


# Determinacion de Modelo matemático de un motor de corriente continua

## Determination of a mathematical model of a direct current motor

 **Fernanda Lais Fuentes Pereira**<sup>1,\*</sup> and **Leandro Ignacio Coca Orozco**<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup>Fernanda Lais Fuentes Pereira

<sup>2</sup>Leandro Ignacio Coca Orozco

### Resumen

En este trabajo se presenta el modelo matemático de un motor de corriente continua. Se desarrolló el modelo matemático usando ecuaciones diferenciales y a su vez también se desarrolla el análisis respectivo en términos de las variables físicas que se tiene en el motor, como en la carga mecánica acoplada al mismo, además se elaboró un diagrama estructural y algorítmico mediante la transformada de Laplace.

**Palabras clave:** Motor de corriente continua; ecuaciones diferenciales; modelo matemático; transformación Laplace; diagrama estructural; características electromecánicas.

### Abstract

In this paper, a mathematical model of start-up behavior of a separately excited DC motor is developed for analysis which includes armature inductance. The transient armature current and angular velocity of the motors are obtained as analytical expressions during the transient phase with the solution of the coupled electrical and mechanical differential equations using the Laplace transform.

**Keywords:** DC motor; Laplace transform; differential equations; mathematical model; start-up characteristic, electromechanical.

### Introducción

El motor de corriente continua de excitación independiente se caracteriza por el hecho de que su devanado de campo dicho de otra forma, la bobina es alimentada eléctricamente separadamente, mientras que la órbita sigue siendo prisionera del flujo magnético prácticamente constante. Además, este motor permite realizar un análisis clásico, en el que el comportamiento electromecánico resultante se describe por las ecuaciones lineales diferenciales: para el circuito de corriente alterna de la armadura y para la dinámica del espacio del eje.

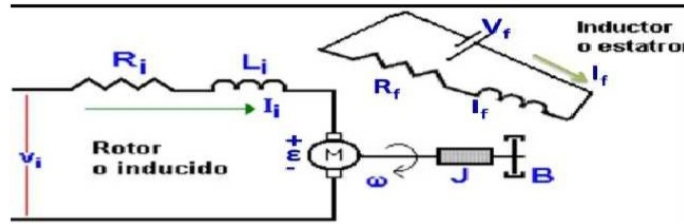
En este informe, se formula un modelo matemático de arranque de un motor de corriente continua de excitación independiente tratando de hacerlo paso a paso, se incluye la influencia de la inductancia de la armadura y se utiliza la transformada de Laplace para obtener la solución del sistema de ecuaciones. En particular, se consideran dos etapas, el primer período, que se caracteriza por un aumento en el consumo de corriente de la armadura y, simultáneamente, la ausencia de movimientos de enfoque del rotor y el segundo período, que está relacionado con la aceleración del rotor y la evolución correlativamente dependiente de la corriente y la velocidad. Como resultado, se obtienen las funciones de respuesta en base al tiempo para la corriente y la velocidad angular antitransformando Laplace, se forman los diagramas de bloques y se discute cómo se presentan en la respuesta como también características electromecánicas del proceso de inicio.

## Materiales y Métodos

### CARACTERÍSTICAS DEL MODELO

Un motor de corriente continua está formado por un estator o inductor que es la parte fija del motor y un rotor o "inducido" que es la parte móvil.

El motor a utilizar es un motor de excitación separada, cuya característica principal es la bobina (inductor) que genera el campo magnético pero no se encuentra dentro del circuito del motor, es decir, no existe conexión eléctrica entre el rotor y el estator como se muestra en la siguiente figura:



**Figura 1.** Esquema de un motor separadamente excitado.

El modelo ilustrado posee características eléctricas que consta de:  $V_i$  la tensión de alimentación del rotor,  $I_i$  la corriente que va a circular por el rotor también conocida por corriente de armadura,  $R_i$  la resistencia del bobinado del rotor,  $L_i$  la inductancia del bobinado del rotor,  $\varepsilon$  la fuerza contra-electromotriz del motor,  $V_f$  es la tensión de alimentación del estator,  $I_f$  la corriente que va a circular por el estator,  $R_f$  la resistencia del bobinado del estator,  $L_f$  la inductancia del bobinado del estator, para que el motor cumpla su función, normalmente se le coloca una carga mecánica en el eje del rotor y de esto dependerán las características mecánicas las cuales son:  $\omega$  la velocidad angular de giro a la cual trabaja el rotor,  $J$  el momento de inercia equivalente del eje rotor con la carga que se desea colocar,  $B$  el coeficiente de rozamiento viscoso.

### DETERMINACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El modelado matemático del motor de corriente continua requiere de dos ecuaciones, una ecuación mecánica y otra ecuación eléctrica. Estas ecuaciones están acopladas y se basan en las Leyes de la dinámica y de Kirchhoff, respectivamente. Por una parte, la ecuación mecánica modela principalmente el movimiento del rotor, y por otra parte la ecuación eléctrica modela lo que ocurre en el circuito eléctrico del inducido.

Al aplicar una tensión  $V_i$  al inducido, circula por él una corriente  $I_i$ , y debido a esta corriente, por el rotor, se inducirá una fuerza contra-electromotriz (Ley de Lenz: "toda corriente se opone a la causa que la produce") cuyo valor vendrá determinado por la expresión:

$$\varepsilon = K_b \times \omega(t). \quad (1)$$

Siendo  $K_b$  la constante de fuerza contra-electromotriz. Aplicando la ley de Ohm, la tensión útil será:

$$V_i - \varepsilon = R_i \cdot I_i(t) + L_i \frac{dI_i(t)}{dt}. \quad (2)$$

Reemplazando la Ecuación (1) en la Ecuación (2):

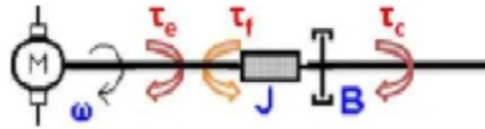
$$V_i - K_b \omega(t) = R_i I_i(t) + L_i \frac{dI_i(t)}{dt}. \quad (3)$$

El rotor realizará su movimiento debido al torque electromagnético generado por el campo magnético que se produce en el estator y a su vez este dependerá de la corriente que circula en la armadura, de esta manera la ecuación es:

$$\tau_e = K_p \times I_i(t). \quad (4)$$

Siendo  $K_p$  la constante de torque electromagnético.

El motor en su movimiento giratorio arrastra una carga, creándose por lo tanto, un par motor resultante,  $\tau_e$ , y a su vez se tiene fricción en el sistema que depende de la velocidad a la cual gira el rotor y este causa un torque  $\tau_f$  que es en sentido opuesto al movimiento, obsérvese esto en la siguiente figura.



**Figura 2.** Diagrama de torques en el rotor.

Se define a  $\alpha$  como la aceleración angular de la carga, de esta manera:

$$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt}. \quad (5)$$

E

La ecuación que describe a  $\tau_e$  es:

$$\tau_e = J \times \alpha = J \times \frac{d\omega(t)}{dt}. \quad (6)$$

La ecuación que describe a  $\tau_f$  es:

$$\tau_f = B \times \omega(t). \quad (7)$$

Ahora realizamos una sumatoria de torques y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\sum \tau = J \frac{d\omega(t)}{dt} \Rightarrow \tau_e - \tau_f = J \frac{d\omega(t)}{dt}. \quad (8)$$

Reemplazando las Ecuaciones (4), (6) y (7) en la Ecuación (8):

$$K_p \times I_i(t) - B \times \omega(t) = J \times \frac{d\omega(t)}{dt}, \quad (9)$$

$$K_p \times I_i(t) = J \times \frac{d\omega(t)}{dt} + B \times \omega(t). \quad (10)$$

Despejando  $I_i(t)$  de la Ecuación (9) y luego derivándola con respecto al tiempo da como resultado:

$$I_i(t) = \frac{J \times \frac{d\omega(t)}{dt} + B \times \omega(t)}{K_p}, \quad (11)$$

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = \frac{J \times \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + B \times \frac{d\omega(t)}{dt}}{K_p}. \quad (12)$$

Sustituyéndola en la Ecuación (10) y (11) en la Ecuación (3), quedará una ecuación diferencial de segundo orden (aparece la segunda derivada), no homogénea, lineal y de coeficientes constantes, como se muestra a continuación:

$$V_i - K_b \times \omega(t) = R_i \times \frac{J \frac{d\omega(t)}{dt} + B \omega(t)}{K_p} + L_i \times \frac{J \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + B \frac{d\omega(t)}{dt}}{K_p}. \quad (13)$$

De esta manera la Ecuación (12) describe el modelo matemático para un motor de corriente continua separadamente excitado.

### *SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO*

El modelo matemático ya fue descrito y para su solución es necesario tener una consideración de mucha importancia, el valor de la constante  $L_i$  para motores de corriente continua separadamente excitado, es aproximadamente cero y siendo así la ecuación diferencial se transforma en una ecuación de primer orden, no homogénea, lineal y de coeficientes constantes.

$$V_i - K_b \times \omega(t) = R_i \times \frac{J \frac{d\omega(t)}{dt} + B \omega(t)}{K_p}. \quad (14)$$

Para el modelo se tiene como condición inicial que a tiempo igual cero (es decir, cuando el motor va a arrancar) el valor de la velocidad es cero:

$$t = 0 \Rightarrow \omega(0) = 0. \quad (15)$$

Así, ordenando, arreglando la Ecuación (14) y aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación, se obtiene:

$$V_i = R_i \times \frac{J \frac{d\omega(t)}{dt} + B \omega(t)}{K_p} + K_b \times \omega(t). \quad (16)$$

$$V_i = \left( \frac{R_t J}{K_p} \times \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{R_t B}{K_p} + K_b \right) \times \omega(t). \quad (17)$$

$$\mathcal{L}[V_i] = \mathcal{L} \left[ \gamma \times \frac{d\omega(t)}{dt} + \beta \times \omega(t) \right]. \quad (18)$$

$$\frac{V_i}{s} = \gamma s \times \omega(s) + \beta \times \omega(s). \quad (19)$$

$$\frac{V_i}{s} = \omega(s) \times (\gamma s + \beta). \quad (20)$$

$$\omega(s) = V_i \times \frac{1}{s(\gamma s + \beta)}. \quad (21)$$

Se define a las constantes  $\gamma$  y  $\beta$  como:

$$\gamma = \frac{R_t \times J}{K_p}; \quad \beta = \frac{R_t \times B}{K_p} + K_b. \quad (22)$$

Una vez obtenida la ecuación de la velocidad en función del tiempo, se procede a resolver mediante fracciones parciales la Ecuación (14):

$$\omega(s) = V_i \times \frac{1}{s(\gamma s + \beta)} = V_i \times \left( \frac{A}{s} + \frac{C}{\gamma s + \beta} \right). \quad (23)$$

Los valores de  $A$  y  $C$  que satisfacen la ecuación son:

$$A = \frac{1}{\beta}; \quad C = -\frac{\gamma}{\beta}. \quad (24)$$

De esta forma, la ecuación queda descrita:

$$\omega(s) = V_i \times \left( \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{s} - \frac{\gamma}{\beta} \times \frac{1}{\gamma s + \beta} \right). \quad (25)$$

$$\omega(s) = V_i \times \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{s} - V_i \times \frac{\gamma}{\beta} \times \frac{1}{\gamma s + \beta}. \quad (26)$$

$$\omega(s) = V_i \times \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{s} - V_i \times \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{s + \frac{\beta}{\gamma}}. \quad (27)$$

Desde este punto, la solución del modelo matemático ya es evidente, pues se procede a aplicar la transformada de Laplace inversa a la Ecuación (27):

$$\mathcal{L}^{-1}[\omega(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ V_i \times \frac{\beta}{s} - V_i \times \frac{\beta}{(s + \frac{\beta}{\gamma})\gamma} \right]. \quad (28)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\omega(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ V_i \times \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{s} - V_i \times \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{s + \frac{\beta}{\gamma}} \right]. \quad (29)$$

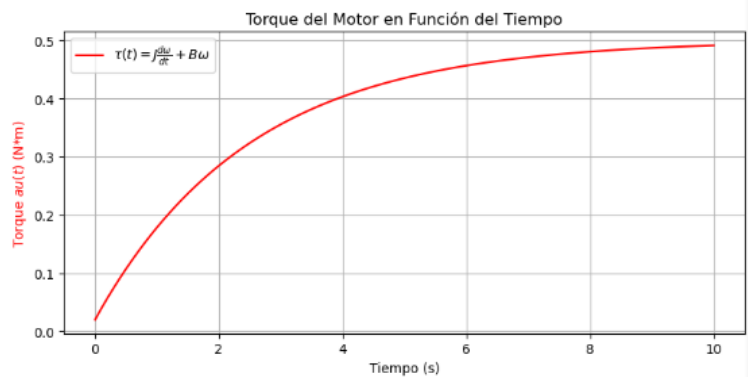
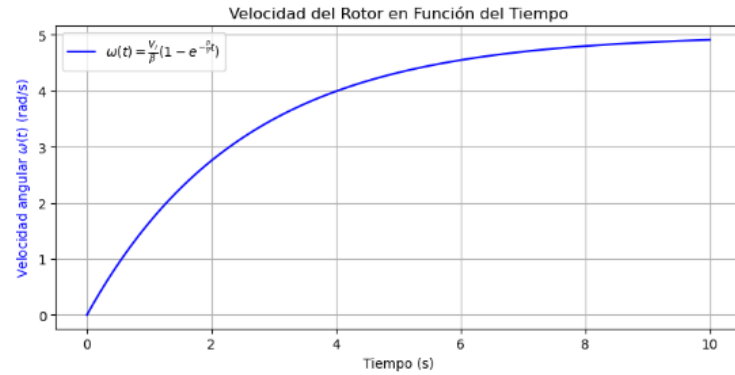
$$\mathcal{L}^{-1}[\omega(s)] = \frac{V_i}{\beta} \times \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] - \frac{V_i}{\beta} \times \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + \frac{\beta}{\gamma}} \right]. \quad (30)$$

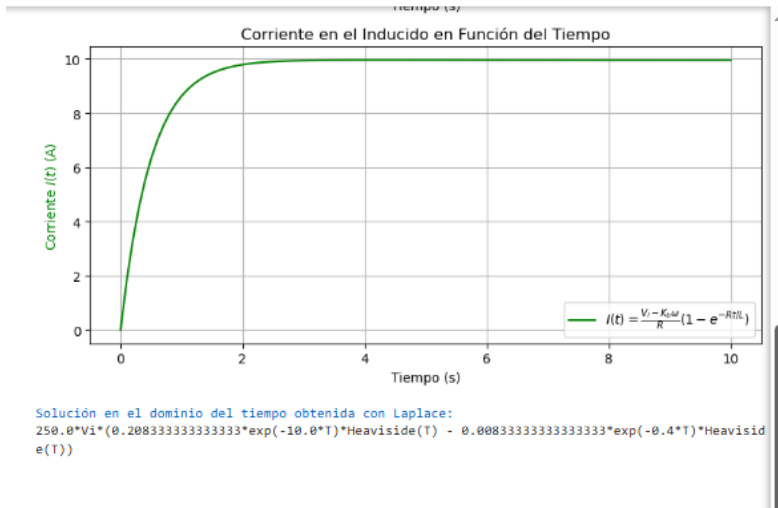
$$\omega(t) = \frac{V_i}{\beta} - \frac{V_i}{\beta} e^{-\frac{\beta}{\gamma} t}. \quad (31)$$

$$\omega(t) = \frac{V_i}{\beta} \times \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{\gamma} t} \right). \quad (32)$$

La Ecuación (32) describe el comportamiento de la velocidad del rotor en función del tiempo, siendo así la solución del modelo matemático para un motor de corriente continua separadamente excitado.

A continuación, el código simula el comportamiento de un motor de corriente continua, calculando la velocidad angular, el torque y la corriente del inducido. Además, resuelve la ecuación diferencial del sistema usando la transformada de Laplace y genera gráficos para visualizar su evolución en el tiempo, el código se encuentra en el apéndice A. graphicx





## Resultados

La primera etapa es cuando el eje está inmóvil, y la ecuación se convierte simplemente en un circuito RL. La solución de esto es:

$$i(t) = \frac{V}{R} \left( 1 - e^{-t/\tau_e} \right), \quad \tau_e = \frac{L}{R} \quad (33)$$

Donde la corriente aumenta exponencialmente desde cero hasta un valor donde el par electromagnético es igual al par de carga. Esto da lugar a la segunda etapa. La segunda etapa es cuando con Laplace se resuelva al sistema completo y, luego, se invierta de nuevo. Obtendremos lo siguiente:

$$\omega(t) = \omega_c \left( 1 - \frac{p_2 e^{-p_1 t} - p_1 e^{-p_2 t}}{p_2 - p_1} \right) \quad (34)$$

$$i(t) = I_c + (I_0 - I_c) \frac{p_2 e^{-p_1 t} - p_1 e^{-p_2 t}}{p_2 - p_1} \quad (35)$$

Donde, son los valores de régimen, es la corriente máxima en función del tiempo y son constantes basadas en la inercia y la inducción.

## Discusión

El modelo matemático creado a través de la transformada de Laplace facilitó la adquisición de una representación analítica del comportamiento del sistema. El modelo final ilustra la progresión temporal de la velocidad del rotor en un motor de corriente continua, lo que simplifica su estudio y simulación. Los hallazgos indican que la respuesta matemática captura correctamente la dinámica del sistema, lo que facilita la evaluación del impacto de factores esenciales como la resistencia, la inductancia y el coeficiente de fricción. Esta perspectiva resalta el valor de la transformada de Laplace en el estudio de sistemas dinámicos, proporcionando una respuesta nítida y efectiva para la descripción de motores eléctricos y otros sistemas de control.

## Conclusiones

La inductancia de la armadura no puede ignorarse si se necesita un modelo preciso para arranques de motores DC. Este tipo específico de corriente tiene un sobregiro vital que debe

incorporarse en el diseño térmico y de control. La herramienta general de transformada de Laplace es útil para resolver modelos lineales acoplados, especialmente si las condiciones iniciales se deben tener en cuenta. Por lo tanto, este modelo representa una excelente base para simulaciones y análisis de transitorios, e idealmente, para el diseño de encendido suave.

## Agradecimientos

Se agradece por el apoyo brindado en la realización de este estudio. Asimismo, se reconoce la colaboración de Fernanda Fuentes y Leandro Coca por sus valiosos aportes en la validación y análisis del modelo desarrollado.

## Contribución de los autores

Ambos autores contribuyeron con el desarrollo del modelo matemático y realizó la transformación de Laplace para obtener la solución analítica además de esto contribuyeron en el análisis de los resultados y la redacción del documento.

## Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existe conflicto de intereses en la realización de este trabajo. Todas las conclusiones y resultados presentados son producto del análisis objetivo del sistema, sin influencias externas de entidades comerciales o intereses personales.

## Anexo

### 1 Código en Python para la Simulación del Motor de Corriente Continua

El siguiente código en Python modela la velocidad angular, el torque y la corriente del inducido de un motor de corriente continua, incluyendo la solución de la ecuación diferencial mediante la transformada de Laplace.

```
[language=Python, caption=Código de simulación del motor de corriente continua] import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt import sympy as sp
```

Parámetros del modelo  $V_i = 10$  Voltaje de entrada (ejemplo)  $\beta = 2$  Constante del sistema (ejemplo)  $\gamma = 5$  Otra constante del sistema (ejemplo)  $J = 0.01$  Momento de inercia ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )  $B = 0.1$  Coeficiente de fricción viscosa ( $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} / \text{rad}$ )  $R = 1$  Resistencia del inducido ( $\Omega$ )  $L = 0.5$  Inductancia del inducido (H)  $K_b = 0.01$  Constante de FEM

Definir la ecuación de velocidad del rotor  $\text{def velocidad\_otor}(t, V_i, \beta, \gamma) : \text{return}(V_i / \beta) * (1 - \text{np.exp}(-( \beta / \gamma) * t))$

Definir la ecuación de torque del motor  $\text{def torque\_motor}(\omega, J, B) : \text{return} J * \text{np.gradient}(\omega, t) + B * \omega$

Definir la ecuación de la corriente en el inducido  $\text{def corriente\_inducido}(t, V_i, R, L, K_b, \omega) : \text{return}(V_i - K_b * \omega) / R * (1 - \text{np.exp}(-R * t / L))$

Generar valores de tiempo  $t = \text{np.linspace}(0, 10, 100)$  De 0 a 10 segundos con 100 puntos

Calcular la velocidad del rotor  $\omega_t = \text{velocidad\_otor}(t, V_i, \beta, \gamma)$

Calcular el torque del motor  $\text{torque}_t = \text{torque\_motor}(\omega_t, J, B)$

Calcular la corriente en el inducido  $i_t = \text{corriente\_inducido}(t, V_i, R, L, K_b, \omega_t)$



```

Transformada de Laplace s = sp.symbols('s') T, Omega = sp.symbols('T Omega') Vi,ym =
sp.symbols('Vi')

Ecuación diferencial en el dominio del tiempo eq_laplace = sp.Eq((J*s+B)*Omega, Vi,ym/beta*
(s/(s+beta/gamma)))

Resolver para Omega(s) omega_s = sp.solve(eq_laplace, Omega)[0]

Transformada inversa de Laplace para obtener (t) omega_t_laplace = sp.inverse_laplace_transform(omega_s,
s, t)

Mostrar solución en el dominio del tiempo print("Solución en el dominio del tiempo obtenida
con Laplace:") print(omega_t_laplace)

Graficar los resultados fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(8, 12))

Gráfica de la velocidad angular axs[0].plot(t, omega_t, label='Velocidad del Rotor', color='b')
axs[0].set_xlabel('Tiempo(s)') axs[0].set_ylabel('Velocidad angular (rad/s)') axs[0].legend() axs[0].grid()

Gráfica del torque axs[1].plot(t, torque_t, label='Torque del Motor', color='r') axs[1].set_xlabel('Tiempo(s)')
axs[1].set_ylabel('Torque (N.m)') axs[1].legend() axs[1].grid()

Gráfica de la corriente en el inducido axs[2].plot(t, i_t, label='Corriente en el Inducido', color='g')
axs[2].set_xlabel('Tiempo(s)') axs[2].set_ylabel('Corriente (A)') axs[2].legend() axs[2].grid()

plt.tight_layout() plt.show()

Este código genera gráficas para visualizar la evolución de la velocidad angular, el torque
y la corriente del motor, además de resolver la ecuación diferencial con la transformada de
Laplace para obtener una solución analítica del sistema.

```

## References

- Alvarado, M. S. A.** (2012). Modelo matemático de un motor de corriente continua separadamente excitado: Control de velocidad por corriente de armadura. *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol.* **6**(1), 155.
- Ango, A.** (1967). *Matemáticas para ingenieros eléctricos y de radio*. Moscú: Nauka.
- Caro Pineda, L. G.** (2021). *Definición de la transformación de laplace*. Universidad de San Marcos. Retrieved from <http://repositorio.usam.ac.cr/xmlui/handle/11506/1936>
- Cherta, M. C.** (2013). *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. tomo ii: Máquinas de corriente continua*. Reverte.
- Chilikin, M. G., Kliuchev, V. I., & Sandler, A. S.** (1979). *Teoría del accionamiento eléctrico automatizado*. Moscú: Energía.
- Chilikin, M. G., & Sandler, A. S.** (1981). *Curso general de accionamiento eléctrico* (6th ed.). Moscú: Energoizdat.
- Dademuchconnection.** (2023). *Diagrama de bloques de motor dc – función de transferencia*. Blog técnico. (Disponible en: <https://dademuch.com/motor-dc-diagrama-funcion-transferencia>)
- Firago, B. I., & Pavlyachik, L. B.** (2007). *Teoría del accionamiento eléctrico* (2nd ed.). Minsk: Tekhnoperspektiva.
- Jacome, J. G., Saltos, T., Jaramillo, D., García, M., & Guaichico, E.** (2020). Técnicas de control para el motor de corriente continua: Una revisión sistemática de literatura. *Innovation & Development in Engineering and Applied Sciences*, **2**(0), 35–35.
- Kliuchev, V. I.** (2001). *Teoría del accionamiento eléctrico* (2nd ed.). Moscú: Energoatomizdat.
- Kurkin, N. N.** (2010). Construcción de una característica electromecánica de arranque de un motor de corriente continua tomando en cuenta la inductancia de la armadura usando la transformada de laplace. *Ingeniería de Energía Eléctrica*, **1**(0), .

- Martínez, D. M.** (2011). Aplicación de las transformaciones de laplace en sistemas de control realimentados. *Función, I*(), 2.
- Monasterio-Huelin, F., & Gutiérrez, A.** (2020). *Modelado de un motor dc*. Retrieved from [https://www.robolabo.etsit.upm.es/asignaturas/seco/simulabo/seco\\_simulabo-ModeladoMotorDC.pdf](https://www.robolabo.etsit.upm.es/asignaturas/seco/simulabo/seco_simulabo-ModeladoMotorDC.pdf)
- Pernía, M. A.** (2011). Conceptos básicos de máquinas de corriente continua. *San Cristobal: Núcleo de Electricidad*(,), .
- Roldán Viloria, J.** (2014). *Motores de corriente continua*. Ediciones Paraninfo, SA.