فرهاد امان ۹۹۳۱۰۰۶ ۱۰۸

۲ - الف) $\binom{22}{3}$ ب) C_i یعنی که $x_i \geq 8$ باشد پس باید $N(\bar{C_1}\bar{C_2}\bar{C_3}\bar{C_4})$ را حساب کنیم که برابر

$$N - S_1 + S_2 = \binom{22}{3} - 4\binom{14}{3} + \binom{4}{2}\binom{6}{3}$$

پ) با استفاده از تغییر متغیر معادله را به $x_1+x_2+x_3+x_4=13$ با شرط‌های $0 \leq x_1 \leq 5$ و $0 \leq x_2 \leq 6$ و $0 \leq x_3 \leq 4$ و $0 \leq x_4 \leq 5$ تبدیل می‌کنیم. شرط C_i یعنی x_i بزرگتر از مقادیر کران بالای خود باشد پس باید $N(\bar{C_1}\bar{C_2}\bar{C_3}\bar{C_4})$ را حساب کنیم.

$$N - S_1 + S_2 = \binom{16}{3} - \left(\binom{10}{3}+\binom{9}{3}+\binom{11}{3}+\binom{10}{3}\right) + \left(1 + \binom{5}{2} + \binom{4}{1} + \binom{4}{1} + \binom{5}{2} + 1\right)$$

۳ - تنها حروف I و O و N می‌توانند جفت‌های تکراری ایجاد کنند و کلا ۶ جفت وجود دارد که برای هرکدام شرط C_i یعنی دوبار از آن جفت تکرار شود باید $N(\bar{C_1}\bar{C_2}\bar{C_3}\bar{C_4}\bar{C_5}\bar{C_6})$ را حساب کنیم

$$N - S_1 + S_2 = \frac{11!}{2!\,2!\,2!} - \binom{6}{1}\frac{9!}{2!\,2!} + 3! \times \frac{7!}{2!} = \boxed{4460400}$$

۵ - x نمی‌تواند ۰ باشد و چون ۰ شرایط مد نظر را ندارد تاثیری در محاسبات ندارد.

$x_1+x_2+\dots+x_7=31$ ، $0 \leq x_i \leq 9$ شرط C_i یعنی $\boxed{x_i \geq 10}$

حال باید $N(\bar{C_1}\bar{C_2}\dots\bar{C_7})$ را حساب کنیم $N - S_1 + S_2 - S_3$

$$\boxed{\binom{37}{6} - \binom{7}{1}\binom{27}{6} + \binom{7}{2}\binom{17}{6} - \binom{7}{3}\binom{7}{6}}$$

۶ - الف) ابتدا با تغییر متغیر کران‌های پایین را به ۰ می‌رسانیم $0 \leq x_i \leq 15$ ، $x_1+x_2+\dots+x_{12}=80$ و شرط C_i یعنی $x_i \geq 16$ و باید $N(\bar{C_1}\bar{C_2}\dots\bar{C_{12}})$ را حساب کنیم.

$$N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 = \binom{91}{11} - \binom{12}{1}\binom{75}{11} + \binom{12}{2}\binom{59}{11} - \binom{12}{3}\binom{43}{11} + \binom{12}{4}\binom{27}{11} - \binom{12}{5}\binom{11}{11}$$

۶- ب) مانند حالت قبل $10 \le x_i \le 25$ را به $0 \le y_i \le 15$ تبدیل می کنیم حالا بجای آن از $0 \le 5z_i \le 15$. استفاده می کنیم که $0 \le z_i \le 3$ داریم

$$5z_1+5z_2+\dots+5z_{12}=80 \Rightarrow \boxed{z_1+z_2+\dots+z_{12}=16}$$

طبق معمول شرط c_i یعنی $\boxed{z_i \ge 4}$ و باید $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_{12})$ را حساب کنیم.

$$N-S_1+S_2-S_3+S_4=\binom{27}{11}-\binom{12}{1}\binom{23}{11}+\binom{12}{2}\binom{19}{11}-\binom{12}{3}\binom{15}{11}+\binom{12}{4}\binom{11}{11}$$

۱۱- c_i یعنی عدد i نباید پس جواب برابر $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_6)$ است

$$\frac{N-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5}{N}=\frac{6^8-\binom{6}{1}5^8+\binom{6}{2}4^8-\binom{6}{3}3^8+\binom{6}{4}2^8-\binom{6}{5}}{6^8}$$

۱۶- $N(n)$ یعنی تعداد روزهایی که شرط n را دارند. c_i یعنی دوست i ام را دیده است.

حالا باید $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_7)>0$ باشد. $N-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5+S_6-S_7$

$$84-\binom{7}{1}35+\binom{7}{2}16-\binom{7}{3}8+\binom{7}{4}4-\binom{7}{5}2+\binom{7}{6}1-\binom{7}{7}0=\boxed{0}$$

۲٫۸ ۳- تنها R، O، N، S، E می توانند جفت حروف یکسان متوالی ایجاد کنند.
c_i یعنی هر یک از این حرف ها جفت متوالی داشته است.

الف) $$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_5)=\frac{14!}{(2!)^5}-\binom{5}{1}\frac{13!}{(2!)^4}+\binom{5}{2}\frac{12!}{(2!)^3}-\binom{5}{3}\frac{11!}{(2!)^2}+\binom{5}{4}\frac{10!}{2!}-\binom{5}{5}9! = \boxed{1286046720}$$

ب) $$\boxed{E_2=\binom{2}{0}\binom{5}{2}\frac{12!}{(2!)^3}-\binom{3}{1}\binom{5}{3}\frac{11!}{(2!)^2}+\binom{4}{2}\binom{5}{4}\frac{10!}{2!}-\binom{5}{3}\binom{5}{5}9!}$$

ج) $$\boxed{L_3=\binom{2}{0}\binom{5}{3}\frac{11!}{(2!)^2}-\binom{3}{1}\binom{5}{4}\frac{10!}{2!}+\binom{4}{2}\binom{5}{5}9!}$$

۴- x_i یعنی که i در برد f نباشد. پس باید E_3 و L_3 را محاسبه کنیم.

$$E_3 = S_3 - \binom{4}{1}S_4 + \binom{5}{2}S_5 - \binom{6}{3}S_6 + \binom{7}{4}S_7 = \binom{7}{3}4^{10} - \binom{4}{1}\binom{7}{4}3^{10}$$

$$+\binom{5}{2}\binom{7}{2}2^{10} - \binom{6}{3}\binom{7}{1} + \cancel{\binom{7}{4}\binom{7}{7}0^{10}} \quad \boxed{=286482000}$$

$$\boxed{L_3 = \binom{7}{3}4^{10} - \binom{3}{1}\binom{7}{4}3^{10} + \binom{4}{2}\binom{7}{2}2^{10} - \binom{5}{3}\binom{7}{1}1}$$

۷- x_i یعنی رنگ i ام نباشد الف) $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4)$

$$\binom{52}{13} - \binom{4}{1}\binom{39}{13} + \binom{4}{2}\binom{26}{13} - \binom{4}{3}\binom{13}{13}$$

ب) $$E_1 = \binom{4}{1}\binom{39}{13} - \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{26}{13} + \boxed{\binom{4}{3}\binom{3}{2}\binom{13}{13}}$$

ج) $$E_2 = \binom{4}{2}\binom{26}{13} - \binom{3}{1}\binom{4}{3}\binom{13}{13}$$

۸- ب) $E_{t-1} = S_{t-1} - \binom{t}{1}S_t$ و $L_{t-1} = L_t + E_{t-1}$

پ) $$L_{t-1} = L_t + E_{t-1} = S_{t-1} - \binom{t}{1}S_t + S_t = S_{t-1} - \underbrace{\binom{t-1}{1}S_t}_{\binom{t-1}{t-2}S_t}$$

ت) $L_m = L_{m+1} + E_m$

ث) می‌دانیم که $L_m = L_{m+1} + E_m$ پس تعداد هر کدام از L_{m+1} و E_m را می‌نویسیم و با هم جمع می‌کنیم

$$L_{m+1} = S_{m+1} - \binom{m+1}{m}S_{m+2} + \binom{m+2}{m}S_{m+3} - \dots + (-1)^{t-m-1}\binom{t-1}{m}S_t$$

$$E_m = S_m - \binom{m+1}{1}S_{m+1} + \binom{m+2}{2}S_{m+2} \dots + (-1)^{t-m}\binom{t}{t-m}S_t$$

ادامه ↓

ادامه ث)

حال اگر دو عبارت را جمع کنیم به $C_m = S_m - \binom{m}{1} S_{m+1} + \binom{m+1}{2} S_{m+2} - \dots + (-1)^{t-m} \binom{t-1}{m-1} S_t$

می رسیم پس قضیه با استقرا ثابت می شود.

۳٫۸ ‏۵ - الف) $\boxed{7! - d_7}$ ‏ب) اگر حروف الفبا ۲۶ حرف باشد d_{26}

$$d_n = \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} - \dots (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

۹ - ابتدا به $10!$ طریق توزیع می کنیم دفعه ی بعدی d_{10} روش داریم $\boxed{10! \times d_{10}}$

۱۰ - الف) ۱- $\frac{d_n}{n!}$ ‏۲- $\frac{d_{n-1}}{(n-1)!}$ ‏۳- $1 - \frac{d_n}{n!}$ ‏۴) $\frac{\binom{n}{r} d_{n-r}}{n!}$

ب) چون می دانیم $\boxed{d_n \sim \frac{n!}{e}}$ ‏۱- $\frac{1}{e}$ ‏۲- $\frac{1}{e}$ ‏۳- $1 - \frac{1}{e}$ ‏۴- $\frac{1}{r!\, e}$

۱۱ - الف) $(d_{10})^2$ ‏ب) C_i یعنی نفر i ام هم کیف و هم پالتو خود را بگیرد پس باید $N(\bar{C_1} \bar{C_2} \dots \bar{C_{10}})$ را حساب کنیم.

$$\boxed{(10!)^2 - \binom{10}{1}(9!)^2 + \binom{10}{2}(8!)^2 - \dots + 1}$$

۱۳ - در این سؤال در واقع با نوعی دوگانه شماری روبرو هستیم مسأله ما تعداد جایگشت های n شی می باشد. روش اول که روش مرسوم است جواب $n!$ دارد روش دوم به این صورت است که ما می دانیم در هر جایگشت تعدادی شی در سرجای خود هستند و تعدادی در جای خود نیستند پس ابتدا تعدادی را به صورت $\binom{n}{k}$ انتخاب می کنیم و آن ها را به d_k طریق پریش می دهیم و بقیه $(n-k)$ شی در سرجای خود قرار می گیرند پس

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

۱۴- الف) شرط c_i یعنی i و $(i+1)$ پشت هم باشند. حالا باید $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\cdots\overline{c_{n-1}})$ را حساب کنیم

$$n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \binom{n-1}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} \times (1!)$$

ب) ابتدا d_n و d_{n-1} را می‌نویسیم می‌بینیم که تمام $(n-k)!$ ها وجود دارند به ازای $0 \leq k \leq n$. اما مسأله ضریب $(n-k)!$ است.

$$(-1)^k\binom{n}{k} + (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}$$

طبق بسط پاسکال مقدار آن برابر $(-1)^k\binom{n-1}{k}$ می‌شود که برابر ضریب $(n-k)!$ در قسمت الف می‌باشد.

۱۵- c_i یعنی دقیقاً جفت i و $(i+1)$ مگر برای n و ۱ حالا باید $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\cdots\overline{c_n})$ را حساب کنیم. تعداد کل جایگشت‌ها برابر $(n-1)!$ است.

$$\boxed{(n-1)! - \binom{n}{1}(n-2)! + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}}$$

تکمیلی

۲- ابتدا معادله $x_1+x_2+\cdots+x_6=37$ را می‌نویسیم که $0 \leq x_i \leq 9$ می‌باشد این معادله را به معادله $x_1+x_2+\cdots+x_6+k=37$ تبدیل می‌کنیم که $0 \leq x_i \leq 9$ و $0 \leq k \leq 37$ می‌باشد.

شرط c_i یعنی $x_i \geq 10$ باشد باید $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\cdots\overline{c_6})$ را به دست آوریم.

$$\boxed{\binom{43}{6} - \binom{6}{1}\binom{33}{6} - \binom{6}{2}\binom{23}{6} - \binom{6}{3}\binom{13}{6}}$$

۵- شرط c_i یعنی i و $(i+1)$ اتفاق بیفتد مگر c_8 که بیانگر ۸ و ۱ می‌باشد حالا باید $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\cdots\overline{c_8})$ را حساب کنیم

$$\boxed{8! - \binom{8}{1}7! + \binom{8}{2}6! + \cdots + (-1)^7\binom{8}{7}1!}$$

۶- الف) شرط c_i یعنی دیوار شماره i و $(i+1)$ یک رنگ دارند به جز c_5 که دیوارهای ۵ و ۱ را نشان می‌دهد. حال باید $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\cdots\overline{c_5})$ را حساب کنیم.

$$k^5 - \binom{5}{1}k^4 + \binom{5}{2}k^3 - \binom{5}{3}k^2 + \binom{5}{4}k - \binom{5}{5}k$$

۶- ب) کوچکترین k که جواب بالا برای آن مثبت باشد $k=3$ است که برابر ۳۰ روش است.

پ) برای قسمت الف مانند قبل عمل می‌کنیم.

$$\boxed{k^6 - \binom{6}{1}k^5 + \binom{6}{2}k^4 - \cdots + \binom{6}{6}k}$$

برای بخش ب به ازای $k=2$ می‌توانیم رنگ آمیزی کنیم که این موضوع بدون این قضیه هم بدیهی است.

۸- شرط c_i یعنی ظرف iام دارای دقیقاً ۲ شی باشد. حالا ما طبق قضیه می‌دانیم که

$$E_m = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \binom{i}{m} S_i$$

حال ما باید مقدار S_i را بیابیم.

$$S_i = \binom{n}{i}\binom{s}{2}\binom{s-2}{2}\binom{s-4}{2}\cdots\binom{s-(i-1)2}{2}(n-i)^{(s-2i)}$$

حال S_i را ساده می‌کنیم.

$$S_i = \frac{n! \times s! \times (n-i)^{(s-2i)}}{(n-i)! \times i! \times (2!)^i \times (s-2i)!}$$

حال S_i را در رابطه قبل قرار می‌دهیم و ساده می‌کنیم به عبارت زیر می‌رسیم.

$$\boxed{\frac{(-1)^m n!\, s!}{m!} \sum_{i=m}^{n} \frac{(-1)^i \times (n-i)^{(s-2i)}}{(i-m)! \times (n-i)! \times (s-2i)! \times (2!)^i}}$$

۱۱- الف) به وضوح $\binom{n-m}{2-m}$ ب) از دوگانه شماری استفاده می‌کنیم شرط c_i یعنی از m شی که باید حتماً انتخاب شوند شی iام نباشد و باید $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_m)$ را حساب کنیم

$$\boxed{\binom{n}{2} - \binom{m}{1}\binom{n-1}{2} + \binom{m}{2}\binom{n-2}{2} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m}\binom{n-m}{2}}$$