۱،۱ - ۱،۲

۳ - الف) با استفاده از اصل ضرب $4\times12\times3\times2=\boxed{288}$ پیرک متمایز داریم.

ب) با استفاده از اصل ضرب $4\times3\times2\times1=\boxed{24}$ پیرک آبی داریم.

۴ - الف) $10\times9\times8\times7=\boxed{5040}$

ب) ۱: $3\times9\times8\times7=\boxed{1512}$

۲: $(3\times7\times6\times5)\times\underbrace{4}_{\text{۴ حالت برای نقش پزشک}} = 252$

۳: از اصل متمم استفاده می‌کنیم

$$\underbrace{5040}_{\text{کل}} - \underbrace{(7\times6\times5\times4)}_{\text{بدون پزشک}} = \boxed{4200}$$

۱۰ - فرض کنید قفسه‌ها کنار هم دیگر قرار دارند به طور کلی ما ۱۵! حالت برای ترتیب چینش کتاب‌ها داریم
حالا ۱۶ روش برای تقسیم کتاب‌ها بین دو قفسه داریم (تمام کتاب‌ها در قفسه چپ، ۱۴ کتاب در قفسه چپ و ۱ کتاب در قفسه راست و ...) از این ۱۶ روش ۲ روش نامطلوب‌اند زیرا یک قفسه خالی می‌ماند پس در کل $(15!\times14)$ روش داریم.

۱۵ - ابتدا e ها را قرار می‌دهیم e □ e □ e □ e □ e حالا باید حروف باقی‌مانده را در فواصل بین e ها قرار دهیم که به $\boxed{4!}$ روش امکان دارد.

۱۶ - اگر منظور این است که ۳۰ نماد دیگر در ابتدا و انتها هم می‌توانند ظاهر شوند.
جواب $40^{2}\times30^{23}$ می‌باشد دگرنه جواب $10^{2}\times30^{23}$ می‌باشد.

۲۴ - اگر یک ۵ رقم سمت چپ باشد.

$$\underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{برای ۴ ها}}\times\underbrace{4}_{\text{برای ۷}}\times\underbrace{3}_{\text{برای ۶}}\times\underbrace{2}_{\text{برای بقیه}}=\boxed{360}$$

و اگر ۶ یا ۷ رقم سمت چپ باشند

$$360 = \underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{برای ۵ ها}}\times\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{برای ۴ ها}}\times\underbrace{2}_{\text{برای بقیه}}\times\underbrace{2}_{\text{رقم سمت چپ ۶ یا ۷}}$$

$$360+360=\boxed{720}$$

۲۵ - مراحل را می‌تواند به یک رشته از حروف R و W و G و B مدل کرد که تعداد هر حرف برابر تعداد هدف های آن حرف می باشد و جواب برابر

$$\frac{12!}{4! \times 3! \times 2! \times 3!} = \boxed{277200}$$

۲۸ - طبق مسأله برهر دو سؤال $\binom{14}{7}$ جواب می شود به طور کلی می توان مسأله ما به رشتای متشکل از تعدادی U و R یا غیره تنظیم کرد که تعداد هر کدام مشخص است.

$n(U) = 4 \quad n(R) = 2$

$$\boxed{\binom{4+2}{2}}$$

۲۹ - الف) و ب) $\frac{10!}{7! \times 2! \times 1!}$

ج) مانند سؤال قبل می توان از یک رشته استفاده کرد که هر حرف نشان دهنده‌ی یک نوع حرکت می باشد.

۳۰ - الف) $(12 \times 1) + ((10 - 5 + 1) \times 2) + ((15 - 8 + 1) \times 3) = \boxed{48}$

ب) از اصل جمع استفاده می شود چون دستورات پس از هم دیگر اجرا می شوند.

۳۱ - الف) $12 \times (10 - 5 + 1) \times (15 - 8 + 1) = \boxed{576}$

ب) اصل ضرب زیرا برنامه‌ها به هم وابسته اند.

۳۸ - الف) با توجه به اینکه نفر اول در سمت چپ یا راست ضلع خود باشد $7!$ حالت پیش می آید پس در کل $2 \times 7!$ می شود

ب) با توجه به اینکه A در سمت چپ یا راست ضلع خود باشد ۵ حالت برای B وجود دارد و برای بقیه $6!$ حالت وجود دارد. $2 \times 5 \times 6! = \boxed{7200}$

ج) با توجه به اینکه A در سمت چپ یا راست ضلع خود باشد ۴ حالت برای B وجود دارد و $6!$ حالت برای بقیه $2 \times 4 \times 6! = \boxed{5760}$

۱ و ۳

۴ - الف) $2^6 - 1 = 63$

تمام نقطه‌ها نمی‌توانند عادی باشند

ب) $\binom{6}{3} = 20$

پ) $\binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} = \boxed{31}$

ت) $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = \boxed{22}$

---

۶ -
$$\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n^2 - 2n + 1 = \boxed{(n-1)^2}$$

۷ - الف) $\binom{20}{12}$

ب) $\binom{10}{6}^2 = \boxed{210^2}$

پ) $\binom{10}{2}\binom{10}{10} + \binom{10}{4}\binom{10}{8} + \binom{10}{6}\binom{10}{6} + \binom{10}{8}\binom{10}{4} + \binom{10}{10}\binom{10}{2}$

ت) $\binom{10}{7}\binom{10}{5} + \binom{10}{8}\binom{10}{4} + \binom{10}{9}\binom{10}{3} + \binom{10}{10}\binom{10}{2}$

ث) $\binom{10}{8}\binom{10}{4} + \binom{10}{9}\binom{10}{3} + \binom{10}{10}\binom{10}{2}$

۱۳ - الف) $\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$

ب) $\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$

۱۷ - الف) چون هر دو نقطه یک خط را مشخص می‌کنند $\binom{15}{2} = \boxed{105}$

ب) $\binom{25}{3}$ مثلث - $\binom{25}{3}$ صفحه - $\binom{25}{4}$ چهاروجهی

۲۰ - الف) $\frac{10!}{4! \times 3! \times 3!}$

ب) $\underbrace{\binom{10}{8}}_{\text{برای ۱ها}} \times 2^2 + \underbrace{\binom{10}{9}}_{\text{برای ۱ها}} \times 2 + \underbrace{\binom{10}{10}}_{\text{برای ۱ها}} \times 1$

پ) ابتدا حالت‌های وزن ۴ را به دست می‌آوریم (۴ تا ۱، و ۶ تا ۰) (۱ تا ۲، ۲ تا ۱، و ۷ تا ۰) (۲ تا ۲، و ۸ تا ۰)

$\boxed{615} = \binom{10}{4} + \binom{10}{2}\binom{8}{1} + \binom{10}{2}$

۲۱ - الف) حالت‌ها (۱ تا ۳ ، ۰ تا ۷) (۱ تا ۲ ، ۲ تا ۱ ، ۰ تا ۷) (۳ تا ۱ ، ۰ تا ۹)

$$\boxed{\binom{10}{3}+\binom{10}{1}\binom{9}{2}+\binom{10}{1}=420}$$

ب) حالت‌ها (۴ تا ۱ ، ۰ تا ۶) (۲ تا ۱ ، ۱ تا ۲) (۳ تا ۲ ، ۰ تا ۸) (۱ تا ۳ ، ۱ تا ۱ ، ۰ تا ۸)

$$\boxed{\binom{10}{4}+\binom{10}{1}\binom{9}{2}+\binom{10}{2}+\binom{9}{1}\binom{10}{1}=705}$$

پ) باید تعداد رقم‌های فرد زوج باشد. پس تعداد زوجی مکان را برای فردها انتخاب می‌کنیم پس هر مکان از فرد باشد ۲ حالت دارد و اگر زوج باشد هم ۲ حالت دارد.

$$\left(\binom{10}{0}+\binom{10}{2}+\binom{10}{4}+\binom{10}{6}+\binom{10}{8}+\binom{10}{10}\right)\times 2^{10}$$

۲۵ - الف) $\binom{12}{3}$ ب) از تغییر متغیر $a=2y$ استفاده می‌کنیم $\binom{12}{3}\times 8$

پ) از تغییر متغیر $a=2x$ و $b=-3y$ استفاده می‌کنیم $\binom{12}{3}\times(-27)\times(512)$

۲۸ - الف) $\boxed{\dfrac{10!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!}}$ ب) $\boxed{\dfrac{12!}{2!\times 2!\times 2!\times 2!\times 4!}\times 4\times 9\times 16}$

پ) $\boxed{\dfrac{12!}{0!\times(2!)^4\times 4!}\times 4\times 25\times 81}$ ☆ مانند سؤال قبل از تغییر متغیرها کمک گرفتیم

۳۴ - با توجه به فرمول بسط دوجمله‌ای نیوتون به $3^n=(1+2)^n$ می‌رسیم

۴.۱

۱- الف) جوابهای صحیح و نامنفی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ برابر $\binom{14}{4}$

ب) ابتدا به هر کدام یک سکه می دهیم حالا باید بقیه ۵ سکه را بین آنها تقسیم کنیم

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5$ $\boxed{\binom{9}{4}}$

پ) ابتدا به کودک بزرگتر ۲ سکه می دهیم حالا بقیه ۸ تا را بین آنها تقسیم می کنیم.

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ $\boxed{\binom{12}{4}}$

۵- الف) ابتدا تعدادی از ۵ سکه مختلف را انتخاب می کنیم و را آنها تعداد باقیمانده را از ۵ سکه ۱ دلاری برمی داریم پس جواب می شود. $\boxed{2^5}$

ب) درست مانند سؤال قبل جواب برابر 2^n می شود.

۷- الف) $\binom{35}{3}$ ب) ابتدا به هر کس یکی می دهیم $\binom{31}{3}$

پ) به ۲ تا ۷ تا و به ۲ تا ۵ تا می دهیم $\binom{11}{3}$ ت) ابتدا به هر کس ۸ تا می دهیم. $\boxed{1}$

ث) با استفاده از تغییر متغیر $y_i=x_i+2$ عبارت به $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=40$ تبدیل می شود که جواب برابر $\binom{43}{3}$

ج) ابتدا به هر کدام یکی می دهیم حالا ابتدا تعداد کل حالات را حساب می کنیم سپس حالاتی که $x_4 \geq 26$ است را از آن کم می کنیم $\boxed{\binom{31}{3}-\binom{6}{3}}$

۱۲- الف) به جای < 40 ، ≤ 39 را می گذاریم، حالا یک x_6 اضافه می کنیم $\leq$ تبدیل به $=$ می شود پس تعداد جواب ها برابر $\binom{44}{5}$ می شود ب) ابتدا از تغییر متغیر $y_i=x_i+3$ استفاده می کنیم سپس مانند سؤال قبل عمل می کنیم و جواب می شود. $\binom{59}{5}$

۱۴ - الف) ابتدا از تغییر متغیر برای ۲۳ و ۳۴ استفاده می‌کنیم پس به روش معمول حل می‌کنیم.

$$\boxed{9 \times 16 \times \frac{8!}{2!\times 2!\times 1!\times 1!\times 0!}}$$

ب) ~~[illegible]~~ توان ۵ جمله را با x_i ها نشان می‌دهیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$$

$$x_i \geqslant 0$$

جواب برابر $\binom{12}{4}$

۱۵ - ابتدا تعداد کتاب‌های هر قفسه را با ترکیب باتکرار حساب می‌کنیم پس $24!$ روش برای چیدن ترتیب کتاب‌ها وجود دارد.

$$\boxed{\binom{23}{3} \times 24!}$$

۱۶ - جواب ۱ برابر $\binom{n-1}{18}$ و جواب ۲ برابر $\binom{n-1}{63}$ است و باید

که این یعنی

$$\binom{n-1}{63} = \binom{n-1}{18}$$

$$\boxed{63 + 18 = n - 1}$$

و از این نتیجه می‌گیریم

$$\boxed{n = 82}$$

۱۹ - الف) ابتدا ۳ تا تفاوت را تعیین می‌کنیم و سپس با استفاده از ترکیب باتکرار ۲۵ تک یکیان را $\binom{29}{4} \times 5^3$

ب) برای گرفتن ۲۰ تست ۴ حالت وجود دارد و برای گرفتن ۲۵ تست ۵ حالت وجود دارد.

در هر حالت تعداد توزیع‌های باقیمانده را با استفاده از روش‌های سؤال‌های قبل به‌دست می‌آوریم

$$4\times\binom{23}{3} + 16\times\binom{18}{3} + 64\times\binom{8}{3} + 4\times\binom{18}{3} + 16\times\binom{28}{3} +$$

$$16\times\binom{8}{3} + 64$$

۲۱ - x_{20}، ...، x_2، x_1 را تعداد دفعاتی فرض کنید که اعداد ۱ تا ۲۰ را به ترتیب نوشته‌ایم می‌توانیم ۴ عدد از این ۲۰ عدد انتخاب کنیم به صورتی که عضو تکراری هم مجاز است هر طور انتخاب کنیم تنها یک راه برای انتساب این ۴ عدد به i، j، k و m وجود دارد.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 4$$

$$\boxed{\binom{23}{19}}$$

۲۳ - با توجه به اینکه $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 3$ قطعه کد $\boxed{\binom{12}{9} = 220}$ بار اجرا می شود و باید مجموع اعداد ۱ تا ۲۲۰ را محاسبه کنیم که برابر

$\frac{220 \times 221}{2}$ می شود.

۲۵ - همان حالت انتخاب با تکرار و با ترتیب اعداد برای ۴ متغیر خود را در نظر می گیریم

به دو روش می توان این مقدار را حساب کرد

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 4$$

روش اول $\binom{n+3}{n-1} = \binom{n+3}{4}$

روش دوم ابتدا مقدار متغیر بزرگتر که آن را با i مشخص می کنیم انتخاب می کنیم برای بقیه $\binom{i+2}{3}$ روش

وجود دارد پس $\sum_{i=1}^{n} \binom{i+2}{3} = \binom{n+3}{4}$ جواب است (دوگانه شماری)

ب)

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{\cancel{24}\ 4} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i+2)(i+1)i}{\cancel{6}}$$

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4} = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{n(n+1)}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}}$$

۲۷ - الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m \qquad x_i \geq 1$

جواب برابر $\binom{m-1}{n-1}$ می شود

ب) $x_1 + \dots + x_n = m \qquad x_i \geq 2$

جواب برابر $\binom{m-2n+n-1}{n-1}$ می شود.

تمرینات تکمیلی

۲- الف) 5^9 ب) 5×4^8 پ) 3×2^8

۴- الف) $\binom{25}{2}^3$ ب) حالت بندی می کنیم

$$+\ \underbrace{\binom{3}{1}\binom{25}{4}\binom{25}{1}\binom{25}{1}}_{\text{از یک کتاب ۴ مورد و از بقیه ۱ مورد}}$$

$$\underbrace{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{25}{1}\binom{25}{2}\binom{25}{3}}_{\text{از یک کتاب ۱ مورد از یک کتاب ۲ مورد و از یکی ۳ مورد}} + \underbrace{\binom{25}{2}^3}_{\text{از هر کتاب ۲ مورد}}$$

۵- الف) 10^{25} ب) ابتدا پرچم ها به ۲۵! روش مرتب می کنیم بعد از ترکیب با تکرار استفاده می کنیم $\boxed{25!\times\binom{34}{9}}$

پ) درست مانند (ب) عمل می کنیم با این تفاوت که ابتدا به هر تیرک یکی می دهیم $\boxed{25!\times\binom{24}{9}}$

۶- ابتدا نقش ها را در یک ردیف می گذاریم حالا باید از ۴۶ مکان ۱۵ مکان برای خط ها بیابیم $\binom{46}{15}$

۸- $\boxed{\binom{n}{7}\times 3^{n-7}}$

۱۱- الف) باید تمام دیزگ ها یکسان و برای آخری انتخاب دیگری کنیم $\boxed{1+2+4+5=12}$

ب) مانند الف عمل می کنیم ولی درباره دو دیزگی را مد نظر می گیریم

$$(1\times 2)+(1\times 4)+(1\times 5)+(2\times 4)+(2\times 5)+(4\times 5)=\boxed{49}$$

۱۵- الف) باید تعداد اعداد منفی زوج باشد. یک: $\binom{5}{4}+\binom{5}{2}\binom{4}{2}+\binom{4}{4}$

دو: $\binom{7}{3}+\binom{5}{3}\binom{6}{4}+\binom{8}{4}$ سه: اگر از هر عدد از ۹ عدد ۴ بار انتخاب کنیم درست می شود.

پس کانیت جواب (دو) را در نظر بگیریم و ۹ تا از آن کم کنیم. $\boxed{\binom{7}{3}+\binom{5}{3}\binom{6}{4}+\binom{8}{4}-9}$

ب) باید تعداد اعداد منفی فرد باشد. یک: $\binom{5}{3}\binom{4}{1}+\binom{5}{1}\binom{4}{3}$

دو: $4\times\binom{7}{4}+5\times\binom{6}{3}$ سه: چون نمی توان از عدد ۴ بار یا بیشتر انتخاب کرد جواب (دو)

۱۹ - الف) ابتدا مکان A را به ۵ حالت مشخص می‌کنیم پس از A به صورت ساعتگرد بقیه را می‌چینیم که به !۹ حالت امکان پذیر است.

$$\boxed{5 \times 9!}$$

ب) ابتدا می‌دانیم ۳ حالت برای A و B وجود دارد بعد از آن مانند (الف) !۸ روش وجود دارد.

$$\boxed{3 \times 8!}$$

۲۰ - الف) ابتدا دو معادله را از هم جدا می‌کنیم.

$$x_1+x_2+x_3=6 \qquad x_4+x_5=9$$

$$x_i \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq 5$$

جواب برابر $\boxed{\binom{8}{2}\binom{10}{1}}$ می‌شود

ب) می‌دانیم $6 \geq x_1+x_2+x_3$ به ازای هر تعداد برای $x_1+x_2+x_3$ جداگانه حساب می‌کنیم

$$x_1+x_2+x_3=c \Rightarrow x_4+x_5 \leq 15-c \Rightarrow x_4+x_5+y=15-c$$

جواب برابر $\displaystyle\sum_{c=0}^{6}\binom{c+2}{c}\binom{17-c}{15-c}$

۲۳ - حالت اول این است ردیف ۱ ها در ابتدا یا انتهای فهرست باشد که بعد یا قبل آن یک ۲ وجود دارد.

حالت دوم این است ردیف ۱ ها در وسط فهرست باشد که در این صورت دو ۲ در دو طرف آن است.

$$2 \times \frac{(n+r-k-1)!}{(n-k)! \times (r-1)!} + \frac{(n+r-k-1)!}{(n-k)! \times (r-2)!}$$

---

۲۸ -

$$10+24r+2s^2-6s-8+60+8t-48=\boxed{14+24r+2s^2-6s+8t}$$

۳۲ - الف) با استفاده از مسأله مسیر جواب برابر $\binom{11}{4}$ می‌شود. ب) هر حرکت قطری جای یک حرکت سطری و یک حرکت ستونی را پر می‌کند. پس باید روی تعداد حرکات قطری حالت‌بندی کنیم

$$\sum_{i=0}^{4}\frac{(11-i)!}{i! \times (4-i)! \times (7-i)!}$$

۳۳ - الف) $\binom{11}{4}$ ب) ابتدا کل را حساب می‌کنیم منهای تعداد روش‌هایی که از آن قطعه می‌گذرند.

$$\boxed{\binom{11}{4} - \binom{4}{2}\binom{4}{1}}$$

پ) الف) مانند سؤال قبل $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} \frac{(11-i)!}{i!\times(4-i)!\times(7-i)!}$

ب) ابتدا کل را حساب می‌کنیم منهای حالت‌هایی که از قطعه مورد نظر می‌گذرند.

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{(4-i)!}{i!\times(2-i)!\times(2-i)!} - \sum_{i=0}^{1} \frac{(4-i)!}{i!\times(1-i)!\times(3-i)!}$$

۳۴ - الف) $u+l=7$ $\quad l-u=1$ $\quad n(U)=u \quad n(L)=l$

$\boxed{u=3 \,,\, l=4}$ جواب برابر $\binom{7}{3}$

ب) $u=6$ $\quad l=1$ جواب برابر $\binom{7}{1}$ پ) کل منهای حالت (ب) $\binom{7}{3}-\binom{7}{1}$

ت) $\boxed{\binom{7}{4}-\binom{7}{2}=14}$

ث) ابتدا می‌دانیم که رأی اول حتماً به نفع دانشجوی اول است. حالا می‌توانیم این مسأله را مانند مسأله‌های قبل مدل کنیم رای به دانشجوی اول حالت U و رای به دانشجوی دوم حالت L است. باید از (۱و۱) به (۴و۱۴) برسیم به طوری که هیچگاه بر محور x مماس نشویم یا آن را قطع کنیم.

$$\binom{13}{5} - \binom{13}{9}$$