخصه‌یابی درجا معروف است. مطالب ارائه‌شده در این بخش برگرفته از مرجع [۱۸] است. در این روش، مدهای تولید شده توسط SPDC که پارامتر چلاندگی یکسانی دارند، بین آلیس و باب توزیع می‌شوند. باب باید براساس توصیف آلیس LON ای را تشکیل دهد و مدهای سمت خودش را به‌عنوان ورودی به این LON تزریق کند و سپس نمونه‌های حاصل از توزیع احتمال شمارش فوتون خروجی را برای آلیس بفرستد.
آلیس می‌تواند برای هر مد، اندازه‌گیری هترودواین یا شمارش فوتون انجام دهد. با استفاده از اطلاعات بدست آمده از اندازه گیری هترودواین، نشان می‌دهیم که آلیس می‌تواند LON واقعی دارای اتلاف باب را مشخصه یابی کند، به‌علاوه آلیس می‌تواند با استفاده از یک سنجه فاصله بین ماتریس‌های انتقال، LON واقعی باب را با یک LON ایده‌آل مقایسه کند و با استفاده از این سنجه یک کران بالایی روی فاصله

تغییرات کل، بین توزیع احتمال شمارش فوتون مشترک بدست آمده از آزمایش و توزیع احتمال RBS ایده‌آل بدست آورد. در طول این بحث چلاندگی ضعیف را به گونه‌ای که $\chi^2 \ll 1/\sqrt{M} \ll 1$ در نظر می‌گیریم.

۳-۶ شبکه‌ی دارای اتلاف و اجراهای RBS

در یک شرایط ایده‌آل، باب LON ای که توسط آلیس درخواست شده است و به‌واسطه ماتریس یکانی $\mathbf{U}$ توصیف می‌شود را اجرا می‌کند، و نمونه‌های توزیع احتمال شمارش فوتون خروجی را به آلیس می‌فرستد. آلیس اندازه‌گیری شمارش فوتون انجام می‌دهد که المان های POVM آن حالت‌های عددی چند مدی $|\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A|$ هستند. بنابراین، همانطور که قبل‌تر گفته شد، اگر باب نمونه‌ها را از توزیع ایده‌آل به‌دست بیاورد، آلیس از توزیع احتمال مشترک (۳-۱۳) نمونه می‌گیرد، که مطابق زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{U}) &= P_Q(\mathbf{n}_A) P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A, \mathbf{U}) \\ &= P(\mathbf{n}_B|\mathbf{U}) P_Q(\mathbf{n}_A|\mathbf{n}_B, \mathbf{U}). \end{aligned} \tag{۳-۲۹}$$

توزیع شرطی

$$P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A, \mathbf{U}) = \frac{P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{U})}{P_Q(\mathbf{n}_A)} = |\langle\mathbf{n}_B|u|\mathbf{n}_A\rangle|^۲ = P_Q(\mathbf{n}_A|\mathbf{n}_B, \mathbf{U}) \tag{۳-۳۰}$$

توزیع احتمال نمونه‌گیری بوزون است و

$$P_Q(\mathbf{n}_A) = (۱ - \chi^۲)^M \chi^{۲N} = P(\mathbf{n}_B|\mathbf{U}) \tag{۳-۳۱}$$

توزیع احتمال‌های مارجینال با قید $N = |\mathbf{n}_A| = |\mathbf{n}_B|$ است.

بدون دانستن خروجی اندازه‌گیری‌های شرکت‌کننده‌ی دیگر، شمارش فوتون‌های آلیس و شمارش فوتون‌های باب در خروجی LON از حالت دمایی M مده (۳-۱۴) به‌دست می‌آید،

$$\langle\mathbf{n}|\rho_{th}|\mathbf{n}\rangle = \langle\mathbf{n}|u\rho_{th}u^\dagger|\mathbf{n}\rangle = (۱ - \chi^۲)^M \chi^{۲|\mathbf{n}|}. \tag{۳-۳۲}$$

حالت دمایی مارجینال در ورودی به LON باب، به خروجی انتقال پیدا می‌کند، چراکه u نگهدارنده تعداد فوتون‌ها می‌باشد و با ρ_{th} جابجا می‌شود، یعنی:

$$u\rho_{th}u^\dagger = \rho_{th}. \tag{۳-۳۳}$$

در حضور اتلاف، LON باب یکانی نیست، اما می‌تواند منحصرا توسط یک ماتریس انتقال L توصیف شود، که از طریق رابطه بین بزرگی حالت‌های همدوس ورودی و خروجی تعریف می‌شود، یعنی حالت همدوس ورودی $|\boldsymbol{\beta}\rangle$ به حالت همدوس خروجی $|\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle = |\boldsymbol{\beta}'\rangle$ می‌رود. عملیات کوانتومی (نگهدارنده تریس) برای LON دارای اتلاف باب، که آن را یک فرآیند کوانتومی می‌نامیم، مانند زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\boldsymbol{\beta}\rangle\langle\boldsymbol{\beta}|) = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle\langle\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}|. \qquad (۳-۳۴)$$

اتلاف‌ها در ورودی به LON باب و ایده‌آل نبودن آشکارسازهای فوتونی می‌توانند در ماتریس انتقال $\mathbf{L}$ جا داده شوند. باید توجه کرد که در حالت کلی $\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger} \leqslant \mathbf{I}$ می‌باشد و در نتیجه هر LON می‌تواند به‌عنوان بخشی از یک LON برزگتر در نظر گرفته شود که یکانی است (این رهیافت در ضمیمه الف توسعه داده شده است). می‌توان با در نظر گرفتن $\mathbf{L} = \mathbf{U}$ در روابط شبکه دارای اتلاف، به شبکه ایده‌آل رسید.

مهم است که به آزادی فاز در ماتریس انتقال $\mathbf{L}$ توجه شود. می‌توانیم فازهای ماتریس انتقال را در تعریف مدهای خروجی LON جذب کنیم. فاز مدهای ورودی را نمی‌توانیم تغییر دهیم، چراکه این فازها بصورت نسبی با مدهای A به گونه‌ای تنظیم شده‌اند تا χ حقیقی باشد. این آزادی به ما اجازه می‌دهد که فاز یک المان هر ستون $\mathbf{L}$ را انتخاب کنیم. آنچه که در بخش بعدی بسیار مفید می‌یابیم حقیقی و نامنفی کردن عناصر قطری $\mathbf{L}_{\mathrm{ii}}$ می‌باشد.

در LON های دارای اتلاف، به جای نمونه‌گیری از $P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{U})$، نمونه‌های تولیدشده توسط آلیس و باب از عبارت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{L}) &= \langle \mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B | I_A \otimes \mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|)|\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B\rangle \\ &= (۱-\chi^{۲})^M \chi^{۲|\mathbf{n}_A|}\langle \mathbf{n}_B|\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A|)|\mathbf{n}_B\rangle. \end{aligned} \qquad (۳-۳۵)$$

چون $\mathcal{E}_{\mathrm{L}}$ نگهدارنده تریس است، به راحتی می‌توان مشاهده کرد که:

$$\begin{aligned} P_Q(\mathbf{n}_A) = \sum_{\mathbf{n}_B} P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{L}) &= (۱-\chi^{۲})^M \chi^{۲|\mathbf{n}_A|} \sum_{\mathbf{n}_B} \langle \mathbf{n}_B|\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A|)|\mathbf{n}_B\rangle \\ &= (۱-\chi^{۲})^M \chi^{۲|\mathbf{n}_A|}\mathrm{Tr}[\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A|)] \\ &= (۱-\chi^{۲})^M \chi^{۲|\mathbf{n}_A|} \end{aligned} \qquad (۳-۳۶)$$

که مشابه آن چیزی است که برای یک LON یکانی داریم، چراکه مدهای A هیچ اتلافی را مشاهده نمی‌کنند و در نتیجه توزیع نمونه‌گیری بوزون (شرطی) خواهد بود:

$$P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A, \mathbf{L}) = \frac{P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{L})}{P_Q(\mathbf{n}_A)} = \langle \mathbf{n}_B|\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A|)|\mathbf{n}_B\rangle. \qquad (۳-۳۷)$$

احتمال شرطی در جهت دیگر دشوار می‌باشد، چراکه LON دارای اتلاف از تعداد شمارش در مدهای B به روشی غیرقطعی می‌کاهد، که می‌توان مشاهده کرد:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{n}_B|\mathbf{L}) = \sum_{\mathbf{n}_A} P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{L}) &= (۱-\chi^۲)^M \sum_{\mathbf{n}_A} \langle \mathbf{n}_B|\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A|)|\mathbf{n}_B\rangle \\ &= (۱-\chi^۲)^M \sum_{N=۰}^{\infty} \chi^{۲N} \langle \mathbf{n}_B|\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\sum_{\mathbf{n}_A} |\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A|)|\mathbf{n}_B\rangle \\ &= (۱-\chi^۲)^M \sum_{N=۰}^{\infty} \chi^{۲N} \langle \mathbf{n}_B|\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\Pi_N)|\mathbf{n}_B\rangle \\ &= \langle \mathbf{n}_B|\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\rho_{th,B})|\mathbf{n}_B\rangle. \end{aligned} \tag{۳-۳۸}$$

Π_N تصویرگر روی زیرفضای B با N فوتون است، همان‌طور که در معادله (۳-۱۵) تعریف شده بود. سوالی که هم اکنون داریم این است که آلیس چگونه می‌تواند فرآیند کوانتومی وابسته به LON باب را مشخصه‌یابی کند؟ همین‌طور سوالات مهم دیگری وجود دارند، ازجمله این‌که نتیجه حاصل چقدر از LON ایده‌آل دور است؟ توزیع نمونه‌گیری بوزون دارای اتلاف $P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A, \mathbf{L})$ چقدر از توزیع ایده‌آل $P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A, \mathbf{U})$ فاصله دارد؟

۳-۷ مشخصه‌یابی درجا

در پروتکل مشخصه‌یابی، هدف مشخص کردن ماتریس انتقال دارای اتلاف $\mathbf{L}$ مربوط به یک LON واقعی به طریقی کارآمد است، که باب بر اساس توصیفی که آلیس از ماتریس ایده‌آل $\mathbf{U}$ داده است، بهترین LON ای را که توانسته به سیستم اعمال کرده است.
تجزیه قطبی[5] ماتریس انتقال $\mathbf{L}$ مطابق زیر است:

$$\mathbf{L} = \sqrt{\mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger}\mathbf{V} = \mathbf{V}\sqrt{\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}}. \tag{۳-۳۹}$$

$\sqrt{\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}}$ یا $\sqrt{\mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger}$ همه اتلاف های مربوط به مدهای ورودی و خروجی LON را شامل می‌شود و $\mathbf{V}$ شبکه ایده‌آل وابسته به $\mathbf{L}$ می‌باشد. ماتریس انتقال $\mathbf{L}$ زیر یکانی است ، به این معنا که $\sqrt{\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}} \leqslant \mathbf{I}$ ($\sqrt{\mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger} \leqslant \mathbf{I}$) می‌باشد. مشخصه‌یابی $\mathbf{L}$ شامل مشخص کردن شبکه $\mathbf{V}$ و ماتریس‌های اتلاف مربوطه است. باید توجه

[5] *Polar decomposition*

کرد که دانستن هر دو ماتریس اتلاف $(\sqrt{\mathbf{LL}^\dagger}, \sqrt{\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}})$ ، ماتریس $\mathbf{L}$ را مشخص می‌کند و در نهایت دانستن $\mathbf{V}$ و ماتریس‌های اتلاف، ماتریس نهایی $\mathbf{L}$ را برایمان مشخص می‌کند.
اگر ماتریس های اتلاف را با یک ماتریس یکانی دیگر، که آن را $\mathbf{W}$ می‌نامیم قطری کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\mathbf{diag}(t_1, ..., t_M) = \mathbf{W}^\dagger\sqrt{\mathbf{LL}^\dagger}\mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{W}\mathbf{diag}(t_1, ..., t_M)\mathbf{W}^\dagger = \mathbf{WW}^\dagger\sqrt{\mathbf{LL}^\dagger}\mathbf{W}^\dagger\mathbf{W}\\ &\sqrt{\mathbf{LL}^\dagger} = \mathbf{W}\mathbf{diag}(t_1, ..., t_M)\mathbf{W}^\dagger.\end{aligned} \tag{۴۰-۳}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}} &= \mathbf{V}^\dagger\sqrt{\mathbf{LL}^\dagger}\mathbf{V}\\ \sqrt{\mathbf{LL}^\dagger} &= \mathbf{V}^\dagger\mathbf{W}\mathbf{diag}(t_1, ..., t_M)\mathbf{W}^\dagger\mathbf{V}\\ \mathbf{L} = \sqrt{\mathbf{LL}^\dagger}\mathbf{V} &= \mathbf{W}\mathbf{diag}(t_1, ..., t_M)\mathbf{W}^\dagger\mathbf{V}.\end{aligned} \tag{۴۱-۳}$$

المان‌های t_i ماتریس قطری (حقیقی و نامنفی) مقادیر تکین $\mathbf{L}$ است؛ زیریکانی بودن$\mathbf{L}$ دلالت بر این دارد که $t_i \leqslant 1$ می‌باشد. مقادیر تکین، اتلاف‌ها را از یک مجموعه مدهای جفت نشده بااتلاف خالص توصیف می‌کند؛ به لحاظ فیزیکی، این‌ها ضرایب عبور یک مجموعه از M تقسیم‌کننده‌ی باریکه هستند که فوتون‌ها را از این مدهای جفت شده حذف می‌کند، همانطور که در مدل اتلاف در ضمیمه الف این بحث توسعه داده شده‌است. به ماتریس انتقال می‌توان به عنوان یک $\mathbf{W}$ یکانی اولیه که مدهای ورودی را به مدهای اتلاف خالص انتقال می‌دهد در نظر گرفت که با اتلاف های خالص ویک $\mathbf{W}^\dagger\mathbf{V}$ یکانی نهایی دنبال می‌شود که به مدهای خروجی انتقال می‌دهند.

۳-۷-۱ راه‌اندازی برای اجراهای مشخصه‌یابی

برای اجرای مشخصه‌یابی، آلیس از اندازه‌گیری هتروداین استفاده می‌کند که المان‌های POVM ضرب تصویرگرهای حالت همدوس چندمده، $|\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{\alpha}|/\pi^M$ است. به منظور ریافت خروجی α در اندازه‌گیری‌های

هتروداین، حالت در ورودی LON باب به حالت همدوس چندمده $|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\rangle$ تصویرمی‌شود،

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi^{M/2}}\langle\boldsymbol{\alpha}|\Psi_{AB}\rangle &= \frac{1}{\pi^{M/2}}\prod_{i=1}^{M}\langle\alpha_i|\Psi_{AB}\rangle_i \\
&= \frac{1}{\pi^{M/2}}\prod_{i=1}^{M}\langle\alpha_i|\sqrt{1-\chi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\chi^n|n_{A_i}\rangle\otimes|n_{B_i}\rangle \\
&= \frac{1}{\pi^{M/2}}\sqrt{1-\chi^2}^{M}\prod_{i=1}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}\chi^{n_{A_i}}\langle\alpha_i|n_{A_i}\rangle\otimes|n_{B_i}\rangle \\
&= \frac{1}{\pi^{M/2}}\sqrt{1-\chi^2}^{M}\prod_{i=1}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}\chi^{n_{A_i}}e^{-\frac{|\alpha_i|^2}{2}}\sum_{l}\frac{(\alpha_i^*)^{l_{A_i}}}{\sqrt{l_{A_i}!}}\langle l_{A_i}|n_{A_i}\rangle\otimes|n_{B_i}\rangle \\
&= \frac{1}{\pi^{M/2}}\sqrt{1-\chi^2}^{M}\prod_{i=1}^{M}\sum_{n_{A_i}=0}^{\infty}\chi^{n_{A_i}}e^{-\frac{|\alpha_i|^2}{2}}\frac{(\alpha_i^*)^{n_{A_i}}}{\sqrt{n_{A_i}!}}|n_{A_i}\rangle \\
&= \frac{1}{\pi^{M/2}}\sqrt{1-\chi^2}^{M}\prod_{i=1}^{M}e^{-\frac{|\alpha_i|^2}{2}}\sum_{n_{A_i}=0}^{\infty}\frac{(\chi\alpha_i^*)^{n_{A_i}}}{\sqrt{n_{A_i}!}}|n_{A_i}\rangle \\
&= \frac{1}{\pi^{M/2}}\sqrt{1-\chi^2}^{M}e^{-(1-\chi^2)|\boldsymbol{\alpha}|/2}|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\rangle
\end{aligned}$$

(۴۲-۳)

به طوریکه:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, ..., \alpha_M^*). \\
&|\boldsymbol{\alpha}|^2 = \boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\alpha}^T = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\dagger = \sum_{i=1}^{M}|\alpha_i|^2.
\end{aligned}$$

(۴۳-۳)

می‌دانیم که یک LON را می‌توان با آمار شمارش فوتون زمانی‌که شبکه با یک مجموعه‌ی مشخصی از حالت‌های همدوس روشن می‌شود، مشخصه‌یابی کرد [۵]. در نتیجه شگفت انگیز نیست که بتوانیم یک پروتکل برای مشخصه‌یابی LON از آمار مشترک اندازه‌گیری هتروداین آلیس و ثبت شمارش فوتون باب بسازیم.

با خروجی $\boldsymbol{\alpha}$ هتروداین داده شده، حالت در خروجی LON، حالت همدوس $|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\rangle$ است. به طور دقیق‌تر

داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{\pi^M}\langle\boldsymbol{\alpha}|I_A\otimes\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|)|\boldsymbol{\alpha}\rangle\\
&=\frac{۱}{\pi^M}\varepsilon_{\mathbf{L}}(\langle\boldsymbol{\alpha}|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|\boldsymbol{\alpha}\rangle)\\
&=\frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M}\sum_{N=۰}^{\infty}\chi^{۲N}\sum_{\mathbf{n}_A}\mathcal{E}_{\mathbf{L}}((\langle\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{n}_A\rangle\otimes|\mathbf{n}_B\rangle)(\langle\mathbf{n}_A|\boldsymbol{\alpha}\rangle\otimes\langle\mathbf{n}_B|))\\
&=\frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M}\sum_{N=۰}^{\infty}\chi^{۲N}\sum_{\mathbf{n}_A}e^{-|\boldsymbol{\alpha}|^۲}\frac{|\boldsymbol{\alpha}|^{۲\mathbf{n}_A}}{\mathbf{n}_A!}\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A|)\\
&=\frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M}e^{-(۱-\chi^۲)|\boldsymbol{\alpha}|}|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}\rangle\langle\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}|.
\end{aligned}\tag{۳-۴۴}$$

تصویرکردن مجدد روی خروجی $\mathbf{n}_B$، شمارش فوتون در پایانه باب، احتمال مشترک برای خروجی‌های $\mathbf{n}_B$ و $\boldsymbol{\alpha}$ را می‌دهد:

$$P_C(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{n}_B|\mathbf{L})=\frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M}e^{-(۱-\chi^۲)|\boldsymbol{\alpha}|}|\langle\mathbf{n}_B|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}\rangle|^۲\tag{۳-۴۵}$$

که داریم:

$$\begin{aligned}
|\langle\mathbf{n}_B|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}\rangle|^۲&=\prod_{i=۱}^{M}|\langle n_{B,i}|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}_i\rangle|^۲\\
&=\chi^{۲|\mathbf{n}_B|}e^{-\chi^۲\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha}^T}\prod_{i=۱}^{M}\frac{|\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}_i|^{۲\mathbf{n}_{B,i}}}{\mathbf{n}_{B,i}!}.
\end{aligned}\tag{۳-۴۶}$$

در اینجا:

$$\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}_i=(\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L})_i=\sum_{j=۱}^{M}\alpha_j^*L_{ji}.\tag{۳-۴۷}$$

$$\mathbf{L}_i=(L_{۱i}\,L_{۲i}.........L_{Mi})^T.\tag{۳-۴۸}$$

رابطه‌ی اخیر نشان‌دهنده‌ی بردار ستونی ساخته شده از ستون iام ماتریس $\mathbf{L}$ است.
می‌توانیم احتمال مشترک را مانند زیر بنویسیم:

$$P_C(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{n}_B|\mathbf{L})=P_C(\boldsymbol{\alpha})P_C(\mathbf{n}_B|\boldsymbol{\alpha},\mathbf{L})\tag{۳-۴۹}$$

که:

$$\begin{aligned} P_C(\boldsymbol{\alpha}) &= \sum_{\mathbf{n}_B} P_C(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}_B|\mathbf{L}) \\ &= \frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M} e^{-(۱-\chi^۲)|\boldsymbol{\alpha}|^۲} \sum_{\mathbf{n}_B} \chi^{۲|\mathbf{n}_B|} e^{-\chi^۲ \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{L}\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha}^T} \prod_{i=۱}^{M} \frac{|\boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{L}_i|^{۲\mathbf{n}_{B,i}}}{\mathbf{n}_{B,i}!} \\ &= \frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M} e^{-(۱-\chi^۲)|\boldsymbol{\alpha}|^۲} e^{-\chi^۲ \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{L}\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha}^T} \prod_{i=۱}^{M} \sum_{\mathbf{n}_B} \frac{|\chi \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{L}_i|^{۲\mathbf{n}_{B,i}}}{\mathbf{n}_{B,i}!} \\ &= \frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M} e^{-(۱-\chi^۲)|\boldsymbol{\alpha}|^۲} e^{-\chi^۲ \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{L}\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha}^T} e^{\chi^۲ \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{L}\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha}^T} \\ &= \frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M} e^{-(۱-\chi^۲)|\boldsymbol{\alpha}|^۲} \\ &= \frac{۱}{\pi^M} \langle \boldsymbol{\alpha} | \rho_{th,A} | \boldsymbol{\alpha} \rangle. \end{aligned} \tag{۳-۵۰}$$

احتمال شرطی برای خروجی هترودلین $\boldsymbol{\alpha}$ در پایانه آلیس است. برای این احتمال شرطی، $\boldsymbol{\alpha}$ از حالت دمایی (۳-۱۴) بدست می‌آید. احتمال (۳-۵۰) توزیع Q [۹] این حالت دمایی است.
احتمال شرطی برای برای شمارش فوتون باب، با شرط خروجی هترودلین $\boldsymbol{\alpha}$، می‌تواند کلاسیکی به طرز کارآمد با استفاده از معادله (۳-۴۶) محاسبه شود،برخلاف توزیع (۳-۳۰) که محاسبه آن در کلاس Pاست.

$$P_C(\mathbf{n}_B|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{L}) = |\langle \mathbf{n}_B | \chi \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{L} \rangle|^۲. \tag{۳-۵۱}$$

۳-۷-۲ آمار شمارش فوتون غیرشرطی باب

یک توقف کوتاه می‌کنیم تا ببینیم که چه چیزی از آمار فوتون (مرزی) غیرشرطی در پایانه باب آموخته می‌شود. احتمال غیرشرطی (۳-۳۸) برای ثبت شمارش فوتون $\mathbf{n}_B$،

$$P(\mathbf{n}_B|\mathbf{L}) = \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha} P_C(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}_B|\mathbf{L}) = \langle \mathbf{n}_B | \mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\rho_{th,B}) | \mathbf{n}_B \rangle \tag{۳-۵۲}$$

مستقل از آن چیزی است که در پایانه آلیس رخ می‌دهد و نمونه‌گیری از حالت مارجینال خروجی $\varepsilon_{\mathbf{L}}(\rho_{th,B})$ را توصیف می‌کند که حالت دمایی مارجینال ورودی در پایانه باب است، که توسط یک شبکه دارای اتلاف پردازش می‌شود. چون توزیع شمارش فوتون غیرشرطی $P(\mathbf{n}_B|\mathbf{L})$ مستقل از هر اندازه‌گیری‌ای است که آلیس انجام می‌دهد، اندیس C در معادله (۳-۵۲) و Q در معادله (۳-۳۰) را حذف می‌کنیم.

حالت دمایی مارجینال M مده (۳-۱۷) را می‌توان با استفاده از بسط حالت‌های همدوس مطابق زیر نمایش داد:

$$\rho_{th,B} = \int d^{2M}\boldsymbol{\beta}\frac{e^{-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}/\bar{n}}}{(\pi\bar{n})^{M}}|\boldsymbol{\beta}\rangle\langle\boldsymbol{\beta}|. \tag{۳-۵۳}$$

حالت مارجینال M مده در خروجی LON باب هست:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\rho_{th,B}) &= \int d^{2M}\boldsymbol{\beta}\frac{e^{-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}/\bar{n}}}{(\pi\bar{n})^{M}}|\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle\langle\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}| \\ &= \int d^{2M}\gamma\frac{e^{-\gamma(\bar{n}\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L})^{-1}\gamma^{\dagger}}}{(\pi\bar{n})^{M}\det(\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L})}|\gamma\rangle\langle\gamma|.\end{aligned} \tag{۳-۵۴}$$

که $\gamma = \boldsymbol{\beta}\mathbf{L}$ است. باید توجه کرد که $\det(\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}) = t_1^2...t_M^2$ می‌باشد. این حالت همانطور که نشان داده شده‌است P-function گاوسی با همبستگی بین مدهای خروجی دارد. اگر $\mathbf{L}$ یکانی باشد، حالت مارجینال خروجی هم‌ارز حالت دمایی ورودی است، همانطور که در رابطه (۳-۳۳) نشان داده شده‌است. قطری سازی ماتریس اتلاف خروجی $\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}$ همانطور که در رابطه (۳-۴۱) دیده می‌شود، حالت مارجینال خروجی (۳-۵۴) را بر اساس مدهای جفت‌نشده، اتلاف خالص منتقل‌شده از خروجی باب توسط ماتریس $\mathbf{V}^{\dagger}\mathbf{W}$ را بیان می‌کند. این مدهای جفت‌نشده دارای اتلاف، هر کدام در یک حالت دمایی هستند، اما هریک در یک دمای متفاوت و نتیجتا میانگین تعداد فوتون متفاوت، $\bar{n}t_i^2 \leqslant \bar{n}$ می‌باشد.
نکته‌ی مهمی که به آن می‌رسیم، این است که حالت مارجینال خروجی توسط ماتریس اتلاف خروجی $\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}$ مشخص می‌شود و از ماتریس انتقال بدون اتلاف $\mathbf{V}$ مستقل است. چراکه آمار فوتون غیرشرطی در پایانه باب ــ به طور عمومی‌تر آمار غیرشرطی برای هر اندازه گیری در پایانه باب ــ درباره $\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}$ به ما اطلاعات می‌دهد و هیچ اطلاعاتی درباره $\mathbf{V}$ برای ما به همراه ندارد.
احتمال‌های شمارش فوتون $P(\mathbf{n}_B|\mathbf{L})$، به طور عام متناسب با پرمننت ماتریس‌های هرمیتی مثبت ــ که در اینجا زیرماتریس‌های $\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}$ است ــ می‌باشد و در کلاس پیچیدگی P-hard قرار می‌گیرند. با این وجود می‌توان به سادگی نشان داد که پروتکل کلاسیک کارآمدی به منظور نمونه برداری از تابع مثبت و خوش تعریف P (۳-۵۴) وجود دارد که از $P(\mathbf{n}_B|\mathbf{L})$ نمونه‌برداری می‌کند. به علاوه آمار شمارش فوتون می تواند برای مشخصه یابی $\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}$ استفاده شود. این ملاحظات نشان می‌دهد که سختی محاسبه‌ی یک توزیع، سختی نمونه‌برداری از آن و مشخصه‌یابی براساس نمونه برداری از آن، مستقل هستند. برای به‌دست‌آوردن حالت مارجینال در مد i ام پایانه باب، ساده‌تر آن است که با تابع مشخصه حالت خروجی M مدی، با ترتیب نرمال کار کنیم، که تبدیل فوریه تابع P است و با مقدار انتظاری عملگر جابجایی با

ترتیب نرمال داده می‌شود:

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{\xi}|\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\rho_{th})) &= \mathrm{Tr}(e^{-\mathbf{b}\boldsymbol{\xi}^{\dagger}}\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\rho_{th})e^{\boldsymbol{\xi}\mathbf{b}^{\dagger}}) \\ &= \int d^{2M}\boldsymbol{\gamma}\frac{e^{-\boldsymbol{\gamma}(\bar{n}\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L})^{-1}\boldsymbol{\gamma}^{\dagger}}}{(\pi\bar{n})^{M}\det(\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L})}\mathrm{Tr}(e^{-\mathbf{b}\boldsymbol{\xi}^{\dagger}}|\boldsymbol{\gamma}\rangle\langle\boldsymbol{\gamma}|e^{\boldsymbol{\xi}\mathbf{b}^{\dagger}}) \\ &= \int d^{2M}\boldsymbol{\gamma}\frac{e^{-\boldsymbol{\gamma}(\bar{n}\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L})^{-1}\boldsymbol{\gamma}^{\dagger}}}{(\pi\bar{n})^{M}\det(\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L})}\langle\boldsymbol{\gamma}|e^{\boldsymbol{\xi}\mathbf{b}^{\dagger}}e^{-\mathbf{b}\boldsymbol{\xi}^{\dagger}}|\boldsymbol{\gamma}\rangle \\ &= \int d^{2M}\boldsymbol{\gamma}\frac{e^{-\boldsymbol{\gamma}(\bar{n}\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L})^{-1}\boldsymbol{\gamma}^{\dagger}}}{(\pi\bar{n})^{M}\det(\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L})}e^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\gamma}^{\dagger}-\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\xi}^{\dagger}} \\ &= e^{-\boldsymbol{\xi}(\bar{n}\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L})\boldsymbol{\xi}^{\dagger}}.\end{aligned} \tag{۳-۵۵}$$

در این رابطه:

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_M) \tag{۳-۵۶}$$

بردار سطری از عملگرهای فنا است.

تابع مشخصه برای مد i ام در ترتیب نرمال با در نظر گرفتن $\xi_j = 0$ برای $j \neq i$ به دست می‌آید:

$$\Phi(\xi_i|\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\rho_{th})) = e^{-\bar{n}l_i^2|\xi_i|^2} \tag{۳-۵۷}$$

که

$$l_i^2 = (\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L})_{ii} = \sum_{j=1}^{M}|L_{ji}|^2 = \mathbf{L}_i^{\dagger}\mathbf{L}_i \leqslant 1 \tag{۳-۵۸}$$

عنصر قطری i ام از $\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}$ یا به طور معادل، مربع طول بردار ستونی $\mathbf{L}_i$ است.

تابع مشخصه (۳-۵۷) یک حالت دمایی با میانگین تعداد فوتون زیر است:

$$\bar{n}_i = \bar{n}l_i^2 = \frac{\chi^2 l_i^2}{1-\chi^2} \simeq \chi^2 l_i^2. \tag{۳-۵۹}$$

در تقریب چلاندگی ضعیف $\chi^2 \simeq \frac{1}{\sqrt{M}}$ قرار می‌گیرد.

احتمال شمارش n_i فوتون در خروجی مد i ام هست:

$$P(n_i|\mathbf{L}) = \frac{\bar{n}_i^{n_i}}{(1+\bar{n}_i)^{1+n_i}} = \frac{(1-\chi^2)}{1-\chi^2(1-l_i^2)}\left(\frac{\chi^2 l_i^2}{1-\chi^2(1-l_i^2)}\right)^{n_i}. \tag{۳-۶۰}$$

در حالت چلاندگی ضعیف، احتمال برای شمارش صفر فوتون و یک فوتون در مد i ام $P(0_i|\mathbf{L}) =\simeq 1-\chi^2 l_i^2$ و $P(1_i|\mathbf{L}) = \chi^2 l_i^2$ خواهد بود.

با استفاده از تمام داده‌های گزارش شده توسط باب، از اجراهای RBS و اجراهای مشخصه یابی، آلیس می تواند l_i^2 را برای هر مد خروجی تخمین بزند. با داشتن این تخمین‌ها، آلیس می‌تواند سنجه‌ای معین کند که $\mathbf{L}$ چقدر از ماتریس یکانی دور است، یعنی:

$$E(\mathbf{L}) = \frac{۱}{M}\|\mathbf{I} - \mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}\|_{۱} = ۱ - \frac{۱}{M}Tr[\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}] = ۱ - \frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{M} l_i^{۲}. \qquad (۶۱-۳)$$

1-norm (که trace-norm هم نامیده می‌شود) مطابق $\|A\|_1 = \mathrm{Tr}[\sqrt{\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}}]$ تعریف می‌شود. این کمیت، که در شرط $0 \leqslant E(\mathbf{L}) \leqslant 1$ صدق می‌کند، می‌تواند به عنوان اتلاف میانگین هر مد تعبیر شود و همچنین برحسب مقادیر تکین t_i داده می‌شود، یعنی:

$$E(\mathbf{L}) = ۱ - \frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{M} t_i^{۲}. \qquad (۶۲-۳)$$

همانطور که در بالا اشاره شد، ممکن است که ماتریس اتلاف $\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}$ از همبستگی تعداد فوتون بین مدهای خروجی بازسازی شود. همبستگی‌های مرتبه دوم درباره بزرگی مولفه‌های غیرقطری $\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}$ اطلاعاتی فراهم کند. همبستگی مرتبه سوم درباره فاز مولفه‌های غیرقطری $\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}$ اطلاعاتی فراهم می‌کند که البته کامل نیست.

افزون بر این، قسمت‌های مربوط به هبستگی‌های مرتبه دوم و سوم متناسب با $\bar{n}^2 \propto \chi^4$ و $\bar{n}^3 \propto \chi^6$ می‌باشند. در نتیجه سخت می‌شود که اطلاعات مربوط به آمار از این مولفه‌ها خوانده شود.

یک سوال مهم این است که چه مشخصه یابی LON ای می‌تواند با استفاده از آمار شمارش فوتون مشترک در اجرای RBS به دست آید. این سوال البته در محدوده این پژوهش قرار نمی‌گیرد.

تمرکز اصلی این پژوهش بر روی مشخصه‌یابی با بهره‌گیری از اندازه‌گیری هتروداین و آنالیز اطلاعات در پایانه آلیس است، که می‌تواند تمامی عناصر ماتریس انتقال $\mathbf{L}$ را تعیین کند.

۳-۷-۳ اجراهای مشخصه‌یابی

احتمال شرطی برای خروجی‌های هتروداین

$$P_C(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{n}_B, \mathbf{L}) = \frac{P_C(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}_B|\mathbf{L})}{P(\mathbf{n}_B|\mathbf{L})} = \frac{P_C(\boldsymbol{\alpha})}{P(\mathbf{n}_B|\mathbf{L})}|\langle \mathbf{n}_B|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}\rangle|^{۲} \qquad (۶۳-۳)$$

که از رابطه ی (۳-۴۵) و (۳-۵۰) به دست می‌آید. تابع Q حالت مدهای آلیس با شرط ثبت شمارش فوتون مشخصی در پایانه باب می‌باشد.

هم‌اکنون نشان می‌دهیم که با نمونه‌برداری از این توزیع شرطی، آلیس می‌تواند ماتریس انتقال $\mathbf{L}$ وابسته به LON باب را به طور کامل مشخصه‌یابی کند. برای دیدن اینکه از آمار هترودواین چه اطلاعاتی قابل دسترس است، توجه می‌کنیم که :

$$|\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}_i|^۲ = (\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}_i)(\mathbf{L}_i^\dagger\boldsymbol{\alpha}^T) = \boldsymbol{\alpha}^*(\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^\dagger)\boldsymbol{\alpha}^T = \mathbf{L}_i^\dagger\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}_i. \quad (۳\text{-}۶۴)$$

تاکید می‌کنیم که $\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^\dagger$ ضرب ماتریسی می‌باشد، یعنی ضرب خارجی بردار ستونی $\mathbf{L}_i$ در بردار سطری $\mathbf{L}_i^\dagger$. در نتیجه برای ترم مربعی ظاهر شده در رابطه (۳-۶۳) خواهیم داشت:

$$|\langle\mathbf{n}_B|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}\rangle|^۲ = \chi^{۲|\mathbf{n}_B|}\exp(-\chi^۲\boldsymbol{\alpha}^*(\sum_{i=۱}^{M}\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^\dagger)\boldsymbol{\alpha}^T)\prod_{i=۱}^{M}\frac{|\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^\dagger\boldsymbol{\alpha}^T|^{\mathbf{n}_{B,i}}}{\mathbf{n}_{B,i}!} \quad (۳\text{-}۶۵)$$

عبارت اخیر به راحتی از بسط حالت همدوس بر حسب حالت‌های عددی به دست می‌آید.
این رابطه آشکار می‌سازد که می‌توان امیدوار بود که عناصر ماتریس ضرب خارجی $\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^\dagger$ را از آمار هترودواین مشخصه‌یابی کرد. اندکی تامل نشان می‌دهد که همه‌ی این ضرب‌های خارجی برای مشخصه‌یابی کردن $\mathbf{L}$، با توجه به فازهای مرجع مدهای آلیس و آزادی فازی که درباره آن بحث شد، هر مدی حقیقی کافی می‌باشد.
برای مشخصه‌یابی به هر ترتیب، نیاز نداریم که توزیع هترودواین شرطی برای همه‌ی ثبت شمارش فوتون‌های باب را در نظر بگیریم، در واقع برای داشتن یک فرآیند مشخصه‌یابی کارآمد، بهتر است که ثبت شمارش فوتون‌های محتمل‌تر بپردازیم.
به طور مشخص روی شرایطی تمرکز می‌کنیم، که تنها شرط آن است که در مد i ام در سمت باب شمارش صفر فوتون گزارش شود. احتمال مشترک $P_C(\boldsymbol{\alpha}, 0_i|\mathbf{L})$ برای خروجی $\boldsymbol{\alpha}$ هترودواین و برای شمارش صفر فوتون در مد i ام، با جمع زدن $P_C(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}_B|\mathbf{L})$ روی همه‌ی شمارش فوتون‌های ممکن برای مدهای غیر از i و در نظر گرفتن $\mathrm{n_{B,i}}=0$ به دست می‌آید و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P_C(\boldsymbol{\alpha}, ۰_i|\mathbf{L}) &= \frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M}e^{-(۱-\chi^۲)|\boldsymbol{\alpha}|}|\langle ۰|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}_i\rangle|^۲ \\ &= \frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M}e^{-(۱-\chi^۲)|\boldsymbol{\alpha}|}e^{-\chi^۲|\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}_i|^۲} \\ &= \frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M}e^{-\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{S}_i\boldsymbol{\alpha}^T} \end{aligned} \quad (۳\text{-}۶۶)$$

که $\mathbf{S}_i$ ماتریس هرمیتی مثبت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{S}_i = (۱-\chi^۲)\mathbf{I} + \chi^۲\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^\dagger. \quad (۳\text{-}۶۷)$$

مفید است که بنویسیم:

$$\mathbf{L}_i = l_i \hat{\mathbf{L}}_i \tag{۳-۶۸}$$

که l_i طول $\mathbf{L}_i$ می‌باشد، که به واسطه‌ی معادله (۳-۵۸) داده می‌شود و $\hat{\mathbf{L}}_i$ یک بردار یکه (مختلط) است. در نتیجه خواهیم داشت $\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^\dagger = l_i^2 \hat{\mathbf{L}}_i \hat{\mathbf{L}}_i^\dagger$ و $\mathbf{S}_i$ را در فرم قطری می‌توان نوشت:

$$\mathbf{S}_i = (۱-\chi^۲)(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{L}}_i \hat{\mathbf{L}}_i^\dagger) + [۱ - \chi^۲(۱ - l_i^۲)]\hat{\mathbf{L}}_i \hat{\mathbf{L}}_i^\dagger \tag{۳-۶۹}$$

دترمینان این ماتریس قطری مطابق زیر خواهد بود:

$$\det(\mathbf{S}_i) = (۱-\chi^۲)^{M-۱}[۱ - \chi^۲(۱ - l_i^۲)] \tag{۳-۷۰}$$

احتمال غیرشرطی برای مد i ام که شمارش صفر فوتون داشته باشد از جمع زدن روی احتمال‌های شرطی $P_C(\boldsymbol{\alpha}, 0_i|\mathbf{L})$ به‌دست می‌آید، که مطابق زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} P(۰_i|\mathbf{L}) &= \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha} P(\boldsymbol{\alpha}, ۰_i|\mathbf{L}) = \frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M} \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha} e^{-\boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{S}_i \boldsymbol{\alpha}^T} \\ &= \frac{(۱-\chi^۲)^M}{\det(\mathbf{S}_i)} = \frac{(۱-\chi^۲)}{۱ - \chi^۲(۱-l_i^۲)} \simeq ۱ - \chi^۲ l_i^۲. \end{aligned} \tag{۳-۷۱}$$

همان چیزی است که در معادله‌ی (۳-۶۰) برای توزیع شمارش فوتون حالت دمایی در مد i ام به دست‌آمده‌بود. توزیع مشترک (۳-۶۶) و توزیع شمارش صفر فوتون (۳-۶۱) با هم به توزیع شرطی برای خروجی هتروداین $\boldsymbol{\alpha}$ ، در حالیکه هیچ شمارش فوتونی در مد iام رخ نداده باشد، منجر می‌شود.

$$P_C(\boldsymbol{\alpha}|۰_i, \mathbf{L}) = \frac{P_C(\boldsymbol{\alpha}, ۰_i|\mathbf{L})}{P(۰_i, \mathbf{L})} = \frac{\det(\mathbf{S}_i)}{\pi^M} e^{-\boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{S}_i \boldsymbol{\alpha}^T} \tag{۳-۷۲}$$

این توزیع شرطی تابع گاوسی $\boldsymbol{\alpha}$ ، بهنجار با میانگین صفر است_توزیع Q از حالت مدهای آلیس، که مشروط بر شمارش صفر فوتون در مد i ام باب است_ این توزیع تنها به χ و $\mathbf{L}_i$ وابسته است و کاملا توسط ماتریس کوواریانس، مشخصه‌یابی می‌شود.(چون یک توزیع گاوسی با میانگین صفر است و همینطور ماتریس همبستگی نیز است.)

$$\langle \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha}^* \rangle_i = \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}^* P_C(\boldsymbol{\alpha}|۰_i, \mathbf{L}) = \frac{\det(\mathbf{S}_i)}{\pi^M} \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}^* e^{-\boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{S}_i \boldsymbol{\alpha}^T} = \mathbf{S}_i^{-۱}. \tag{۳-۷۳}$$

تساوی آخر به راحتی با توجه به قطری بودن ماتریس $\mathbf{S}_i$ و استفاده از روابط مربوط به انتگرال‌های گاوسی نتیجه گرفته می‌شود. این نتیجه عام برای هر توزیع گاوسی با میانگین صفر برقرار است.

در موردی که بررسی کردیم، با توجه به قطری بودن به سادگی دیده می‌شود که وارون ماتریس مطابق زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_i^{-۱} &= \frac{۱}{(۱-\chi^۲)}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{L}}_i\hat{\mathbf{L}}_i^\dagger)+\frac{۱}{۱-\chi^۲(۱-l_i^۲)}\hat{\mathbf{L}}_i\hat{\mathbf{L}}_i^\dagger \\ &= \frac{۱}{(۱-\chi^۲)}[\mathbf{I}-\frac{\chi^۲\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^\dagger}{۱-\chi^۲(۱-l_i^۲)}].\end{aligned} \tag{۳-۷۴}$$

واریانس در طول جهت مختلط $\hat{\mathbf{L}}_i$ هست:

$$\upsilon^۲=\frac{۱}{۱-\chi^۲(۱-l_i^۲)}\simeq ۱+\chi^۲(۱-l_i^۲). \tag{۳-۷۵}$$

ورایانس در طول M−1، عمود بر جهت $\hat{L}_i$، مطابق زیر است:

$$\upsilon_\cdot^۲=\frac{۱}{۱-\chi^۲}\simeq ۱+\chi^۲. \tag{۳-۷۶}$$

برای یک LON بدون اتلاف که $\mathbf{L}$ یکانی است، $l_i=1$ می‌باشد و خواهیم داشت $\nu=1$. ماتریس همبستگی (۳-۷۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\langle\alpha_j\alpha_k^*\rangle_i=(S_i^{-۱})_{jk}=\frac{۱}{۱-\chi^۲}[\delta_{jk}-\frac{\chi^۲L_{ji}L_{ii}^*}{۱-\chi^۲(۱-l_i^۲)}]\simeq\delta_{jk}(۱+\chi^۲)-\chi^۲L_{ji}L_{ii}^*. \tag{۳-۷۷}$$

برای مد i ام، آلیس نیاز دارد که M ممان را که در آن ها $k=i$ است، تخمین بزند.

$$\langle\alpha_j\alpha_i^*\rangle_i=(S_i^{-۱})_{jk}=\frac{۱}{۱-\chi^۲}[\delta_{ji}-\frac{\chi^۲L_{ji}L_{ii}^*}{۱-\chi^۲(۱-l_i^۲)}]. \tag{۳-۷۸}$$

به این ترتیب برای همه‌ی مدهای i موردانتظار است که آلیس M^2 ممان را تخمین بزند.

به طور مشخص برای $j=i$ و $j\neq i$ داریم:

$$\langle|\alpha_i|^۲\rangle_i=\frac{۱}{۱-\chi^۲}[۱-\frac{\chi^۲|\mathbf{L}_{ii}|^۲}{۱-\chi^۲(۱-l_i^۲)}]\simeq ۱+\chi^۲(۱-|\mathbf{L}_{ii}|^۲)\qquad j=i. \tag{۳-۷۹}$$

$$\langle\alpha_j\alpha_i^*\rangle_i=-\frac{\chi^۲L_{ji}L_{ii}^*}{(۱-\chi^۲)[۱-\chi^۲(۱-l_i^۲)]}\qquad j\neq i. \tag{۳-۸۰}$$

با توجه به بحثی که پیش‌تر درباره‌ی آزادی فاز در ماتریس انتقال مطرح شد، می‌توان عناصر قطری L_{ii} را حقیقی و نامنفی در نظر گرفت، در این صورت فاز عناصر غیرقطری $\mathbf{L}$ توسط آمار هتروداین تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned}L_{ii}&=\sqrt{\frac{۱-\chi^۲(۱-l_i^۲)}{\chi^۲}(۱-(۱-\chi^۲)\langle|\alpha_i|^۲\rangle_i)} \\ &\simeq\sqrt{۱-\frac{\langle|\alpha_i|^۲\rangle_i-۱}{\chi^۲}}.\end{aligned} \tag{۳-۸۱}$$

و برای عناصر غیر قطری داریم:

$$\begin{aligned} L_{ji} &= -\frac{(۱-\chi^۲)(۱-\chi^۲(۱-l_i^۲))\langle\alpha_j\alpha_i^*\rangle_i}{\chi^۲ L_{ii}^*} \\ &\simeq -\frac{\langle\alpha_j\alpha_i^*\rangle_i}{\chi^۲ L_{ii}} \qquad j\neq i. \end{aligned} \tag{۸۲-۳}$$

که حالت‌های تقریبی برای چلاندگی ضعیف هستند.

در خروجی‌های هترودواین، از T_i اجرای مشخصه‌یابی، برای موردی که در مد i ام باب شمارش صفر فوتون داشته باشیم، می‌توانیم عناصر ماتریس کوورایانس i ام را با عدم قطعیت $\simeq \frac{1}{\sqrt{T_i}}$ تعیین کنیم، که این به این معناست که می‌توانیم عناصر i امین ستون $\mathbf{L}$ را با عدم قطعیت $\simeq \frac{1}{\chi^2\sqrt{T_i}}$ تعیین کنیم.

اگر به طور کامل T اجرای مشخصه یابی داشته باشیم و $p_i = P(0_i|\mathbf{L})$ احتمال شمارش صفر فوتون در مد i ام باب باشد، آن گاه میانگین T_i مطابق $\langle T_i\rangle = Tp_i \simeq T(1-\chi^2 l_i^2)$ خواهد بود و ورایانس است.

در نتیجه از اجرای مشخصه‌یابی، برای هر مد خروجی یک زیرمجموعه نزدیک به T اجرا داریم که هیچ شمارش فوتونی در مد خروجی انتخاب شده ندارند. این به این معناست که می توانیم عناصر ماتریس انتقال را با عدم قطعیت $\delta \simeq \frac{1}{\chi^2\sqrt{T_i}\simeq\sqrt{M/T}}$ تخمین بزنیم، در نتیجه تعداد اجراهای مشخصه‌یابی مورد نیاز برای خطای موردنظر، مطابق زیر خواهد بود:

$$T \simeq M/\delta^۲ \tag{۸۳-۳}$$

که به صورت خطی با سایز مسئله رشد می‌کند.

باید تاکید شود که این نتیجه از توانایی اجراهای مشخصه‌یابی برای استخراج اطلاعات کامل درباره‌ی ماتریس انتقال از آمار هترودواین می‌آید، یعنی از همدوسی مرتبه اول بزرگی مختلط میدان تداخل‌کننده در مدهای آلیس.

اگر به ممان‌های بالاتر نیاز داشته باشیم (که پیش تر درباره تعبیر فیزیکی آن‌ها بحث شد) به مرتبه‌های بالاتر همدوسی نیاز است که تعداد اجرای مشخصه‌یابی بیشتری را می‌طلبد و به صورت چندجمله با مرتبه بیشتر از حالت خطی، با سایز مسئله ارتباط می‌یابد.

نکته مهم دیگری که باید روی آن تاکید کرد، تفاوت بین آمار هترودواین و آمار شمارش فوتون غیرشرطی باب است. آمار هترودواین شرطی اجراهای مشخصه یابی، درباره همه ی ستون های $\mathbf{L}_i$ از ماتریس انتقال $\mathbf{L} = \mathbf{V}\sqrt{\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}}$ اطلاعات فراهم می‌کند و در نتیجه اطلاعات کاملی درباره‌ی هر دو ماتریس بدون اتلاف $\mathbf{V}$ و ماتریس خروجی دارای اتلاف $\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}$ فراهم می‌کند. در مقابل اندازه‌گیری روی حالت‌های مارجینال خروجی باب تنها اطلاعاتی درباره‌ی ماتریس دارای اتلاف خروجی $\sqrt{\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}}$ به ما می‌دهد که عناصر آن

ضرب داخلی بردارهای ستونی هستند.

$$(\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L})_{ij} = \sum_{k=1}^{M} L_{ki}^{*} L_{kj} = \mathbf{L}_i^{\dagger}\mathbf{L}_j. \tag{۳-۸۴}$$

این ضرب‌های داخلی تحت تبدیلات یکانی ناوردا هستند، در نتیجه هیچ اطلاعتی درباره $\mathbf{V}$ نمی‌توانند بدهند. به لحاظ فیزیکی باید گفت که آمار هترودواین شرطی آلیس به آثار تداخل در LON حساس است، حال آنکه حالت خروجی مارجینال باب چیزی در این باره نمی‌داند.

۳-۸ مقایسه‌ی توزیع‌های احتمال

با مشخصه‌یابی LON باب، آلیس می تواند تعیین کند آیا نمونه های RBS باب از یک توزیع احتمال که به توزیع احتمال ایده آل و مطلوب نزدیک است، گرفته شده‌اند. فرآیند تعیین این موضوع روی یک مقایسه بین توزیع احتمال‌های مشترک ایده‌آل و دارای اتلاف $P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{U})$ و $P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{L})$ بنا شده‌است. برای پیشرفت این مقایسه، از یک سنجه فاصله بین LON های ایده‌آل و دارای اتلاف استفاده می کنیم و نشان می‌دهیم که این سنجه، شرطی کافی برای مشخص کردن این‌که آیا نمونه‌های آزمایش مشترک توسط آلیس و باب از یک توزیع احتمال که به اندازه ی کافی به توزیع احتمال ایده‌آل و مطلوب نزدیک است، گرفته شده‌اند یا خیر.

با مروری بر سنجه‌ها برای مقایسه‌ی دو توزیع احتمال یا دو حالت کوانتومی (عملگرهای چگالی) شروع می کنیم. دو سنجه کلاسیکی خوش تعریف برای مقایسه توزیع های احتمال P و Q که روی فضای نمونه‌ای یکسانی که با x برچسب می‌خورد تعریف شده‌اند، وجود دارند.

فاصله‌ی تغییرات‌کل [6] که با عنوان Kolomogorov distance یا l_1 distance هم شناخته می‌شود:

$$D(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_x |P(x) - Q(x)|. \tag{۳-۸۵}$$

و فیدلیتی کلاسیک [7]

$$F(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_x \sqrt{P(x)Q(x)}. \tag{۳-۸۶}$$

[6] Total variation distance
[7] Classical Fidelity

سنجه‌های متناظر برای دو حالت کوانتومی ρ و σ ، فیدلیتی و فاصله‌ی رد[۸] می‌باشد:

$$fidelity:\quad F(\rho,\sigma) = \mathbf{Tr}[(\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho})^{۱/۲}] = \underset{\{E_x\}}{min} F(P,Q) \qquad (۸۷-۳)$$

$$trace\ distance:\quad D(\rho,\sigma) = \frac{۱}{۲}\|\rho-\sigma\|_{۱} = \frac{۱}{۲}\mathbf{Tr}|\rho-\sigma| = \underset{\{E_x\}}{max} D(P,Q) \qquad (۸۸-۳)$$

عبارت‌های اخیر، سنجه‌های کوانتومی بین حالت‌های ρ و σ را به سنجه‌های کلاسیکی بین توزیع احتمال‌های P و Q به دست‌آمده از اندازه‌گیری روی آن حالت‌ها، مرتبط می‌کند. در این عبارات $\{E_x\}$ یک POVM است و داریم: $P(x) = \mathrm{Tr}[\rho E_x]$ و $Q(x) = \mathrm{Tr}[\sigma E_x]$. همه‌ی این سنجه‌ها حقیقی و متقارن هستند. اگر $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ یک حالت خالص باشد، خواهیم داشت: $F(\rho,\sigma) = \sqrt{\langle\psi|\sigma|\psi\rangle}$.
سنجه‌های کلاسیکی و کوانتومی در نامساوی‌های مهمی صدق می‌کنند، که در ادامه آمده است:

$$\begin{array}{ccccc} ۱-F(P,Q) & \leqslant & D(P,Q) & \leqslant & \sqrt{۱-F^{۲}(P,Q)} \\ \overline{\overline{\wedge}} & & \overline{\overline{\wedge}} & & \overline{\overline{\wedge}} \\ ۱-F(\rho,\sigma) & \leqslant & D(\rho,\sigma) & \leqslant & \sqrt{۱-F^{۲}(\rho,\sigma)}. \end{array} \qquad (۸۹-۳)$$

فاصله تغییرات کل[۹] بین توزیع P و Q یک تعبیر عملیاتی به عنوان احتمال خطا در تمیز دادن دو توزیع دارد: احتمال خطا برای حالتی که یک نمونه از توزیع ها داده شده باشد، $\frac{1}{2}[1-D(P,Q)]$ است.
اندازه گیری فاصله‌ی رد، مستقیما به احتمال خطا در تمیز دادن عملگرهای چگالی ρ و σ مربوط می‌شود. احتمال خطا با داشتن اندازه‌گیری بهینه $\frac{1}{2}[1-D(P,Q)]$ بدست می‌اید که با عنوان مرز Helstrom شناخته می‌شود[۹].
در موضوع مورد توجه ما، قصد بر این است که توزیع های RBS (۳-۳۰) و (۳-۳۷) برای شبکه‌های ایده‌آل و دارای اتلاف را با استفاده از فاصله‌ی تغییرات کل و فیدلیتی مقایسه کنیم.

$$D(P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}}, P_{BS|\mathbf{n}_B,\mathbf{L}}) = \frac{۱}{۲}\sum_{\mathbf{n}_B} |P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}) - P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A,\mathbf{L})|. \qquad (۹۰-۳)$$

$$F(P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}}, P_{BS|\mathbf{n}_B,\mathbf{L}}) = \sum_{\mathbf{n}_B} \sqrt{P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}) P_{BS}(\mathbf{n}_B)}. \qquad (۹۱-۳)$$

[8]Trace distance
[9]Total variation distance

آنچه که ما به آن علاقمندیم، میانگین‌های این دو کمیت روی $P_Q(\mathbf{n}_A)$ است، که کمیت های متناظر توزیع (۳-۱۳) و (۳-۳۵) می‌باشند.

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{n}_A} P_Q(\mathbf{n}_A) D(P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}}, P_{BS|\mathbf{n}_B,\mathbf{L}}) &= \frac{۱}{۲} \sum_{\mathbf{n}_A,\mathbf{n}_B} |P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{U}) - P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{L})| \\ &= D(P_{Q|\mathbf{U}}, P_{Q|\mathbf{L}}).\end{aligned} \tag{۹۲-۳}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{n}_A} P_Q(\mathbf{n}_A) F(P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}}, P_{BS|\mathbf{n}_B,\mathbf{L}}) &= \sum_{\mathbf{n}_A,\mathbf{n}_B} \sqrt{P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{U}) P_Q(\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B|\mathbf{L})} \\ &= F(P_{Q|\mathbf{U}}, P_{Q|\mathbf{L}}).\end{aligned} \tag{۹۳-۳}$$

در ادامه روی مرزهای مرتبط با این کمیت‌ها تمرکز می‌کنیم که شامل سنجه‌های کوانتومی برای حالت‌های مشترک آلیس و باب، بعد از پردازش از طریق LON ایده‌آل و دارای اتلاف می‌باشند.
برای بیان مرزها به صورت فشرده نیاز داریم تا نمادگذاری کارآمدتری را برای حالت کوانتومی مشترک معرفی می‌کنیم. برا ی این هدف اگر در نظر بگیریم که $\rho_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|$ حالت ورودی مشترک را تعیین کند، آن‌گاه:

$$|\Psi_{AB|\mathbf{U}}\rangle = I_A \otimes u|\Psi_{AB}\rangle \tag{۹۴-۳}$$

حالت (خالص) مشترک بعد از LON ایده‌آل می‌باشد و خواهیم داشت:

$$\rho_{AB|\mathbf{U}} = |\Psi_{AB|\mathbf{U}}\rangle\langle\Psi_{AB|\mathbf{U}}| = I_A \otimes \mathcal{E}_{\mathbf{U}}(\rho_{AB}) \tag{۹۵-۳}$$

$$\rho_{AB|\mathbf{L}} = |\Psi_{AB|\mathbf{L}}\rangle\langle\Psi_{AB|\mathbf{L}}| = I_A \otimes \mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\rho_{AB}) \tag{۹۶-۳}$$

که عملگرهای چگالی مشترک بعد از LON های ایده‌آل و دارای اتلاف هستند.
در ادامه به محاسبه مرزهای مربوطه می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}F(P_{Q|\mathbf{U}}, P_{Q|\mathbf{L}}) &\geqslant F(\rho_{Q|\mathbf{U}}, \rho_{Q|\mathbf{L}}) \\ &= \sqrt{\Psi_{AB|\mathbf{U}}|\rho_{AB|\mathbf{L}}|\Psi_{AB|\mathbf{L}}\rangle} \\ &= \frac{(۱-\chi^۲)^M}{|\det(\mathbf{I} - \chi^۲\mathbf{L}\mathbf{U}^\dagger)|}.\end{aligned} \tag{۹۷-۳}$$

این مرز صریحا در ضمیمه الف، محاسبه شده‌است، نه با تکیه بر نامساوی تلویحی در رابطه (۳-۸۷)، چراکه این استخراج رابطه، فرم صریح برای رابطه‌ی کوانتومی نشان داده شده را مشخص می‌کند. پیوست

الف، همانند متن اصلی بسیار آموزنده است، اما محاسبات مربوطه به دلیل جلوگیری از قطع شدن سیر مطلب در اینجا، به قسمت ضمیمه منتقل شده است.

مرز دوم با استفاده از رابطه (۳-۸۹) برای فاصله‌ی تغییرات کل به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} D(P_{Q|\mathbf{U}}, P_{Q|\mathbf{L}}) \leqslant D(\rho_{Q|\mathbf{U}}, \rho_{Q|\mathbf{L}}) \leqslant \sqrt{1 - [F(\rho_{Q|\mathbf{U}}, \rho_{Q|\mathbf{L}})]^2} \\ = \sqrt{1 - \frac{(1-\chi^2)^{2M}}{|\det(\mathbf{I} - \chi^2 \mathbf{L}\mathbf{U}^\dagger)|^2}}. \end{aligned} \tag{۳-۹۸}$$

همان طور که انتظار می‌رود، اگر $\mathbf{L} = \mathbf{U}$ باشد، مرز (۳-۹۷) به یک می رسد و مرز (۳-۹۸) روی فاصله‌ی تغییرات کل به صفر می‌رسد و این به این معنی است که احتمال‌ها و عملگرهای چگالی یکسان هستند [۱۸].

فصل ۴

بررسی آثار خطا درنمونه‌برداری بوزونی تصادفی

از آن جایی که سیستم‌های کوانتومی حساسیت بالایی نسبت به خطا و عوامل محیطی دارند، یک بخش مهم در هر آزمایش کوانتومی بررسی آثار خطاهای مختلف در این آزمایش‌ها است. مشخصه‌یابی شبکه‌ی اپتیک خطی نیز از این این قاعده مستثنی نیست. لذا در این بخش خطاهای مختلفی که می‌تواند در سیستم وارد شود، توضیح داده شده‌است و فرآیند مشخصه‌یابی با وجود هر کدام از خطاها اجرا شده است و در نهایت با محاسبه سنجه فیدلیتی در هر اجرا و برای شبکه‌های مختلف، رفتار این پروتکل تحت وجود خطا و میزان قابل اعتماد بودن آن سنجیده شده‌است.

نکته‌ی مهمی که طی این بررسی با آن مواجه بودیم، این بود که عوامل مختلف در ایجاد خطا سبب می‌شود تا ماتریس ــ توصیف‌کننده‌ی شبکه‌ی اپتیک خطی ــ به‌دست‌آمده طی فرآیند مشخصه‌یابی، که باید یک ماتریس زیریکانی باشد، این ویژگی را دارا نباشد، که این اتفاق به منزله‌ی آن است که ماتریس حاصل از قلمرو توصیف یک شبکه‌ی فیزیکی خارج شده‌است. در بخش بعدی، راهکاری که برای رفع این مشکل پیشنهاد شد، توضیح داده‌شده‌است.

۴ـ۱ اعمال شرط فیزیکی بودن روی ماتریس مشخصه‌یابی‌شده

از آن‌جایی که ماتریس انتخابی اولیه یک ماتریس یکانی بود و خطای ناچیز در مشخصه‌یابی سبب می‌شد تا از قلمرو فیزیکی بودن خارج شویم و ماتریس مشخصه‌یابی شده که علی‌الاصول می‌بایست ماتریس زیریکانی باشد، دارای این ویژگی نباشد، برای برطرف کردن این مشکل ماتریس مشخصه‌یابی شده را از

طریق ضرب عناصر آن در یک ضریب اصلاح‌کننده به یک ماتریس زیریکانی تبدیل می‌کنیم.
اگر پس از به‌دست‌آوردن ماتریس مشخصه‌یابی‌شده، مشاهده شود که ویژه‌مقادیر این ماتریس مقادیر بیشتر از ۱ باشند، نتیجه این است که این ماتریس، ماتریس زیریکانی نیست و نتیجتا توصیف‌کننده‌ی یک شبکه فیزیکی نمی‌تواند باشد. راهی که برای یافتن ضریب اصلاح‌کننده پیشنهاد کردیم به شرح زیر است.
روش انتخاب این ضریب به‌این شکل بود که چون $\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L} \leqslant \mathbf{I}$، در صورت قطری بودن ماتریس مشخصه‌یابی شده، عناصر روی قطر می‌بایست که از ۱ کمتر می‌بودند، درنتیجه ماتریس‌های مشخصه‌یابی شده را قطری کردیم و حاصلضرب ماتریس به‌دست‌آمده را در ترانهاده‌ی ماتریس مزدوج آن ضرب کردیم. بزرگترین عدد تولیدشده بالای ۱ در این ماتریس قطری را انتخاب کردیم و عناصر ماتریس مشخصه‌یابی شده را درمعکوس این عدد ضرب کردیم.
روش پیشنهادشده در این قسمت برحسب وارد کردن یک ضریب تا حد واردشدن به قلمرو فیزیکی بودن ماتریس مشخصه‌یابی‌شده است. اما این روش تنها روش اصلاح ماتریس‌های مشخصه‌یابی شده نیست و می‌توان مدل‌های دیگری را که شرط فیزیکی بودن را برای ما برآورده کنند، مورد بررسی قرار داد. با در نظر گرفتن روش‌هایی مشابه آنچه برای اعمال شرط فیزیکی برای ماتریس چگالی [۱۶] وجود دارد، می‌توان بهینه بودن این روش را بررسی نمود.

۴–۲ شبکه ایده‌آل

در این قسمت ابتدا یک شبکه ایده‌آل،به این معنا که هیچ‌گونه اتلافی در آن وجود ندارد و تعبیر ریاضیاتی آن این است که توسط یک ماتریس یکانی نمایش داده می‌شود، مشخصه‌یابی شد. این مشخصه‌یابی برای شبکه‌های اپتیک خطی ۲ تا ۱۰ مدی انجام گرفت. برای هر نوع شبکه با تعداد مد مشخص از ۶۰۰ شبکه‌ی تصادفی مختلف استفاده شد تا میزان خطا کاهش یابد، در هر بار مشخصه‌یابی ۶۰۰ اجرای آزمایش انجام شد.
مراحل این شبیه‌سازی در ادامه آمده است:

۱. در مرحله‌ی اول برای هر شبکه M مدی یک ماتریس یکانی $M \times M$ رندوم تولید کردیم.

۲. از آنجایی که رابطه‌ی به‌دست‌آمده برای عناصر قطری ماتریس $\mathbf{L}$ در رابطه (۳–۸۱) به صورت حقیقی درنظر گرفته شده‌بودند و بحثی که در بخش (۳–۶) درباره‌ی آزادی فازی عناصر ماتریس

توصیف‌کننده شبکه اپتیک خطی کردیم، ماتریس رندوم تولید شده را در یک ماتریس قطری که عناصر روی قطر آن مزدوج فاز عناصر روی قطر ماتریس رندوم تولیدشده بودند ضرب کردیم تا یک ماتریس یکانی با عناصر قطری حقیقی داشته داشته باشیم.

۳. در این مرحله $(2 \times T \times M)$ عدد رندوم تولید کردیم،به طوری‌که از توزیع (۳-۵۰) پیروی کند،که در اینجا T نشان‌دهنده‌ی دفعات تکرار آزمایش است و M نشان‌دهنده‌ی تعداد مدهای شبکه. سپس اعداد تولیدشده را تبدیل به $(T \times M)$ عدد مختلط کردیم که هرکدام از این اعداد مختلط به‌عنوان مقادیر α درنظر گرفته‌شد، این مقادیر را در یک ماتریس $(T \times M)$ بعدی نگهداری کردیم که اعداد موجود در هر سطر نشان‌دهنده‌ی نتایج اندازه‌گیری هتروداین آلیس در یک راه‌اندازی آزمایش است و اعداد موجود در ستون i ام نشان‌دهنده‌ی نتیجه اندازه‌گیری آلیس در مد iام برای T بار راه‌اندازی آزمایش است.
همان‌طور که در رابطه $P_C(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M} e^{-(۱-\chi^۲)|\boldsymbol{\alpha}|^۲}$ نشان داده‌شده است، هنگام تولید اعداد رندوم، نمونه‌ها از یک تابع گاوسی با انحراف معیار $1/\sqrt{2 \times (1-\chi^2)}$ گرفته شدند.
χ در این رابطه را 0.4 درنظر گرفتیم که نشان‌دهنده‌ی یک SPDC با خاصیت تولید مدهای چلانده با چلاندگی ضعیف است، در چنین شرایطی تعداد صفرهای شمارش‌شده در سمت باب بیشتر خواهد بود و چون پروتکل معرفی‌شده دراینجا براساس صفرهای شمارش‌شده در سمت باب کار می‌کند، سبب می‌شود تا با تعداد نمونه‌های کمتری به نتیجه‌ی مطلوب برسیم.

۴. در این مرحله مقادیر تولیدشده باید به‌عنوان ورودی LON در نظر گرفته می‌شوند و حالت $|\chi\alpha^*\rangle$ را وارد LON می‌کنیم، سپس مقادیر β را که مقادیر خارج‌شده از شبکه اپتیک خطی هستند را مطابق زیر تولید کردیم. $|\boldsymbol{\beta}\rangle = |\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}\rangle$ این مقادیر β در یک ماتریس $(T \times M)$ نگهداری شدند، که مجددا عناصر قرارگرفته روی هر سطر این ماتریس متناظر اجرای یک بار آزمایش و عناصر قرارگرفته روی ستون i ام متناظر حالت خروجی LON از مد iام برای T بار راه‌اندازی آزمایش است.

۵. دراین مرحله باید اندازه‌گیری شمارش فوتون باب را مدل کنیم، این قسمت به این‌صورت انجام گرفت که اعدادی تولید کردیم که از توزیع پواسونی (۳-۶۵) پیروی می‌کردند، که آرگومان توزیع پواسون در حقیقت همان مقدار β است. سپس این مقادیر تولید شده را به‌عنوان نتایج اندازه‌گیری

باب در یک ماتریس $(T \times M)$ ذخیره کردیم.هدف از تولید این مجموعه اعداد مشخص کردن مدهایی بود که باب در آن‌ها شمارش صفر فوتون را اندازه گرفته بود، چراکه اساس کار این پروتکل برمبنای گزارشی از مدهایی بود که در آن آشکارسازها صفر گزارش کرده‌بودند و باب از طریق یک کانال کلاسیکی این اطلاعات را به آلیس می‌فرستد.

۶. در این مرحله ممان‌های معرفی‌شده در رابطه (۳-۷۹) و (۳-۸۰) را از طریق میانگین‌گیری روی نتایج اندازه‌گیری آلیس در مدهای متناظر شمارش صفر فوتون در پایانه‌ی باب به‌دست‌آوردیم. برای این میانگین‌گیری به این شیوه عمل شد که در هر اجرای آزمایش یعنی در هر ستون از ماتریسی که نتایج شمارش فوتون را ذخیره کرده‌ایم، نتیجه‌ی شمارش فوتون را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم، چنانچه این مقدار صفر باشد،روی حاصلضرب مزدوج نتیجه‌ی اندازه‌گیری هتروداین متناظر این مد در نتیجه‌ی اندازه‌گیری هتروداین سایرمدها میانگین گرفته می‌شود که این میانگین‌گیری روی T بار آزمایش انجام‌شده است.

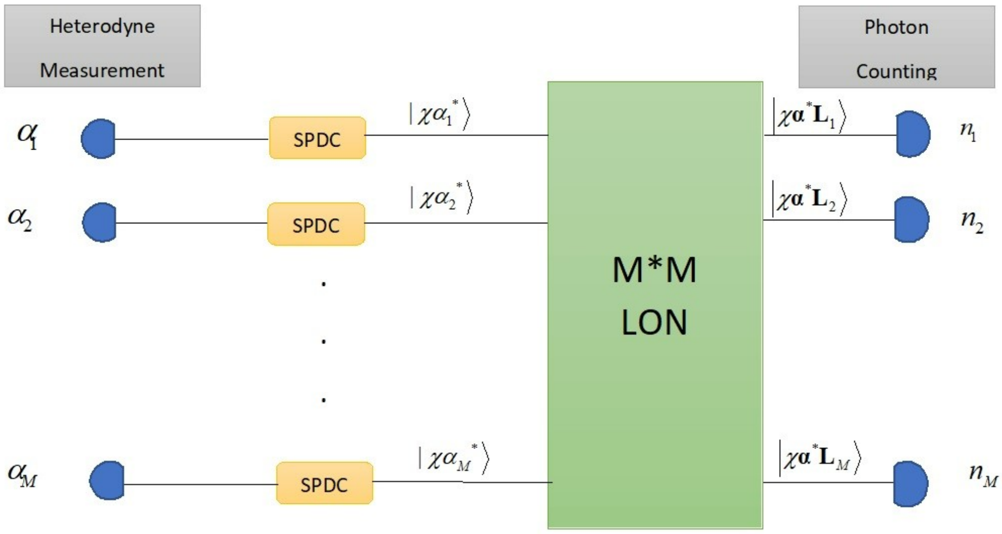
۷. پارامتر دیگری که در این مرحله محاسبه می‌کنیم، تا در مرحله مشخصه‌یابی از آن بهره ببریم، پارامتر l_i^2 معرفی‌شده در رابطه‌ی (۳-۵۹) که متناظر مربع طول بردار ستونی $\mathbf{L}_i$ است، محاسبه کردیم. که همانطور که در رابطه مذکور دیده می‌شود این پارامتر از طریق میانگین‌گیری روی نتایج شمارش فوتون مد مربوطه محاسبه می‌شود و این مقادیر میانگین بر مقدار χ تقسیم می‌شود و نتایج حاصل در یک ماتریس سطری $(1 \times M)$ ذخیره کردیم.

۸. در این مرحله پارامترهای موردنیاز برای محاسبه‌ی عناصر ماتریس توصیف‌کننده‌ی شبکه‌ی اپتیک خطی را داریم. عناصر قطری این ماتریس در رابطه‌ی (۳-۸۱) و عناصرغیرقطری در رابطه‌ی (۳-۸۲) به‌دست‌آمده است. با جایگذاری پارامترهای محاسبه شده در مراحل قبلی یک ماتریس قطری و یک ماتریس غیرقطری به‌دست می‌آید که از جمع این دو ماتریس، ماتریس توصیف‌کننده‌ی شبکه را خواهیم داشت.

۹. ماتریس‌های تولیدشده در مرحله‌ی قبل، می‌بایست ماتریس‌های زیریکانی باشند و ویژه مقادیر آن

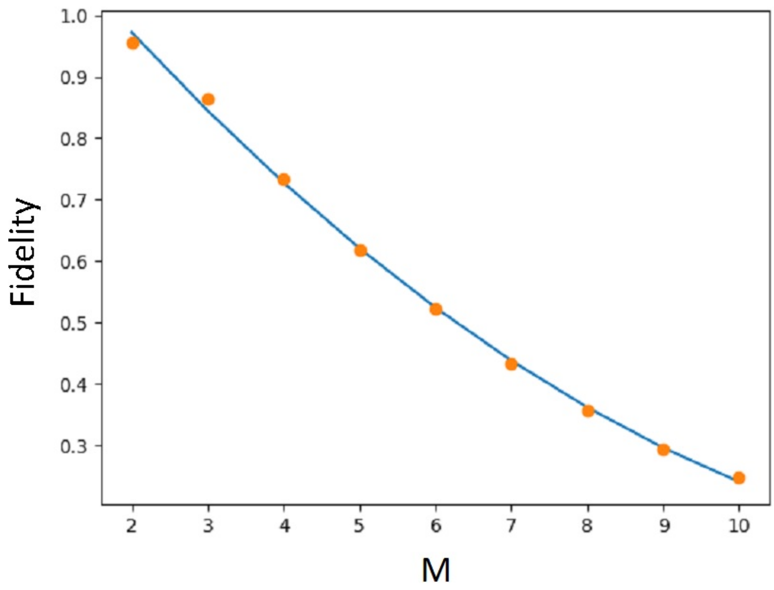
مقادیر کمتر از ۱ باشند، اما محاسبه‌ی ویژه مقادیر، گویای این بود که ماتریس تولیدشده زیریکانی نیست و این به این معنی است که ماتریس تولیدشده فیزیکی نیست. در اینجا باید ضریب اصلاحی درنظر گرفته شود که شرط فیزیکی بودن برقرارشود. نحوه‌ی محاسبه‌ی این ضریب با روشی که پیش‌تر توضیح داده‌شد، انجام گرفت.

۱۰. در نهایت نیاز داریم بدانیم، ماتریسی که به‌دست‌آورده‌ایم چقدر به ماتریس اولیه‌ای که مشخصه‌یابی آن را آغاز کرده بودیم، نزدیک است. در این قسمت پارامتر فیدلیتی که در بخش (۳-۸) معرفی شد را محاسبه کردیم. این پارامتر با استفاده از رابطه‌ی (۳-۹۷) محاسبه می‌شود.



شکل ۴-۱: طرح شماتیک از پروتکل مشخصه‌یابی یک شبکه‌ی اپتیک خطی ایده‌آل.

طرح شماتیکی از پروتکل مشخصه‌یابی یک شبکه ایده‌ال در شکل (۴-۲) نشان داده شده است. نتیجه به‌دست‌آمده از این شبیه‌سازی در ادامه آمده است.همان‌طور که توقع می‌رفت، فیدلیتی با افزایش تعداد مدهای شبکه‌ی تحت آزمایش کاهش یافته است.



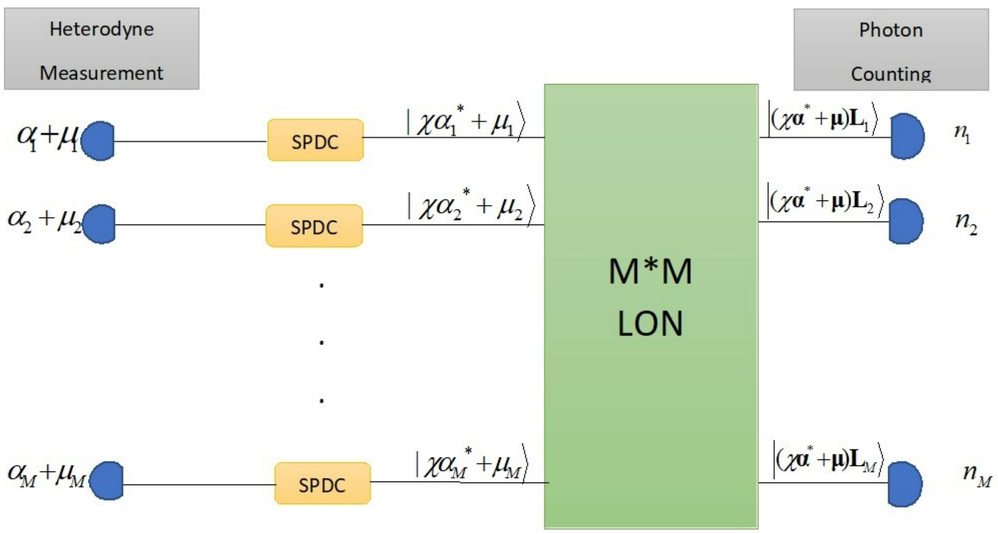
شکل ۴-۲: نمودار فیدلیتی برحسب تعداد مدهای شبکه‌ی اپتیکی.

کدهای پایتون مربوط به شبیه‌سازی این قسمت در بخش (پ-۲) آمده است.
در بخش‌های بعدی، مدل ساده‌شده‌ای از شبیه‌سازی مربوط به مشخصه‌یابی شبکه‌های اپتیک خطی در حضور خطا با منابع مختلف آمده‌است.

۴-۳ نویز گاوسی در ورودی LON

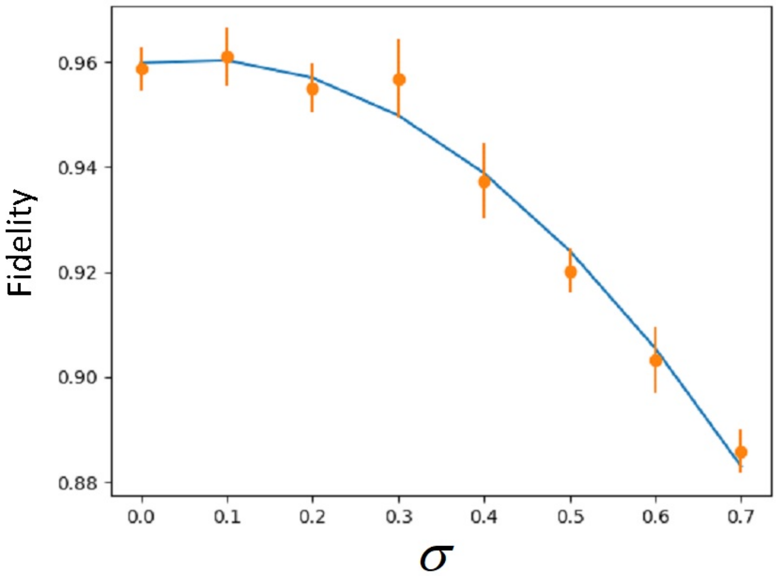
در این قسمت، یک نویز که از توزیع گاوسی پیروی می‌کند را به مدهای وارد شده به LON افزودیم، تعبیر این نویز متناظر عدم قطعیت آلیس در اندازه‌گیری هترودواینی است که انجام می‌دهد. به این معنی که عناصر POVM اندازه‌گیری آلیس به صورت $\Pi_\alpha = \frac{1}{\pi}\int d^2\gamma \frac{e^{-|\alpha-\gamma|^2/\lambda}}{\lambda\pi}|\gamma\rangle\langle\gamma|$ باشد. می‌توان چک کرد که $\int d^2\alpha \Pi_\alpha = I$ و در حد $\lambda \to 0$ داریم $\Pi_\alpha = \frac{|\alpha\rangle\langle\alpha|}{\pi}$. در این روابط انحراف معیار $\sigma = \sqrt{\lambda/2}$ می‌باشد. سپس برای ۶۰۰ شبکه ۲ مدی با ۶۰۰ اجرای آزمایش برای مشخصه‌یابی، مشخصه‌یابی را انجام دادیم و فیدلیتی را برای حالت‌های مختلف با نویزهای مختلف به دست آوردیم.
مراحل کار در اینجا همانند مراحل طی‌شده در بخش (۴-۲) است. با این تفاوت که در مرحله‌ی سوم پس از تولید مقادیر مختلط رندوم متناظر اندازه‌گیری هترودواین، مقادیر رندوم دیگری با پیروی از یک توزیع گاوسی با انحراف‌معیارهای متفاوت تولید کردیم. این مقادیر در حقیقت خطای اندازه‌گیری

آشکارسازهای هتروداین است. این مقادیر که تحت عنوان μ معرفی شده‌است باید به مقادیر پیشین α افزوده‌شود.پس $(2 \times T \times M)$ مقدار رندوم تولیدکردیم و آن را به $(T \times M)$ عدد مختلط تبدیل کردیم و در ماتریس‌های با تعبیر مشابه ماتریس α نگهداری کردیم.
در این مرحله حالت‌های $|\chi\alpha^* + \mu\rangle$ به عنوان ورودی‌های شبکه‌ی اپتیک خطی در نظر گرفته شدند و آنچه که این‌بار مقادیر β از آن تولید شدند، با استفاده از این مقادیر ورودی به‌دست‌آمد و داریم $|\beta\rangle = |\chi\alpha^* + \mu\rangle$.
سایر مراحل مطابق قبل پیش می‌رود و میانگین فیدلیتی برای شبکه ۲مدی در حضور نویزگاوسی با انحراف‌معیارهای مختلف محاسبه شد و نمودار فیدلیتی بر حسب انحراف‌معیار این نویز رسم شد.
طرح شماتیک این شبیه سازی در ادامه آمده است.



شکل ۴-۳: طرح شماتیک از پروتکل مشخصه‌یابی یک شبکه اپتیک خطی در حضور نویزگاوسی در اندازه‌گیری هتروداین.

نتیجه‌ای که از شبیه‌سازی این اثر به‌دست‌آمد در ادامه آمده‌است که مطابق توقعمان هرقدر انحراف معیار نویز گاوسی واردشده بیشتر شد، فیدلیتی کاهش یافت.



شکل ۴-۴: نمودرا فیدلیتی برحسب انحراف‌معیار نویز گاوسی برای یک شبکه‌ی اپتیک خطی ۲*۲.

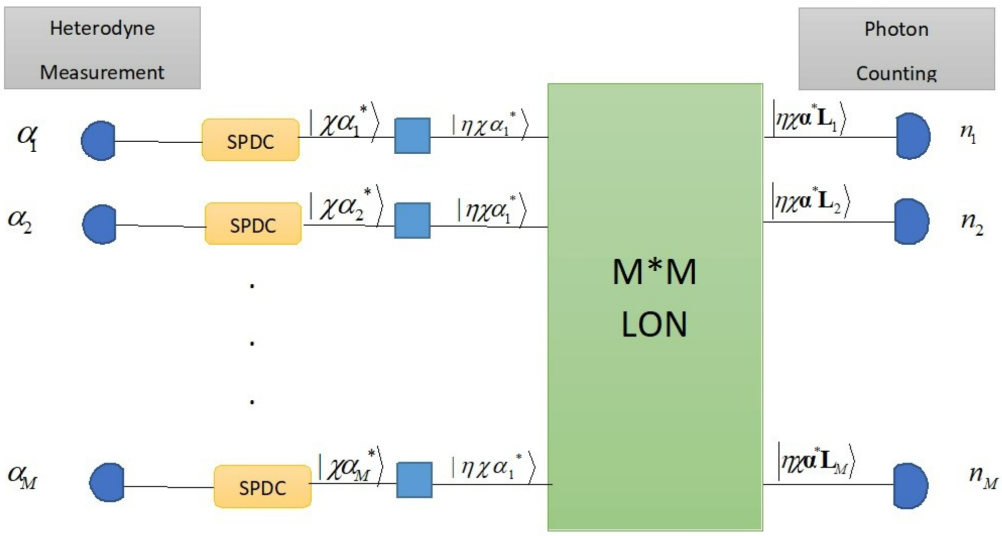
کدهای مربوط به شبیه‌سازی این قسمت در بخش (پ-۳) آمده است.

۴-۴ اتلاف در LON

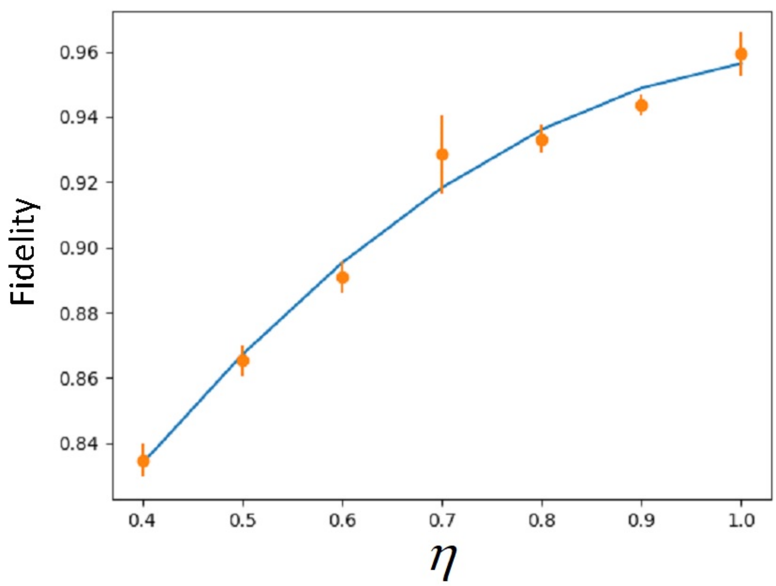
در این قسمت، اثر اتلاف در LON لحاظ شده است،به این صورت که یک تقسیم‌کننده‌ی باریکه فرضی، قبل از LON در نظر گرفته‌شد که سبب می‌شود تا بخشی از باریکه ورودی، وارد شبکه شود و بخشی به صورت اتلاف از شبکه خارج شود. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد، این است که لزوما میزان اتلاف در همه‌ی مدهای ورودی شبکه یکسان نیست، اما در این قسمت مدل ساده‌شده‌ای در نظر گرفته‌شده‌است که ضریب گذردهی همه‌ی تقسیم‌کننده‌های باریکه در مدهای مختلف، یکسان در نظر گرفته‌شده است.
برای شبیه سازی این اثر همچون روش معرفی‌شده در بخش شبیه‌سازی شبکه‌ی ایده‌آل پیش رفتیم با این تفاوت که اعداد مختلط رندوم تولیدشده به عنوان مقادیر اندازه‌گیری شده در اندازه‌گیری هتروداین در یک ضریب η که کمتر از ۱ است و نقش گذردهی تقسیم‌کننده‌ی باریکه را بازی می‌کند، ضرب کردیم و سپس این مجموعه اعداد تولید شده را تحت پردازش شبکه اپتیکی به روش مذکور قرار دادیم.
در نتیجه مراحل مطرح شده در بخش (۴-۲) را طی می‌کنیم. در مرحله‌ی سوم مقادیر α تولیدشده را در ضریب η ضرب می‌کنیم و حالت ورودی در LON ، $|\eta\chi\boldsymbol{\alpha}^*\rangle$ خواهد بود و حالت خروجی $|\eta\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}\rangle$

خواهد بود.

سایر مراحل مطابق قبل طی شد و در نهایت میانگین سنجه‌ی فیدلیتی برای مقادیر مختلف η محاسبه شد و نمودار فیدلیتی برحسب η رسم شد. در ادامه طرح شماتیک شبیه‌سازی این اثر آمده است.



شکل ۴-۵: طرح شماتیک پروتکل مشخصه‌یابی شبکه دارای اتلاف.



شکل ۴-۶: نمودار فیدلیتی برحسب ضریب گذردهی تقسیم‌کننده‌ی باریکه برای یک شبکه اپتیک خطی ۲*۲.

همان طور که توقع می رود، فیدلیتی با افزایش η افزایش می‌یابد.

۴-۵ عدم تطابق بین‌مدی

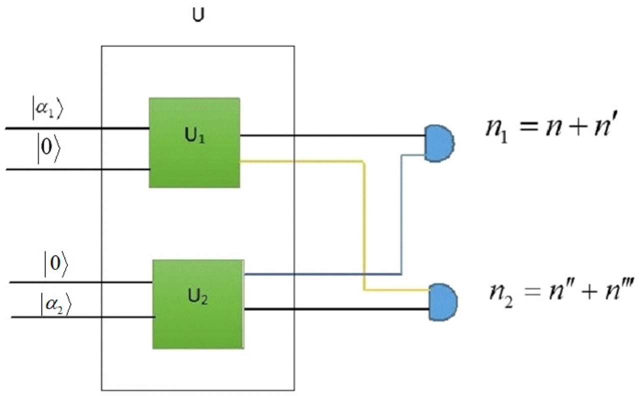
محاسبات کوانتومی اپتیک خطی به‌عنوان یک گزینه‌ی محتمل برای راه‌اندازی سازوکارهای پردازش اطلاعات کوانتومی، در حقیقت تداخل‌سنج‌های بزرگی هستند که از فوتون‌ها به عنوان بیت‌های کوانتومی استفاده می‌کنند. راه‌اندازی چنین پروتکل‌هایی به تمیزناپذیری فوتون‌ها نیاز دارد تا تداخل مطلوب اتفاق بیفتد، اما در عمل فوتون‌ها کاملا تمیزناپذیر نخواهند بود و این امر سبب می‌شود تا تداخل مطلوب از بین برود. نتیجه آنکه فهم آثار تمیزناپذیری فوتون‌ها مهم خواهد بود [۲۰].
در منابعSPDC، منابع مستقل، فوتون‌های دارای شرایط یکسان تطابق فازی تولید نخواهند کرد [۲۰]. به همین سبب اثر این خطا از شرایط ایده‌آل در این قسمت شبیه‌سازی و بررسی شده‌است. مدل کردن این اثر به دو شیوه انجام شده است، که در ادامه به شرح این دو شیوه می‌پردازیم.

۴-۵-۱ روش اول

در روش اول، مدل کردن این اثر به این صورت انجام شد که فوتون‌های ورودی به شبکه اپتیک خطی کاملا تمیزپذیر در نظر گرفته شدند، در نتیجه فوتون‌های مختلف حضور یکدیگر را احساس نمی‌کنند، پس تداخلی با یکدیگر نخواهند داشت و عدم تطابق بین‌مدی کامل داریم. در این صورت شبکه بزرگتر را می‌توان به‌صورت جمع مستقیم شبکه‌های کوچکتر درنظر گرفت.

$$U = U_۱ \oplus U_۲. \qquad (۴-۱)$$

در این مرحله برای شبیه‌سازی این اثر،دو شبکه ۲ مدی یکانی یکسان درنظرگرفته شدند، که تشکیل یک شبکه بزرگتر ۴مدی را می‌دادند. همانند شبیه‌سازی‌های پیشین این شبکه‌ها توسط ماتریس‌های رندوم یکانی توصیف می‌شوند. سپس حالت‌های همدوسی را که از توزیع (۳-۵۰) پیروی کنند، مانند آنچه در ۴-۲ توضیح داده‌شد، تولیدکردیم، این حالت‌ها به‌عنوان ۲ مد ورودی اصلی به شبکه واردشدند، از ۲ مد دیگر حالت‌های خلا را به عنوان ورودی‌های شبکه در نظر گرفتیم. در سوی دیگر که در خروجی



شکل ۴-۷: طرح شماتیک از ورود فوتون‌های تمیزپذیر به شبکه و درنظرگرفتن شبکه به‌صورت جمع مستقیم دو شبکه کوچکتر.

شبکه شمارش فوتون صورت می‌گیرد، اعداد رندومی تولید شد که از توزیع (۳-۶۵) پیروی می‌کنند که در حقیقت نتایج اندازه‌گیری شمارش فوتون است، در این مرحله اتلاف در شبکه‌ی اپتیک خطی نیز مانند آنچه در بخش ۴-۴ توضیح داده شد، با $\eta = 0.9$ در نظرگرفته شده‌است. در سمت شمارش فوتون، دو آشکارساز واقعی وجود دارد که اینگونه در نظر گرفته می‌شود که در هرآشکارساز دو آشکارساز مجازی وجود دارد، در نتیجه دیتای گزارش‌شده از هر آشکارساز واقعی را به‌صورت جمع دو حالت وارد شده به آشکارساز درنظرگرفتیم.در این مرحله میانگین‌گیری روی حالت‌های همدوسی صورت می‌پذیرد که متناظر شمارش صفر فوتون در هر دو آشکارساز باشد. سپس با استفاده از ممان‌های تولیدشده ماتریس ۲*۲ مطابق الگوریتم بیان شده در بخش ۴-۲ مشخصه‌یابی شد و فیدلیتی به عنوان سنجه‌ای از درستی مشخصه‌یابی ماتریس اولیه که حالت‌های همدوس به آن وارد شده بودند محاسبه گردید.
مراحل مشخصه‌یابی و محاسبه‌ی فیدلیتی:

۱. در مرحله‌ی یک ماتریس ۲*۲ یکانی تولیدکردیم و از کنارهم قرار دادن آن یک ماتریس ۴*۴ تولید کردیم.

۲. از آنجایی که رابطه‌ی به‌دست‌آمده برای عناصر قطری ماتریس $\mathbf{L}$ در رابطه (۳-۸۱) به صورت حقیقی درنظر گرفته شده‌بودند و بحثی که در بخش (۳-۶) درباره‌ی آزادی فازی عناصر ماتریس توصیف‌کننده شبکه اپتیک خطی کردیم، ماتریس رندوم تولید شده را در یک ماتریس قطری که

عناصر روی قطر آن مزدوج فاز عناصر روی قطر ماتریس رندوم تولیدشده بودند ضرب کردیم تا یک ماتریس یکانی با عناصر قطری حقیقی داشته داشته باشیم.

۳. در این مرحله $(2 \times T \times 2)$ عدد رندوم تولید کردیم، به طوری‌که از توزیع (۳-۵۰) پیروی کند،که در اینجا T نشان‌دهنده‌ی دفعات تکرار آزمایش است و ۲ نشان‌دهنده‌ی تعداد مدهای شبکه. سپس اعداد تولیدشده را تبدیل به $(T \times 2)$ عدد مختلط کردیم که هرکدام از این اعداد مختلط به‌عنوان مقادیر α درنظر گرفته‌شد، این مقادیر را در یک ماتریس $(T \times 4)$ بعدی نگهداری کردیم که مقدار تصادفی تولیدشده اول در ستون یکم(متناظر مد یکم شبکه) و مقدار تصادفی تولیدشده دوم در ستون چهارم(متناظر مد چهارم شبکه) ذخیره شد و مقادیر متناظر با مد دوم و سوم، صفر در نظر گرفته‌شدند که متناظر وارد شدن حالت خلا در این مدها است. اعداد موجود در هر سطر نشان‌دهنده‌ی نتایج اندازه‌گیری هتروداین آلیس در یک راه‌اندازی آزمایش است و اعداد موجود در ستون iام نشان‌دهنده‌ی نتیجه اندازه‌گیری آلیس در مد iام برای T بار راه‌اندازی آزمایش است. درنظر گرفتن ماتریس حاوی نتایج اندازه‌گیری حالت‌های همدوس به روش مذکور سبب می‌شود تا حالت‌های ورودی با هم تداخلی نداشته باشند و تمیزپذیری کامل حالت‌های ورودی و پردازش جداگانه آن‌ها در شبکه با این مدل برآورده می‌شود.
همان‌طور که در رابطه $P_C(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{(۱-\chi^۲)^M}{\pi^M} e^{-(۱-\chi^۲)|\boldsymbol{\alpha}|^۲}$ نشان داده‌شده است، هنگام تولید اعداد رندوم، نمونه‌ها از یک تابع گاوسی با انحراف معیار $1/\sqrt{2 \times (1-\chi^2)}$ گرفته شدند.
χ در این رابطه را 0.4 درنظر گرفتیم که نشان‌دهنده‌ی یک SPDC با خاصیت تولید مدهای چلانده با چلاندگی ضعیف است، در چنین شرایطی تعداد صفرهای شمارش‌شده در سمت باب بیشتر خواهد بود و چون پروتکل معرفی‌شده دراینجا براساس صفرهای شمارش‌شده در سمت باب کار می‌کند، سبب می‌شود تا با تعداد نمونه‌های کمتری به نتیجه‌ی مطلوب برسیم.

۴. در این مرحله مقادیر تولیدشده به‌عنوان ورودی LON در نظر گرفته می‌شوند و از آن‌جایی که اتلاف هم در این بخش لحاظ شده است، حالت $|\eta\chi\alpha^*\rangle$ را وارد LON می‌کنیم، سپس مقادیر β را که مقادیر خارج‌شده از شبکه اپتیک خطی هستند را مطابق زیر تولید کردیم. $|\boldsymbol{\beta}\rangle = |\eta\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}\rangle$
این مقادیر β در یک ماتریس $(T \times 4)$ نگهداری شدند، که مجددا عناصر قرارگرفته روی هر سطر این ماتریس متناظر اجرای یک بار آزمایش و عناصر قرارگرفته روی ستون i ام متناظر حالت

خروجی LON از مد iام برای T بار راه‌اندازی آزمایش است.

۵. دراین مرحله باید اندازه‌گیری شمارش فوتون باب را مدل کنیم، این قسمت به این‌صورت انجام گرفت که اعدادی تولید کردیم که از توزیع پواسونی (۳-۶۵) پیروی می‌کردند، که آرگومان توزیع پواسون در حقیقت همان مقدار β است. سپس این مقادیر تولید شده را به‌عنوان نتایج اندازه‌گیری باب در یک ماتریس $(4 \times T)$ ذخیره کردیم.هدف از تولید این مجموعه اعداد مشخص کردن مدهایی بود که باب در آن‌ها شمارش صفر فوتون را اندازه گرفته بود، چراکه اساس کار این پروتکل برمبنای گزارشی از مدهایی بود که در آن آشکارسازها صفر گزارش کرده‌بودند و باب از طریق یک کانال کلاسیکی این اطلاعات را به آلیس می‌فرستد.این ۴ دیتای به‌دست‌آمده متناظر شمارش فوتون در هرکدام از آشکارسازهای مجازی است. اینگونه در نظر گرفته می‌شود که دیتای اول و سوم به‌دست‌آمده وارد آشکارساز اول شده‌اند و دیتای دوم و چهارم وارد آشکارساز دوم می‌شود.در این حالت دیتای اول و دوم باید صفر نشان دهند،تا آشکارسازها صفرنشان بدهند.در این حالت دو شرط صفر بودن را همزمان اعمال کردیم و ممان‌های متناظر را برای این شرایط محاسبه کردیم.

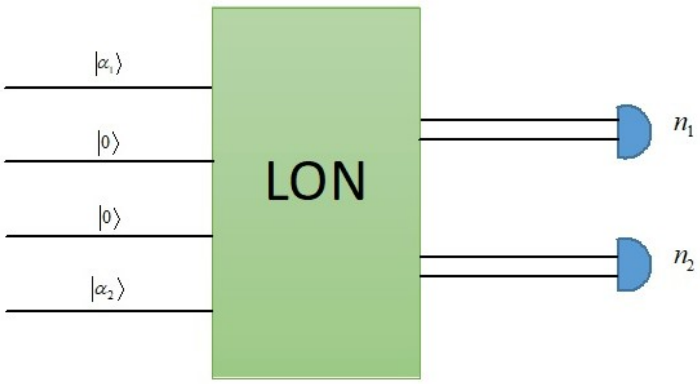
۶. در این مرحله ممان‌های معرفی‌شده در رابطه (۳-۷۹) و (۳-۸۰) را از طریق میانگین‌گیری روی نتایج اندازه‌گیری آلیس در مدهای متناظر شمارش صفر فوتون در پایانه‌ی باب به‌دست‌آوردیم. برای این میانگین‌گیری به این شیوه عمل شد که در هر اجرای آزمایش یعنی در هر ستون از ماتریسی که نتایج شمارش فوتون را ذخیره کرده‌ایم، نتیجه‌ی شمارش فوتون را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم، چنانچه این مقدار صفر باشد،روی حاصلضرب مزدوج نتیجه‌ی اندازه‌گیری هتروداین متناظر این مد در نتیجه‌ی اندازه‌گیری هتروداین سایرمدها میانگین گرفته می‌شود که این میانگین‌گیری روی T بار آزمایش انجام‌شده است.

۷. پارامتر دیگری که در این مرحله محاسبه می‌کنیم، تا در مرحله مشخصه‌یابی از آن بهره ببریم، پارامتر l_i^2 معرفی‌شده در رابطه‌ی (۳-۵۹) که متناظر مربع طول بردار ستونی $\mathbf{L}_i$ است، محاسبه کردیم. که همانطور که در رابطه مذکور دیده می‌شود این پارامتر از طریق میانگین‌گیری روی نتایج شمارش فوتون مد مربوطه محاسبه می‌شود و این مقادیر میانگین بر مقدار χ تقسیم می‌شود و نتایج حاصل در یک ماتریس سطری (2×1) ذخیره کردیم.

۸. در این مرحله پارامترهای موردنیاز برای محاسبه‌ی عناصر ماتریس توصیف‌کننده‌ی شبکه‌ی اپتیک خطی را داریم. عناصر قطری این ماتریس در رابطه‌ی (۳-۸۱) و عناصرغیرقطری در رابطه‌ی (۳-۸۲) به‌دست‌آمده است. با جایگذاری پارامترهای محاسبه شده در مراحل قبلی یک ماتریس قطری و یک ماتریس غیرقطری به‌دست می‌آید که از جمع این دو ماتریس، ماتریس توصیف‌کننده‌ی شبکه را خواهیم داشت.

۹. ماتریس‌های تولیدشده در مرحله‌ی قبل، می‌بایست ماتریس‌های زیریکانی باشند و ویژه مقادیر آن مقادیر کمتر از ۱ باشند، اما محاسبه‌ی ویژه مقادیر، گویای این بود که ماتریس تولیدشده زیریکانی نیست و این به این معنی است که ماتریس تولیدشده فیزیکی نیست. در اینجا باید ضریب اصلاحی درنظر گرفته شود که شرط فیزیکی بودن برقرارشود. این ضریب مطابق آنچه در ابتدای فصل توضیح داده‌شد، محاسبه گردید.

۱۰. در نهایت نیاز داریم بدانیم، ماتریسی که به‌دست‌آورده‌ایم چقدر به ماتریس اولیه‌ای که مشخصه‌یابی آن را آغاز کرده بودیم، نزدیک است. در این قسمت پارامتر فیدلیتی که در بخش (۳-۸) معرفی شد را محاسبه کردیم. این پارامتر با استفاده از رابطه‌ی (۳-۹۷) محاسبه می‌شود.



شکل ۴-۸: شبکه‌ی ۴*۴ متشکل از دو زیرشبکه یکانی یکسان ۲*۲ که قصد مشخصه‌یابی این شبکه ۲*۲ را در حضور عدم تطابق بین‌مدی داریم.

مشخصه‌یابی برای ۶۰۰ شبکه مختلف با ۶۰۰ بار اجرای آزمایش برای هر مشخصه‌یابی انجام شد،در ادامه ماتریس E_{ave} ، که میانگین اختلاف ماتریس یکانی اولیه و ماتریس مشخصه‌یابی شده است،گزارش شده‌است.

$$E_{ave=} \begin{pmatrix} ۰/۰۰۰۶۷۷۰۹ + ۳/۲۲۱۹۶۵۱۲e - ۲۰j & -۰/۰۰۰۳۴۹۰۲ - ۹/۳۳۴۴۷۷۶۹e - ۰۴j \\ ۰/۰۰۰۳۴۹۰۲ - ۹/۳۳۴۴۷۷۶۹e - ۰۴j & -۰/۰۰۰۳۳۰۷۶ + ۹/۷۲۵۵۵۸۳۰e - ۲۰j \end{pmatrix} \tag{۲-۴}$$

فیدلیتی محاسبه‌شده در این شبیه‌سازی 0.83 به دست‌آمد. همانطور که اشاره شد اثر اتلاف نیز در این شبیه‌سازی با در نظرگرفتن تقسیم‌کننده‌ی باریکه با ضریب گذردهی 0.9 درنظرگرفته شد، که مشاهده می‌شود با وارد کردن اثر عدم تطابق بین مدی در این حالت، در مقایسه با حالتی که فقط اثر اتلاف درنظر گرفته شده‌بود، فیدلیتی کاهش 11 درصدی داشته است.

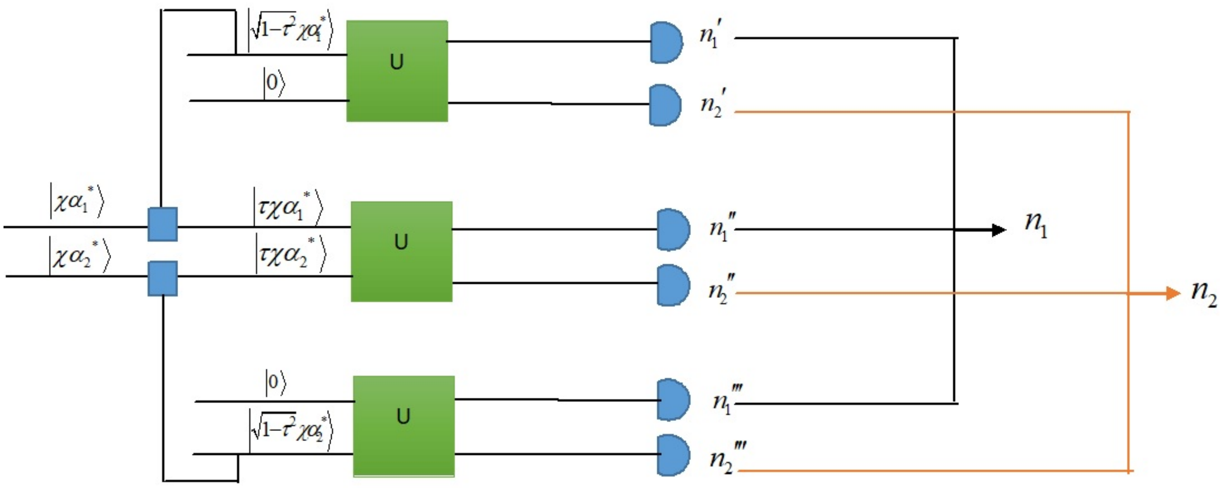
کدهای مربوط به شبیه‌سازی‌های انجام گرفته در این فصل در بخش (پ-۵) آمده است.

۴-۵-۲ روش دوم

در این روش یک تقسیم‌کننده‌ی باریکه فرضی با ضریب گذردهی τ در مسیر حالت‌های همدوس ورودی به شبکه در نظر می گیریم، سپس بخشی از باریکه که از تقسیم‌کننده ی باریکه عبور می‌کند، وارد شبکه شده و تحت پردازش شبکه قرار می‌گیرد و سپس مطابق مراحل معرفی شده در بخش (۴-۲) شمارش فوتون را شبیه‌سازی می‌کنیم و نتایج حاصل را در یک ماتریس $T \times M$ نگهداری می‌کنیم، بخشی از باریکه که از تقسیم‌کننده‌ی باریکه عبور داده نشده‌است را این‌طور درنظر می‌گیریم که به طور جداگانه وارد شبکه شده‌است، البته این بخش از باریکه با سایر مدها تداخلی ندارد، به همین سبب، بخشی از باریکه که در نتیجه‌ی بازتاب از تقسیم‌کننده‌ی باریکه در مد اول وارد شبکه شده بود را به تنهایی از شبکه عبور می‌دهیم، به این شیوه که حالت ورودی به شبکه در مد دوم را خلا در نظر می‌گیریم. در نهایت نتایج حاصل از شمارش فوتون این حالت‌های ورودی را هم در یک ماتریس $T \times M$ نگهداری می کنیم. مطابق همین شیوه حالت دیگری را در نظر می‌گیریم که بخشی از باریکه ورودی در مد دوم که از تقسیم کننده بازتاب داده شده‌است، وارد مد دوم شبکه می‌شود و حالت ورودی به شبکه در مد اول، خلا در نظر گرفته می‌شود، درنهایت نتایج شمارش فوتون این مورد را هم مانند قبل محاسبه می‌کنیم. در این مرحله سه نتیجه حاصل را با هم جمع کرده و این نتیجه را به‌عنوان نتیجه‌ای که آشکارساز فوتونی نشان می‌دهد، در نظر می‌گیریم

و ادامه مراحل مشخصه‌یابی و محاسبه‌ی فیدلیتی مانند قبل انجام می‌شوند.

در ادامه طرح شماتیک از شبیه‌سازی یک شبکه 2×2 آمده‌است، که دارای ۲ مد ورودی و دو آشکارساز در خروجی است که در آن عدم تطابق بین‌مدی وجود دارد.

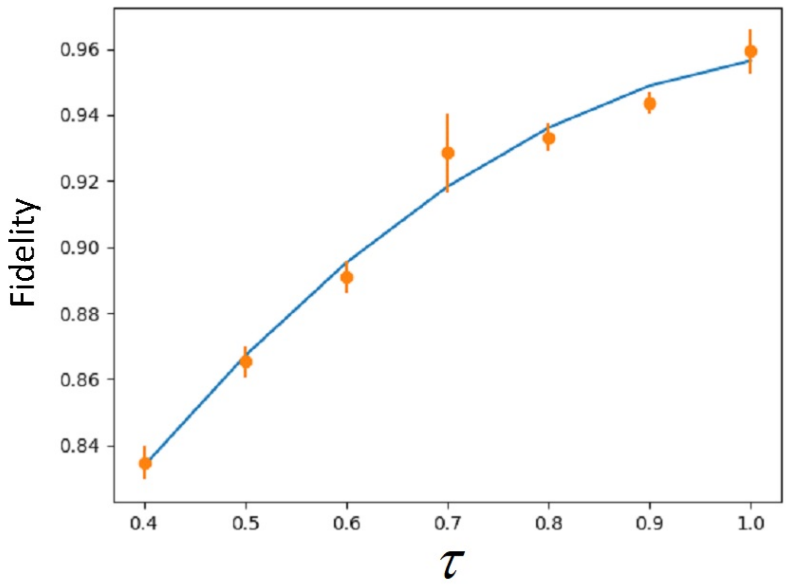


شکل ۴-۹: طرح شماتیک از پروتکل مشخصه‌یابی شبکه‌ی اپتیک خطی در حضور اثر عدم تطابق بین‌مدی.

خروجی‌های اندازه گیری مطابق جمع‌های زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} n_۱ &= n_۱' + n_۱'' + n_۱''' \\ n_۲ &= n_۲' + n_۲'' + n_۲''' \end{aligned} \tag{۴-۳}$$

مراحل توضیح‌داده‌شده در این قسمت را برای تقسیم‌کننده‌های باریکه با ضرایب گذردهی مختلف τ آزمودیم، در نهایت نمودار فیدلیتی برحسب ضریب گذردهی که در ادامه گزارش شده‌است، به دست‌آمد.



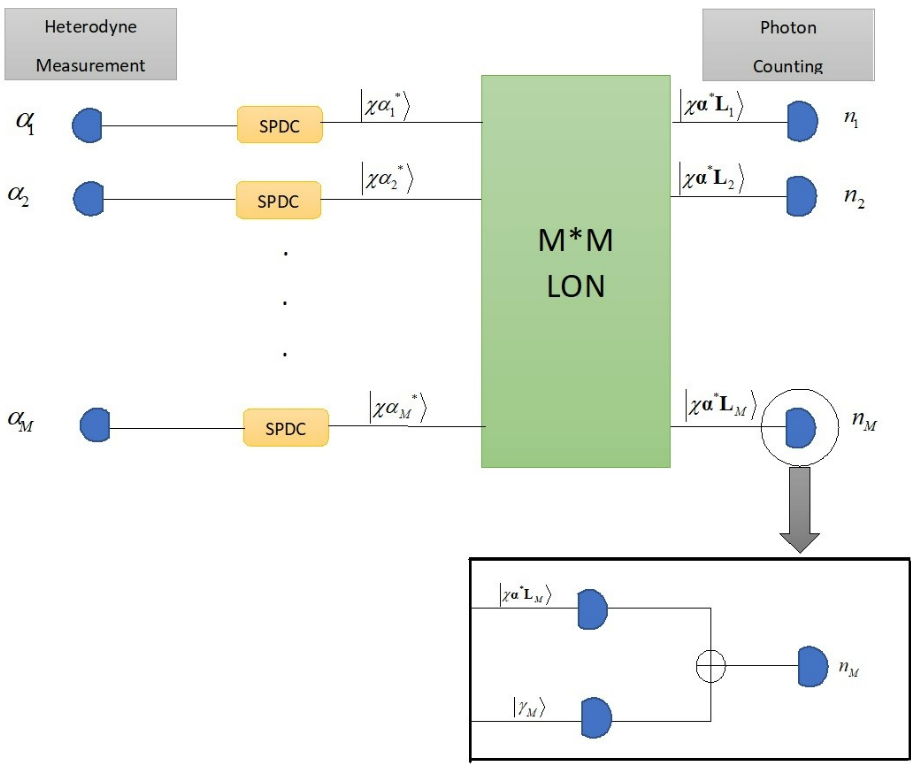
شکل ۴-۱۰: نمودار فیدلیتی برحسب ضریب گذردهی تقسیم‌کننده‌ی باریکه‌ی فرضی برای شبکه اپتیک خطی ۲*۲.

کدهای پایتون مربوط به شبیه‌سازی این اثر در بخش (پ-۶) آمده‌است.

۴-۶ شمارش تصادفی در آشکارساز فوتونی

از آن جایی که هیچ آشکارسازی ایده‌آل نیست و امکان خطا در آن وجود دارد، ممکن است که آشکارساز فوتونی مورداستفاده در این آزمایش، درحالتی که فوتونی به آن وارد نمی‌شود، حضور یک فوتون را اندازه بگیرد و کلیک کند. این اتفاق سبب می‌شود تا در قسمت‌هایی که آشکارساز باید عدد صفر را گزارش کند، عدد دیگری گزارش کند و از آن جایی که پروتکل معرفی‌شده برای مشخصه‌یابی براساس مدهایی که شمارش صفر فوتون در آن‌ها حائز اهمیت است، کار می‌کند، سبب می‌شود تا ما بخشی از اطلاعات را از دست بدهیم، که سبب کاهش دقت و درنهایت افت فیدلیتی خواهد بود. در این قسمت تلاش کردیم تا اثر این پدیده را با مدلی که پیشنهاد شده‌است، شبیه‌سازی کنیم.
برای مدل کردن این اثر، مطابق مراحل مطرح‌شده در بخش (۴-۲) عمل می‌کنیم، با این تفاوت که عددی که آشکارساز فوتونی نشان می‌دهد، متشکل از حالت ورودی همدوس و همینطور کلیک تصادفی‌ای که

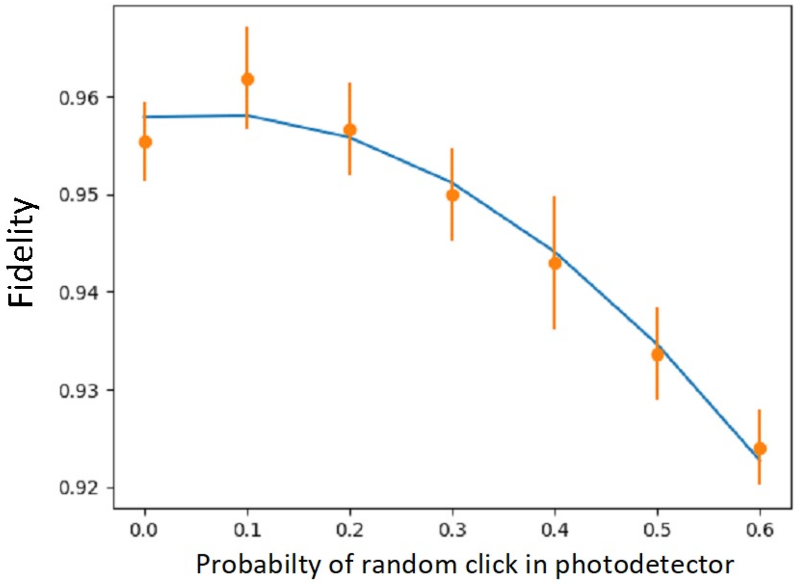
آشکارساز می‌کند، خواهد بود، پس حالت‌های همدوس تولیدشده در مرحله‌ی سوم در بخش (۴-۲) را وارد شبکه می‌کنیم و مانند مراحل پیشین شمارش فوتون را مدل می کنیم، یعنی موردی که در مرحله‌ی پنجم معرفی شده است. اما در این قسمت، قبل از ورود به مرحله‌ی ششم، اثر کلیک تصادفی را وارد می کنیم، به این شکل که یک عدد تصادفی بین صفر و ۱ انتخاب می‌کنیم که از توزیع یکنواخت پیروی می کند، اگر عدد حاصل بیشتر از مقدار p باشد، عدد صفر و درغیراینصورت عدد ۱ را در ماتریس $T \times M$ نگهداری می‌کنیم. این عمل متناظر این است که آشکارساز فوتونی با احتمال p، کلیک می‌کند. در مرحله‌ی بعدی، این عدد را با شمارش فوتون‌های قبلی جمع می‌کنیم، در این حالت برخی مدها که امکان صفر بودن داشتند، هم اکنون عددی غیر از صفر دارند، که چون این مدها در محاسبه‌ی ممان در نظر گرفته نمی‌شوند، سبب می‌شود تا بخشی از اطلاعات از بین برود که منجر به کاهش فیدلیتی می‌شود. نتیجه آنکه توقع داریم، هرقدر احتمال کلیک تصادفی بیشتر شود، فیدلیتی کاهش بیشتری داشته باشد. طرح شماتیک این شبیه‌سازی در ادامه آمده است.



شکل ۴-۱۱: طرح شماتیک از پروتکل مشخصه‌یابی یک شبکه‌ی اپتیک خطی در حضور نویز در آشکارساز فوتونی.

کدهای مربوط به شبیه سازی این اثر در بخش (پ-۷) آمده‌است.

نتیجه‌ی شبیه‌سازی این اثر در نموداری در ادامه آمده است، در این نمودار فیدلیتی برحسب احتمال کلیک تصادفی در آشکارساز فوتونی رسم شده‌است.



شکل ۴-۱۲: نمودار فیدلیتی برحسب احتمال کلیک تصادفی در آشکارساز فوتونی برای یک شبکه‌ی اپتیک خطی ۲*۲.

فصل ۵

نتیجه‌گیری

در این پژوهش نمونه‌برداری بوزونی موردبررسی قرار گرفت و تلاش کردیم شبکه‌های اپتیک خطی که المان های مهمی در آزمایش‌های نمونه‌برداری هستند را مشخصه‌یابی کنیم و آثار خطا با منابع مختلف را مورد بررسی قرار دهیم.

ابتدا در فصل ۱ اهمیت کامپیوترهای کوانتومی توضیح داده شد و مواردی از کابردهای آن مطرح شد و به ارتباط محاسبات کوانتومی با نمونه‌برداری بوزونی پرداخته شد.

در فصل ۲ به مقدمات اپتیک کوانتومی و ابزارهای موردنیاز برای پیش‌برد بحث پرداخته شد.

در فصل ۳ با پیچیدگی محاسباتی و کلاس های پیچیدگی آشنا شدیم و نمونه‌برداری بوزونی به‌عنوان مسئله‌ای که امکان حل آن به‌وسیله‌ی کامپیوترهای کلاسیک به‌طریق کارآمد وجود ندارد، معرفی شد و فرم تعمیم‌یافته‌ی آن تحت عنوان نمونه‌برداری بوزونی تصادفی نیز معرفی شد، سپس با توجه به الزام در شناخت از شبکه‌ی اپتیک خطی که در این آزمایش‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند، روش‌های مشخصه‌یابی و به طور مشخص پروتکل مشخصه‌یابی درجا شبکه‌های اپتیک خطی بررسی شد.این روش با بهره‌گیری از حالت چلانده‌ی خلا دومدی درهمتنیده ک بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته می‌شود کار می‌کند و سپس اندازه‌گیری شمارش فوتون در سمت باب و اندازه‌گیری هترودان در سمت آلیس، انجام می‌گیرد.در نهایت یک سنجه تحت عنوان فیدلیتی برای مشخص کردن اینکه چقدر توزیع به دست آمده به توزیع ایده‌آل نزدیک است یا به عبارت دیگر چقدر ماتریس مشخصه‌یابی شده به ماتریس تحت آزمایش نزدیک است، معرفی شد.

در فصل ۴ روش‌های شبیه‌سازی پروتکل مشخصه‌یابی ابتدا برای شبکه ایده‌آل مطرح شد و برای شبکه‌ها

با تعداد مدهای مختلف مشخصه‌یابی انجام شد وسنجه فیدلیتی برای آن‌ها محاسبه گردید و تابعیت این سنجه با تعداد مدها دیده شد که مطابق انتظار بود ، سپس به دلیل حساسیت سیستم‌های کوانتومی به عوامل خطا و عوامل محیطی، خطاهای ناشی از وجود یک نویز گاوسی در آشکارسازهای هترودواین بررسی شد و ارتباط سنجه فیدلیتی با انحراف معیار نویز واردشده را بررسی کردیم که مطابق توقع با افزایش انحراف معیار این سنجه درستی کاهش پیدا می‌کرد، در مرحله‌ی بعدی اتلاف در شبکه اپتیک خطی به عنوان عامل انحراف از حالت ایده‌آل در نظر گرفته‌شد و مطابق انتظار با افزایش ضریب گذردهی تقسیم‌کننده‌ی باریکه سنجه درستی افزایش یافت. در مرحله آخر اثر عدم تطابق بین‌مدی را بررسی کردیم و ماتریس اختلاف بین ماتریس اولیه و ماتریس مشخصه‌یابی شده را و همینطور فیدلیتی را گزارش کردیم که در همخوانی با نتایج قبلی بود.

در ادامه باتوجه به مباحث مطرح‌شده در بخش ب-۴، تعبیری که از محاسبه‌ی ممان‌ها برای حالت کلاسیک- کلاسیک مطرح شد و توجه به این نکته که آمار شمارش فوتون اجراهای RBS دقیقا همان اطلاعاتی را تولید می‌کند که آمار هترودواین شرطی با حالت ورودی کلاسیک- کلاسیک تولید می‌کند، می‌توان به این موضوع پرداخت که با بهره‌گیری از آمار شمارش فوتون RBS ماتریس انتقال را بازیابی کرد. به این طریق نیاز به تغییر اندازه‌گیری از شمارش فوتون به هترودواین نخواهیم داشت، البته این روش در تمیز دادن $\mathbf{L}$ از $\mathbf{L}^*$ ناتوان است. بنابراین یکی از سوالات باز پیش رو این است که چگونه با اندازه‌گیری ممان‌ها برحسب آمار شمارش فوتون، آلیس بدون تغییر اندازه‌گیری می‌تواند شبکه‌ی اپتیک خطی باب را مشخصه‌یابی کند.

همچنین بررسی آثار خطا، مشابه آنچه در این پایان‌نامه در نظر گرفته‌شده‌است، در روش فوق می‌تواند قابلیت‌های آن را آشکار سازد. با در دست داشتن این‌گونه روش مشخصه‌یابی می توان مسائل درستی‌سنجی نمونه‌برداری بوزونی تصادفی را نیز مطالعه نمود.

مورد دیگری که می‌تواند مورد بررسی و ارزیابی قرار گیرد، درنظر گرفتن روش‌های دیگری برای اعمال شرط فیزیکی بودن روی ماتریس‌های مشخصه‌یابی شده و بهینه بودن این روش‌ها است .

پیوست آ

شبکه‌های دارای اتلاف و مرزهای فیدلتی

در این پیوست که برگرفته از مرجع [۱۸] می‌باشد، مرز و فرم صریح فیدلیتی داده شده در (۳-۹۷) را بدست می‌آوریم و مرزهای آن را بررسی می‌کنیم، که به جای میانگین‌گیری روی همه ثبت‌های شمارش فوتون $\mathbf{n}_A$، فقط روی بخش‌های با تعداد فوتون نهایی مشخص میانگین می‌گیریم.

آ‐۱ شبکه‌های دارای اتلاف با استفاده از مدهای اتلاف کمکی

در ادامه، نیاز داریم که توصیف اولیه توسعه شبکه دارای اتلاف، به عنوان بخشی از یک شبکه بدون اتلاف بزرگتر را که دارای $\tilde{M}$ مد کمکی است، انجام دهیم. مدهای کمکیبع عنوان خلاء، مقداردهی اولیه می‌شوند و فوتون‌های گم‌شده از شبکه اصلی باب را دریافت می‌کنند. این شبکه بزرگتر توسط یک اپراتور یکانی $\tilde{U}$ مشخصه‌یابی می‌شود که ماتریس انتقال یکانی متناظر آن مطابق زیر است:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{R} \\ \mathbf{S} & \tilde{\mathbf{R}} \end{pmatrix}. \qquad (\text{آ‐۱})$$

مطابق معادله (۳-۱۰) توصیف می‌کند که چگونه شبکه بزرگتر، اپراتورهای خلق را انتقال می‌دهد. در معادله (آ‐۱)، $\tilde{\mathbf{U}}$ براساس مدهای اصلی B، M بر تعداد و مدهای کمکی $\tilde{B}$ ، $\tilde{M}$ بر تعداد، تقسیم شده اند. این چهار زیرماتریس به روش‌های مختلف با هم در ارتباط هستند (بر اساس یکانی بودن $\tilde{\mathbf{U}}$) اما تنها قیدی که اینجا به آن نیاز داریم قید زیر می‌باشد:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger} + \mathbf{R}\mathbf{R}^{\dagger} = \mathbf{I}. \qquad (\text{آ‐۲})$$

در ادامه مفید است که تجزیه قطبی ماتریس انتقال دارای اتلاف (۳-۳۹) را مورد توجه قرار دهیم. همچنین مفید است که ماتریس $M \times \tilde{M}$ و R را مورد بررسی قرار دهیم. بدون کاستن از کلیت مسئله، می‌توانیم در نظر بگیریم که تعداد مدهای کمکی $\tilde{B}$ برابر تعداد مدهای B باشد، یعنی $M = \tilde{M}$. تجزیه قطبی را مطابق زیر انجام می‌دهیم:

$$\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{R}\mathbf{R}^{\dagger}}\mathbf{O} = \sqrt{\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}}\mathbf{O} \tag{آ-۳}$$

که همواره می‌توانیم ماتریس یکانی $\mathbf{O}$ را به گونه‌ای توسط بازتعریف مدهای کمکی B ، انتخاب کنیم که همانی باشد و به صورت $\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}}$ باشد. ماتریس انتقال $\tilde{U}$، توصیف می‌کند که چگونه شبکه بزرگتر، یک حالت همدوس را به حالت‌های همدوس دیگر می‌برد، یعنی:

$$\tilde{u}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^{\dagger}\rangle = \left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\beta}^{\dagger} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}\right\rangle = \left|\boldsymbol{\beta}\mathbf{L} + \tilde{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}\mathbf{R} + \tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\mathbf{L}}\right\rangle. \tag{آ-۴}$$

در موردی که به آن علاقمندیم، مدهای کمکی با حالت های خلاء مقداردهی اولیه می‌شوند، که به صورت $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\mathbf{0}}$ نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$\tilde{u}|\boldsymbol{\beta}, \tilde{\mathbf{0}}\rangle = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}, \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}\rangle. \tag{آ-۵}$$

طبق معادله (۳-۳۴)، پس از اجرای عمل کوانتومی بر روی شبکه باب و حالت‌های همدوس، خواهیم داشت:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\boldsymbol{\beta}\rangle\langle\boldsymbol{\beta}|) = \mathrm{Tr}_{\tilde{B}}[\tilde{u}|\boldsymbol{\beta}, \tilde{\mathbf{0}}\rangle\langle\boldsymbol{\beta}, \tilde{\mathbf{0}}|\tilde{u}^{\dagger}] = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle\langle\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}|. \tag{آ-۶}$$

می‌توانیم عملیات کوانتومی را به روشی بنویسیم که با رابطه (۳-۹۱) توافق داشته باشد، با تریس گرفتن روی مدهای کمکی در پایه عددی خواهیم داشت:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\rho_B) = \mathrm{Tr}_{\tilde{B}}[\tilde{u}\rho_B \otimes |\tilde{\mathbf{0}}\rangle\langle\tilde{\mathbf{0}}|\tilde{u}^{\dagger}] = \sum_{\mathbf{n}_{\tilde{B}}} \langle\mathbf{n}_{\tilde{B}}|\tilde{u}|\tilde{\mathbf{0}}\rangle\rho_B\langle\tilde{\mathbf{0}}|\tilde{u}^{\dagger}|\tilde{\mathbf{n}}_{\tilde{B}}\rangle = \sum_{\mathbf{n}_{\tilde{B}}} \kappa_{\mathbf{n}_{\tilde{B}}}\rho_B\kappa^{\dagger}_{\mathbf{n}_{\tilde{B}}} \tag{آ-۷}$$

که در فرم نهایی، اپراتورهای کراوس که روی مدهای B عمل می‌کند را به رسمیت می‌شناسیم:

$$\kappa_{\mathbf{n}_{\tilde{B}}} = \langle\mathbf{n}_{\tilde{B}}|\tilde{u}|\tilde{\mathbf{0}}\rangle. \tag{آ-۸}$$

حال به بررسی اثر $\varepsilon_{\mathbf{L}}$ بر روی حالت های همدوس می‌پردازیم:

$$\kappa_{\mathbf{n}_{\tilde{B}}}|\boldsymbol{\beta}\rangle = \langle\mathbf{n}_{\tilde{B}}|\tilde{u}|\boldsymbol{\beta}, \tilde{\mathbf{0}}\rangle = \langle\mathbf{n}_{\tilde{B}}|\ \boldsymbol{\beta}\mathbf{L}, \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}\rangle = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle\langle\mathbf{n}_{\tilde{B}}|\ \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}\rangle \tag{آ-۹}$$

که همان چیزی است که LON باب انجام می‌دهد، به‌جز اینکه هر اپراتور کراوس، شامل ریشه دوم احتمال $|\langle\mathbf{n}_{\tilde{B}|\boldsymbol{\beta}\mathbf{R}}\rangle|^2$ برای ثبت فوتون $\mathbf{n}_{\tilde{B}}$ در مدهای کمکی است.
هیچ اپراتور خطی‌ای وجود ندارد که $\boldsymbol{\beta}$ را به $|\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle$ ببرد، زمانیکه $\mathbf{L}$ یکانی نباشد، اپراتورهای کراوس این کار را با زیربهنجار کردن حالت همدوس خروجی به روش مشخصی انجام می‌دهند.
در ادامه، مرجع مدهای کمکی را در زیرنویس اپراتورهای کراوس حذف می‌کنیم، با نوشتن زیر نویس به صورت $\mathbf{n}$ و با یاد آوردی اینکه، این یک ثبت شمارش فوتون‌های رها شده در مدهای کمکی می‌باشد.
آنچه ما موقتا نیاز داریم ، یک مورد خاص از معادله ی (آ-۹) است، برای اپراتور کراوس:

$$\kappa_{۰} = \langle\tilde{۰}|\tilde{u}|\tilde{۰}\rangle \qquad (\text{آ-۱۰})$$

که متناظر فوتون گم شده در مد های کمکی می‌باشد، برای این مورد خاص داریم:

$$\kappa_{۰}|\boldsymbol{\beta}\rangle = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle\langle\tilde{۰}|\,\boldsymbol{\beta}\mathbf{R}\rangle = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle e^{-\boldsymbol{\beta}\mathbf{R}\mathbf{R}^{\dagger}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}/۲} = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle e^{-\boldsymbol{\beta}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger})\boldsymbol{\beta}^{\dagger}/۲}. \qquad (\text{آ-۱۱})$$

از رابطه قید یکانی بودن (آ-۲) استفاده کرده‌ایم تا عبارت آخر را بر حسب ماتریس انتقال دارای اتلاف $\mathbf{L}$ بنویسیم.
می‌توانیم رابطه (آ-۹) را دستکاری کرده تا یک عبارت صریح برای همه اپراتور های کراوس براساس $\kappa_{\mathbf{0}}$ بدست آوریم.

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathbf{n}}|\boldsymbol{\beta}\rangle = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle\langle\tilde{\mathbf{n}}_{\tilde{\mathbf{B}}}|\,\boldsymbol{\beta}\mathbf{R}\rangle &= |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle\langle n_{\tilde{B}_{۱}},......,n_{\tilde{B}_M}|\,(\beta R)_{۱},......,(\beta R)_M\rangle \\
&= |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle\, e^{-\boldsymbol{\beta}\mathbf{R}\mathbf{R}^{\dagger}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}/۲}\prod_{j=۱}^{M}\frac{[(\boldsymbol{\beta}\mathbf{R})_j]^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \\
&= \kappa_{۰}\,|\boldsymbol{\beta}\rangle\prod_{j=۱}^{M}\frac{[(\boldsymbol{\beta}\mathbf{R})_j]^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \\
&= \kappa_{۰}\prod_{j=۱}^{M}\frac{[(\mathbf{b}\mathbf{R})_j]^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}|\boldsymbol{\beta}\rangle
\end{aligned} \qquad (\text{آ-۱۲})$$

به طوریکه $\mathbf{b}$ بردار سطری (۳-۵۶) مربوط به اپراتور های فنا می‌باشد.
در به دست آوردن رابطه بالا، از بسط حالت‌های همدوس بر حسب حالت‌های عددی استفاده کرده‌ایم و تصویر حالت‌های همدوس روی حالت‌های عددی را که در خط اول رابطه آمده است محاسبه کرده‌ایم.
می‌توانیم یک فرم صریح برای $\kappa_{\mathbf{n}}$ بدست آوریم، همانطور که در ادامه، در معادله‌ی (آ-۲۱) نشان می‌دهیم. مفید و آموزنده است که یک عبارت صریح برای $\kappa_{\mathbf{0}}$ بیابیم. با اینکه می‌توانیم بدون این فرم

صریح که در ادامه می آید هم کاری را که می‌خواهیم انجام دهیم، اما طبیعت LON دارای اتلاف را برای‌مان روشن می‌سازد.

ν را یک اپراتور یکانی در نظر می‌گیریم که به ماتریس انتقال بدون اتلاف $\mathbf{L}$ مربوط می‌شود، یعنی:

$$\nu|\boldsymbol{\beta}\rangle = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{V}\rangle. \tag{آ-۱۳}$$

برای هر حالت همدوس $|\boldsymbol{\beta}\rangle$، فرمول زیر را فراخوانی می‌کنیم:

$$e^{-\boldsymbol{\beta}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger)\boldsymbol{\beta}^\dagger/۲}\left|\boldsymbol{\beta}\sqrt{\mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger}\right\rangle = L|\boldsymbol{\beta}\rangle \tag{آ-۱۴}$$

که:

$$L = \exp(\sum_{j,k} H_{jk} b_k^\dagger b_j) \tag{آ-۱۵}$$

یک اپراتور هرمیتی و نگهدارنده تعداد فوتون‌ها روی مدهای B است، که:

$$H = \ln(\sqrt{\mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger}). \tag{آ-۱۶}$$

از تلفیق معادلات (آ-۱۳) و (آ-۱۴) و قرار دادن آن‌ها در معادله (آ-۱۱) بدست می‌آوریم:

$$\nu L|\boldsymbol{\beta}\rangle = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle e^{-\boldsymbol{\beta}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger)\boldsymbol{\beta}^\dagger/۲} = \kappa_۰|\boldsymbol{\beta}\rangle \tag{آ-۱۷}$$

که دلالت میکند بر اینکه:

$$\kappa_۰ = \nu L. \tag{آ-۱۸}$$

تجزیه قطبی $\mathbf{L}$ ما را به تجزیه قطبی متناظر κ_0 رهنمون می‌کند و ν اپراتور یکانی برای شبکه بدون اتلاف $\mathbf{V}$ می‌باشد.

$$L = \sqrt{\kappa_۰^\dagger \kappa_۰} \tag{آ-۱۹}$$

از بخش باقی‌مانده تجزیه قطبی $\sqrt{\mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger}$ بدست می‌آید که اتلاف را توصیف می‌کند.

فرمول (آ-۱۴) تعمیم چند مدی فرمول تک مدی می‌باشد:

$$e^{-(۱-\lambda^۲)|\alpha|^۲/۲}|\lambda\alpha\rangle = \lambda^{a^\dagger a}|\alpha\rangle. \tag{آ-۲۰}$$

دراینجا به اپراوترهای کراوس بازمی‌گردیم و فرم صریح $\kappa_{\mathbf{n}}$ را در معادله‌ی (آ_۲۱)استخراج می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathbf{n}} &= \kappa_{۰} \prod_{j=۱}^{M} \frac{[(\mathbf{b}\sqrt{\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}})_j]^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \\ &= \prod_{j=۱}^{M} \frac{[(\mathbf{b}\mathbf{L}^{-۱}\sqrt{\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}})_j]^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \kappa_{۰}.\end{aligned} \tag{آ_۲۱}$$

در تساوی آخر از رابطه زیر استفاده کرده ایم:

$$\kappa_{۰}^{-۱}\mathbf{b}\kappa_{۰} = \mathbf{b}\mathbf{L}. \tag{آ_۲۲}$$

به منظور تایید درستی رابطه (آ_۲۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\kappa_{۰}|\boldsymbol{\beta}\rangle = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle e^{-\frac{\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}\right)\boldsymbol{\beta}^{\dagger}}{۲}} \Rightarrow \mathbf{b}\kappa_{۰}|\boldsymbol{\beta}\rangle = |\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle e^{-\frac{\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}\right)\boldsymbol{\beta}^{\dagger}}{۲}}(\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}) \\ &\kappa_{۰}^{-۱}\mathbf{b}\kappa_{۰}|\boldsymbol{\beta}\rangle = (\boldsymbol{\beta}\mathbf{L})\kappa_{۰}^{-۱}|\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle e^{-\frac{\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}\right)\boldsymbol{\beta}^{\dagger}}{۲}} = (\boldsymbol{\beta}\mathbf{L})|\boldsymbol{\beta}\rangle = \mathbf{b}\mathbf{L}.\end{aligned} \tag{آ_۲۳}$$

آ_۲ مرز فیدلیتی

در اینجا قصد داریم تا رابطه (۳-۹۷) را به طور دقیق محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}F\left(P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}}, P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{L}}\right) &= \sum_{\mathbf{n}_B} \sqrt{P_{BS}\left(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}\right) P_{BS}\left(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A,\mathbf{L}\right)} \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{n}_B \\ |\mathbf{n}_B|=|\mathbf{n}_A|}} \left|\langle\mathbf{n}_A|u^{\dagger}|\mathbf{n}_B\rangle\right| \sqrt{\langle\mathbf{n}_B|\varepsilon_{\mathbf{L}}\left(|\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A|\right)|\mathbf{n}_B\rangle}.\end{aligned} \tag{آ_۲۴}$$

فاکتور $|\langle\mathbf{n}_A|u^{\dagger}|\mathbf{n}_B|\rangle$ صفر است، مگر آن که $|\mathbf{n}_B| = |\mathbf{n}_A|$، در نتیجه قیدی روی جمع در رابطه اخیر می‌گذارد.

یادآوری می‌کنیم که گرچه $\mathbf{n}_A$ ثبت شمارش فوتون در پایانه آلیس است، اما بهتر است که اینجا به عنوان حالت ورودی به LON، به آن فکر شود. در واقع تحلیل ما در ارتباط دادن مرز فیدلیتی به فیدلیتی کوانتومی در معادله (۳-۹۷)، با فضای فاز مدهای B و مدهای $\tilde{B}$ به انجام می‌رسد، زمانی که پایانه آلیس نیز مورد بررسی قرار گیرد.

حالا بسط عملگر کراوس (آ_۷) را در فیدلیتی (آ_۲۴) جایگذاری می‌کنیم و باید توجه شود که قید

$|\mathbf{n}_A| = |\mathbf{n}_B|$ به این معناست که نیاز داریم تنها ترم‌های کراوس مجرد که متناظر صفر فوتون است را در نظر بگیریم. در نتیجه به دست می‌آید:

$$F\left(P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}}, P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{L}}\right) = \sum_{\substack{\mathbf{n}_B \\ |\mathbf{n}_B|=|\mathbf{n}_A|}} \left|\langle\mathbf{n}_A|u^\dagger|\mathbf{n}_B\rangle\langle\mathbf{n}_B|\kappa_0|\mathbf{n}_A\rangle\right|. \qquad \text{(آـ۲۵)}$$

$$\langle\mathbf{n}_B|\,\kappa_0|\mathbf{n}_A\rangle = \langle\mathbf{n}_B, \tilde{0}|\tilde{u}\,|\mathbf{n}_A, \tilde{0}\rangle\,. \qquad \text{(آـ۲۶)}$$

از اینجا قید $|\mathbf{n}_A| = |\mathbf{n}_B|$ را حذف می‌کنیم، چراکه هر دو فاکتور در این قید در حال اجراست.
باید توجه شود که اگر شبکه باب، شبکه‌ی ایده‌آل و مطلوب باشد، می‌توان $\tilde{u} = u \otimes I$ را انتخاب کرد، که این به این معناست که $\kappa_0 = u$ تنها اپراتور کراوس غیر صفر است و مرز فیدلیتی (آـ۲۵)، همان طور که انتظار می‌رود، یک می شود، چراکه $\mathbf{U} = \mathbf{L}$ است. معادله (آـ۲۵) یک تساوی است و نه یک مرز. در ادامه از این تساوی، با بیرون کشیدن قدر مطلق از جمع، به سمت به دست آوردن مرز حرکت می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\left(P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}}, P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{L}}\right) &\geqslant \left|\sum_{\substack{\mathbf{n}_B \\ |\mathbf{n}_B|=|\mathbf{n}_A|}} \left|\langle\mathbf{n}_A|u^\dagger|\mathbf{n}_B\rangle\langle\mathbf{n}_B|\kappa_0|\mathbf{n}_A\rangle\right|\right| \\ &= \left|\langle\mathbf{n}_A|u^\dagger\kappa_0|\mathbf{n}_A\rangle\right| = F\left(u|\mathbf{n}_A\rangle, \mathcal{E}_{\mathbf{L}}\left(|\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A|\right)\right).\end{aligned} \qquad \text{(آـ۲۷)}$$

شرط تساوی آن است که همه‌ی ترم‌ها در جمع، فاز یکسان داشته باشند.
حالا مرز در فرم مناسبی است ـ فیدلیتی حالت‌های $u|\mathbf{n}_A\rangle$ و $\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A|)$ است یا به طور معادل فیدلیتی مربوط به $u|\mathbf{n}_A\rangle$ و $\nu L = \kappa_0|\mathbf{n}_A\rangle$ - اما برای به دست آوردن مرزی که شامل ماتریس‌های $\mathbf{L}$ و $\mathbf{U}$ باشد به کار بیشتری نیاز است. قدم اول میانگین‌گیری روی $P_Q(\mathbf{n}_A)$ می‌باشد، همان‌طور که در

(۳-۹۳) به آن پرداختیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F\left(P_{Q|\mathbf{U}}, P_{Q|\mathbf{L}}\right) &= \sum_{\mathbf{n}_A} P_Q(\mathbf{n}_A) F\left(P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}}, P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{L}}\right) \\ &\geqslant \sum_{\mathbf{n}_A} \left| P_Q(\mathbf{n}_A) \langle \mathbf{n}_A | u^\dagger \kappa_۰ | \mathbf{n}_A\rangle \right| \\ &\geqslant \left| \sum_{\mathbf{n}_A} P_Q(\mathbf{n}_A) \langle \mathbf{n}_A | u^\dagger \kappa_۰ | \mathbf{n}_A\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{\mathbf{n}_A} \sum_{\mathbf{m}_A} P_Q(\mathbf{n}_A) \langle \mathbf{n}_A | \, \mathbf{m}_A\rangle \, \langle \mathbf{m}_A | u^\dagger \kappa_۰ | \mathbf{n}_A\rangle \right| \quad . \\ &= \left| \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{\mathbf{n}_A} P_Q(\mathbf{n}_A) |\mathbf{n}_A\rangle\langle \mathbf{n}_A| \right) u^\dagger \kappa_۰ \right] \right| \\ &= \left| \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{\mathbf{n}_A} \left(۱-\chi^۲\right)^M \chi^{۲|\mathbf{n}_A|} |\mathbf{n}_A\rangle\langle \mathbf{n}_A| \right) u^\dagger \kappa_۰ \right] \right| \\ &= \left| \mathrm{Tr}\left[\rho_{th,B} u^\dagger \kappa_۰ \right] \right| \end{aligned} \tag{آ-۲۸}$$

در عبارت بالا در خط ششم، حالت دمایی مطابق رابطه (۳-۱۷) را داریم.
شرط برقراری این تساوی، این می‌باشد که همه‌ی ترم ها در $\langle \mathbf{n}_A | u^\dagger \kappa_0 | \mathbf{n}_A\rangle$ فاز یکسانی داشته باشند.
در مرحله بعد نشان می‌دهیم که در مرز (آ-۲۸)، فیدلیتی کوانتومی، معادله (۳-۹۷) می‌باشد.

$$\begin{aligned} F(\rho_{AB|\mathbf{U}}, \rho_{AB|\mathbf{L}}) &= \langle \Psi_{AB|\mathbf{U}} | \rho_{AB|\mathbf{L}} | \Psi_{AB|\mathbf{U}}\rangle^{۱/۲} \\ &= \langle \Psi_{AB} | I_A \otimes u^\dagger \mathcal{E}_{\mathbf{L}}(|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|) I_A \otimes u |\Psi_{AB}\rangle^{۱/۲} \\ &= \langle \Psi_{AB} | I_A \otimes u^\dagger \kappa_۰ | \Psi_{AB}\rangle \\ &= |\mathrm{Tr}[I_A \otimes u^\dagger \kappa_۰ |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|]| \\ &= |\mathrm{Tr}_B[u^\dagger \kappa_۰ \rho_{th,B}]|. \end{aligned} \tag{آ-۲۹}$$

در ادامه، عبارت ذکر شده در رابطه (۳-۸۷) را به طور صریح به دست آوردیم.
در قدم آخر باید مرز فیدلیتی را بر اساس ماتریس‌های انتقال بنویسیم. برای این کار از بسط حالت دمایی بر حسب حالت‌های همدوس، که در رابطه (۳-۵۳) و (۳-۱۹) آمده است، استفاده می‌کنیم.

$$\mathrm{Tr}\left[\rho_{th,B} u^\dagger \kappa_۰\right] = \left(\frac{۱-\chi^۲}{\chi^۲}\right)^M \int \frac{d^{۲M}\boldsymbol{\beta}}{\pi^M} \exp\left(۱ - \frac{۱-\chi^۲}{\chi^۲}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^\dagger\right) \langle \boldsymbol{\beta} | u^\dagger \kappa_۰ | \boldsymbol{\beta}\rangle. \tag{آ-۳۰}$$

با استفاده از رابطه (۳-۱۱) و (آـ۱۱) می‌توانیم $\langle \boldsymbol{\beta}|u^{\dagger}\kappa_0|\boldsymbol{\beta}\rangle$ را محاسبه کنیم و عناصر ماتریس حالت همدوس را به فرمی تبدیل کنیم که شامل ماتریس‌های انتقال $\mathbf{L}$ و $\mathbf{U}$ باشند:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\beta}|u^{\dagger}\kappa_{0}|\boldsymbol{\beta}\rangle &= e^{-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}/2}e^{\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}/2}\langle \boldsymbol{\beta}\mathbf{U}|\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\rangle \\ &= e^{-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}/2}e^{\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}/2}e^{-\boldsymbol{\beta}\mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}/2}e^{-\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}/2}e^{\mathbf{U}^{\dagger}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}} \\ &= e^{-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}}e^{\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}\mathbf{U}^{\dagger}\boldsymbol{\beta}^{\dagger}} \\ &= e^{-\boldsymbol{\beta}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{U}^{\dagger})\boldsymbol{\beta}^{\dagger}}.\end{aligned} \tag{آـ۳۱}$$

انتگرال رابطه (آـ۳۰) را که یک انتگرال گاوسی می‌باشد، محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\rho_{th,B}u^{\dagger}\kappa_{0}] &= (\frac{1-\chi^{2}}{\chi^{2}})^{M}\int\frac{d^{2M}\boldsymbol{\beta}}{\pi^{M}}e^{-\boldsymbol{\beta}\left(\frac{1}{\chi^{2}}\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{U}^{\dagger}\right)\boldsymbol{\beta}^{\dagger}} \\ &= (\frac{1-\chi^{2}}{\chi^{2}})^{M}\frac{\chi^{2M}}{\det(\mathbf{I}-\chi^{2}\mathbf{L}\mathbf{U}^{\dagger})} = \frac{\left(1-\chi^{2}\right)^{M}}{\det(\mathbf{I}-\chi^{2}\mathbf{L}\mathbf{U}^{\dagger})}.\end{aligned} \tag{آـ۳۲}$$

یک مورد مهم زمانی اتفاق می‌افتد که شبکه دارای اتلاف وابسته به $\mathbf{L}$، با شبکه ایده آل یکسان باشد، یعنی $\mathbf{U}=\mathbf{V}$ یا به طور معادل $\nu=u$، در این مورد فیدلیتی کوانتومی خواهد بود:

$$\begin{aligned}F(\rho_{AB|\mathbf{U}},\rho_{AB|\mathbf{L}}) &= |\mathrm{Tr}[\rho_{th,B}L]| \\ &= \frac{(1-\chi^{2})^{M}}{\det(\mathbf{I}-\chi^{2}\sqrt{\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}})} = \frac{(1-\chi^{2})^{M}}{(1-\chi^{2}t_{1})\ldots(1-\chi^{2}t_{M})}\end{aligned} \tag{آـ۳۳}$$

که t_i ها مقادیر تکین $\mathbf{L}$ می‌باشند. زمانی که $\nu=u$ است، تنها اتلاف خالص در LON باب، نیاز است تا مشخصه یابی شود و این کار می‌تواند با استفاده از آمار شمارش فوتون غیرشرطی باب و بدون نیاز به اجرای مشخصه یابی هتروداین صورت پذیرد.

مورد خاص دیگری که پیش تر نیز به آن اشاره کرده بودیم، حالتی است که $\mathbf{L}=t\mathbf{U}$ باشد. که در اینجا t یک ضریب عبور یکنواخت سراسری در LON است. در این حالت $\mathbf{U}=\mathbf{V}$ ، $\sqrt{\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}}=\mathbf{I}$ و $\nu=u$ می‌باشد که طبق رابطه (آـ۱۵) و (آـ۱۶) خواهیم داشت:

$$L = e^{\mathbf{H}\mathbf{b}^{\dagger}\mathbf{b}} = e^{\ln\sqrt{\mathbf{L}\mathbf{L}^{\dagger}}\mathbf{b}^{\dagger}\mathbf{b}} = e^{\mathbf{b}^{\dagger}\mathbf{b}\ln(t\mathbf{I})} = \left(e^{\ln(t\mathbf{I})}\right)^{\mathbf{b}^{\dagger}\mathbf{b}} = t^{\mathbf{b}^{\dagger}\mathbf{b}} = t^{\sum_j b_j^{\dagger}b_j}. \tag{آـ۳۴}$$

در این صورت :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}_A|u^{\dagger}|\mathbf{n}_B\rangle\langle \mathbf{n}_B|\kappa_{0}|\mathbf{n}_A\rangle &= \langle \mathbf{n}_A|u^{\dagger}|\mathbf{n}_B\rangle\langle \mathbf{n}_B|uL|\mathbf{n}_A\rangle \\ &= \langle \mathbf{n}_A|u^{\dagger}|\mathbf{n}_B\rangle\langle \mathbf{n}_B|ut^{\sum_j b_j^{\dagger}b_j}|\mathbf{n}_A\rangle = t^{|\mathbf{n}_A|}|\langle \mathbf{n}_A|u|\mathbf{n}_B\rangle|^{2}\end{aligned} \tag{آـ۳۵}$$

همواره حقیقی و نامنفی است. در نتیجه برای فیدلیتی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P_{Q|\mathbf{U}}, P_{Q|\mathbf{L}} &= F(\rho_{AB|\mathbf{U}}, \rho_{AB|\mathbf{L}}) \\ &= |\mathrm{Tr}[\rho_{th,B} t^{\sum_j b_j^\dagger b_j}]| = (\frac{۱-\chi^۲}{۱-\chi^۲ t})^M. \end{aligned} \tag{آـ۳۶}$$

آـ۳ مرزهای فیدلیتی در بخش‌های شمارش فوتون ثابت

پیش‌تر ،مرزهای فیدلیتی کلاسیک بین توزیع‌های مشترک $P_{Q|\mathbf{U}}$ و $P_{Q|\mathbf{L}}$ معادلات (۳-۱۳) و (۳-۳۵) را فرمولبندی کردیم. معادله (آـ۲۸)، میانگین‌گیری فیدلیتی را که نمونه‌برداری بر روی همه‌ی فوتون‌های ورودی که شامل توزیع‌های بوزون ایده‌آل و دارای اتلاف می باشند، فرمولبندی می‌کند. همچنین $\mathbf{n}_A$ در بخش مرزهای فیدلیتی شامل میانگین‌گیری بر روی بخش‌های با تعداد فوتون نهایی ثابت $N = |\mathbf{n}_A|$ می‌باشد.

برای بیان این مرزها به صورت فشرده، نیاز داریم تا حالت‌های اضافه ای را معرفی کنیم که متناظر حالت هایی است که در آن‌ها تعداد نهایی فوتون‌های ورودی به شبکه باب را می‌دانیم. با تصویر کردن حالت دو مدی چلانده به بخش N فوتونی کار را شروع می‌کنیم. از معادلات (۳-۱۵) ، (۳-۱۶) و (آـ۲۵) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |\Psi_{AB|N}\rangle &= \frac{۱}{\sqrt{P_Q(N)}} \Pi_N \otimes \Pi_N |\Psi_{AB}\rangle \\ &= \frac{(۱-\chi^۲)^{M/۲}}{\sqrt{P_Q(N)}} \Pi_N \otimes \Pi_N (\sum_{K=۰}^{\infty} \chi^K \sum_{\substack{\mathbf{k}_A \\ |\mathbf{k}_A|=K}} \mathbf{k}_A\rangle \otimes |\mathbf{k}_B\rangle) \\ &= \frac{(۱-\chi^۲)^{M/۲}}{\sqrt{P_Q(N)}} \sum_{K=۰}^{\infty} \chi^K \sum_{\mathbf{k}_A} |\mathbf{n}_A\rangle\langle \mathbf{n}_A|\mathbf{k}_A\rangle \sum_{\mathbf{k}_B} |\mathbf{n}_B\rangle\langle \mathbf{n}_B|\mathbf{k}_B\rangle \\ &= \frac{(۱-\chi^۲)^{M/۲}}{\sqrt{P_Q(N)}} \chi^N \sum_{\mathbf{n}_A} |\mathbf{n}_A\rangle \otimes |\mathbf{n}_B\rangle \\ &= \frac{۱}{\sqrt{P_Q(N)}} \sqrt{\frac{P_Q(N)}{G(N,M)}} \sum_{\mathbf{n}_A} |\mathbf{n}_A\rangle \otimes |\mathbf{n}_B\rangle = \frac{۱}{\sqrt{G(N,M)}} \sum_{\mathbf{n}_A} |\mathbf{n}_A\rangle \otimes |\mathbf{n}_B\rangle. \end{aligned} \tag{آـ۳۷}$$

ماتریس چگالی متناظر این حالت مطابق زیر می‌باشد:

$$\rho_{AB|N} = |\Psi_{AB|N}\rangle\langle\Psi_{AB|N}|. \tag{آـ۳۸}$$

حالت مارجینال متناظر در ورودی LON باب، آنسامبل میکروکانونیک برای یک تعداد فوتون مشخص است:

$$\rho_{B|N} = \mathrm{Tr}_A[\rho_{AB|N}] = \frac{۱}{G(N,M)}\Pi_N = \frac{۱}{P_Q(N)}\Pi_N\rho_{th,B}\Pi_N. \qquad (\text{آ\_۳۹})$$

همان‌طور که نشان داده شده است، این حالت از تصویر کردن حالت دمایی آنسامبل کانونیک به بخش N فوتونی به دست آمده است. حالت‌های متناظر بعد از منتشر شدن از شبکه‌های ایده‌آل و دارای اتلاف مطابق زیر هستند:

$$|\Psi_{AB|N,\mathbf{U}}\rangle = I_A \otimes u|\Psi_{AB|N}\rangle = \frac{۱}{\sqrt{P_Q(N)}}\Pi_N \otimes \Pi_N|\Psi_{AB|\mathbf{U}}\rangle. \qquad (\text{آ\_۴۰})$$

$$\rho_{AB|N,\mathbf{U}} = |\Psi_{AB|N,\mathbf{U}}\rangle\langle\Psi_{AB|N,\mathbf{U}}| = I_A \otimes \mathcal{E}_{\mathbf{U}}(\rho_{AB|N}). \qquad (\text{آ\_۴۱})$$

$$\rho_{AB|N,\mathbf{L}} = I_A \otimes \mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\rho_{AB|N}). \qquad (\text{آ\_۴۲})$$

در این بخش، به فیدلیتی بین توزیع‌های شمارش فوتون مشترک $P_{Q|N,\mathbf{U}}$ و $P_{Q|N,\mathbf{L}}$ که از حالت‌های معادلات (آ_۴۱) و (آ_۴۲) ایجاد شده‌اند، علاقمندیم:

$$P_Q(\mathbf{n}_A,\mathbf{n}_B|N,\mathbf{U}) = |\langle\mathbf{n}_A,\mathbf{n}_B|\Psi_{AB|N,\mathbf{U}}\rangle|^۲ = P_Q(\mathbf{n}_A|N)P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}) \qquad (\text{آ\_۴۳})$$

$$P_Q(\mathbf{n}_A,\mathbf{n}_B|N,\mathbf{L}) = \langle\mathbf{n}_A,\mathbf{n}_B|\rho_{AB|N,\mathbf{L}}|\mathbf{n}_A,\mathbf{n}_B\rangle = P_Q(\mathbf{n}_A|N)P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A,\mathbf{L}) \qquad (\text{آ\_۴۴})$$

که:

$$P_Q(\mathbf{n}_A|N) = \frac{\delta_{|\mathbf{n}_A|,N}}{G(N,M)}. \qquad (\text{آ\_۴۵})$$

احتمال برای ثبت شمارش فوتون $\mathbf{n}_A$ است با شرط اینکه تعداد کل فوتون‌ها N باشد و $P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A,\mathbf{L})$ و $P_{BS}(\mathbf{n}_B|\mathbf{n}_A,\mathbf{U})$ توزیع‌های نمونه‌برداری بوزون مربوط به شبکه دارای اتلاف و شبکه ایده‌آل می‌باشند. برای به‌دست آوردن مرزهای فیدلیتی مطلوب، با معادله (آ_۲۷) شروع می‌کنیم و مشابه مراحلی که در معادلات (آ_۲۸) و (آ_۲۹) طی شد پیش می‌رویم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F(P_{Q|N,\mathbf{U}},P_{Q|N,\mathbf{L}}) &= \sum_{\mathbf{n}_A} P_Q(\mathbf{n}_A)F(P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{U}},P_{BS|\mathbf{n}_A,\mathbf{L}}) \\ &\geqslant |\mathrm{Tr}[\rho_{B|N}u^\dagger\kappa.]| = F(\rho_{AB|N,\mathbf{U}},\rho_{AB|N,\mathbf{L}}). \end{aligned} \qquad (\text{آ\_۴۶})$$

شرط برقراری تساوی این است که ترم $\langle \mathbf{n}_A|u^\dagger|\mathbf{n}_B\rangle\langle \mathbf{n}_B|\kappa_0|\mathbf{n}_A\rangle$ برای همه‌ی ثبت شمارش فوتون های ورودی و خروجی $|\mathbf{n}_A|=|\mathbf{n}_B|=N$ ، فاز یکسان داشته باشد. نکته ای که خوب است تا اینجا به آن توجه شود این است که حالت‌هایی که در معادلات (آ_۳۷)و (آ_۴۲) معرفی شدند، حالت‌هایی نیستند که در پروتکل RBS استفاده شدند، بلکه حالت‌هایی هستند که در به طور طبیعی هنگام در نظر گرفتن فیدلیتی میانگین بین توزیع‌های نمونه‌برداری بوزون ایجاد می‌شوند، زمانی که میانگین بر روی تعداد فوتون کل مشخص N محدود شده باشد. قدم آخر در نوشتن مرزها برحسب ماتریس‌های انتقال، از توجه به این نکته می‌آید که حالت دمایی مارجینال در ورودی LON باب، یک تابع مولد برای مرزها فراهم می‌کند. حالت مارجینال مذکور مطابق زیر می‌باشد:

$$\rho_{th,B}=\sum_{N=۰}^{\infty}P_Q(N)\rho_{B|N}. \qquad (آ\_۴۷)$$

$$\frac{۱}{\det\left(\mathbf{I}-\chi^۲\mathbf{L}\mathbf{U}^\dagger\right)}=\frac{\mathrm{Tr}\left[\rho_{th,B}u^\dagger\kappa_۰\right]}{(۱-\chi^۲)^M}=\sum_{N=۰}^{\infty}\chi^{۲N}G(N,M)\mathrm{Tr}\left[\rho_{B|N}u^\dagger\kappa_۰\right]. \qquad (آ\_۴۸)$$

تابع مولد برحسب ماتریس‌های انتقال با استفاده از معادله (آ_۴۹) محاسبه شده است. کار را با نوشتن رابطه زیر خاتمه می‌دهیم:

$$\mathrm{Tr}\left[\rho_{B|N}u^\dagger\kappa_۰\right]=\frac{(M-۱)!}{(N+M-۱)!}\frac{\partial^N}{\partial(\chi^۲)^N}\left.\frac{۱}{\det\left(\mathbf{I}-\chi^۲\mathbf{L}\mathbf{U}^\dagger\right)}\right|_{\chi^۲=۰}. \qquad (آ\_۴۹)$$

برای دیدن شکل واضح تری از رابطه، اگر مورد ساده‌ای را در نظر بگیریم که در آن فقط یک فوتون داریم که به عنوان ورود به LON باب وارد می شود، آنگاه خواهیم داشت:

$$F\left(P_{Q|۱,\mathbf{U}},P_{Q|۱,\mathbf{L}}\right)\geqslant\left|\mathrm{Tr}\left[\rho_{B|۱}u^\dagger\kappa_۰\right]\right|=\frac{۱}{M}\left|\mathrm{Tr}\left[\mathbf{L}\mathbf{U}^\dagger\right]\right|. \qquad (آ\_۵۰)$$

یک فوتون با بزرگی کوانتومی برابر با حالت همدوس از میان شبکه منتشر می شود، در نتیجه جای تعجب نیست که مرز فیدلیتی به یک هم‌پوشانی ماتریس‌های انتقال که انتشار حالت‌های همدوس را توصیف می‌کند، کاهش یابد.

زمانی که $\mathbf{U}=\mathbf{L}$ باشد، خواهیم داشت:

$$F\left(P_{Q|۱,\mathbf{U}},P_{Q|۱,\mathbf{L}}\right)\geqslant\left|\mathrm{Tr}\left[\rho_{B|۱}u^\dagger\kappa_۰\right]\right|=\frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{M}t_i. \qquad (آ\_۵۱)$$

برای مورد اتلاف یکنواخت $\mathbf{L}=t\mathbf{U}$، مرز اشباع می شود و خواهیم داشت $F(P_{Q|1,\mathbf{U}},P_{Q|1,\mathbf{L}})=t$.

پیوست ب

آمار هتروداین

ب‌ـ۱ آمار شرطی هتروداین

با توزیع احتمال مشترک $P(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}_B|\mathbf{L})$ شروع می‌کنیم، قصد داریم تا خروجی‌های هترودواین را مشروط بر ثبت شمارش فوتون در پایانه باب کنیم. مطالب این قسمت برگرفته از مرجع [۱۸] می‌باشد. تنها شرطی که از آن استفاده می‌کنیم این است که روی مجموعه ثابتی از مدها که شمارش فوتون نداریم، یک مجموعه Δ از ثبت‌های شمارش فوتون و عملگر تصویری روی زیرمجموعه‌ای که شامل این ثبت فوتون‌ها است، معرفی کنیم:

$$\Pi_\Delta = \sum_{n \in \Delta} |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}|. \tag{ب‌ـ۱}$$

در این مجموعه، نشانگر تابع مطابق زیر می‌باشد:

$$\Delta(\mathbf{n}) = \langle\mathbf{n}|\Pi_\Delta|\mathbf{n}\rangle = \begin{cases} ۱, & \mathbf{n} \in \boldsymbol{\Delta} \\ ۰, & \mathbf{n} \notin \boldsymbol{\Delta} \end{cases} \tag{ب‌ـ۲}$$

برای مجموعه Δ توزیع‌های شرطی و مشترک، مطابق روابط زیر خواهیم داشت:

$$P(\boldsymbol{\alpha}, \Delta|\mathbf{L}) = \sum_{\mathbf{n}_B \in \Delta} P(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}_B|\mathbf{L}) = P(\boldsymbol{\alpha}|\Delta, \mathbf{L})\, P(\Delta|\mathbf{L}). \tag{ب‌ـ۳}$$

$$P(\Delta|\mathbf{L}) = \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha} P(\boldsymbol{\alpha}, \Delta|\mathbf{L}) = \sum_{\mathbf{n}_B \in \Delta} P(\mathbf{n}_B|\mathbf{L}). \tag{ب‌ـ۴}$$

میانگین یک تابع $F(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^\dagger)$ از خروجی‌های هترودواین مطابق رابطه زیر می‌باشد:

(ب_۵)
$$\left\langle F\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^\dagger\right)\right\rangle_\Delta=\int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha}F\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^\dagger\right)P\left(\boldsymbol{\alpha}|\Delta,\mathbf{L}\right)=\sum_{\mathbf{n}_B\in\Delta}\frac{P\left(\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right)}{P\left(\Delta|\mathbf{L}\right)}\left\langle F\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^\dagger\right)\right\rangle_{\mathbf{n}_B}$$

که:

$$\left\langle F\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^\dagger\right)\right\rangle_{\mathbf{n}_B}=\int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha}F\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^\dagger\right)P\left(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{n}_B,\mathbf{L}\right). \tag{ب_۶}$$

یک راه خوب برای نوشتن این میانگین به صورت زیر است:

$$P\left(\Delta|\mathbf{L}\right)\left\langle F\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^\dagger\right)\right\rangle_\Delta=\sum_{\mathbf{n}_B\in\Delta}P\left(\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right)\left\langle F\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^\dagger\right)\right\rangle_{\mathbf{n}_B}. \tag{ب_۷}$$

ما به طور عمومی به مواردی علاقمندیم که به صورت $P(\Delta|\mathbf{L})\simeq 1-c\chi^2\simeq 1-c/\sqrt{M}$ می‌باشد، که در این رابطه c یک ثابت است، به این معنا که $P(\Delta|\mathbf{L})$ برای مجموعه ثبت شمارش Δ به سمت یک می‌رود، زمانیکه M به سمت بی‌نهایت برود، بنابراین به ما اجازه می‌دهد که در اصل از همه‌ی آزمایش‌ها در مشخصه‌یابی استفاده کنیم. مجموعه‌های ثبت شمارش دارای این ویژگی، آن‌هایی هستند که دارای شمارش صفر فوتون برای مدهای در رشته $\mathbf{i}=\mathrm{i}_1\cdot\ldots\mathrm{i}_r$ می باشند و شامل شمارش های غیرصفر برای سایر مدها هستند، این مجموعه را با $\Delta=0_i$ نشان می‌دهیم. باید توجه کرد که تغییر شرطی‌سازی تنها برای یک مد در رشته $\mathbf{i}$ ، از شمارش صفر فوتون به شمارش تک فوتون، مقیاس $P(\Delta|\mathbf{L})$ را به $\chi^2\simeq 1/\sqrt{M}$ تغییر می‌دهد، به این ترتیب، این نوع شرطی‌سازی در اصل برای اجراهای مشخصه‌یابی، بی‌استفاده است. احتمال‌هایی که اجراهای مشخصه یابی ما را کنترل می کند، همان‌هایی هستند که در معادلات (۳-۴۵)، (۳-۶۳) و (۳-۶۵) ذکر شده‌اند. می‌توان این روابط را به شیوه‌ی کمی متفاوت، کنار هم قرار داد:

$$\begin{aligned}P_C\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right)&=P_C\left(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{n}_B,\mathbf{L}\right)P\left(\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right)\\&=\frac{\left(۱-\chi^۲\right)^M}{\pi^M}e^{-\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{S}\boldsymbol{\alpha}^\mathbf{T}}\prod_{i=۱}^{M}\frac{\left|\chi^۲\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^\dagger\boldsymbol{\alpha}^T\right|^{n_{B,i}}}{n_{B,i}!}\end{aligned} \tag{ب_۸}$$

که:

$$\mathbf{S}=\left(۱-\chi^۲\right)\mathbf{I}+\chi^۲\sum_{i=۱}^{M}\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^\dagger \tag{ب_۹}$$

یک ماتریس هرمیتی مثبت است و $\mathbf{L}_i$ بردار ستونی تعریف شده در معادله (۳-۴۸) است.
به سادگی با توجه به رابطه‌ی (ب-۸) می‌توان دید که:

$$P_C\left(\boldsymbol{\alpha}^*, \mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right) = P_C\left(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}_B|\mathbf{L}^*\right). \qquad (\text{ب-۱۰})$$

بیان می‌دارد که مزدوج کردن خروجی‌های هترودااین، همانند این است که LON را مزدوج کنیم، به این معنی که فاز همه ی عناصر ماتریس $\mathbf{L}$ معکوس شود. معادله (ب-۱۰) دلالت بر $P_C(\mathbf{n}_B|\mathbf{L}) = P_C(\mathbf{n}_B|\mathbf{L}^\dagger)$ دارد، در نتیجه ویژگی مزدوج که در بالا به آن اشاره شد، به احتمال‌های شرطی تعمیم داده می‌شود:

$$P_C\left(\boldsymbol{\alpha}^*|\mathbf{n}_B, \mathbf{L}\right) = P_C\left(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{n}_B, \mathbf{L}^*\right). \qquad (\text{ب-۱۱})$$

به علاوه، این ویژگی‌ها به هر ثبت شمارش فوتونی تعمیم داده می‌شود:

$$P_C\left(\boldsymbol{\alpha}^*, \Delta|\mathbf{L}\right) = P_C\left(\boldsymbol{\alpha}, \Delta|\mathbf{L}^*\right). \qquad (\text{ب-۱۲})$$

$$P_C\left(\boldsymbol{\alpha}^*|\Delta, \mathbf{L}\right) = P_C\left(\boldsymbol{\alpha}|\Delta, \mathbf{L}^*\right). \qquad (\text{ب-۱۳})$$

حالا روی مجموعه‌های شمارش فوتون $0_{\mathbf{i}}$ تمرکز می‌کنیم که بیشتر به آن علاقمندیم. توزیع‌های احتمال مرتبط به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} P_C\left(\boldsymbol{\alpha}, ۰_{\mathbf{i}}|\mathbf{L}\right) &= \frac{\left(۱-\chi^۲\right)^M}{\pi^M} e^{-\left(۱-\chi^۲\right)|\boldsymbol{\alpha}|^۲} \prod_{s=۱}^{r} |\langle ۰|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{L}_{i_s}\rangle|^۲ \\ &= \frac{\left(۱-\chi^۲\right)^M}{\pi^M} e^{-\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{S}_{\mathbf{i}}\boldsymbol{\alpha}^T} \end{aligned} \qquad (\text{ب-۱۴})$$

$$P_C\left(۰_{\mathbf{i}}|\mathbf{L}\right) = \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha} P_C\left(\boldsymbol{\alpha}, ۰_{\mathbf{i}}|\mathbf{L}\right) = \frac{\left(۱-\chi^۲\right)^M}{\det \mathbf{S}_{\mathbf{i}}} \qquad (\text{ب-۱۵})$$

$$P_C\left(\boldsymbol{\alpha}|۰_{\mathbf{i}}, \mathbf{L}\right) = \frac{P_C\left(\boldsymbol{\alpha}, ۰_{\mathbf{i}}|\mathbf{L}\right)}{P_C\left(۰_{\mathbf{i}}|\mathbf{L}\right)} = \frac{\det \mathbf{S}_{\mathbf{i}}}{\pi^M} e^{-\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{S}_{\mathbf{i}}\boldsymbol{\alpha}^T} \qquad (\text{ب-۱۶})$$

که:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{i}} = \left(۱-\chi^۲\right)\mathbf{I} + \chi^۲ \sum_{s=۱}^{r} \mathbf{L}_{i_s}\mathbf{L}_{i_s}^\dagger \qquad (\text{ب-۱۷})$$

یک ماتریس هرمیتی مثبت است. این توزیع‌ها و ماتریس $\mathbf{S}_{\mathbf{i}}$ ، تعمیم‌های روابط پیدا شده در (۳-۶۶)
، (۳-۷۱) و (۳-۷۲) هستند، که بر روی مد با شمارش صفر فوتون، تک شرطی سازی شده است.

برای یافتن چنین مدی، از وارون ماتریسی که در معادله (۳-۶۹) ذکر شده است، استفاده می‌کنیم. برای تعداد یک یا دو مد، این عمل سخت نخواهد بود که وراون ماتریس $\mathbf{S_i}$ را به طور دقیق بیابیم، اما برای هدفی که هم‌اکنون داریم، ساده‌تر و آموزنده‌تر است که این وراون را برای چلاندگی ضعیف مانند سری زیر تقریب بزنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{S_i}^{-۱} &= \frac{۱}{۱-\chi^۲}\left(\mathbf{I} + \frac{\chi^۲}{۱-\chi^۲}\sum_{s=۱}^{r}\mathbf{L}_{i_s}\mathbf{L}_{i_s}^\dagger\right)^{-۱} \\ &= \frac{۱}{۱-\chi^۲}\mathbf{I} - \frac{\chi^۲}{(۱-\chi^۲)^۲}\sum_{s=۱}^{r}\mathbf{L}_{i_s}\mathbf{L}_{i_s}^\dagger + \frac{\chi^۴}{(۱-\chi^۲)^۳}\sum_{s,t=۱}^{r}\mathbf{L}_{i_s}\mathbf{L}_{i_s}^\dagger\mathbf{L}_{i_t}\mathbf{L}_{i_t}^\dagger + ...\end{aligned} \tag{ب‌ـ۱۸}$$

ب‌ـ۲ ممان‌های شرطی هتروداین

روش مشخصه‌یابی معرفی‌شده روی ممان‌های هتروداین شرطی اجرا می‌کند. تابع مشخصه مولد ممان

$$\Phi\left(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^\dagger|\Delta,\mathbf{L}\right) = \left\langle e^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\alpha}^\dagger - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\xi}^\dagger}\right\rangle = \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha} P_C\left(\boldsymbol{\alpha}|\Delta,\mathbf{L}\right) e^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\alpha}^\dagger - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\xi}^\dagger} \tag{ب‌ـ۱۹}$$

تبدیل فوریه‌ی توزیع مرتبط و متناظر با $F(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^\dagger) = e^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\alpha}^\dagger - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\xi}^\dagger}$ است. تابع مشخصه ممان‌ها را از طریق بسط تیلور حول $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^\dagger = 0$ تولید می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\Phi(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^\dagger|\Delta,\mathbf{L}) = \sum_{n,m=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n!m!}\langle(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\xi}^\dagger)^n(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\alpha}^\dagger)^m\rangle_\Delta \\ &= \sum_{n,m}\frac{(-۱)^n}{n!m!}\langle\sum_{n_۱,..,n_M}\frac{n!}{n_۱!....n_M!}(\alpha_۱\xi_۱^*)^{n_۱}....(\alpha_M\xi_M^*)^{n_M}\sum_{m_۱,...,m_M}\frac{m!}{m_۱!....m_M!}(\alpha_۱\xi_۱^*)^{m_۱}....(\alpha_M\xi_M^*)^{m_M}\rangle_\Delta \\ &= \sum_{\substack{n_۱,...n_M \\ m_۱,....,m_M}}\frac{(-۱)^n}{n_۱!.....n_M!m_۱!....m_M!}\langle\alpha_۱^{n_۱}(\alpha_۱^*)^{m_۱}.....\alpha_M^{n_M}(\alpha_M^*)^{m_M}\rangle_\Delta(\xi_۱^*)^{n_۱}......(\xi_M^*)^{n_M}\xi_۱^{m_۱}.....\xi_M^{m_M}.\end{aligned} \tag{ب‌ـ۲۰}$$

در نتیجه ممان‌های هتروداین مطابق زیر داده می‌شوند:

$$\langle\alpha_۱^{n_۱}\left(\alpha_۱^*\right)^{m_۱}.....\alpha_M^{n_M}\left(\alpha_M^*\right)^{m_M}\rangle_\Delta = \left(-۱\right)^n\left.\frac{\partial^{n+m}\Phi\left(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^\dagger|\Delta,\mathbf{L}\right)}{\partial\left(\xi_۱^*\right)^{n_۱}....\partial\left(\xi_M^*\right)^{n_M}\partial\xi_۱^{m_۱}....\partial\xi_M^{m_M}}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^\dagger=۰}. \tag{ب‌ـ۲۱}$$

برای توزیع گاوسی معادله‌ی (ب‌ـ۱۶)، تابع مشخصه خواهد بود:

$$\Phi_C\left(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^\dagger|۰_\mathbf{i},\mathbf{L}\right) = \frac{\det\mathbf{S_i}}{\pi^M}\int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha} e^{-\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{S_i}\boldsymbol{\alpha}^T}e^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\alpha}^\dagger - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\xi}^\dagger} = e^{-\boldsymbol{\xi}^*\mathbf{S_i}^{-۱}\boldsymbol{\xi}^T}. \tag{ب‌ـ۲۲}$$

برای هر توزیع گاوسی، که با یک ماتریس هرمیتی مثبت $\mathbf{A}$ در تابع مشخصه، مشخص شود، تابع مشخصه را به صورت رابطه زیر بسط می‌دهیم:

$$\Phi\left(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^{\dagger}\right)=e^{-\boldsymbol{\xi}^{*}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}^{T}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}\left(\boldsymbol{\xi}^{*}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}^{T}\right)^{n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n\\k_1,\ldots,k_n}}\xi_{j_1}^{*}\ldots\xi_{j_n}^{*}\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_n}A_{j_1k_1}\ldots A_{j_nk_n}$$
$$=\sum_{\substack{n_1,\ldots n_M\\m_1,\ldots m_M}}\left(\frac{(-1)^{n}\delta_{nm}}{n!}\sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}}A_{j_1k_1}\ldots A_{j_nk_n}\right)(\xi_1^{*})^{n_1}\ldots(\xi_M^{*})^{n_M}\xi_1^{m_1}\ldots\xi_M^{m_M}$$

(ب‌ـ۲۳)

که:

$$n=\sum_{j}n_j\quad,\quad m=\sum_j m_j\ .\qquad (\text{ب‌ـ۲۴})$$

دلتای کرونکر در جمع اخیر باعث می‌شود که $n=m$ را داشته باشیم. جمع روی ضرب‌های عناصر ماتریسی $\mathbf{A}$ بر روی رشته‌های $\mathbf{j}=j_1\ldots j_n$ شامل n_1 تا ۱ ، n_2 تا ۲ و همین طور تا بالا n_M تا M ، تعداد چنین رشته‌هایی $n!/n_1!\ldots n_M!$ است و به طور مشابه روی رشته‌های $\mathbf{k}=k_1\ldots k_n$ شامل m_1 تا ۱ ، m_2 تا ۲ و همین طور تا بالا m_M تا M ، تعداد چنین رشته‌هایی $m!/m_1!\ldots m_M!$ می‌باشد. مقایسه با معادله (ب‌ـ۲۰) نشان می‌دهد که ممان‌های هتروداین مطابق زیر داده می‌شود:

(ب‌ـ۲۵)

$$\left\langle\alpha_1^{n_1}(\alpha_1^{*})^{m_1}\ldots\alpha_M^{n_M}(\alpha_M^{*})^{m_M}\right\rangle=\delta_{nm}\frac{n_1!\ldots n_M!m_1!\ldots m_M!}{n!}\sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}}A_{j_1k_1}\ldots A_{j_nk_n}.$$

این عبارت را می توان با توجه به این نکته که برای هر رشته $\mathbf{j}$ ، جمع روی $\mathbf{k}$ نتیجه یکسانی تولید می‌کند. این موضوع به ما اجازه می‌دهد که از یک رشته استاندارد $\mathbf{j}$ استفاده کنیم و در نتیجه جمع دوتایی به یک جمع تبدیل می‌شود:

$$\left\langle\alpha_1^{n_1}(\alpha_1^{*})^{m_1}\ldots\alpha_M^{n_M}(\alpha_M^{*})^{m_M}\right\rangle=\delta_{nm}m_1!\ldots m_M!\sum_{\mathbf{k}}A_{j_1k_1}\ldots A_{j_nk_n}.\qquad (\text{ب‌ـ۲۶})$$

به علاوه، اگر به ممان‌های غیرصفر محدود شویم، یعنی آن‌هایی $n=m$ دارند، می‌توانیم ممان‌ها را به شیوه‌ی متفاوتی بنویسیم و جمع را به جمعی روی همه‌ی جایگشت‌های n عنصر تبدیل کنیم:

$$\left\langle\alpha_{j_1}\ldots\alpha_{j_n}\alpha_{k_1}^{*}\ldots\alpha_{k_n}^{*}\right\rangle=\sum_{\pi\in S_n}A_{j_1,\pi(k_1)}\ldots A_{j_n,\pi(k_n)}.\qquad (\text{ب‌ـ۲۷})$$

برای پروتکل معرفی شده، با استفاده از ورودی‌های چلانده‌ی خلاء دو مدی، ممان‌های هترودواین، مشروط بر شمارش فوتون 0_i دست می‌آید و خواهیم داشت:

$$\left\langle \alpha_{j_1}.....\alpha_{j_n}\alpha^*_{k_1}.....\alpha^*_{k_n}\right\rangle_{\mathbf{i},C} = \sum_{\pi\in S_n}\left(S^{-1}_{\mathbf{i}}\right)_{j_1,\pi(k_1)}.....\left(S^{-1}_{\mathbf{i}}\right)_{j_n,\pi(k_n)}. \tag{ب‌ـ۲۸}$$

پروتکل مشخصه‌یابی در مباحث پیشین، بر همدوسی مرتبه اول تکیه داشت، یعنی بزرگی تداخل ممان‌های دوم هترودواین که مشروط بر شمارش صفر فوتون در یک مد است، که به صورت $\langle\alpha_j\alpha^*_k\rangle_{i,C} = (S^{-1}_i)_{jk}$ نمایش داده می‌شوند. این ممان‌های دوم برای ساخت کامل ماتریس انتقال $\mathbf{L}$ کافی هستند، در نتیجه نیازی به شرط شمارش صفر فوتون روی مدهای بیشتر یا در نظر گرفتن ممان‌های بالاتر که همدوسی مرتبه بالاتر بین بزرگی های مختلط مد های آلیس هستند، نیست.
هدف از معرفی معرفی فرمالیزم عمومی برای ممان‌های هترودواین، افزون بر تکمیل مطالب در این قسمت، این بود که مشخصه‌یابی با بهره‌گیری از حالت‌های کلاسیک‌ـ کلاسیک(CC) را تحلیل کنیم. در ادامه قصد داریم این موضوع را بررسی کنیم.

ب‌ـ۳ مشخصه‌یابی با استفاده از حالت‌های CC

حالت کلاسیک‌ـ کلاسیک(CC) مطابق رابطه‌ی زیر نمایش داده می‌شود،

$$\rho_{CC} = \left(1-\chi^2\right)^M \sum_{\mathbf{n}_A} \chi^{2|\mathbf{n}_A|}|\mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_A| \otimes |\mathbf{n}_B = \mathbf{n}_A\rangle\langle\mathbf{n}_B = \mathbf{n}_A| \tag{ب‌ـ۲۹}$$

و از اعمال، عمل‌های فاز تصادفی روی $|\Psi_{AB}\rangle$ در مدهای آلیس (یا به طور معادل در مدهای باب) به دست می‌آید، دارای همبستگی تعداد فوتون کامل، اما تماما کلاسیک بین مدهای A و B است. در نتیجه می‌توان از این حالت‌ها برای نمونه‌برداری تصادفی بوزون دقیقا به همان شیوه‌ای که در بهره‌گیری از حالت‌های ورودی چلانده‌ی خلا دومدی در (۳‐۸) بیان شد، استفاده کرد. برای هر دو حالت، حالت مارجینال چه برای مدهای A و چه برای مدهای B‌حالت دمایی است. نتیجه‌ی آنکه اطلاعات در دسترس از ثبت شمارش فوتون مارجینال، در پایانه باب برای هر دو نوع ورودی (چلانده خلاء دومدی و کلاسیک‌ـ کلاسیک) یکسان است، این توانایی این را به ما می‌دهد که ماتریس اتلاف خروجی $\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}$ را بخوانیم. حسنی که استفاده از درهمتنیدگی کوانتومی حالت $|\Psi_{AB}\rangle$ برای ما داشت، ساخت پروتکل مشخصه‌یابی بر مبنای همدوسی مرتبه اول بزرگی مختلط مدهای آلیس، بود. در این بخش اطلاعات

قابل حصول از آمار هتروداین حالت CC و جایی که باید به دنبال این اطلاعات باشیم را بررسی می‌کنیم. یک سوال جالب این است که با استفاده از آمار شمارش فوتون شرطی آلیس، چه نوع مشخصه‌یابی‌ای می‌توان انجام داد. برای این سوال مهم نیست که حالت ورودی، حالت چلانده‌ی خلاء دو مدی باشد یا اینکه حالت CC باشد. همان طور که در بخش بعدی نشان می‌دهیم، مشخصه‌یابی دست‌یافتنی تنها با استفاده از اجراهای RBS دقیقا همان چیزی است که با استفاده از آمار هتروداین شرطی از حالت های CC به دست می‌آید. این موضوع انگیزه دیگری نیز دارد که باعث می شود تا بحث پیش رو را ادامه دهیم. چیزی که هم‌اکنون به آن علاقمندیم، احتمال مشترک برای خروجی‌های هتروداین و یک ثبت شمارش فوتون در پایانه باب است، که می‌تواند براساس تصادفی‌سازی فاز احتمال مشترک متناظر (ب_۸) بیان شود:

$$\begin{aligned} P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right) &= \frac{۱}{\pi^M}\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}_B| I_A\otimes \mathcal{E}_{\mathbf{L}}\left(\rho_{CC}\right)|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}_B\rangle \\ &= P_C\left(\boldsymbol{\alpha}\right)\langle \mathbf{n}_B|\mathcal{E}_{\mathbf{L}}\left(\rho_{CC|\boldsymbol{\alpha}}\right)|\mathbf{n}_B\rangle \\ &= \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{\left(۲\pi\right)^M} P_C\left(\boldsymbol{\alpha}e^{i\boldsymbol{\phi}}\right)\left|\left\langle \mathbf{n}_B|\chi\left(\boldsymbol{\alpha}e^{i\boldsymbol{\phi}}\right)^*\mathbf{L}\right\rangle\right|^۲ \\ &= \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{\left(۲\pi\right)^M} P_C\left(\boldsymbol{\alpha}e^{i\boldsymbol{\phi}}, \mathbf{n}_{B|\mathbf{L}}\right). \end{aligned} \quad \text{(ب\_۳۰)}$$

یک خروجی هتروداین $\boldsymbol{\alpha}$ روی مدهای A از حالت $|\Psi_{AB}\rangle$، ورودی به LON باب را در حالت همدوس $|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\rangle$ مطابق آنچه دیدیم فراهم می‌کند. در مقابل، اگر حالت داده، شده حالت کلاسیک_کلاسیک باشد و در پایانه آلیس اندازه‌گیری هتروداینی انجام شود، ρ_{CC} به خروجی هتروداین $\boldsymbol{\alpha}$ تصویر می‌شود و حالت ورودی $\rho_{CC|\boldsymbol{\alpha}}$ به مدهای باب را به دست می‌آوریم. حالت ورودی به LON باب که با $\rho_{CC|\boldsymbol{\alpha}}$ نشان داده شده مطابق زیر به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\pi^M}\langle \boldsymbol{\alpha}|\rho_{CC}|\boldsymbol{\alpha}\rangle = \frac{\left(۱-\chi^۲\right)^M}{\pi^M}\sum_{\mathbf{n}_B}\chi^{۲|\mathbf{n}_B|}\left|\langle \boldsymbol{\alpha}|\ \mathbf{n}_B\rangle\right|^۲|\mathbf{n}_B\rangle\langle \mathbf{n}_B| = P_C\left(\boldsymbol{\alpha}\right)\rho_{CC|\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{(ب\_۳۱)}$$

که احتمال برای خروجی هتروداین است و تفاوتی ندارد که حالت ورودی چلانده خلاء دومدی باشد یا اینکه حالت کلاسیک_کلاسیک باشد. در نتیجه با توجه به معادله (۳-۵۰) و حالت ورودی بهنجار به LON باب، خواهیم داشت:

$$\rho_{CC|\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{\mathbf{n}_B}\left|\langle \mathbf{n}_B|\ \chi\boldsymbol{\alpha}^*\rangle\right|^۲|\mathbf{n}_B\rangle\langle \mathbf{n}_B| = \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{\left(۲\pi\right)^M}\left|\chi\left(\boldsymbol{\alpha}e^{i\boldsymbol{\phi}}\right)^*\right\rangle\left\langle \chi\left(\boldsymbol{\alpha}e^{i\boldsymbol{\phi}}\right)^*\right|. \quad \text{(ب\_۳۲)}$$

باید توجه کرد که این حالت، حالت فاز تصادفی شده‌ی حالت همدوس $|\chi\boldsymbol{\alpha}^*\rangle$ است و در پایه‌ی قطری حالت عددی می‌باشد و $d\boldsymbol{\Phi} = d\phi_1.....d\phi_M$ انتگرال روی فازهای رندوم را می‌دهد و $e^{\boldsymbol{\Phi}} =$

$diag(e^{i\phi_1}, ..., e^{i\phi_M})$ ماتریس یکانی قطری‌ای است که از تصادفی‌سازی فازها ایجاد شده‌است. تصادفی‌سازی فاز به این معناست که $\rho_{CC|\alpha}$ دسترسی به همه‌ی آثار تداخلی حالت چلانده خلاء دومدی، که زمانی در دسترس بود را برایمان فراهم نکند. به طور مشخص واضح است که تصادفی‌سازی فاز، همدوسی مرتبه اول را از بین می‌برد، به این معنی که تداخل بین بزرگی‌های مختلط در مدهای آلیس که مبنای روش مشخصه‌یابی بود را از بین می‌برد. احتمال شرطی برای خروجی‌های هترودواین، مشروط بر یک ثبت شمارش فوتون مطابق زیر است:

$$\begin{aligned} P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{n}_B,\mathbf{L}\right) = \frac{P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right)}{P\left(\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right)} &= \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(۲\pi)^M} P_C\left(\boldsymbol{\alpha}e^{i\boldsymbol{\phi}}|\mathbf{n}_B,\mathbf{L}\right) \\ &= \frac{P_C\left(\boldsymbol{\alpha}\right)}{P\left(\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right)} \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(۲\pi)^M} \left|\left\langle \mathbf{n}_B|\chi\left(\boldsymbol{\alpha}e^{i\boldsymbol{\phi}}\right)^* \mathbf{L}\right\rangle\right|^۲ . \end{aligned} \tag{ب‌ـ۳۳}$$

این روشی برای نوشتن چیزی است که می‌دانستیم، که این احتمال‌ها، از تصادفی‌سازی فاز خروجی‌های هترودواین احتمال‌های به دست آمده از حالت چلانده‌ی خلاء دو مدی به دست می‌آیند.که دلالت بر این دارد که:

$$P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right) = P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha}e^{i\boldsymbol{\phi}},\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right). \tag{ب‌ـ۳۴}$$

نکته‌ای که باید به آن توجه کرد، آزادی‌ای است که ما در تعیین فاز در LON داریم. در مورد استفاده از حالت چلانده خلاء دو مدی انتخاب اینکه پارامتر چلاندگی حقیقی باشد، رابطه‌ی نسبی فازها بین مد های آلیس و باب را تعیین می‌کرد و از تغییرات بیشتر در مدهای ورودی به LON باب جلوگیری می‌کرد، آزادی فاز باقی‌مانده، توانایی جذب فازها در تعریف مدهای خروجی است. در مقابل، زمانی که از حالت کلاسیک‌ـ کلاسیک به عنوان ورودی استفاده می کنیم، هیچ رابطه‌ی فازی بین مدهای آلیس و باب وجود ندارد، در نتیجه مجازیم که فازها را در ورودی یا خروجی LON جذب کنیم. به این معنا که می توانیم یک عنصر از هر سطر و یک عنصر از هر ستون $\mathbf{L}$ را حقیقی و نامنفی انتخاب کنیم.

ویژگی مهم احتمال مشترک CC از روابط (ب‌ـ۱۰)، (ب‌ـ۳۳) و (ب‌ـ۳۴) بدست می‌اید:

$$\begin{aligned} P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right) &= P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha}^*,\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right) \\ &= \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(۲\pi)^M} P_C\left(\boldsymbol{\alpha}^* e^{i\boldsymbol{\phi}},\mathbf{n}_B|\mathbf{L}\right) = \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(۲\pi)^M} P_C\left(\boldsymbol{\alpha}e^{-i\boldsymbol{\phi}},\mathbf{n}_B|\mathbf{L}^*\right) \\ &= \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(۲\pi)^M} P_C\left(\boldsymbol{\alpha}e^{i\boldsymbol{\phi}},\mathbf{n}_B|\mathbf{L}^*\right) = P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{n}_B|\mathbf{L}^*\right). \end{aligned} \tag{ب‌ـ۳۵}$$

این ویژگی از احتمال‌های شرطی به ارث برده شده است، یعنی $P_{CC}(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{n}_B, \mathbf{L}) = P_{CC}(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{n}_B, \mathbf{L}^*)$ و در نتیجه احتمال‌های هترودواین برای ثبت شمارش فوتون مجموعه‌های زیر خواهد بود:

$$P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha}, \Delta|\mathbf{L}\right) = P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha}, \Delta|\mathbf{L}^*\right). \qquad \text{(ب‌ـ ۳۶)}$$

$$P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha}|\Delta, \mathbf{L}\right) = P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha}|\Delta, \mathbf{L}^*\right). \qquad \text{(ب‌ـ ۳۷)}$$

این ویژگی این تعبیر را دارد که آمار هترودواین با ورودی CC نمی‌تواند ماتریس L را از مزدوج آن تمیز دهد، یعنی از تغییر علامت فاز برای همه‌ی عناصر ماتریس انتقال. یادآوری می‌کنیم که $P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha}|\Delta, \mathbf{L}\right)$ توزیع Q برای حالت مدهای آلیس است که روی ثبت شمارش فوتون Δ شرطی شده‌اند.
تاکید می‌کنیم که این نتیجه‌گیری از حالت CC عمومی‌تر است: اگر حالت‌های ورودی به یک LON و اندازه‌گیری خروجی به لحاظ فازی متقارن باشند، توزیع احتمال خروجی تحت تغییر $\mathbf{L}$ به $\mathbf{L}^*$ ناوردا باقی می‌ماند. برای نشان دادن این موضوع، حالت ورودی متقارن فازی براساس حالت‌های همدوس فازتصادفی با یک تابع وزن نوشته می‌شود، که تابع P میانگین‌گیری شده روی فاز است.
سوال باقی‌مانده این است که آیا آمار هترودواین با ورودی CC شامل همه‌ی اطلاعات درباره‌ی ماتریس انتقال به جز این فاز سراسری است. برای پاسخ دادن به این سوال، ممان‌های شرطی هترودواین را بررسی می کنیم. نکته کلیدی در انجام این موضوع ، این است که میانگین هر تابع $F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^\dagger)$ از خروجی های هترودواین با استفاده از حالت CC با تصادفی سازی فازهای خروجی‌های هترودواین که با استفاده از حالت چلانده‌ی خلا دو مدی به دست آمد، به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\left\langle F\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^\dagger\right)\right\rangle_{\Delta, CC} &= \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha} F\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^\dagger\right) P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha}|\Delta, \mathbf{L}\right) \\
&= \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(۲\pi)^M} \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha} F\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^\dagger\right) P_C\left(\boldsymbol{\alpha} e^{i\boldsymbol{\phi}}|\Delta, \mathbf{L}\right) \\
&= \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(۲\pi)^M} \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha}' F\left(\boldsymbol{\alpha}' e^{-i\boldsymbol{\phi}}, e^{i\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{\alpha}'^\dagger\right) P_C\left(\boldsymbol{\alpha}'|\Delta, \mathbf{L}\right) \\
&= \int d^{۲M}\boldsymbol{\alpha} P_C\left(\boldsymbol{\alpha}|\Delta, \mathbf{L}\right) \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(۲\pi)^M} F\left(\boldsymbol{\alpha} e^{-i\boldsymbol{\phi}}, e^{i\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{\alpha}^\dagger\right) = \left\langle G\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^\dagger\right)\right\rangle_{\Delta, C}.
\end{aligned} \qquad \text{(ب‌ـ ۳۸)}$$

در اینجا:

$$G\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^\dagger\right) = \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(۲\pi)^M} F\left(\boldsymbol{\alpha} e^{-i\boldsymbol{\phi}}, e^{i\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{\alpha}^\dagger\right). \qquad \text{(ب‌ـ ۳۹)}$$

برای ممان‌ها، داریم:

$$F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^\dagger) = \alpha_1^{n_1}(\alpha_1^\dagger)^{m_1}......\alpha_M^{n_M}(\alpha_M^\dagger)^{m_M}. \quad \text{(ب-۴۰)}$$

$$G\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^\dagger\right) = \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(2\pi)^M}\alpha_1^{n_1}\left(\alpha_1^*\right)^{m_1} e^{-i(n_1-m_1)\varphi_1}....\alpha_M^{n_M}\left(\alpha_M^*\right)^{m_M} e^{-i(n_M-m_M)\varphi_M}$$
$$= \delta_{n_1m_1}.....\delta_{n_mm_M}\left|\alpha_1\right|^{2n_1}.....\left|\alpha_M\right|^{2n_M}. \quad \text{(ب-۴۱)}$$

که به رابطه زیر رهنمون می‌شود:

(ب-۴۲)

$$\langle\alpha_1^{n_1}\left(\alpha_1^*\right)^{m_1}........\alpha_M^{n_M}\left(\alpha_M^*\right)^{m_M}\rangle_{\Delta,CC} = \delta_{n_1m_1}.....\delta_{n_mm_M}\left\langle\left|\alpha_1\right|^{2n_1}.....\left|\alpha_M\right|^{2n_M}\right\rangle_{\Delta,C}.$$

واضح است که چه چیزی با رفتن به حالت ورودی کلاسیک- کلاسیک از دست می‌رود، فقط می‌توان ممان‌های قطری‌ای که با استفاده از حالت ورودی چلانده خلاء دومدی به دست می‌آوردیم را داشته باشیم، این ممان‌های قطری همبستگی شدت را بیان می‌کنند اما فاقد اطلاعاتی درباره‌ی بزرگی تداخل که در ممان‌های غیرقطری وجود دارد، هستند.

زمانی که شرط شمارش صفر فوتون تنها در یک مد i را در نظر بگیریم، یعنی $\Delta = 0_i$ ، واضح است که همدوسی مرتبه اول که پروتکل مشخصه‌یابی براساس آن عمل می‌کند، زمانی که از حالت CC استفاده شود از دست می‌رود:

$$\langle\alpha_j\alpha_k^*\rangle_{i,CC} = \delta_{jk}\left\langle\left|\alpha_j\right|^2\right\rangle_{i,C} = \delta_{jk}\left(S_i^{-1}\right)_{jj} = \frac{\delta_{jk}}{1-\chi^2}\left[1 - \frac{\chi^2\left|L_{ji}\right|^2}{1-\chi^2\left(1-\ell_i^2\right)}\right]. \quad \text{(ب-۴۳)}$$

آنچه که از این ممان‌های دوم می‌توان به دست‌آورد، بزرگی عناصر ماتریس انتقال، با توجه به فازهای عناصر ماتریس است. آنچه که خیلی واضح نیست، این است که این یک ویژگی خاص از ممان‌های دوم نیست، اما برای شمارش صفر فوتون در یک مد، نتیجه‌ای است که برای همه‌ی ممان‌ها برقرار می‌ماند. ساده‌ترین راه برای دیدن این موضوع استفاده از توزیع‌های احتمال به شیوه‌ی مستقیم است،

$$P_{CC}\left(\boldsymbol{\alpha}|0_i, \mathbf{L}\right) = \int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(2\pi)^M}P_C\left(\boldsymbol{\alpha}e^{i\boldsymbol{\phi}}|0_i, \mathbf{L}\right) = \frac{\det \mathbf{S}_i}{\pi^M}\int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(2\pi)^M}e^{-\boldsymbol{\alpha}^*e^{-i\boldsymbol{\phi}}\mathbf{S}_ie^{i\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{\alpha}^T}$$
$$= \frac{\det \mathbf{S}_i}{\pi^M}e^{-(1-\chi^2)\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\alpha}^T}\int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(2\pi)^M}\exp\left(-\chi^2\boldsymbol{\alpha}^*e^{-i\boldsymbol{\phi}}\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^\dagger e^{i\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{\alpha}^T\right).$$

(ب-۴۴)

اگر در نظر بگیریم که:

$$L_{ji} = \left|L_{ji}\right|e^{i\theta_{ji}} \quad \text{(ب-۴۵)}$$

می‌توانیم فاز انتگرال را انتقال دهیم:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d\boldsymbol{\phi}}{(۲\pi)^M} \exp\left(-\chi^۲ \boldsymbol{\alpha}^* e^{-i\boldsymbol{\phi}} \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^\dagger e^{i\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{\alpha}^T\right)\\
&= \int \frac{d\varphi_۱ ... d\varphi_M}{(۲\pi)^M} \exp\left[-\chi^۲ \left(\sum_j \alpha_j^* \left|L_{ji}\right| e^{-i(\varphi_j+\theta_{ji})}\right)\left(\sum_k \alpha_k \left|L_{ki}\right| e^{i(\varphi_k+\theta_{ki})}\right)\right]\\
&= \int \frac{d\varphi'_۱ ... d\varphi'_M}{(۲\pi)^M} \exp\left[-\chi^۲ \left(\sum_j \alpha_j^* \left|L_{ji}\right| e^{-i\left({\varphi_j}'\right)}\right)\left(\sum_k \alpha_k \left|L_{ki}\right| e^{i\left({\varphi_k}'\right)}\right)\right]\\
&= \int \frac{d\varphi_۱ ... d\varphi_M}{(۲\pi)^M} \exp\left[-\chi^۲ \left(\sum_{j,k} \alpha_j^* e^{-i(\varphi_j)} \left|L_{ji}\right| \left|L_{ki}\right| e^{i(\varphi_k)} \alpha_k\right)\right]
\end{aligned}$$

(ب‌ـ۴۶)

که $\varphi'_j = \varphi_j + \theta_{ji}$ است. انتگرال روی فاز قطعا ممان ها را به ممان های قطری محدود می‌کند، اما این فرم آشکار می‌کند که احتمال کلاسیک‌ـ کلاسیک $P_{CC}(\boldsymbol{\alpha}|0_i, \mathbf{L})$ ، که روی شمارش صفر فوتون در یک مد شرطی شده است، تنها به بزرگی فازهای عناصر ماتریسی ماتریس انتقال وابسته است.

برای به دست آوردن اطلاعات فازی، نیاز است تا روی تعداد بیشتر از یک مد شرط شمارش صفر فوتون برقرار شود. ممان دوم برای ثبت مجموعه $\Delta = 0_\mathbf{i}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_j \alpha_k^* \rangle_{\mathbf{i},CC} &= \delta_{jk} \left\langle \left|\alpha_j\right|^۲ \right\rangle_{\mathbf{i},C} = \delta_{jk} \left(S_\mathbf{i}^{-۱}\right)_{jj}\\
&= \frac{۱}{۱-\chi^۲} - \frac{\chi^۲}{(۱-\chi^۲)^۲} \sum_{s=۱}^{r} \left|L_{ji_s}\right|^۲ + \frac{\chi^۴}{(۱-\chi^۲)^۳} \sum_{l=۱}^{M} \sum_{s,t=۱}^{r} L_{ji_s} L^*_{li_s} L_{ji_t} L^*_{li_t} + ...
\end{aligned}$$

(ب‌ـ۴۷)

که از معادله (ب‌ـ۱۸) برای $\mathbf{S}_\mathbf{i}^{-1}$ استفاده شده است. در مرتبه χ^2 ،هیچ اطلاعات فازی وجود ندارد، اما در مرتبه χ^4 و بالاتر اطلاعات فازی دیده می‌شود.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_j \alpha_k \alpha_l^* \alpha_m^* \rangle_{\mathbf{i},CC} &= \delta_{jk}\delta_{jl}\delta_{km} \left\langle \left|\alpha_j\right|^۴ \right\rangle_{\mathbf{i},C} + (۱-\delta_{jk})(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl}) \left\langle \left|\alpha_j\right|^۲ \left|\alpha_k\right|^۲ \right\rangle_{\mathbf{i},C}\\
&= ۲\delta_{jk}\delta_{jl}\delta_{km} \left(S_\mathbf{i}^{-۱}\right)_{jj}^۲ + (۱-\delta_{jk})(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl}) \left[\left(S_\mathbf{i}^{-۱}\right)_{jj}^۲ \left(S_\mathbf{i}^{-۱}\right)_{kk}^۲ + \left|\left(S_\mathbf{i}^{-۱}\right)_{jk}\right|^۲\right].
\end{aligned}$$

(ب‌ـ۴۸)

همه‌ی ترم‌ها اطلاعات فاز فراهم می‌کنند اما تنها در مراتب χ^4 وبالاتر. برای اینکه ببینیم چه کاری می‌توان انجام داد، توجه خود را معطوف به حالتی می‌کنیم که تنها در دو مد شمارش صفر فوتون داشته باشیم،

انتخاب می‌کنیم که در مد اول و مد iام این اتفاق بیفتد، یعنی $\mathbf{i} = 1i$. در این شرایط برای $j \neq k$ داریم:

$$\left\langle |\alpha_j|^2 |\alpha_k|^2 \right\rangle_{1i,CC} - \left\langle |\alpha_j|^2 \right\rangle_{1i,CC} \left\langle |\alpha_k|^2 \right\rangle_{1i,CC} = \left| \left(S_{1i}^{-1} \right)_{jk} \right|^2 \simeq \chi^4 \left| L_{j1} L_{k1}^* + L_{ji} L_{ki}^* \right|^2 . \quad (\text{ب-۴۹})$$

با انتخاب حقیقی و نامنفی بودن عناصر ستون اول $\mathbf{L}_1$ برای $j \neq k$ داریم:

$$\begin{aligned} \left| \left(S_{1i}^{-1} \right)_{jk} \right|^2 &\simeq \chi^4 \left| L_{j1} L_{k1} + |L_{ji}| \, |L_{ki}| \, e^{i(\theta_{ji} - \theta_{ki})} \right|^2 \\ &= \chi^4 \left[L_{j1}^2 L_{k1}^2 + |L_{ji}|^2 \, |L_{ki}|^2 + 2 L_{j1} L_{k1} \, |L_{ji}| \, |L_{ki}| \cos\left(\theta_{ji} - \theta_{ki}\right) \right] . \end{aligned} \quad (\text{ب-۵۰})$$

با انتخاب اولین سطر ماتریس انتقال که حقیقی و نامنفی باشد، می‌توان برای $k = 1$ کسینوس‌های همه‌ی فازها در ستون ام خوانده شود و برای $k \neq 1$ کسینوس‌های همه‌ی اختلاف فازها در ستون i ام خوانده می‌شود. این اطلاعات، فازها را در $\mathbf{L}_i$ تا یک معکوس بودن در علامت همه‌ی فازها در ستون i ام تعیین می‌کند. در نتیجه یک فاز مستقل معکوس برای هر ستون از ماتریس انتقال باقی می‌ماند، با در نظر گرفتن سه مد که در آن شمارش صفر فوتون رخ داده باشد،یعنی $\mathbf{i} = 1ij$ ، می‌توان ابهام در فاز سراسری را کاهش داد، که این ناتوانی در تمیز دادن ماتریس انتقال $\mathbf{L}$ از مزدوج آن $\mathbf{L}^*$ را نشان می‌دهد.
فرآیند نشان داده شده در اینجا، هرچند خسته کننده، نشان می‌دهد که می‌توان با استفاده از همبستگی شدت‌ها در آمار هتروداین حالت CC عناصر ماتریس انتقال را تا حد یک فاز سراسری خواند، اما این فرآیند مستلزم کار کردن با ممان‌ها در مرتبه χ^4 است. همانند بحثی که منتج به رابطه (۳-۸۳) شد، عناصر مختلط ماتریس $\mathbf{L}$ با عدم قطعیت δ نیاز به $T \simeq M^2/\delta^2$ اجرای مشخصه‌یابی دارد. این افزایش درجه دوم با سایز مسئله، در مقابل آنچه به صورت افزایش خطی برای فرآیند مشخصه‌یابی بر پایه‌ی ورودی حالت چلانده خلا دو مدی به دست آمد، هزینه استفاده از حالت کلاسیک‌ـ کلاسیک ρ_{CC} است.

ب‌ـ۴ مشخصه‌یابی با RBS

یکی از محاسن تحلیل آمار هتروداین و حالت CC این است که می‌توان این سوال را مطرح کرد که چه نوع مشخصه‌یابی با استفاده از آمار شمارش فوتون در اجرای RBS می‌توان انجام داد.
اگر تنها به شمارش فوتون در هر دو پایانه آلیس و باب علاقمند باشیم، همان فرآیندی که در اجراهای RBS انجام می‌شود، فرقی ندارد که حالت ابتدایی مدهای آلیس و باب حالت چلانده‌ی خلا دو مدی

$|\Psi_{AB}\rangle$ یا حالت کلاسیک_ کلاسیک ρ_{CC}، چرا که هر دو این حالت‌ها آمار فوتون یکسانی تولید می‌کنند. در واقع، آمار شمارش فوتون آلیس، مشروط بر ثبت شمارش فوتون باب Δ، از حالت شرطی مدهای آلیس که که توزیع Q آن $P_{CC}(\boldsymbol{\alpha}|\Delta, \mathbf{L})$ است، به دست می‌آیند.

ممان‌های متناظر شمارش فوتون آلیس می‌تواند مطابق ادامه نوشته شود:

$$\left\langle \left(a_۱^\dagger a_۱\right)^{k_۱} .... \left(a_M^\dagger a_M\right)^{k_M} \right\rangle_{\Delta, CC}. \tag{ب_۵۱}$$

اندیس‌ها در این رابطه نشان می‌دهد مقدار انتظاری در حالتی گرفته شده‌است که توزیع Q آن $P_{CC}(\boldsymbol{\alpha}|\Delta, \mathbf{L})$ است. داشتن ممان‌های شمارش فوتون (ب_۵۱) هم‌ارز داشتن ممان‌های فاکتوریل افزایشی[۱] است.

$$\left\langle \left(a_۱^\dagger a_۱\right)_{k_۱} .... \left(a_M^\dagger a_M\right)_{k_M} \right\rangle_{\Delta, CC} = \left\langle a_۱^{k_۱} \left(a_۱^\dagger\right)^{k_۱} ....a_M^{k_M} \left(a_M^\dagger\right)^{k_M} \right\rangle_{\Delta, CC}. \tag{ب_۵۲}$$

فاکتوریل افزایشی با استفاده از نمادگذاری *Pochhammer* داده می‌شود:

$$\begin{aligned}(aa^\dagger)_k &= aa^\dagger(aa^\dagger + ۱)......(aa^\dagger + k - ۱) \\ &= \left(aa^\dagger + ۱\right) \left(aa^\dagger + ۲\right) .... \left(aa^\dagger + k\right) = a^k \left(a^\dagger\right)^k.\end{aligned} \tag{ب_۵۳}$$

همان‌طور که نشان داده شده است، ممان‌های فاکتوریل افزایشی، مشابه ممان‌های شمارش فوتون ترتیب غیرنرمال است. این ممان‌های شمارش فوتون با ترتیب غیر نرمال، دقیقا ممان‌های هترودواین شرطی (ب_۴۲) هستند که از حالت CC در دسترس است:

$$\begin{aligned}\left\langle a_۱^{k_۱} \left(a_۱^\dagger\right)^{k_۱} ....a_M^{k_M} \left(a_M^\dagger\right)^{k_M} \right\rangle_{\Delta, CC} &= \left\langle (\alpha_۱\alpha_۱^*)^{k_۱} ..... (\alpha_M\alpha_M^*)^{k_M} \right\rangle_{\Delta, CC} \\ &= \left\langle (\alpha_۱\alpha_۱^*)^{k_۱} ..... (\alpha_M\alpha_M^*)^{k_M} \right\rangle_{\Delta, C}.\end{aligned} \tag{ب_۵۴}$$

این رشته معادلات اخیر، این تعبیر را به همراه دارد که آمار شمارش فوتون اجراهای RBS دقیقا همان اطلاعاتی را تولید می‌کند که آمار هترودواین شرطی با حالت ورودی CC تولید می‌کرد. نتیجه آنکه می‌توان از آمار شمارش فوتون RBS استفاده کرد تا ماتریس انتقال را بازیابی کرد، البته با همان شرایطی که در آمار هترودواین شرطی مطرح شد، این روش در تمیز دادن $\mathbf{L}$ از $\mathbf{L}^*$ ناتوان است. علت این موضوع آن است که هم آمار شمارش فوتون RBS و هم آمار هترودواین شرطی با استفاده از حالت CC به همه‌ی همبستگی‌های شدت دسترسی می‌دهد، اما هیچ کدام از این‌ها به همدوسی مرتبه اول که در پروتکل مشخصه‌یابی بحث شد اطلاعاتی به دست نمی دهد. این به این معناست که آمار شمارش فوتون RBS

[1]Rising Factorial Moment

باید از ممان های مرتبه بالاتر نسبت به آنچه که در پروتکل مشخصه‌یابی استفاده شد، بهره برد و در نتیجه سبب کاهش کارآمدی[۲] این روش می‌شود.

[2] Efficiency

پیوست پ

کدهای مورداستفاده در شبیه‌سازی مشخصه‌یابی شبکه‌های اپتیک خطی

دراین قسمت کدهای نوشته‌شده به زبان پایتون که برای شبیه‌سازی‌های مربوط به فصل ۴ مورداستفاده قرارگرفته‌اند، مطرح شده‌است.

پ-۱ توابع استفاده‌شده

در این قسمت توابعی برای تولید ماتریس یکانی تصادفی،تولیدکننده‌ی اعدادتصادفی با پیروی از توزیع دلخواه،محاسبه‌ی ممان‌های موردنیاز، تولیدکننده عناصر ماتریس مورد ارزیابی و محاسبه‌ی فیدلیتی تعریف شده‌اند که در بخش های آتی فراخوانی می‌شوند.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import unitary_group
from numpy import random
import random as rn
import sympy
```

```python
np.random.seed(10)

def u_matrix(m):
    u_tilde = unitary_group.rvs(m)
    diagonal_elements = np.diagonal(u_tilde)
    abs_diagonal_elements = np.abs(diagonal_elements)
    normal_diagonal_elements = diagonal_elements / abs_diagonal_elements
    u = np.zeros((m, m), dtype='complex_')
    for i in range(m):
        u[i][i] = np.conj(normal_diagonal_elements[i])
    u = np.dot(u_tilde, u)
    return u

def alpha_generator(chi, m, n):
    std_dv = 1/(np.sqrt(2*(1-(chi*chi))))
    mean = 0
    alpha_vector = np.random.normal(mean, std_dv, 2*n*m)
    alpha_vector = alpha_vector.view(np.complex128)
    alpha_vector = alpha_vector.reshape((n, m))
    return alpha_vector

def gamma_generator(m, n, std_dv):
    mean = 0
    gamma_vector = np.random.normal(mean, std_dv, 2*n*m)
    gamma_vector = gamma_vector.view(np.complex128)
    gamma_vector = gamma_vector.reshape((n, m))
    return gamma_vector


def photon_number_generator(alpha_vector, chi, u, m, n, etha=1, algm=False):
    beta_square_vector = np.array([])
    photon_number_vector = np.array([])
    for alpha in alpha_vector:
```

```
        if not algm:
            beta = np.array(etha * chi * np.dot(np.conj(alpha), u))
        else:
            beta = np.array(etha * np.dot(alpha, u))
        beta_square = np.multiply(beta, np.conj(beta)).real
        photon_number = np.random.poisson(beta_square, None)
        beta_square_vector = np.append(beta_square_vector
                                       , beta_square, axis=0)
        photon_number_vector = np.append(photon_number_vector
                                         , photon_number, axis=0)
    beta_square_vector = beta_square_vector.reshape((n, m))
    photon_number_vector = photon_number_vector.reshape((n,m))
    return beta_square_vector, photon_number_vector

def l_square_generator(photon_number_vector, chi, n, m):
    photon_number_vector_transpose=np.transpose(photon_number_vector)
    sum_value=np.sum(photon_number_vector_transpose,axis=1)/n
    l_square=sum_value* (1-(chi**2))/(chi**2)
    return l_square

def second_moment_vector_generator(photon_number_vector, alpha_vector, m, n):
    second_moment_vector=np.zeros((m,m),dtype='complex_')
    for i in range(m):
        for j in range(m):
            index=np.unique(
                np.where(photon_number_vector[:,j]==0)[0])
            k = alpha_vector[index,:]
            second_moment_vector[i][j]=\
                np.dot(k[:, i],np.transpose(np.conj(k[:,j])))/len(k[:, i])
    return second_moment_vector



def l_matrix_function(chi, l_square, second_moment_vector, m):
```

```python
    l_matrix = np.zeros((m, m), dtype='complex_')
    for i in range(m):
        l_matrix[i][i]=np.sqrt(abs(((1-((1-chi**2)*(second_moment_vector[i][i])))*
                                    (1-((chi**2)*(1-(l_square[i])))))/(chi**2)))
    for i in range(m):
        for j in range(m):
            if i != j:
                l_matrix[j][i]=\
                    -1*(((second_moment_vector[j][i])*
                        (1-chi**2)*(1-(chi**2)*
                            (1-l_square[i])))/((chi**2)*(l_matrix[i][i])))
    LP, LD = sympy.Matrix(l_matrix).diagonalize()
    LDR = np.asarray(LD)
    LDR_norm = np.zeros((m, m))
    for i in range(m):
        LDR_norm[i][i] = abs(LDR[i][i])
    sett = np.reshape(LDR_norm, -1)
    coefficient = 1 / (max(sett))
    l_matrix = coefficient * l_matrix
    return l_matrix


def fidelity_function(u, l_matrix, chi, m):
    u_transpose_star = np.transpose(np.conj(u))
    divisor = np.eye(m) - (chi**2)*np.dot(l_matrix, u_transpose_star)
    det_divisor = np.abs(np.linalg.det(divisor))
    fidelity = ((1-chi**2)**m / det_divisor)
    return fidelity


def plot_function(x_values, y_values, x_label, y_label, error, section):
    plt.xlabel(x_label)
    plt.ylabel(y_label)
```

```
    z = np.polyfit(x_values, y_values, 2)
    p = np.poly1d(z)
    yest = p(x_values)
    plt.plot(x_values, yest)
    plt.errorbar(x_values, y_values, yerr=error, fmt='o')
    plt.title(f"plot {y_label} vs {x_label} in {section}")
    plt.show()
```

پ-۲ شبکه‌ی اپتیک خطی ایده‌آل

در این قسمت، کدهای مربوط به شبیه‌سازی شبکه‌ی اپتیک خطی ایده‌آل برای شبکه‌های ۲ تا ۱۰ مدی آمده‌است.

```
import numpy as np
from scipy.stats import unitary_group
from utils import u_matrix, alpha_generator, photon_number_generator,\
    l_square_generator, second_moment_vector_generator,\
    l_matrix_function, fidelity_function, plot_function

# Appending average fidelity for different number
# of modes in a list called modes_fidelity:
modes_fidelity = []
fidelity_error = []
F = 600
N = 600
M_min = 2
M_max = 10
np.random.seed(0)
x_values = np.arange(M_min, M_max+1)
for M in x_values:
    fidelity_vector = np.array([])
    chi = 0.4
    for iteration in range(F):
```

```python
# Generating Random unitary matrix as LON matrix
u = u_matrix(m=M)

# Generating random numbers following
# gaussian distribution as the values of alpha
alpha_vector = alpha_generator(chi=chi, m=M, n=N)

# Generating random numbers following poisson distribution
beta_square_vector,photon_number_vector=\
    photon_number_generator(alpha_vector=alpha_vector
                            ,chi=chi,u=u,m=M,n=N)

# calculating l_squared:
l_squared=\
    l_square_generator(photon_number_vector=photon_number_vector
                       ,chi=chi,n=N,m=M)

# Selecting the alphas which have corresponding
# nb=0 and Calculating 2nd moment of mentioned alphas
second_moment_vector =\
    second_moment_vector_generator(
        photon_number_vector=photon_number_vector ,
        alpha_vector=alpha_vector,m=M,n=N)

# Finding elements of L matrix
l_matrix=\
    l_matrix_function(chi=chi,l_square=l_squared,
                      second_moment_vector=second_moment_vector,m=M)

# Calculating fidelity measure for different LONs
# and plotting fidelity for different values of M
fidelity=fidelity_function(u=u,l_matrix=l_matrix,chi=chi,m=M)
```

```
        fidelity_vector = np.append(fidelity_vector , fidelity)

    ave_fidelity = np.sum(fidelity_vector, axis=0) / F
    modes_fidelity.append(ave_fidelity)

    error = (fidelity_vector - ave_fidelity)**2
    stnd_error = np.sqrt(np.sum(error, axis=0)/(F*(F+1)))
    fidelity_error.append(stnd_error)
    print(f'M = {M} ended')


print('x_values', x_values)
print('modes_fidelity', modes_fidelity)
plot_function(x_values, y_values=modes_fidelity,
              x_label='M', y_label='Fidelity',
              error=fidelity_error, section='ideal LON')
```

پ-۳ اثر نویزگاوسی

در این قسمت، کدهای مربوط به مشخصه‌یابی شبکه اپتیک خطی ۲ مدی، در صورت وجود نویز گاوسی در آشکارساز هترودواین آمده‌است.

```
import numpy as np
from scipy.stats import unitary_group
from utils import u_matrix, alpha_generator,\
    gamma_generator, photon_number_generator, l_square_generator,\
    second_moment_vector_generator, l_matrix_function, \
    fidelity_function, plot_function


import random as rn

np.random.seed(10)
```

```python
# Appending average fidelity for different number of
# std in a list called sigma_fidelity:
sigma_fidelity = []
fidelity_error = []
F = 600
M = 2
N = 600


x_values = np.arange(0,0.8, 0.1)
for sig in x_values:
    fidelity_vector = np.array([])
    chi=0.4
    for iteration in range(F):

        # Generating Random unitary matrix as LON matrix
        u = u_matrix(m=M)

        # Generating random numbers following
        # gaussian distribution as the values of alpha
        alpha_vector = alpha_generator(chi=chi, m=M, n=N)
        alpha_vector_star = np.conj(alpha_vector)

        # Generating random numbers following gaussian
        # distribution as the error that will be added to beta values
        gamma_vector = gamma_generator(m=M, n=N, std_dv=sig)

        algm_vector = np.add(gamma_vector, chi* alpha_vector_star)

        # Generating random numbers following poisson distribution
        # as the values of photon number in Bob's End(nB)
        beta_square_vector, photon_number_vector =\
```

```python
        photon_number_generator(
            alpha_vector=algm_vector, chi=chi , u=u, m=M, n=N, algm=True)

    # calculating l_squared:
    l_squared = \
        l_square_generator(
            photon_number_vector=photon_number_vector, chi=chi, n=N, m=M)

    # Selecting the alphas which have corresponding nb=0
    # and Calculating 2nd moment of mentioned alphas
    second_moment_vector = \
        second_moment_vector_generator(
            photon_number_vector=photon_number_vector,
            alpha_vector=alpha_vector, m=M, n=N)

    # Finding elements of L matrix
    l_matrix =\
        l_matrix_function(
            chi=chi, l_square=l_squared,
            second_moment_vector=second_moment_vector, m=M)

    # Calculating fidelity measure for different LONs
    # and plotting fidelity for different values of sigma
    fidelity = fidelity_function(u=u, l_matrix=l_matrix, chi=chi, m=M)
    fidelity_vector = np.append(fidelity_vector, fidelity)
# print('fidelity_vector', fidelity_vector)
ave_fidelity = np.sum(fidelity_vector, axis=0) / F
sigma_fidelity.append(ave_fidelity)
print(f'sigma {sig} ended')

error = (fidelity_vector - ave_fidelity)**2
stnd_error = np.sqrt(np.sum(error, axis=0)/(F*(F+1)))
fidelity_error.append(stnd_error)
```

```
print('x_values', x_values)
print('sigma_fidelity', sigma_fidelity)
plot_function(x_values, y_values=sigma_fidelity,
              x_label='sigma',
              y_label='Fidelity', error=fidelity_error
              , section='gussian noise LON')
```

پ‌ـ۴ اثر اتلاف در شبکه اپتیک خطی

در این قسمت، کدهای مربوط به مشخصه‌یابی شبکه اپتیک خطی ۲ مدی، درصورت وجود اتلاف در شبکه آمده‌است.

```
import numpy as np
from utils import u_matrix, alpha_generator,\
    photon_number_generator, l_square_generator, second_moment_vector_generator\
    , l_matrix_function, fidelity_function, plot_function


np.random.seed(0)
# Appending average fidelity for different number
# of modes in a list called modes_fidelity:
etha_fidelity = []
fidelity_error = []
F = 600
N = 600
M = 2

etha_values = np.arange(0.4, 1.05, 0.1)
print('etha_values', etha_values)
for etha in etha_values:
    fidelity_vector = np.array([])
```

```python
chi=0.4
for iteration in range(F):

    # Generating Random unitary matrix as LON matrix
    u = u_matrix(m=M)

    # Generating random numbers following gaussian
    # distribution as the values of alpha
    alpha_vector = alpha_generator(chi=chi, m=M, n=N)

    # Generating random numbers following poisson
    # distribution as the values of photon number in Bob's End(nB)
    beta_square_vector, photon_number_vector \
        = photon_number_generator(alpha_vector=alpha_vector,
                                  chi=chi, u=u, m=M, n=N, etha=etha)

    # calculating l_squared:
    l_squared = \
        l_square_generator(photon_number_vector=photon_number_vector
                           , chi=chi, n=N, m=M)

    # Selecting the alphas which have corresponding nb=0
    # and Calculating 2nd moment of mentioned alphas
    second_moment_vector =\
        second_moment_vector_generator(photon_number_vector=photon_number_vector
                                       , alpha_vector=alpha_vector, m=M, n=N)

    # Finding elements of L matrix
    l_matrix = l_matrix_function(chi=chi,
                                 l_square=l_squared,
                                 second_moment_vector=second_moment_vector, m=M)

    # Calculating fidelity measure for different LONs and
```

```
        # plotting fidelity for different values of M
        fidelity = fidelity_function(u=u, l_matrix=l_matrix, chi=chi, m=M)
        fidelity_vector = np.append(fidelity_vector, fidelity)

    ave_fidelity = np.sum(fidelity_vector, axis=0) / F
    etha_fidelity.append(ave_fidelity)

    error = (fidelity_vector - ave_fidelity)**2
    stnd_error = np.sqrt(np.sum(error, axis=0)/(F*(F+1)))
    fidelity_error.append(stnd_error)
    print(f'etha = {etha} ended')


print('etha_values', etha_values)
print('etha_fidelity', etha_fidelity)
plot_function(x_values=etha_values, y_values=etha_fidelity,
              x_label='etha', y_label='Fidelity', error=fidelity_error
              , section='loss in LON')
```

پ‌ـ۵ اثر اتلاف در شبکه به‌همراه عدم تطابق بین‌مدی

در این قسمت، کدهای مربوط به مشخصه‌یابی شبکه اپتیک خطی ۲ مدی، درصورت وجود اتلاف در شبکه و همین‌طور وجود عدم تطابق بین‌مدی، آمده‌است.

```
import numpy as np
import scipy
import random as rn
import math
from math import pi
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import unitary_group
import sympy
#Appending average fidelity for different number of
```

```
# modes in a list called modes_fidelity:
etha=0.9
#Calculating average fidelity for a set of F M_mode LONs:
fidelity_vector=[]
F=600
E0=0
for y in range(F):
    #Generating Random unitary matrix as LON matrix
    M=4
    N=600
    x=0.4
    U1_tilde=unitary_group.rvs(2)
    U1_tilde_transpose=np.transpose(U1_tilde)
    U1_tilde_transpose_star=np.conj(U1_tilde_transpose)
    #Editting U1_tilde matrix
    U1_tilde_prime=np.zeros((2,2),dtype='complex_')
    for i in range(2):
        U1_tilde_prime[i][i]=\
            np.conj((U1_tilde[i][i])/(abs(U1_tilde[i][i])))
    U1=np.zeros((2,2),dtype='complex_')
    U1=np.dot(U1_tilde,U1_tilde_prime)
    U1_transpose_star=np.conj(np.transpose(U1))
    U2 = np.zeros((2, 2), dtype='complex_')
    U2 =U1
    #Constructing U matrix
    U=np.zeros((M,M),dtype='complex_')
    for i in range(2):
        for j in range(2):
            U[i][j]=U1[i][j]
    for i in range(2,4):
        for j in range(2,4):
            U[i][j]=U2[i-2][j-2]
    #Defining a diagonal matrix for x
```

```
x_matrix=np.zeros((2,2))
for k in range(2):
    x_matrix[k][k]=x
#Defining a diagonal matrix for x_etha
x_etha_matrix=np.zeros((M,M))
for k in range(M):
    x_etha_matrix[k][k]=x*etha
#Defining a negative identity
neg=np.zeros((2,2))
for k in range(2):
    neg[k][k]=(-1)
#Generating random numbers following
# gaussian distribution as the values of alpha
std_dv=1/(np.sqrt(2*(1-x*x)))
alpha_vector=[]
for j in range(N):
    alpha=[]
    for k in range(1):
        real=rn.gauss(0,std_dv)
        imaginary=rn.gauss(0,std_dv)
        complex_a=complex(real,imaginary)
        alpha.append(complex_a)
        alpha.append(0)
        alpha.append(0)
        real2=rn.gauss(0,std_dv)
        imaginary2=rn.gauss(0,std_dv)
        complex_a2=complex(real2,imaginary2)
        alpha.append(complex_a2)
    alpha_vector.append(alpha)
alpha_vector_star=np.conj(alpha_vector)
#Generating random numbers following poisson
# distribution as the values of photon number in Bob's End(nB)
beta_vector=[]
```

```python
for j in range(N):
    quantity=np.dot((alpha_vector_star[j]),(np.dot(x_etha_matrix,U)))
    beta_vector.append(quantity)
beta_vector_squ=[]
for j in range(N):
    betasqu=[]
    for k in range(M):
        squaredvalue=(beta_vector[j][k])*(np.conj(beta_vector[j][k]))
        betasqu.append(squaredvalue)
    beta_vector_squ.append(betasqu)
nb_vector=[]
for j in range(N):
    nb=[]
    for k in range(M):
        photon=np.random.poisson(abs(beta_vector_squ[j][k]),None)
        nb.append(photon)
    nb_vector.append(nb)
#Summation over  all nbs
#calculating l_squared
l_squared=[]
for k in range(2):
    s=0
    for j in range(N):
        s=s+nb_vector[j][k]
    sav=s/N
    lsize=sav*(1-x*x)/x*x
    l_squared.append(lsize)
##Characterizing LON:
#Selecting the alphas which have corresponding
# nb=0 and Calculating 2nd moment of mentioned alphas
second_moment_vector=[]
for p in range(2):
    second_moment = []
```

```
    s1=0
    D1=0
    s2=0
    D2=0
    for j in range(N):
        if nb_vector[j][0]==0:
            if nb_vector[j][1]==0:
                s1=s1+((alpha_vector[j][p])*(alpha_vector_star[j][0]))
                D1=D1+1
                ave1=s1/D1
            else:
                ave1=0
        if nb_vector[j][2] == 0:
            if nb_vector[j][3] == 0:
                s2 = s2 + ((alpha_vector[j][p])*(alpha_vector_star[j][1]))
                D2 = D2 + 1
                ave2 = s2 / D2
            else:
                ave2 = 0
    second_moment.append(ave1)
    second_moment.append(ave2)
    second_moment_vector.append(second_moment)
#Finding elements of L matrix
diagonal_elements=[]
for k in range(2):
    d_elements=\
        np.sqrt(abs((1-(1-(x*x))*
                     (second_moment_vector[k][k]))*
                    (1-(x*x)*(1-l_squared[k]))/(x*x)))
    diagonal_elements.append(d_elements)
L_diagonal=np.diag(diagonal_elements)
L_offdiagonal=[]
for k in range(2):
```

```
        off_elements=[]
        for r in range(2):
            if r!=k:
                o_elements=\
                    (((-1)*(1-x*x)*(1-x*x*(1-l_squared[r]))
                      *(second_moment_vector[k][r]))/(x*x*(L_diagonal[r][r])))
                off_elements.append(o_elements)
            else:
                off_elements.append(0)
        L_offdiagonal.append(off_elements)
    L=L_offdiagonal+L_diagonal
    LP, LD = sympy.Matrix(L).diagonalize()
    LDR = np.asarray(LD)
    LDR_norm = np.zeros((2, 2))
    for i in range(2):
        LDR_norm[i][i] = abs(LDR[i][i])
    sett = np.reshape(LDR_norm, -1)
    coefficient = 1 / (max(sett))
    L=coefficient*L
    E=U1-L
    #Calculating fidelity measure
    x_matrix_squ=np.dot(x_matrix,x_matrix)
    identity=np.eye(2)
    zarb=np.dot(neg,x_matrix_squ)
    dif=np.add(identity,np.dot(zarb,(np.dot(L,U1_transpose_star))))
    dividend=pow((1-x*x),2)
    divisor=abs(np.linalg.det(dif))
    fidelity=dividend/divisor
    fidelity_vector.append(fidelity)
sum_fidelity=0
for y in range(F):
    sum_fidelity=sum_fidelity+fidelity_vector[y]
    E = E + E0
```

```
ave_fidelity=(sum_fidelity)/F
E_ave=E/F
print(E_ave)
print(ave_fidelity)
```

پ-۶ اثر عدم تطابق بین‌مدی (روش دوم)

در این قسمت، کدهای مربوط به مشخصه‌یابی شبکه اپتیک خطی ۲ مدی، در صورت وجود عدم تطابق بین‌مدی از طریق مدل کردن اثر به کمک یک تقسیم‌کننده‌ی باریکه آمده‌است.

```
import numpy as np
from utils import u_matrix, alpha_generator, photon_number_generator\
    , l_square_generator, second_moment_vector_generator,\
    l_matrix_function, fidelity_function, plot_function


np.random.seed(0)
# Appending average fidelity for different
# number of modes in a list called modes_fidelity:
tau_fidelity = []
fidelity_error = []
F = 600
N = 600
M =2

tau_values = np.arange(0.4,1.09, 0.1)
print(tau_values)
for tau in tau_values:
    fidelity_vector = np.array([])
    chi=0.4
    for iteration in range(F):

        # Generating Random unitary matrix as LON matrix
```

```
u = u_matrix(m=M)

# Generating random numbers following
# gaussian distribution as the values of alpha
alpha_vector = alpha_generator(chi=chi, m=M, n=N)

# Generating random numbers following
# poisson distribution as the values of photon number
# in Bob's End(nB)
beta1_square_vector, photon1_number_vector =\
    photon_number_generator(alpha_vector=alpha_vector
                            , chi=chi, u=u, m=M, n=N,  etha=tau)

#Reflected beam
gamma_vector=(np.sqrt(1-tau*tau)/tau)*alpha_vector
gamma1_vector=gamma_vector
for j in range(N):
    gamma1_vector[j][1]=0
gamma2_vector=gamma_vector
for j in range(N):
    gamma2_vector[j][0]=0

# Generating random numbers following poisson
# distribution as the values of photon number
# in Bob's End(nB) for missed photons from 1st mode
beta2_square_vector, photon2_number_vector = \
photon_number_generator(alpha_vector=gamma1_vector
                        , chi=chi, u=u, m=M, n=N, etha=tau)

# Generating random numbers following poisson
# distribution as the values of photon number
# in Bob's End(nB) for missed photons from 2nd mode
beta3_square_vector, photon3_number_vector = \
```

```
        photon_number_generator(alpha_vector=gamma2_vector,
                                                chi=chi, u=u, m=M, n=N, etha=tau)


    #Summation over all photon numbers
    photon_number_vector=np.add(photon1_number_vector
                                        ,photon2_number_vector,
                                        photon3_number_vector)


    #Calculating l_squared:
    l_squared = \
        l_square_generator(photon_number_vector=photon_number_vector
                                    , chi=chi, n=N, m=M)

    # Selecting the alphas which have corresponding
    # nb=0 and Calculating 2nd moment of mentioned alphas
    second_moment_vector = \
        second_moment_vector_generator(photon_number_vector=photon_number_vector
                                                    , alpha_vector=alpha_vector, m=M, n=N)

    # Finding elements of L matrix
    l_matrix = l_matrix_function(chi=chi, l_square=l_squared,
                                        second_moment_vector=second_moment_vector,
                                        m=M)

    # Calculating fidelity measure for different LONs
    # and plotting fidelity for different values of M
    fidelity = fidelity_function(u=u, l_matrix=l_matrix, chi=chi, m=M)
    fidelity_vector = np.append(fidelity_vector, fidelity)

ave_fidelity = np.sum(fidelity_vector, axis=0) / F
tau_fidelity.append(ave_fidelity)
```

```
    error = (fidelity_vector - ave_fidelity)**2
    stnd_error = np.sqrt(np.sum(error, axis=0)/(F*(F+1)))
    fidelity_error.append(stnd_error)
    print(f'tau = {tau} ended')

print('tau_values', tau_values)
print('tau_fidelity', tau_fidelity)
plot_function(x_values=tau_values, y_values=tau_fidelity
              , x_label='tau', y_label='Fidelity', error=fidelity_error
              , section='mode-mismatching')
```

پ-۷ اثر وجود نویز در آشکارساز فوتونی

در این قسمت، کدهای مربوط به مشخصه‌یابی شبکه اپتیک خطی ۲مدی، در حضور آشکارسازهای فوتونی غیرایده‌آل که امکان شمارش تصادفی فوتون در آن وجود دارد،آمده‌است.

```
import numpy as np
from utils import u_matrix, alpha_generator,\
    photon_number_generator, l_square_generator, second_moment_vector_generator\
    , l_matrix_function, fidelity_function, plot_function


np.random.seed(0)
# Appending average fidelity for different number
# of modes in a list called modes_fidelity:
chance_fidelity = []
fidelity_error = []
F = 600
N = 600
M = 2

chance_values =np.arange(0,0.7,0.1)
```

```
print('chance_values', chance_values)
for chance in chance_values:
    fidelity_vector = np.array([])
    chi=0.4
    for iteration in range(F):
        # Generating Random unitary matrix as LON matrix
        u = u_matrix(m=M)



        # Generating random numbers following gaussian
        # distribution as the values of alpha
        alpha_vector = alpha_generator(chi=chi, m=M, n=N)



        # Generating random numbers following poisson
        # distribution as the values of photon number in Bob's End(nB)
        beta_square_vector1, photon_number_vector1 \
            = photon_number_generator(alpha_vector=alpha_vector,
                                      chi=chi, u=u, m=M, n=N, etha=1)

        # A random click in photodetectors with probability
        # 0.001(considering ineffiency in photodetectors)
        nb_p_vector = []
        for j in range(N):
            nb_p = []
            for k in range(M):
                dummy = np.random.uniform(0, 1)
                if dummy > chance:
                    nb_p.append(0)
                else:
                    nb_p.append(1)
            nb_p_vector.append(nb_p)
```

```
    #Summation over all photon detections
    photon_number_vector=photon_number_vector1+nb_p_vector

    # calculating l_squared:
    l_squared = \
        l_square_generator(photon_number_vector=photon_number_vector
                                , chi=chi, n=N, m=M)

    # Selecting the alphas which have corresponding nb=0
    # and Calculating 2nd moment of mentioned alphas
    second_moment_vector =\
        second_moment_vector_generator(photon_number_vector=photon_number_vector
                                        , alpha_vector=alpha_vector, m=M, n=N)

    # Finding elements of L matrix
    l_matrix = l_matrix_function(chi=chi,
                                  l_square=l_squared,
                                  second_moment_vector=second_moment_vector, m=M)

    # Calculating fidelity measure for different LONs and
    # plotting fidelity for different values of M
    fidelity = fidelity_function(u=u, l_matrix=l_matrix, chi=chi, m=M)
    fidelity_vector = np.append(fidelity_vector, fidelity)

ave_fidelity = np.sum(fidelity_vector, axis=0) / F
chance_fidelity.append(ave_fidelity)

error = (fidelity_vector - ave_fidelity)**2
stnd_error = np.sqrt(np.sum(error, axis=0)/(F*(F+1)))
fidelity_error.append(stnd_error)
print(f'chance = {chance} ended')
```

```
print('chance_values', chance_values)
print('chance_fidelity', chance_fidelity)
plot_function(x_values=chance_values, y_values=chance_fidelity,
              x_label='chance', y_label='Fidelity', error=fidelity_error
              , section='loss␣in␣LON')
```

مراجع

[1] S Aaronson and A Arkhipov. The computational complexity of linear optics theor, 2013.

[2] Frank Arute, Kunal Arya, Ryan Babbush, Dave Bacon, Joseph C Bardin, Rami Barends, Rupak Biswas, Sergio Boixo, Fernando GSL Brandao, David A Buell, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 574(7779):505–510, 2019.

[3] Philip Ball et al. Physicists in china challenge google'squantum advantage'. *Nature*, 588(7838):380, 2020.

[4] Robert W Boyd. *Nonlinear optics*. Academic press, 2020.

[5] P Ben Dixon, Jeffrey H Shapiro, and Franco NC Wong. Spectral engineering by gaussian phase-matching for quantum photonics. *Optics express*, 21(5):5879–5890, 2013.

[6] Bryan T Gard, Keith R Motes, Jonathan P Olson, Peter P Rohde, and Jonathan P Dowling. An introduction to boson-sampling. In *From atomic to mesoscale: The role of quantum coherence in systems of various complexities*, pages 167–192. World Scientific, 2015.

[7] Dominik Hangleiter, Martin Kliesch, Jens Eisert, and Christian Gogolin. Sample complexity of device-independently certified “quantum supremacy”. *Physical review letters*, 122(21):210502, 2019.

[8] Aram W Harrow and Ashley Montanaro. Quantum computational supremacy. *Nature*, 549(7671):203–209, 2017.

[9] Carl W Helstrom. Quantum detection and estimation theory. *Journal of Statistical Physics*, 1:231–252, 1969.

[10] Ulf Leonhardt. *Measuring the quantum state of light*, volume 22. Cambridge university press, 1997.

[11] Rodney Loudon. *The quantum theory of light*. OUP Oxford, 2000.

[12] Austin P Lund, Anthony Laing, Saleh Rahimi-Keshari, Terry Rudolph, Jeremy L O’Brien, and Timothy C Ralph. Boson sampling from a gaussian state. *Physical review letters*, 113(10):100502, 2014.

[13] Alexander I Lvovsky. Squeezed light. *Photonics: Scientific Foundations, Technology and Applications*, 1:121–163, 2015.

[14] Marco Marcozzi and Leonardo Mostarda. Quantum consensus: an overview. *arXiv preprint arXiv:2101.04192*, 2021.

[15] Zheyu Jeff Ou. *Quantum optics for experimentalists*. World Scientific Publishing Company, 2017.

[16] Matteo Paris and Jaroslav Rehacek. *Quantum state estimation*, volume 649. Springer Science & Business Media, 2004.

[17] John Preskill. Quantum computing and the entanglement frontier. *arXiv preprint arXiv:1203.5813*, 2012.

[18] Saleh Rahimi-Keshari, Sima Baghbanzadeh, and Carlton M Caves. In situ characterization of linear-optical networks in randomized boson sampling. *Physical Review A*, 101(4):043809, 2020.

[19] Jaroslav Řeháček, Yong Siah Teo, Zdeněk Hradil, and Sascha Wallentowitz. Surmounting intrinsic quantum-measurement uncertainties in gaussian-state tomography with quadrature squeezing. *Scientific Reports*, 5(1):12289, 2015.

[20] Peter P Rohde and Timothy C Ralph. Time-resolved detection and mode mismatch in a linear optics quantum gate. *New Journal of Physics*, 13(5):053036, 2011.

[21] Bahaa EA Saleh and Malvin Carl Teich. *Fundamentals of photonics*. john Wiley & sons, 2019.

[22] Sritam Kumar Satpathy, Vallabh Vibhu, Sudev Pradhan, Bikash K Behera, and Prasanta K Panigrahi. Efficient verification of boson sampling using a quantum computer. *arXiv preprint arXiv:2108.03954*, 2021.

[23] Han-Sen Zhong, Hui Wang, Yu-Hao Deng, Ming-Cheng Chen, Li-Chao Peng, Yi-Han Luo, Jian Qin, Dian Wu, Xing Ding, Yi Hu, et al. Quantum computational advantage using photons. *Science*, 370(6523):1460–1463, 2020.

Abstract

It is believed that quantum computers can perform certain computational tasks much faster than classical computers. However, there is still a long way to build universal quantum computers. Hence, a fundamental question in quantum information science is whether the supremacy of quantum computation can be demonstrated by using available technologies. Randomized boson sampling, a generalized version of boson sampling, is a class of problems that is proposed to prove quantum supremacy. As quantum systems are very sensitive to errors and environmental effects, a challenge in performing a quantum experiment is to characterize elements of the experiment and to evaluate various errors. In particular, characterization of linear-optical networks, as the main part of boson-sampling and randomized-boson-sampling experiments, is crucial in evaluating computational power of these problems. A recently propose method for this purpose is based on changing part of measurements in randomized-boson sampling from photon-counting to heterodyne measurements, that is, to measure in the coherent state basis. In this project, we first review randomized boson sampling and the recent characterization method. Then, we study the effects of different errors and the validation of this class of experiments. The results of this project are useful in understanding different aspects of boson sampling experiments and their computational power.

Keywords: boson sampling, quantum supremacy, heterodyne measurement, characterization of linear-optical networks

University of Tehran

College of Science

Department of Physics

Characterization of randomized boson sampling experiments

By:

Fereshteh Bourbour-Moradi

Supervisor:

Dr. Saleh Rahimi-Keshari

A thesis Submitted in Partial Fulfillment of The Requirement for the Degree of Master of Science in Optic and Laser Physics

February 2023