МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное

автономное образовательное учреждение высшего образования

«**Национальный исследовательский университет ИТМО**»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

по дисциплине

«Вычислительная математика»

Вариант 2

Выполнила:

Студентка группы P3218

Богданова Мария Михайловна

Преподаватель:

Бострикова Дарья Константиновна

Санкт-Петербург, 2024

Содержание.

Цель работы………………………………………………………………..3

Задание…………………………………………………………………….3

Описание метода выполнения…………………….........................3

Исходный код……………………………………………………………..3

Расчетные формулы……………………………………………………..4-5

Пример вывода…………..…………………………...............6-8

Цель работы.

Цель работы заключается в ознакомлении с методами решения СЛАУ и их способами их реализации на языках программирования.

Задание.

Написать программу для решения СЛАУ с использованием метода простых итераций.

Требования к программе:

1) В программе численный метод должен быть реализован в виде отдельной подпрограммы/метода/класса, в который исходные/выходные данные передаются в качестве параметров.
2) Размерность матрицы n<=20 (задается из файла или с клавиатуры – по выбору конечного пользователя).
3) Должна быть реализована возможность ввода коэффициентов матрицы, как с клавиатуры, так и из файла (по выбору конечного пользователя).

Для итерационных методов должно быть реализовано:

• Точность задается с клавиатуры/файла

• Проверка диагонального преобладания (в случае, если диагональное преобладание в исходной матрице отсутствует, сделать перестановку строк/столбцов до тех пор, пока преобладание не будет достигнуто). В случае невозможности достижения диагонального преобладания - выводить соответствующее сообщение.

• Вывод вектора неизвестных: $x1, x2, \dots, xn$

• Вывод количества итераций, за которое было найдено решение.

• Вывод вектора погрешностей: $|xi\ (k) - xi\ (k{-}1)\ |$

Описание метода выполнения.

Программа для решения СЛАУ при помощи метода простых итераций была написана на языке Python 3.12.

В ходе решения задачи была использована библиотека random для генерации случайной матрицы.

Исходный код программы.

Репозиторий на GitHub: ссылка

Расчетные формулы.

Метод простых итераций состоит из следующих этапов:

1. Проверка матрицы на соответствие условию диагонального преобладания
2. В случае, если условие преобладания не соблюдается, попытаться переставить строки/столбцы таким образом, чтобы условие выполнялось
3. Выражение неизвестных x из каждого уравнения СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots\dots \\ x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \dots - \frac{a_{n-1n-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases} \quad (6)$$

4. Обозначим:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

$$d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

5. Тогда получим

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_2 \\ \dots\dots \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + d_n \end{cases}$$

Или в векторно-матричном виде: $\boldsymbol{x = Cx + D}$, где x – вектор неизвестных, C – матрица коэффициентов преобразованной системы размерности $n*n$, D – вектор правых частей преобразованной системы.

6. Представим систему в сокращенном виде:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + d_i\ , \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ при } i = j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, \text{ при } i \neq j \end{cases} \qquad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

7. За начальное приближение выберем вектор свободных членов x0 = D

Рабочая формула метода простой итерации:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k\ , \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

где k – номер итерации.

8. Достаточным условием сходимости итерационного процесса является выполнение условие преобладания диагональных элементов, при этом хотя бы одно из неравенств должно быть строгим

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\ , \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

9. Достаточным условием сходимости итерационного метода к решению системы при любом начальном векторе является требование к норме матрицы ||C||:

$$\|C\| < 1$$

$$\|C\| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1$$

$$\|C\| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1$$

$$\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} < 1$$

Пример вывода программы.

Решение СЛАУ методом простых итераций

Выберите опцию:

Считать матрицу из файла - "1"

Считать матрицу с консоли - "2"

Сгенерировать случайную матрицу - "3"

Выйти из программы - "4"

Введите номер опции: 1

Было выбрано чтение матрицы из файла.

Учтите, что максимальная размерность матрицы n = 20. Матрица в файле должна иметь строго следующий вид:

a11 a12 a13 ... a1n | b1
a21 a22 a23 ... a2n | b2
... ... | ...
an1 an2 an3 ... ann | bn

Введите абсолютный путь к файлу в формате C:\\path\\file.txt: C:\\Users\\Fergie\\Desktop\\lab1\\test5.txt

Матрица коэффициентов X:

[2.0, 2.0, 10.0]

[10.0, 1.0, 1.0]

Матрица свободных членов B:

[14.0, 12.0, 13.0]

- Матрица находится в виде диагонального преобладания. -

Полученная матрица коэффициентов C:

0 -0.1 -0.1

-0.2 0 -0.1

-0.2 -0.2 0

Зададим начальное приближение d:
[1.2, 1.3, 1.4]

Норма матрицы ||C|| = 0.4 < 1
Условие сходимости выполняется.

Чтобы выразить все xn, возьмем d за x0 в качестве начального приближения:
x1(0) = - 0.1 * 1.3 - 0.1 * 1.4 + 1.2 = 0.93
x2(0) = - 0.2 * 1.2 - 0.1 * 1.4 + 1.3 = 0.92
x3(0) = - 0.2 * 1.2 - 0.2 * 1.3 + 1.4 = 0.9

Критерий по абсолютным отклонениям:
x[n](1) - x[n-1](1) = 0.27
x[n](2) - x[n-1](2) = 0.38
x[n](3) - x[n-1](3) = 0.5
max = 0.5

Введите значение epsilon: 0.01
Чтобы выразить все x, возьмем xn в качестве следующего приближения:
x1(2) = - 0.1 * 0.92 - 0.1 * 0.8999999999999999 + 1.2 = 1.018
x2(2) = - 0.2 * 0.9299999999999999 - 0.1 * 0.8999999999999999 + 1.3 = 1.024
x3(2) = - 0.2 * 0.9299999999999999 - 0.2 * 0.92 + 1.4 = 1.03

Критерий по абсолютным отклонениям:
x[n](1) - x[n-1](1) = 0.08800000000000008
x[n](2) - x[n-1](2) = 0.10399999999999998
x[n](3) - x[n-1](3) = 0.1299999999999999
max = 0.1299999999999999

Чтобы выразить все x, возьмем xn в качестве следующего приближения:
x1(3) = - 0.1 * 1.024 - 0.1 * 1.0299999999999998 + 1.2 = 0.9946
x2(3) = - 0.2 * 1.018 - 0.1 * 1.0299999999999998 + 1.3 = 0.9934
x3(3) = - 0.2 * 1.018 - 0.2 * 1.024 + 1.4 = 0.9916

Критерий по абсолютным отклонениям:
x[n](1) - x[n-1](1) = 0.023400000000000087
x[n](2) - x[n-1](2) = 0.030599999999999996
x[n](3) - x[n-1](3) = 0.038399999999999988
max = 0.038399999999999988

Чтобы выразить все x, возьмем xn в качестве следующего приближения:
x1(4) = - 0.1 * 0.9934000000000001 - 0.1 * 0.9915999999999999 + 1.2 = 1.0015
x2(4) = - 0.2 * 0.9945999999999999 - 0.1 * 0.9915999999999999 + 1.3 = 1.00192
x3(4) = - 0.2 * 0.9945999999999999 - 0.2 * 0.9934000000000001 + 1.4 = 1.0024

Критерий по абсолютным отклонениям:
x[n](1) - x[n-1](1) = 0.006900000000000128
x[n](2) - x[n-1](2) = 0.008520000000000083
x[n](3) - x[n-1](3) = 0.010800000000000032
max = 0.010800000000000032

Чтобы выразить все x, возьмем xn в качестве следующего приближения:
x1(5) = - 0.1 * 1.0019200000000001 - 0.1 * 1.0024 + 1.2 = 0.999568
x2(5) = - 0.2 * 1.0015 - 0.1 * 1.0024 + 1.3 = 0.99946
x3(5) = - 0.2 * 1.0015 - 0.2 * 1.0019200000000001 + 1.4 = 0.999316

Критерий по абсолютным отклонениям:
x[n](1) - x[n-1](1) = 0.0019320000000000448
x[n](2) - x[n-1](2) = 0.0024600000000001288
x[n](3) - x[n-1](3) = 0.0030840000000000867
max = 0.0030840000000000867

Количество произведенных в ходе решения СЛАУ итераций - 5
Приближенное решение задачи при eps = 0.01:
x1 = 0.999568
x2 = 0.99946
x3 = 0.9993159999999999