فرهاد امان ۹۹۳۱۰۰۶ **۹-۱**

۱- الف) $(1+x+x^2+\dots+x^7)^4$ ضریب x^{20}

ب) $(1+x^2+x^4+\dots)^3(1+x+x^2+\dots)^2$ ضریب x^{20}

پ) $(x^2+x^3+x^4)(x^3+x^4+x^5+\dots+x^8)^4$ ضریب x^{30}

ت) $(1+x^2+x^4+\dots)(x+x^3+x^5+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)^3$ ضریب x^{30}

۲- الف) $(1+x+x^2+\dots)^5$

ب) $(x+x^2+x^3+\dots+x^{35})^5$ ت) $(x^{10}+x^{11}+\dots+x^{35})(1+x+x^2+\dots+x^{35})^4$

پ) $(x^2+x^3+x^4+\dots+x^{35})^5$ ث) $(x^{10}+x^{11}+\dots+x^{35})^2(1+x+x^2+\dots+x^{35})^3$

۴- الف) هرکدام از جمله های عبارت اول تعداد سکه های ۱ تومانی و هر جمله از عبارت دوم تعداد سکه های ۵ تومانی است. ب) $(1+x+x^2+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)(1+x^{10}+x^{20}+\dots)$

۵- ابتدا با تغییر متغیر همه را مثبت می کنیم. $x_3 \le 10$ ، $x_1+x_2+x_3+x_4=31$

ضریب x^{31} در $(1+x+x^2+\dots)^3(1+x+x^2+\dots+x^{10})$

۶- الف) $(1+ax)(1+bx)(1+cx)\cdots(1+rx)(1+sx)(1+tx)$

ب) $(1+ax+a^2x^2+a^3x^3)(1+bx+b^2x^2+b^3x^3)(1+cx+c^2x^2+c^3x^3)\cdots(1+tx+t^2x^2+t^3x^3)$

۹-۲

۱- الف) $(1+x)^8$ ب) $8\times(1+x)^7$ پ) $\frac{1}{1+x}$ ت) $x^3\times\frac{1}{1-x}$

ث) $6x^3\times\frac{1}{1+x}$ ج) $\frac{1}{1-x^2}$ چ) $\frac{1}{1-2x}$ ح) $x^2\times\frac{1}{1-ax}$

۲- الف) $-27,54,-36,8,0,0,0,\dots$ ب) $0,0,0,0,1,1,1,\dots$ پ) $3^0,-3^1,3^2,-3^3,\dots$

ت) $0,0,0,0,1,0,1,0,1,\dots$ ث) $3^{-1},3^{-2},3^{-3},\dots$ ج) $-10,1,1,1,1,1,1,1,4,1,1,\dots$

۳- الف) $f(x)-a_3x^3+3x^3$ ب) $f(x)+(3-a_3)x^3+(7-a_7)x^7$

پ) $2f(x)-2a_1x+x-2a_3x^3+3x^3$

ت) $2f(x)+\frac{5}{1-x}+(-2a_1-4)x+(-2a_2-2)x^2+(3-2a_3)x^3$

۹- الف) ۰ ب) $\binom{-3}{12}(-1)^{12} - 5\binom{-3}{14}(-1)^{14}$

پ)

$$\binom{4}{0}\binom{-4}{15}(-1)^{15} + \binom{4}{1}\binom{-4}{14}(-1)^{14} + \binom{4}{2}\binom{-4}{13}(-1)^{13} + \binom{4}{3}\binom{-4}{12}(-1)^{12} + \binom{4}{4}\binom{-4}{11}(-1)^{11}$$

۱۰- الف) به راحتی با ترکیب با تکرار جواب $\binom{15}{3}$ بدست می‌آید با تابع مولد هم به همین شکل

ب) $(1+x+x^2+\dots+x^6)^4$ x^{12} یعنی باید ضریب x^{12} را در $(1+x+x^2+\dots+x^6)^4$ بدست آوریم.

$$(1-x^7)^4 \times \frac{1}{(1-x)^4}$$

$$\boxed{(-4)\binom{-4}{5}(-1)^5 + \binom{-4}{12}(-1)^{12}}$$

۱۳- $(x+x^2+x^3+\dots+x^6)^{12}$ ضریب x^{30}

$$x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{12} = \left[1-\binom{12}{1}x^6+\binom{12}{2}x^{12}\dots+x^{72}\right]\times$$

$$\left[\binom{-12}{0}(-x)^0+\binom{-12}{1}(-x)^1+\dots\right]$$

$$\binom{-12}{18}(-1)^{18} - \binom{12}{1}\binom{-12}{12}(-1)^{12} + \binom{12}{2}\binom{-12}{6}(-1)^6 - \binom{12}{3}$$

چون مساله احتمال است پاسخ را بر 6^{12} تقسیم می‌کنیم.

۱۵- $(1+x+x^2+\dots)^2(1+x^2+x^4+\dots)$ ضریب x^n

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)\frac{1}{1+x}+\left(\frac{1}{8}\right)\frac{1}{1-x}+\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(1-x)^2}+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\boxed{\frac{2n^2+8+7+(-1)^n}{8}}$$

Scanned with CamScanner

۱۶ - برای مدار های توان از ترکیب با تکرار استفاده کرده برابر $\binom{6}{3}$ می شود.

برای خودکارها $(x^3+x^4+\dots)(1+x+x^2+\dots+x^5)^3$

باید ضریب x^{12} را در $(1-x^6)^3\,(1-x)^{-4}$

$$\binom{3}{0}\binom{-4}{13}(-1)^{13}-\binom{3}{1}\binom{-4}{7}(-1)^{7}+\binom{3}{2}\binom{-4}{1}(-1)$$

۱۸ - $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=\sum\binom{-\frac{1}{2}}{i}(-4)^n$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4)^n=\frac{(2n-1)(2n-3)\dots(1)}{n!}\,2^n=\binom{2n}{n}$$

۲۲ - الف) یک: ۱, ۲, ۳, ۴ دو: ۱, ۳, ۷, ۱۵ سه: ۱, ۲, ۳, ۴

ب) یک: $n+1$ دو: $2^{n+1}-1$ سه: ۱, ۲, ۳, ۴, ۴, ۴, ...

۲۳ - الف) $\sum_{0}^{\infty} c_i x^i=(1+x+x^2+x^3+x^4)(0+x+2x^2+\dots)$

$c_0=0$ $c_1=1$ $c_2=3$ $c_3=6$ $c_n=5n-10$

ب) $(1-x+x^2-\dots)^2=(1+x)^{-2}$

$c_n=(-1)^n(n+1)$

پ) $(1+x+x^2+x^3)(0+x+2x^2+3x^3)$

۰, ۱, ۳, ۶, ۶, ۵, ۳, ۰, ۰, ...

۹.۳

۱ - ۷, ۶+۱, ۵+۲, ۵+۱+۱, ۴+۳, ۴+۲+۱, ۴+۱+۱+۱, ۳+۳+۱, ۳+۲+۲, ۳+۲+۱+۱, ۳+۱+۱+۱+۱, ۲+۲+۲+۱, ۲+۲+۱+۱+۱, ۲+۱+۱+۱+۱+۱, ۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱

۴- الف) $\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\left(\frac{1}{1-t^3}\right)\left(\frac{1}{1-t^5}\right)\left(\frac{1}{1-t^7}\right)$ ب) $\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\left(\frac{t^{12}}{1-t^3}\right)\left(\frac{t^{20}}{1-t^5}\right)\left(\frac{t^{35}}{1-t^7}\right)$

پ) $(t^4+t^6+t^8)(t^{12}+t^{15}+\dots+t^{21})(t^{25}+t^{30}+\dots+t^{50})(t^{70}+t^{77}+\dots)$

۷- $(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8)\dots$

$$=\frac{1-x^3}{1-x}\times\frac{1-x^6}{1-x^2}\times\frac{1-x^9}{1-x^3}\times\dots=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{1-x^4}\times\frac{1}{1-x^5}\dots$$

۸- $\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{1-x^3}\times\frac{1}{1-x^5}\times\frac{1}{1-x^6}\times\frac{1}{1-x^7}\times\frac{1}{1-x^9}$

$$=\frac{1}{1-x}\times\frac{1-x^4}{1-x^2}\times\frac{1}{1-x^3}\times\frac{1-x^8}{1-x^4}\times\frac{1}{1-x^5}\times\dots$$

$$=\frac{1}{1-x}\times(1+x^2)\times\frac{1}{1-x^3}\times(1+x^4)\times\dots$$

تکلیف

۲- $(x^5+x^8+x^{11}+x^{14}+x^{17})^{10}=x^{50}(1+x^3+\dots+x^{12})^{10}$

باید ضریب x^{33} را در $\left(\frac{1-x^{15}}{1-x^3}\right)^{10}$ بیابیم.

$$\left[1-\binom{10}{1}x^{15}+\binom{10}{2}x^{30}-\dots+x^{150}\right]\left[\binom{-10}{0}(-x^3)^0+\binom{-10}{1}(-x^3)^1+\dots\right]$$

$$\binom{-10}{11}(-1)^{11}-\binom{10}{1}\binom{-10}{6}(-1)^6+\binom{10}{2}\binom{-10}{1}(-1)^1$$

۶- $\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)^4$ ضریب $\frac{x^{10}}{10!}$

$$4^{10}-\binom{4}{1}10\times3^9+\binom{4}{2}10\times9\times2^8-\binom{4}{3}10\times9\times8$$

۷ - الف)

$$(1-2x)^{-\frac{5}{2}} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{5\times7\times9\times\cdots\times(3+2i)}{i!}\, x^{i}$$

$$1,\ 5,\ 5\times7,\ 5\times7\times9,\ \ldots$$

ب)

$$(1-ax)^{b} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{b\times(b-1)\times(b-2)\times\cdots\times(b-i+1)}{i!}\,(-ax)^{i}$$

$$\left.\begin{array}{l} -ab = 7 \\ b(b-1)a^{2} = 7\times11 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 4 \\ b = -\frac{7}{4} \end{array}}$$

۸-

۹-

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^{2} + \cdots + \binom{n}{n}x^{n} = (1+x)^{n}$$

از دو طرف مشتق می‌گیریم.

$$n(x+1)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^{2} + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

$$n\left(2^{n-1}\right)$$

و حالا مقدار x را برابر ۱ قرار می‌دهیم.

۱۰-

$$(1+x)(1+x^{2}+x^{4})(1+x^{3}+x^{6}+x^{9})\cdots = \prod_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} x^{ij}\right)$$

Scanned with CamScanner