

Identités algébriques permettant de démontrer qu'une algèbre libre finie nette est traciquement étale

Claude Quitté, Henri Lombardi

5 juin 2025

L'article suivant est essentiellement dû à Claude Quitté, le deuxième auteur ne s'est occupé que de la mise en forme du texte.

Table des matières

Table des matières	1
1 Introduction	1
2 Jacobien versus bezoutien	2
3 Une identité tracique lorsque \mathbf{B}/\mathbf{A} est libre finie	4
3.1 Le théorème principal	4
3.2 Des rappels d'ordre général	5
3.3 Identités traciques lorsque \mathbf{B}/\mathbf{A} est libre de rang n	5
4 Différentes : $\mathcal{D}_K(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ de Kähler et $\mathcal{D}_N(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ de Noether	7
4.1 Présentation finie	7
4.2 Deux idéaux «différentes»	8
4.3 Un exemple : l'algèbre $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x, y, z]$ définie par les relations $x^2 = y^2 = z^2$, $xy = xz = yz = 0$	9
Bibliographie	10

1 Introduction

L'objectif central de cet article est de donner une démonstration élémentaire du théorème 1.1 suivant, dont nous ne connaissons pas de trace dans la littérature existante. Comme indiqué dans le titre, notre démonstration est basée sur des identités algébriques. Cela confirme l'adage implicite selon lequel une grande partie de l'algèbre commutative la plus abstraite se concentre dans des identités algébriques concernant les matrices de polynômes sur un anneau commutatif arbitraire.

Théorème 1.1 (une algèbre libre de rang fini qui est nette est traciquement étale). *Soit \mathbf{B}/\mathbf{A} une algèbre (commutative) libre de rang fini. Notons $\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}$ le \mathbf{B} -module des différentielles de \mathbf{B}/\mathbf{A} , $N_{\mathbf{B}/\mathbf{A}} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ la norme de \mathbf{B}/\mathbf{A} et $\text{Disc}(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ le discriminant d'une base de \mathbf{B}/\mathbf{A} (défini au carré d'un inversible près).*

1. Le \mathbf{B} -module $\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}$ est de présentation finie et son idéal de Fitting $\mathcal{F}_0(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}})$ (idéal de \mathbf{B}), possède la propriété suivante

$$b \in \mathcal{F}_0(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}) \implies \text{Disc}(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \mid N_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b).$$

2. Supposons $\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}} = 0$. Alors $\text{Disc}(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ est inversible.

Note. La référence de base pour les différentielles de Kähler est le livre [Kunz \(1986\)](#). Dans les ouvrages [Lombardi et Quitté \(2015\)](#) et [Lombardi et Quitté \(2021\)](#), le point 2. du théorème 1.1 est démontré uniquement pour le cas où \mathbf{A} est un corps discret. Cet ouvrage décrit de manière complètement constructive de nombreuses bases de l'algèbre commutative et donne en particulier les détails nécessaires pour la compréhension des idéaux de Fitting et celle du module des différentielles de Kähler et son traitement au moyen des matrices bezoutiennes. Les notions des syzygies triviales et de relateurs triviaux sont abordées dans la section IV-2. ■

Il est clair que le second point du théorème 1.1 est une conséquence directe du premier car dans ce cas, $\mathcal{F}_0(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}) = \mathbf{B}$ et, en appliquant la propriété du point 1. à $b = 1$, on obtient l'inversibilité de $\text{Disc}(\mathbf{B}/\mathbf{A})$.

Un corollaire facile du théorème consiste à le généraliser en affaiblissant l'hypothèse.

Corolaire 1.2. *Considérons une \mathbf{A} -algèbre \mathbf{B} qui est un \mathbf{A} -module projectif de type fini. Alors les conclusions du théorème 1.2 sont valables pour \mathbf{B}/\mathbf{A} .*

Démonstration. En effet après localisation en des éléments comaximaux s_1, \dots, s_n de \mathbf{A} , l'algèbre \mathbf{B} devient libre de rang fini, et les conclusions, parce qu'elles sont satisfaites dans chacune des \mathbf{A}_{s_i} -algèbres $\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_{s_i} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$, sont satisfaites dans \mathbf{B} . □

On fera découler le point 1. (du théorème 1.1) de l'inclusion $\mathcal{F}_0(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}) \subseteq \mu(\text{Ann}(J))$ donnée dans le lemme 2.1, qui suppose seulement que \mathbf{B} est une \mathbf{A} -algèbre de présentation finie, et de l'identité matricielle donnée dans le point 2. du théorème 3.1 spécifique au cas où \mathbf{B}/\mathbf{A} est libre.

2 Jacobien versus bezoutien

En ce qui concerne la démonstration du premier point du théorème 1.1, on commence par étudier le cadre plus général d'une algèbre \mathbf{B}/\mathbf{A} de présentation finie pour laquelle on adopte les notations suivantes. On fixe une présentation finie de \mathbf{B}/\mathbf{A} en n indéterminées $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}[\underline{x}] = \mathbf{A}[x_1, \dots, x_n] \simeq \mathbf{A}[\underline{X}]/I(\underline{X}) \quad \text{où } I(\underline{X}) \text{ est un idéal de type fini de } \mathbf{A}[\underline{X}]$$

On s'alloue deux autres jeux de n indéterminées $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ et $\underline{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ de manière à « relever » les déterminants jacobiens en \underline{X} en des déterminants bezoutiens en $(\underline{Y}, \underline{Z})$, cf. ci-après.

De manière plus structurelle, on présente la \mathbf{A} -algèbre $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ de la manière suivante :

$$\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} = \mathbf{A}[\underline{y}, \underline{z}] = \mathbf{A}[y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n] \simeq \frac{\mathbf{A}[\underline{Y}, \underline{Z}]}{I(\underline{Y}) + I(\underline{Z})}$$

la correspondance étant la suivante :

$$f(\underline{x}) \otimes g(\underline{x}) \longleftrightarrow f(\underline{y})g(\underline{z})$$

Le morphisme surjectif $\mu: \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ défini par la multiplication n'est autre que l'évaluation $(\underline{Y}, \underline{Z}) := \underline{X}$

$$\begin{cases} \mathbf{A}[\underline{Y}, \underline{Z}] \longrightarrow \mathbf{A}[\underline{X}] \\ f(\underline{Y}, \underline{Z}) \longmapsto f(\underline{X}, \underline{X}) \end{cases} \quad \mu: \begin{cases} \mathbf{A}[\underline{y}, \underline{z}] \longrightarrow \mathbf{A}[\underline{x}] \\ f(\underline{y}, \underline{z}) \longmapsto f(\underline{x}, \underline{x}) \end{cases}$$

Notons $J = \ker \mu$. C'est l'idéal de $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ engendré par les $b \otimes 1 - 1 \otimes b$ pour $b \in \mathbf{B}$. C'est aussi un sous- \mathbf{B} -module pour la structure de \mathbf{B} -module à gauche $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$. Même chose à droite.

Comme $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x_1, \dots, x_n]$, cet idéal J est de type fini, engendré par les $x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i$. Dans le modèle $\mathbf{A}[\underline{y}, \underline{z}]$, il est n -engendré :

$$J \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Ker } \mu = \langle y_1 - z_1, \dots, y_n - z_n \rangle$$

Soit $f \in \mathbf{A}[\underline{X}]$. Il y a n polynômes $(U_j)_{1 \leq j \leq n}$ de $\mathbf{A}[\underline{Y}, \underline{Z}]$ tels que

$$f(\underline{Y}) - f(\underline{Z}) = \sum_{j=1}^n (Y_j - Z_j) U_j(\underline{Y}, \underline{Z})$$

Il y a un choix quasi-canonique pour les U_j . Pour $n = 2$:

$$\begin{aligned} f(Y_1, Y_2) - f(Z_1, Z_2) &= f(Y_1, Y_2) - f(Z_1, Y_2) + f(Z_1, Y_2) - f(Z_1, Z_2) \\ &= (Y_1 - Z_1) \frac{f(Y_1, Y_2) - f(Z_1, Y_2)}{Y_1 - Z_1} + (Y_2 - Z_2) \frac{f(Z_1, Y_2) - f(Z_1, Z_2)}{Y_2 - Z_2} \end{aligned}$$

Et pour n quelconque :

$$U_j = \frac{f(Z_1, \dots, Z_{j-1}, \underline{Y_j}, Y_{j+1}, \dots, Y_n) - f(Z_1, \dots, Z_{j-1}, \underline{Z_j}, Y_{j+1}, \dots, Y_n)}{Y_j - Z_j}$$

Cela étant, soit $(\underline{F}) = (F_1, \dots, F_n)$ un système de n polynômes de $\mathbf{A}[\underline{X}]$. On lui associe le *déterminant bezoutien* $\delta_{\underline{F}} \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ en écrivant :

$$F_i(\underline{Y}) - F_i(\underline{Z}) = \sum_{j=1}^n (Y_j - Z_j) U_{ij}(\underline{Y}, \underline{Z})$$

et en évaluant le déterminant bezoutien correspondant en $(\underline{y}, \underline{z})$:

$$\delta_{\underline{F}} := \det(\mathcal{B}_{\underline{Y}, \underline{Z}}(\underline{F}))(\underline{y}, \underline{z}) \quad \text{où} \quad \mathcal{B}_{\underline{Y}, \underline{Z}}(\underline{F}) = (U_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}[\underline{Y}, \underline{Z}])$$

Alors $\mu(\delta_{\underline{F}})$ est le déterminant jacobien de \underline{F} vu dans \mathbf{B} :

$$\mu(\delta_{\underline{F}}) := \det(\text{Jac}_{\underline{X}}(\underline{F}))(\underline{x}) \quad \text{où} \quad \text{Jac}_{\underline{X}}(\underline{F}) = (\partial F_i / \partial X_j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}[\underline{X}])$$

On verra dans la section 4 que les deux idéaux de \mathbf{B} qui interviennent dans cette inclusion, $\mathcal{F}_0(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}})$ d'une part, $\mu(\text{Ann}(J))$ sont des *différentes* de \mathbf{B}/\mathbf{A} . Le premier est la différentielle $\mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ de Kähler, le second la différentielle $\mathcal{D}_{\mathbf{N}}(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ de Noether. On y prouvera que l'idéal J de $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ est un $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ -module de présentation finie, et que son 0-Fitting $\mathcal{F}_0(J)$, (un idéal de $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$), a la propriété suivante

$$\mu(\mathcal{F}_0(J)) = \mathcal{F}_0(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}).$$

Puisque $\mathcal{F}_0(M) \subseteq \text{Ann}(M)$ pour tout module M de présentation finie, en particulier $\mathcal{F}_0(J) \subseteq \text{Ann}(J)$, cela fournira une *autre* démonstration du lemme 2.1.

Mais ici nul besoin de cette section 4 car la démonstration donnée ci-dessous est élémentaire : elle utilise simplement que $\tilde{U} U = \det(U) \text{Id}_n$ pour une matrice carrée $U \in \mathbb{M}_n$.

Lemme 2.1. Dans l'anneau $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$, considérons l'annulateur $\text{Ann}(J)$ de l'idéal J . Il est caractérisé par :

$$\text{Ann}(J) = \left\{ \beta \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} \mid (b \otimes 1)\beta = (1 \otimes b)\beta \ \forall b \in \mathbf{B} \right\}.$$

Dans le modèle $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} = \mathbf{A}[\underline{y}, \underline{z}]$ on a

$$\text{Ann}(J) = \left\{ f(\underline{y}, \underline{z}) \mid f(\underline{Y}, \underline{Z}) \in \mathbf{A}[\underline{Y}, \underline{Z}] \text{ et } f(\underline{y}, \underline{z}) \times (y_i - z_i) = 0 \ \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

On a alors l'inclusion suivante d'idéaux de \mathbf{B} :

$$\mathcal{F}_0(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}) \subseteq \mu(\text{Ann}(J)).$$

Démonstration. L'idéal $\mathcal{F}_0(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}})$ est engendré par les évaluations en \underline{x} des déterminants jacobiens $\det(\text{Jac}_{\underline{X}}(\underline{F}))$ lorsque $(\underline{F}) = (F_1, \dots, F_n)$ parcourt les n -systèmes de polynômes de $I(\underline{X})$. Il suffit donc de démontrer qu'un tel générateur est dans $\mu(\text{Ann}(J))$.

Avec la notation précédente $U = \mathcal{B}_{\underline{Y}, \underline{Z}}(\underline{F})$, écrivons :

$$\begin{bmatrix} F_1(\underline{Y}) - F_1(\underline{Z}) \\ \vdots \\ F_n(\underline{Y}) - F_n(\underline{Z}) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} Y_1 - Z_1 \\ \vdots \\ Y_n - Z_n \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \det(U) \begin{bmatrix} Y_1 - Z_1 \\ \vdots \\ Y_n - Z_n \end{bmatrix} = \tilde{U} \begin{bmatrix} F_1(\underline{Y}) - F_1(\underline{Z}) \\ \vdots \\ F_n(\underline{Y}) - F_n(\underline{Z}) \end{bmatrix}$$

En conséquence $\det(U)(Y_i - Z_i) \in I(\underline{Y}) + I(\underline{Z})$. En évaluant en $(\underline{y}, \underline{z})$, on obtient dans $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$:

$$\delta_{\underline{F}} \times (y_i - z_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Ainsi $\delta_{\underline{F}} \in \text{Ann}(J)$, ce qui montre que $\det(\text{Jac}_{\underline{X}}(\underline{F}))(\underline{x})$, égal à $\mu(\delta_{\underline{F}})$, appartient à $\mu(\text{Ann}(J))$. \square

3 Une identité tracique lorsque \mathbf{B}/\mathbf{A} est libre finie

3.1 Le théorème principal

On note μ le morphisme

$$\mu: \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}, \ x \otimes y \mapsto xy$$

et $J = \ker \mu$.

Théorème 3.1 (une identité tracique attachée à $\mu(\text{Ann}(J))$ lorsque \mathbf{B}/\mathbf{A} est libre).

On suppose \mathbf{B}/\mathbf{A} libre de rang n . On considère un élément arbitraire $\delta \in \text{Ann}(J)$. Nous notons

- $b = \mu(\delta)$,
- $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de \mathbf{B}/\mathbf{A} ,
- $T_{\underline{\varepsilon}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\varepsilon_i \varepsilon_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice tracique de cette base,
- $\text{Disc}(\underline{\varepsilon}) = \det(T_{\underline{\varepsilon}})$ (c'est le discriminant de \mathbf{B}/\mathbf{A} défini à une unité multiplicative près),
- M_b la matrice de multiplication par b dans la base $\underline{\varepsilon}$.

On écrit $\delta \in \text{Ann}(J) \subseteq \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ de la manière suivante :

$$\delta = u_1 \otimes \varepsilon_1 + \dots + u_n \otimes \varepsilon_n \quad u_j \in \mathbf{B}$$

Notons $P_{\underline{u}} = (u_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ la matrice dont la ligne i est celle des coordonnées de u_i dans la base $\underline{\varepsilon}$:

$$u_i = \sum_j u_{ij} \varepsilon_j$$

1. Avec $b = \mu(\delta)$, on a les deux égalités matricielles dans $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$:

$$M_b = \left(\text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(u_i \varepsilon_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n} = P_{\underline{u}} T_{\underline{\varepsilon}}$$

2. En prenant les déterminants, on obtient $N_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b) = \det(P_{\underline{u}}) \text{Disc}(\underline{\varepsilon})$.

En conséquence, $\text{Disc}(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ divise $N_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b)$ pour tout $b \in \mu(\text{Ann}(J))$.

3.2 Des rappels d'ordre général

On rappelle des résultats bien connus.

Tout d'abord $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ est muni de deux structures de \mathbf{B} -modules, une à gauche, l'autre à droite : pour $b \in \mathbf{B}$, $\beta \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$

$$b.\beta = (b \otimes 1)\beta, \quad \beta.b = \beta(1 \otimes b)$$

Fait 3.2.

1. Sur $\text{Ann}(J)$, les deux structures (à gauche et à droite) de \mathbf{B} -module de $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ coïncident. De plus pour $\delta \in \text{Ann}(J)$ et $\beta \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ on a

$$\mu(\beta) \delta = \delta \mu(\beta) = \beta \delta.$$

2. L'idéal J de $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ et le \mathbf{B} -module $\text{Ann}(J)$ sont stables par l'involution $\text{swap} : \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ qui réalise $x \otimes y \mapsto y \otimes x$.

Démonstration. 1. Pour $b \in \mathbf{B}$, il faut vérifier que $(b \otimes 1)\delta = (1 \otimes b)\delta$, ce qui est immédiat car $b \otimes 1 - 1 \otimes b \in J$.

L'égalité $\mu(\beta) \delta = \beta \delta$ résulte du fait que $\mu(\beta) \otimes 1 - \beta \in \text{Ker}(\mu) \stackrel{\text{déf}}{=} J$.

2. La stabilité de J résulte de $J = \ker \mu$ et de $\mu \circ \text{swap} = \mu$. Elle implique la stabilité de $\text{Ann}(J)$. \square

3.3 Identités traciques lorsque \mathbf{B}/\mathbf{A} est libre de rang n

On suppose dans la suite que \mathbf{B}/\mathbf{A} est libre de rang n de base $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Lemme 3.3.

1. On munit $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ de la structure de \mathbf{B} -algèbre à gauche. Alors pour $\beta = \sum_i x_i \otimes y_i \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ on obtient

$$\text{Tr}_{(\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B})/\mathbf{B}}(\beta) = \sum_i x_i \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(y_i).$$

2. Lorsque $\delta = \sum_i x_i \otimes y_i$ appartient à $\text{Ann}(J)$, on obtient

$$\mu(\delta) = \sum_i x_i y_i = \sum_i x_i \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(y_i) = \sum_i y_i \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(x_i).$$

Démonstration. 1. Il suffit de le vérifier pour $\beta = x \otimes y$. Pour la structure de \mathbf{B} -module à gauche de $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$, $1 \otimes \underline{\varepsilon}$ est une \mathbf{B} -base. La matrice de la multiplication par $x \otimes y$ dans cette base $1 \otimes \underline{\varepsilon}$ est $x M_y \in \mathbb{M}_n(\mathbf{B})$ où $M_y \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ est la matrice de multiplication par y dans la base $\underline{\varepsilon}$. D'où :

$$\text{Tr}_{(\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B})/\mathbf{B}}(x \otimes y) = \text{trace}(x M_y) = x \text{trace}(M_y) = x \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(y)$$

2. Soit un \mathbf{B} -module libre E , $x \in E$ et $\alpha \in E^*$. L'endomorphisme v de E de rang ≤ 1 associé à (x, α) est celui défini par $y \mapsto \alpha(y)x$; sa trace est $\text{trace}(v) = \alpha(x)$.
 Regardons la multiplication par δ sur $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ comme un endomorphisme du \mathbf{B} -module à gauche $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$. Comme $\delta\beta = \mu(\beta)\delta$ pour $\beta \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$, on peut appliquer la remarque précédente à $E = \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$, $x = \delta$, $\alpha = \mu$, l'endomorphisme v étant la multiplication par δ .
 Donc :

$$\text{Tr}_{(\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B})/\mathbf{B}}(\delta) = \mu(\delta)$$

En utilisant le point 1., on obtient ainsi la première égalité du point 2. La seconde égalité s'obtient en appliquant la première à $\text{swap}(\delta) = \sum_i y_i \otimes x_i$ qui appartient également à $\text{Ann}(J)$. \square

Lemme 3.4 (un critère d'appartenance à $\text{Ann}(J)$). *Soit $t \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ que l'on écrit sur la \mathbf{B} -base $1 \otimes \underline{\varepsilon}$ du \mathbf{B} -module $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ à gauche :*

$$t = u_1 \otimes \varepsilon_1 + \cdots + u_n \otimes \varepsilon_n, \quad u_i \in \mathbf{B}.$$

Notons $c_{ij}^{(k)} \in \mathbf{A}$ les constantes de structure définies par $\varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_k c_{ij}^{(k)} \varepsilon_k$.

Alors $t \in \text{Ann}(J)$ si et seulement si

$$u_i \varepsilon_j = \sum_k c_{kj}^{(i)} u_k \quad \forall i, j.$$

Démonstration. On va utiliser, d'une part, pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{B}$

$$\sum_i x_i \otimes \varepsilon_i = 0 \iff x_1 = \cdots = x_n = 0,$$

et d'autre part, $t \in \text{Ann}(J)$ si et seulement si $\varepsilon_j.t = t.\varepsilon_j$ pour tout j .

Montrons, pour j fixé, que

$$\sum_i \left(u_i \varepsilon_j - \sum_k c_{kj}^{(i)} u_k \right) \otimes \varepsilon_i = \varepsilon_j.t - t.\varepsilon_j.$$

Il en résultera l'équivalence annoncée.

Il est clair que $\sum_i u_i \varepsilon_j \otimes \varepsilon_i = \varepsilon_j.t$. Pour l'autre somme, utilisons $c_{kj}^{(i)} u_k \otimes \varepsilon_i = u_k \otimes c_{kj}^{(i)} \varepsilon_i$. On obtient

$$\sum_i \left(\sum_k c_{kj}^{(i)} u_k \right) \otimes \varepsilon_i = \sum_k u_k \otimes \sum_i c_{kj}^{(i)} \varepsilon_i = \sum_k u_k \otimes \varepsilon_k \varepsilon_j = t.\varepsilon_j. \quad \square$$

Démonstration du théorème 3.1.

1. D'après le lemme 3.3 on a $b \stackrel{\text{déf}}{=} \mu(\delta) = \sum_k \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(u_k) \varepsilon_k$. Donc

$$\begin{aligned} b\varepsilon_j &= \sum_k \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(u_k) \varepsilon_k \varepsilon_j = \sum_{k,i} \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(u_k) c_{kj}^{(i)} \varepsilon_i \\ &= \sum_i \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}} \left(\sum_k c_{kj}^{(i)} u_k \right) \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Or $\sum_k c_{kj}^{(i)} u_k = u_i \varepsilon_j$ d'après le lemme 3.4. Il vient $b\varepsilon_j = \sum_i \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(u_i \varepsilon_j) \varepsilon_i$, d'où l'égalité matricielle $M_b = \left(\text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(u_i \varepsilon_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$. C'est la première égalité à démontrer dans le théorème 3.1.

La seconde égalité résulte de

$$(P_{\underline{u}} T_{\varepsilon})_{ij} = \sum_k u_{ik} \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\varepsilon_k \varepsilon_j) = \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}} \left(\sum_k u_{ik} \varepsilon_k \varepsilon_j \right) = \text{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(u_i \varepsilon_j). \quad \square$$

Démonstration du théorème 1.1. Il suffit de démontrer le point 1. C'est une conséquence directe de l'inclusion $\mathcal{F}_0(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}) \subseteq \mu(\text{Ann}(J))$ donnée dans le lemme 2.1 et de l'identité matricielle donnée dans le point 2. du théorème 3.1. \square

4 Différentes : $\mathcal{D}_K(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ de Kähler et $\mathcal{D}_N(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ de Noether

4.1 Présentation finie

Théorème 4.1. Soit \mathbf{B}/\mathbf{A} une algèbre de présentation finie, on note μ l'application \mathbf{A} -linéaire de multiplication

$$\mu : \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}, \quad x \otimes y \mapsto xy$$

et $J = \ker \mu$. Alors J est un $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ -module de présentation finie.

Démonstration. Adoptons les notations de la section 2 pour présenter \mathbf{B}/\mathbf{A} sous la forme $\mathbf{A}[\underline{X}]/I(\underline{X})$. Si $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\underline{X}]/\langle f_1, \dots, f_s \rangle$, alors $I(\underline{X}) = \langle f_1(\underline{X}), \dots, f_s(\underline{X}) \rangle$. Ceci fournit une présentation de $(\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B})/\mathbf{A}$ sous la forme $\mathbf{A}[\underline{Y}, \underline{Z}]/(I(\underline{Y}) + I(\underline{Z}))$ dans laquelle $J = \langle y_1 - z_1, \dots, y_n - z_n \rangle$.

Il s'agit de montrer que le noyau de la forme linéaire π :

$$\pi : \mathbf{A}[\underline{y}, \underline{z}]^n \xrightarrow{[y_1 - z_1, \dots, y_n - z_n]} \mathbf{A}[\underline{y}, \underline{z}]$$

est un sous-module de type fini de $\mathbf{A}[\underline{y}, \underline{z}]^n$.

Pour $f \in \mathbf{A}[\underline{X}]$, définissons $U_j^f \in \mathbf{A}[\underline{Y}, \underline{Z}]$ par

$$U_j^f(\underline{Y}, \underline{Z}) = \frac{f(Z_1, \dots, Z_{j-1}, \underbrace{Y_j}_{\text{cercle}}, Y_{j+1}, \dots, Y_n) - f(Z_1, \dots, Z_{j-1}, \underbrace{Z_j}_{\text{cercle}}, Y_{j+1}, \dots, Y_n)}{Y_j - Z_j}$$

de sorte que :

$$f(\underline{Y}) - f(\underline{Z}) = \sum_j (Y_j - Z_j) U_j^f(\underline{Y}, \underline{Z}).$$

Posons

$$u_j^f = U_j^f(\underline{y}, \underline{z}) \in \mathbf{A}[\underline{y}, \underline{z}], \quad u^f = (u_1^f, \dots, u_n^f) \in \mathbf{A}[\underline{y}, \underline{z}]^n.$$

Pour $f \in I(\underline{X})$, le vecteur u^f est dans $\ker \pi$.

Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathbf{A}[\underline{y}, \underline{z}]^n$. Nous allons obtenir un système générateur fini de $\ker \pi$ formé tout d'abord par les relateurs triviaux entre les $y_j - z_j$

$$(y_i - z_i)e_j - (y_j - z_j)e_i, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

et ensuite par les u^f lorsque f décrit un système générateur (fini) de l'idéal $I(\underline{X})$.

Soit une relation dans $\mathbf{A}[\underline{y}, \underline{z}]$ avec $v_j = V_j(\underline{y}, \underline{z})$ où $V_j(\underline{Y}, \underline{Z}) \in \mathbf{A}[\underline{Y}, \underline{Z}]$:

$$\sum_j (y_j - z_j) v_j = 0$$

Dans $\mathbf{A}[\underline{Y}, \underline{Z}]$, ceci signifie

$$\sum_j (Y_j - Z_j) V_j(\underline{Y}, \underline{Z}) = f(\underline{Y}) - g(\underline{Z}) \quad \text{avec } f(\underline{Y}) \in I(\underline{Y}) \text{ et } g(\underline{Z}) \in I(\underline{Z}).$$

En spécialisant $(\underline{Y}, \underline{Z}) := \underline{X}$, on obtient $f(\underline{X}) = g(\underline{X})$, qui appartient à $I(\underline{X})$. D'où

$$\sum_j (Y_j - Z_j) V_j(\underline{Y}, \underline{Z}) = f(\underline{Y}) - f(\underline{Z}) = \sum_j (Y_j - Z_j) U_j^f(\underline{Y}, \underline{Z}).$$

En notant $W_j(\underline{Y}, \underline{Z}) = V_j(\underline{Y}, \underline{Z}) - U_j^f(\underline{Y}, \underline{Z})$:

$$\sum_j (Y_j - Z_j) W_j(\underline{Y}, \underline{Z}) = 0.$$

Comme la suite $(Y_1 - Z_1, \dots, Y_n - Z_n)$ est 1-sécante¹ dans $\mathbf{A}[\underline{Y}, \underline{Z}]$, on obtient que le vecteur (W_1, \dots, W_n) de $\mathbf{A}[\underline{Y}, \underline{Z}]^n$ est combinaison linéaire des relateurs triviaux entre les $Y_j - Z_j$. Et par suite que le vecteur (v_1, \dots, v_n) est combinaison linéaire de u^f et des relateurs triviaux entre les $y_j - z_j$.

En conséquence, la réunion de l'ensemble des relateurs triviaux et de l'ensemble de tous les u^f lorsque f décrit $I(\underline{X})$ est un système générateur de $\ker \pi$. On conclut en remarquant que $f \mapsto u^f$ est \mathbf{A} -linéaire en f , donc on peut limiter les f à un système générateur fini de $I(\underline{X})$. \square

4.2 Deux idéaux «différentes»

Définition 4.2 (les (idéaux) différentes de Kähler et de Noether). Soit \mathbf{B}/\mathbf{A} une algèbre de présentation finie. On note μ la multiplication (en tant qu'application \mathbf{A} -linéaire)

$$\mu : \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}, \quad x \otimes y \mapsto xy$$

et $J = \ker \mu$. On définit deux idéaux de \mathbf{B} , chacun étant nommé *idéal différente* de \mathbf{B}/\mathbf{A} . Le premier de Kähler, le second de Noether :

$$\mathcal{D}_K(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = \mathcal{F}_0(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}), \quad \mathcal{D}_N(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = \mu(\text{Ann}(J)).$$

D'après le lemme 2.1, on a l'inclusion $\mathcal{D}_K(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{D}_N(\mathbf{B}/\mathbf{A})$.

Note. Voir [Kunz \(1986\)](#). La différente de Kähler est définie dans la section 10. L'annexe G définit les différentes au sens de Noether et de Dedekind². Dans la proposition 10.17, Kunz démontre que les trois notions d'idéal différente coïncident dans le contexte suivant : l'anneau \mathbf{A} est noethérien, \mathbf{B}/\mathbf{A} est finie et localement intersection complète, et $\text{Frac}(\mathbf{B})/\text{Frac}(\mathbf{A})$ est étale. \blacksquare

Lemme 4.3. Dans le contexte de la définition précédente, l'idéal J est un $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ -module de présentation finie, cf. le théorème 4.1. On peut donc considérer son idéal de Fitting $\mathcal{F}_0(J)$ qui est un idéal de $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$. Alors :

$$\mathcal{D}_K(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = \mu(\mathcal{F}_0(J)).$$

Comme on a toujours $\mathcal{F}_0(J) \subseteq \text{Ann}(J)$, on retrouve l'inclusion $\mathcal{D}_K(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{D}_N(\mathbf{B}/\mathbf{A})$.

Démonstration. Soit \mathfrak{a} un idéal d'un anneau commutatif \mathbf{C} et $\pi : \mathbf{C} \twoheadrightarrow \mathbf{C}/\mathfrak{a}$ la surjection canonique. Si E est un \mathbf{C} -module de présentation finie, alors $E/\mathfrak{a}E$ est un $(\mathbf{C}/\mathfrak{a})$ -module de présentation finie et :

$$\mathcal{F}_0(E/\mathfrak{a}E) = \pi(\mathcal{F}_0(E))$$

On applique cette remarque à $\mathbf{C} = \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$, $\mathfrak{a} = J$ de sorte que $\mathbf{C}/\mathfrak{a} \simeq \mathbf{B}$ via μ i.e. $\pi = \mu$. On prend comme module $E = J$. On a alors $E/\mathfrak{a}E = J/J^2$, si bien que :

$$\pi(\mathcal{F}_0(J)) = \mathcal{F}_0(J/J^2).$$

Pour conclure, on utilise le fait que J/J^2 est un modèle pour $\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}$. \square

1. Une suite est dite 1-sécante, si le module des syzygies pour (l'idéal engendré par) cette suite est engendré par les syzygies triviales.

2. La différente de Dedekind $\mathcal{D}_D(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ est définie lorsque \mathbf{B} est un module projectif de type fini sur \mathbf{A} . C'est l'idéal engendré par $f'(x)$, où $f(T)$ est le polynôme caractéristique de (la multiplication par) x dans le \mathbf{A} -module projectif de type fini \mathbf{B} . Voir à ce sujet dans [Lombardi et Quitté \(2015\)](#) ou [Lombardi et Quitté \(2021\)](#), la proposition III-5.10 et le point 5 de la définition VI-3.1.

Théorème 4.4. Soit \mathbf{B}/\mathbf{A} une algèbre de présentation finie. Le \mathbf{B} -module $\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}$ est alors de présentation finie. Supposons qu'il soit m -engendré (si \mathbf{B}/\mathbf{A} est n -engendré, on peut prendre $m = n$).

On a les inclusions suivantes d'idéaux de \mathbf{B} :

$$\left(\mathcal{D}_{\mathbf{N}}(\mathbf{B}/\mathbf{A})\right)^m \subseteq \left(\text{Ann}(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}})\right)^m \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{N}}(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \subseteq \text{Ann}(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}).$$

En particulier si $m = 1$ (c'est le cas lorsque \mathbf{B}/\mathbf{A} est monogène), tous les idéaux ci-dessus sont égaux.

Démonstration.

► Montrons l'inclusion $\mathcal{D}_{\mathbf{N}}(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \subseteq \text{Ann}(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}})$ i.e. $\mu(\text{Ann}(J)) \subseteq \text{Ann}(J/J^2)$. Pour $\delta \in \text{Ann}(J) \subseteq \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$, il suffit de voir que $\mu(\delta).J \subseteq J^2$. Soit $\beta \in J$. Alors

$$\mu(\delta).\beta \stackrel{\text{déf}}{=} (\mu(\delta) \otimes 1)\beta = (\mu(\delta) \otimes 1 - \delta)\beta$$

Or $\mu(\delta) \otimes 1 - \delta \in J$ donc $\mu(\delta).\beta \in J^2$.

► L'inclusion $\left(\text{Ann}(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}})\right)^m \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ i.e. $\left(\text{Ann}(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}})\right)^m \subseteq \mathcal{F}_0(\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}})$ résulte, pour tout module de présentation finie M engendré par m générateurs, de l'inclusion $\left(\text{Ann}(M)\right)^m \subseteq \mathcal{F}_0(M)$ \square

4.3 Un exemple : l'algèbre $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x, y, z]$ définie par les relations $x^2 = y^2 = z^2, xy = xz = yz = 0$

Cet exemple est dû aux auteurs [Scheja et Storch \(1974\)](#) cf. page 102. Il est reproduit dans l'exemple 5.4, de l'article [Iyengar et Takahashi \(2021\)](#).

Il s'agit d'un exemple avec une inclusion stricte $\mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \subsetneq \mathcal{D}_{\mathbf{N}}(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ lorsque \mathbf{A} est un corps de caractéristique $\neq 5$. Peu d'explications sont fournies chez les auteurs mentionnés.

Les polynômes qui définissent \mathbf{B}/\mathbf{A} sont les 5 polynômes suivants :

$$\underline{F}: \quad X^2 - Y^2, \quad X^2 - Z^2, \quad XY, \quad XZ, \quad YZ$$

On a $x^3 = x^2x = y^2x = 0$ et plus généralement $\langle x, y, z \rangle^3 = 0$ i.e. $\langle X, Y, Z \rangle^3 \subset \langle \underline{F} \rangle$. L'algèbre \mathbf{B}/\mathbf{A} est libre de base $(1, x, y, z, x^2)$. La jacobienne de \underline{F} est donnée par :

$$\text{Jac}(\underline{F}) = \begin{bmatrix} \partial_X & \partial_Y & \partial_Z \\ 2X & -2Y & 0 \\ 2X & 0 & -2Z \\ Y & X & 0 \\ Z & 0 & X \\ 0 & Z & Y \end{bmatrix}$$

Ses mineurs d'ordre 3 sont des polynômes homogènes de degré 3 donc nuls modulo \underline{F} . En conséquence :

$$\mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = 0$$

On va montrer que $5x^2 \in \mathcal{D}_{\mathbf{N}}(\mathbf{B}/\mathbf{A})$.

Pour travailler avec $\text{Ann}(J) \subseteq \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$, on commence par renommer x, y, z en x_1, x_2, x_3 . Alors

$$\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} = \mathbf{A}[y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3], \quad J = \langle y_1 - z_1, y_2 - z_2, y_3 - z_3 \rangle$$

avec

$$y_1^2 = y_2^2 = y_3^2, \quad y_1 y_2 = y_1 y_3 = y_2 y_3 = 0, \quad z_1^2 = z_2^2 = z_3^2, \quad z_1 z_2 = z_1 z_3 = z_2 z_3 = 0$$

Il nous faut trouver des $t \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ tels que $t \cdot (y_i - z_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Puisque l'on veut $\mu(t) \neq 0$, on cherche t homogène de degré 2 en les y_i, z_i . Voici un candidat

$$t = y_1^2 + z_1^2 + s = y_2^2 + z_2^2 + s = y_3^2 + z_3^2 + s \quad \text{avec} \quad s = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3$$

Vérifions que $t \cdot (y_i - z_i) = 0$. Pour $i = 1$ par exemple, on écrit $t = (y_1^2 + y_1 z_1 + z_1^2) + (y_2 z_2 + y_3 z_3)$:

$$(y_1^2 + y_1 z_1 + z_1^2)(y_1 - z_1) = y_1^3 - z_1^3 = 0 - 0 = 0; \quad (y_2 z_2 + y_3 z_3)(y_1 - z_1) = 0 \quad \text{car} \quad \begin{array}{l} y_2 y_1 = y_3 y_1 = 0 \\ z_2 z_1 = z_3 z_1 = 0 \end{array}$$

Ainsi $t \in \text{Ann}(J)$ et $\mu(t) = 5x_1^2$. En revenant aux notations x, y, z , on a bien montré $5x^2 \in \mathcal{D}_N(\mathbf{B}/\mathbf{A})$.

De la même manière, soit $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x_1, \dots, x_n]$ l'algèbre définie par les relations $x_1^2 = \dots = x_n^2$ et $x_i x_j = 0$ pour $i < j$. Alors \mathbf{B}/\mathbf{A} est libre de rang $n + 2$, de base $(1, x_1, \dots, x_n, x_1^2)$. Et on a $(n + 2)x_1^2 \in \mathcal{D}_N(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ via un argument analogue au cas $n = 3$. Soit $t \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} = \mathbf{A}[y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n]$ défini par :

$$t = y_i^2 + z_i^2 + \sum_{j=1}^n y_j z_j$$

On a $t \in \text{Ann}(J)$ et $\mu(t) = (n + 2)x_1^2$. Pour $n \geq 3$, on a $\mathcal{D}_K(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = 0$ puisque les n -mineurs de la jacobienne sont des polynômes homogènes de degré n et que la composante homogène de degré d de \mathbf{B} est nulle pour $d \geq 3$.

Bibliographie

Srikanth B. IYENGAR et Ryo TAKAHASHI : The Jacobian ideal of a commutative ring and annihilators of cohomology. *J. Algebra*, 571:280–296, 2021. [9](#)

Ernst KUNZ : *Kähler differentials*. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986. [2](#), [8](#)

Henri LOMBARDI et Claude QUITTÉ : *Commutative algebra : constructive methods. Finite projective modules*. Algebra and applications, 20. Springer, Dordrecht, 2015. URL <https://arxiv.org/abs/1605.04832>. Traduit du français (Calvage & Mounet, Paris, 2011, revu et étendu par les auteurs) par Tania K. Roblot. [2](#), [8](#)

Henri LOMBARDI et Claude QUITTÉ : *Algèbre commutative. Méthodes constructives. Modules projectifs de type fini. Cours et exercices*. Paris : Calvage & Mounet, 2021. Deuxième édition, revue et étendue, du livre paru en 2011. [2](#), [8](#)

Günther SCHEJA et Uwe STORCH : *Lokale Verzweigungstheorie*, volume No. 5 de *Schriftenreihe des Mathematischen Institutes der Universität Freiburg*. Université de Fribourg, Institut des Mathématiques, Fribourg, 1974. Vorlesungen über Kommutative Algebra (Wintersemester 1973/74). [9](#)