فرهاد امان ۹۹۳۱۰۰۶

۴.۱

۲ـ الف) به ازای $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} i(2^i)=2$ پس گزاره درست است.

حالا فرض کنیم به ازای $k\geq 1$ درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ نیز درست است.

$$\sum_{i=1}^{k} i(2^i)+(k+1)2^{k+1}=2+(k-1)2^{k+1}+(k+1)2^{k+1}$$

$$=2+k2^{k+2}=\boxed{2+(n-1)2^{n+1}}$$

ب) به ازای $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} 2(3^{i-1})=2$ پس گزاره درست است.

حالا فرض می کنیم به ازای $k\geq 1$ درست است باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ نیز درست است.

$$\sum_{i=1}^{k} 2(3^{i-1})+2\times 3^{k}=3^{k}-1+2\times 3^{k}=3\times 3^{k}-1=\boxed{3^{k+1}-1}$$

$$=\boxed{3^{n}-1}$$

پ) به ازای $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} i\times i!=1$ پس گزاره درست است.

حالا فرض می کنیم به ازای $k\geq 1$ درست است باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ نیز درست است.

$$\sum_{i=1}^{k} i\times i!+(k+1)(k+1)!=(k+1)!-1+(k+1)(k+1)!=(k+2)!-1$$

$$=\boxed{(n+1)!-1}$$

۱۰ـ به ازای $n=4$ $2^4<4!$ پس گزاره درست است.

حالا فرض کنیم به ازای $k\geq 4$ درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ نیز درست است.

$$\left.\begin{array}{l}2^k<k! \quad \text{و} \quad 2<k+1\\ k\geq 4\end{array}\right\}\Rightarrow 2\times 2^k<(k+1)\times k!\Rightarrow \boxed{2^n<n!}$$

۱۳ - الف) به ازای n=1 : $\frac{3}{2} = 1+\frac{n}{2}$ پس گزاره درست است حالا فرض می‌کنیم که به ازای $k \geq 1$ درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ نیز درست است.

$$1+\frac{k}{2} \leq H_{2^k}$$

$$H_{2^{k+1}} = H_{2^k} + \underbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{\text{تا } 2^k}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2}}$$

$$1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2} \leq H_{2^{k+1}} \Rightarrow \boxed{1+\frac{n}{2} \leq H_{2^n}}$$

ب) به ازای $n=1$: $\sum_{j=1}^{1} jH_j = H_2 - \frac{1}{2}$ پس گزاره درست است حال اگر به ازای $k \geq 1$ درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ هم درست است.

$$\sum_{j=1}^{k} jH_j + (k+1)H_{k+1} = \left(\frac{(k+1)k}{2}\right)H_{k+1} - \left(\frac{(k+1)k}{4}\right) + (k+1)H_{k+1}$$

$$= \left(\frac{(k+2)(k+1)}{2}\right)H_{k+2} - \left(\frac{2(k+1)+k(k+1)}{4}\right)$$

$$\boxed{= \left(\frac{(k+2)(k+1)}{2}\right)H_{k+2} - \frac{(k+2)(k+1)}{4}}$$

۱۴ - به ازای $n=1$ $\sum_{i=0}^{1} \frac{1}{2i+1} = \frac{4}{3}$ پس گزاره درست است.

فرض کنید گزاره به ازای $k \geq 1$ درست باشد حال باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ نیز درست است

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2k+3} = H_{2k+1} - \frac{H_k}{2} + \frac{1}{2k+3}$$

$$= H_{2k+3} - \frac{H_k + \frac{1}{k+1}}{2} = \boxed{H_{2k+3} - \frac{H_{k+1}}{2}}$$

۱۶ -
$$\underbrace{(n^2+1)+(n^2+2)+\dots+(n+1)^2}_{\sum_{i=1}^{2n+1} n^2+i} = n^3+(n+1)^3$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} n^2+i = 2n^3+3n^2+3n+1 = \boxed{n^3+(n+1)^3}$$

۱۸ - الگوریتمی برای انجام این کار معرفی می‌کنیم ابتدا کوچکترین عضو S_1 را با کوچکترین عضو S_2 مقایسه می‌کنیم هر کدام کوچکتر بود را از مجموعه خود خارج می‌کنیم و در ابتدای مجموعه‌ی سوم می‌نویسیم و هنگامی هم که تنها یک عدد در یکی از مجموعه‌ها باقی ماند مشخصا آن عدد بزرگترین عدد در هر دو مجموعه است. چون در هر مرحله یک عدد از مجموعه‌ها خارج می‌شود در کل $m+r-1$ حرکت نیاز است.

به ازای $n=0$ مجموعه مرتب است حال فرض کنیم به ازای $k \geq 0$ به $k \times 2^k$ حرکت نیاز داریم باید ثابت کنیم برای $n=k+1$ نیز به $n \times 2^n$ حرکت نیاز است. 2^n عضوی را به دو مجموعه مساوی 2^k عضوی تقسیم می‌کنیم طبق فرض استقرا هر مجموعه با حداکثر $k \times 2^k$ حرکت مرتب می‌شود. و طبق الف به حداکثر $2^n - 1$ حرکت هم برای merge کردن این دو مجموعه نیاز داریم. که مجموعا می‌شود $\boxed{n \times 2^n - 1}$ حرکت

$\boxed{\text{merge sort}}$

۲۳ - به ازای $n=1$ و $n=2$ گزاره است. فرض می کنیم برای $k \geq 2$ درست است باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ نیز درست است.

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2} = \left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \times \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \times \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} \quad \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$$

$$\boxed{= \left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] = P_n}$$

۲۴ - الف) $a_3 = 3$ $\quad a_4 = 5$ $\quad a_5 = 8$ $\quad a_6 = 13$ $\quad a_7 = 21, \ldots$

ب) به ازای $n=1$ $\quad 1 < \frac{7}{4}$ و به ازای $n=2$ $\quad 2 < \frac{49}{16}$ حال فرض می کنیم که به ازای $k \geq 2$ درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ نیز درست است.

$$a_n = a_k + a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k} + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \times \frac{11}{4} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \times \frac{49}{16}$$

$$= \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1} = \boxed{\left(\frac{7}{4}\right)^{n}}$$

۱ـ الف) $c_1=7$ و به ازای $n\geq 1$ $c_{n+1}=c_n+7$ ث) $c_1=7$ و به ازای $n\geq 1$ $c_{n+1}=c_n$

ب) $c_1=7$ و به ازای $n\geq 1$ $c_{n+1}=7c_n$ ج) $c_1=1$ و به ازای $n\geq 1$ $c_{n+1}=c_n+2n+1$

پ) $c_1=10$ و به ازای $n\geq 1$ $c_{n+1}=c_n+3$ چ) $c_1=6$ و به ازای $n\geq 1$ $c_{n+1}=c_n+2n+4$

ت) $c_1=3$ و به ازای $n\geq 1$ $c_{n+1}=c_n+11$ ح) $c_1=3$ ، $c_2=1$ و به ازای $n\geq 1$ $c_{n+2}=c_n$

۳ـ $f(2)$ درست است به ازای $k\geq 2$ فرض می‌کنیم $f(k)$ درست است باید ثابت کنیم $f(k+1)$ هم درست است.

$$p\vee(q_1\wedge q_2\wedge\dots\wedge q_{k+1}) \Longleftrightarrow \big(p\vee(q_1\wedge q_2\dots\wedge q_k)\big)\wedge(p\vee q_{k+1})$$

$$\overset{\text{فرض استقرا}}{\Longleftrightarrow} \big((p\vee q_1)\wedge(p\vee q_2)\wedge\dots\wedge(p\vee q_k)\big)\wedge(p\vee q_{k+1})$$

$$\Longleftrightarrow (p\vee q_1)\wedge(p\vee q_2)\wedge\dots\wedge(p\vee q_{k+1})$$

ب) $f(2)$ درست است 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

$$p\wedge(q_1\vee q_2\vee\dots\vee q_{k+1}) \overset{\text{فرض استقرا}}{\Longleftrightarrow} \big((p\wedge q_1)\vee(p\wedge q_2)\vee\dots\vee(p\wedge q_k)\big)\vee(p\wedge q_{k+1})$$

$$\Longleftrightarrow (p\wedge q_1)\vee(p\wedge q_2)\vee\dots\vee(p\wedge q_{k+1})$$

۸ـ به ازای $n=2$ مسئله درست است فرض کنیم به ازای $k\geq 2$ درست باشد اثبات می‌کنیم به ازای $n=k+1$ هم درست است.

$$|x_1+x_2+\dots+x_{k+1}| = |(x_1+x_2+\dots+x_k)+x_{k+1}|$$

$$\leq |x_1+x_2+\dots+x_k|+|x_{k+1}| \overset{\text{فرض استقرا}}{\leq} |x_1|+|x_2|+\dots+|x_{k+1}|$$

۱۲ـ به ازای $n=0$ و $n=1$ گزاره درست است حال فرض می‌کنیم به ازای $k\geq 1$ درست است باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ نیز درست است.

$\underset{\text{طبق فرض}}{0\leq a_{n-1}\leq 1}$ $\underset{\text{طبق فرض}}{0\leq (n-1)a_{n-2}\leq n-1}$

$$0\leq a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}\leq n \Rightarrow 0\leq \frac{a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}}{n}\leq 1$$

۱۴ - به ازای $n=0$ و $n=1$ گزاره درست است حال فرض می کنیم به ازای $k\geqslant 1$ درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+2$ هم درست است.

$$\boxed{\underbrace{F_0+F_1+\dots+F_{k-2}}_{F_k = \text{طبق فرض استقرا}}+\underbrace{F_{k-1}+F_k}_{F_{k+1}} = F_k+F_{k+1} = F_{k+2}}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 \end{matrix}$$

۱۵ -

به ازای $n=1$ ، $\sum_{i=1}^{2} F_iF_{i-1}=1 = F_2^2$ پس گزاره درست است حال فرض می کنیم به ازای $k\geqslant 1$ درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ هم درست است.

$$\sum_{i=1}^{2k} F_iF_{i-1} + F_{2k+1}F_{2k} + F_{2k+2}F_{2k+1}$$
$$\boxed{= F_{2k}^2 + F_{2k+1}F_{2k} + F_{2k+2}F_{2k+1} = F_{2k+2}(F_{2k}+F_{2k+1}) = F_{2k+2}^2}$$

۱۶ - به ازای $n=1$ گزاره درست است حال فرض می کنیم به ازای $k\geqslant 1$ درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ هم درست است.

$$\sum_{i=0}^{2k}(-1)^{i+1}F_i + (-1)^{2k+2}F_{2k+1} + (-1)^{2k+3}F_{2k+2}$$
$$= -(F_{2k-1}+F_{2k})+1 = \boxed{-F_{2k+1}+1 = -F_{2(k+1)-1}+1}$$

۱۷ - به ازای $n=1$ گزاره درست است حال فرض کنیم به ازای $k\geqslant 1$ درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ هم درست است.

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{F_{i-1}}{2^i}+\frac{F_k}{2^{k+1}} = 1-\frac{F_{k+2}}{2^k}+\frac{F_k}{2^{k+1}} = 1+\frac{1}{2^{k+1}}(F_k-2F_{k+2})$$
$$= 1+\frac{1}{2^{k+1}}(-F_{k+1}-F_{k+2}) = \boxed{1-\frac{F_{k+3}}{2^{k+1}}}$$

۱۸- به ازای $n=1$ ، $L_1^2 = L_1L_2 - 2$ پس گزاره درست است حالا فرض می کنیم به ازای $k \geq 1$
هم درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ هم درست است.

$$\sum_{i=1}^{k} L_i^2 + L_{k+1}^2 = L_kL_{k+1} - 2 + L_{k+1}^2 = L_{k+1}(L_k+L_{k+1}) - 2 = \boxed{L_{k+1}L_{k+2} - 2}$$

۱۹- به ازای $n=0$ ، $5F_2 = L_4 - L_0$ و به ازای $n=1$ ، $5F_3 = L_5 - L_1$
گزاره درست است حال فرض می کنیم به ازای $k \geq 1$ درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$
هم درست است.

$$5F_{k+3} = 5(F_{k+2}+F_{k+1}) = L_{k+4} - L_k + L_{k+3} - L_{k-1}$$

$$= \boxed{L_{k+5} - L_{k+1} = L_{n+4} - L_n}$$

تکمیلی

۶- الف) ! ب) $S_4 = \frac{5!-1}{5!}$ ، $S_5 = \frac{6!-1}{6!}$ ، $S_6 = \frac{7!-1}{7!}$

پ) $\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ ت) گزاره به ازای $n=1$ درست فرض می کنیم به ازای $k \geq 1$
درست باشید باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ هم درست است.

$$S_k + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = \boxed{\frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}}$$

۱۱- به ازای $n=2$ ، $4 < 6 < 16$ پس گزاره درست است حال فرض می کنیم به ازای $k \geq 2$ درست باشد
باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ هم درست است.

$$\binom{2k+2}{k+1} = \left(\frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+1)}\right)\binom{2k}{k}$$

$$1 < \frac{2k+1}{k+1} < 2 \Rightarrow \boxed{2^{k+1} < \frac{2(2k+1)}{k+1} < 4^{k+1}}$$

۱۳ - الف) به ازای $n = ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸$ گزاره درست است.

$$64 = 2\times 17 + 6\times 5 \qquad 65 = 13\times 5 \qquad 66 = 3\times 17 + 3\times 5 \qquad 67 = 17 + 10\times 5$$

$$68 = 4\times 17$$

فرض می کنیم به ازای عدد $k \geq 64$ گزاره درست است پس به ازای عدد $k+5$ هم گزاره درست می شود چون تنها یک عدد ۵ به آن اضافه شده پس تمام اعداد بیشتر از ۶۸ هم درست اند.

ب) ابتدا می دانیم به ازای اعداد [۱۰۸، ۱۱۷] گزاره درست حالا دقیقا مانند قسمت الف عمل می کنیم.

۱۴ - به ازای $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i-1}\left(\frac{1}{i}\right)$ حال فرض می کنیم به ازای $k \geq 1$ درست باشد باید ثابت کنیم به ازای $n=k+1$ هم درست است.

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{k+1+i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$$

$$= \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1}\left(\frac{1}{i}\right) - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = \sum_{i=1}^{2(k+1)} (-1)^{i-1}\left(\frac{1}{i}\right)$$