

مدارهای الکتریکی و الکترونیکی

فصل چهاردهم: تحلیل توان AC

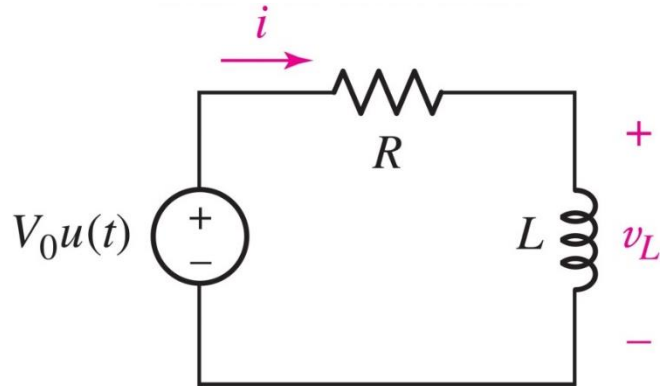
استاد درس: محمود ممتازپور

ceit.aut.ac.ir/~momtazpour

فهرست مطالب

- توان لحظه‌ای
- توان متوسط
- توان ظاهری
- توان مختلط

توان لحظه‌ای



□ توان لحظه‌ای برابر است با:

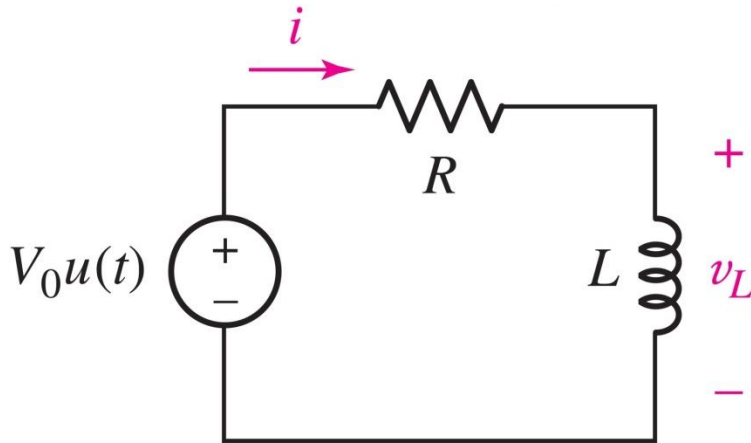
$$p(t) = v(t)i(t)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) u(t)$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_{src}(t) = \frac{V_0^2}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) u(t) \\ p_R(t) = Ri^2(t) = \frac{V_0^2}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)^2 u(t) \\ p_L(t) = Li'(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) u(t) \end{cases}$$

توان لحظه‌ای در مدار RL

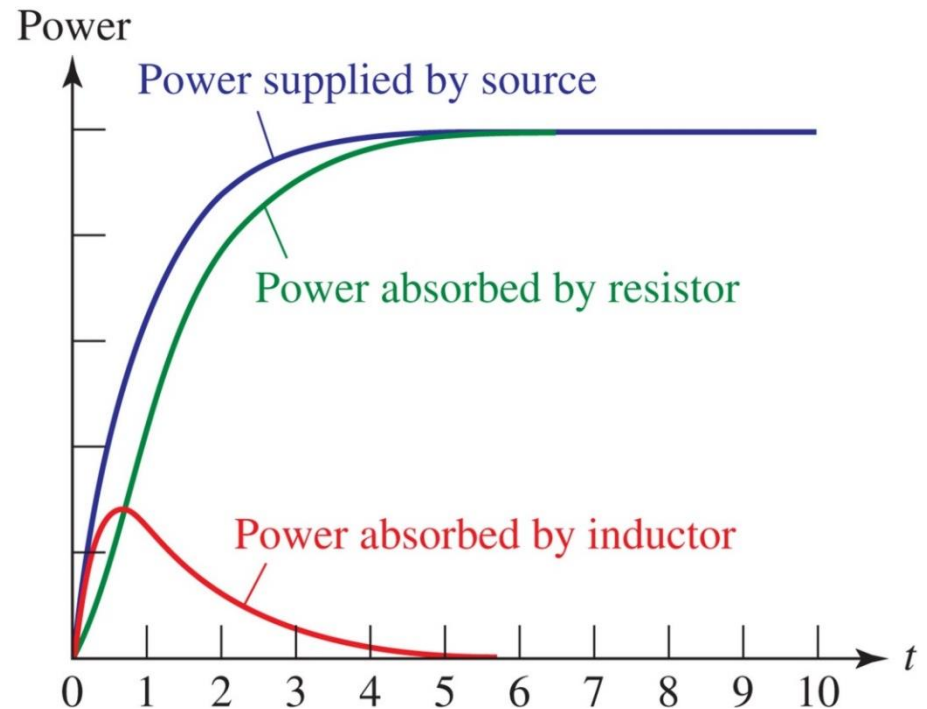
□ توان لحظه‌ای همه المانها را بیاورد.



طبق قانون بقای انرژی:

در هر لحظه از زمان، توان جذب شده برابر با توان تولید شده است:

$$p_{src}(t) = p_R(t) + p_L(t)$$



توان لحظه‌ای در حضور منبع سینوسی

□ در یک مدار RL، اگر منبع $V_m \cos(\omega t)$ باشد، داریم:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$
$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{and} \quad \phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

□ توان لحظه‌ای منبع برابر است با:

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi) \cos \omega t$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi]$$

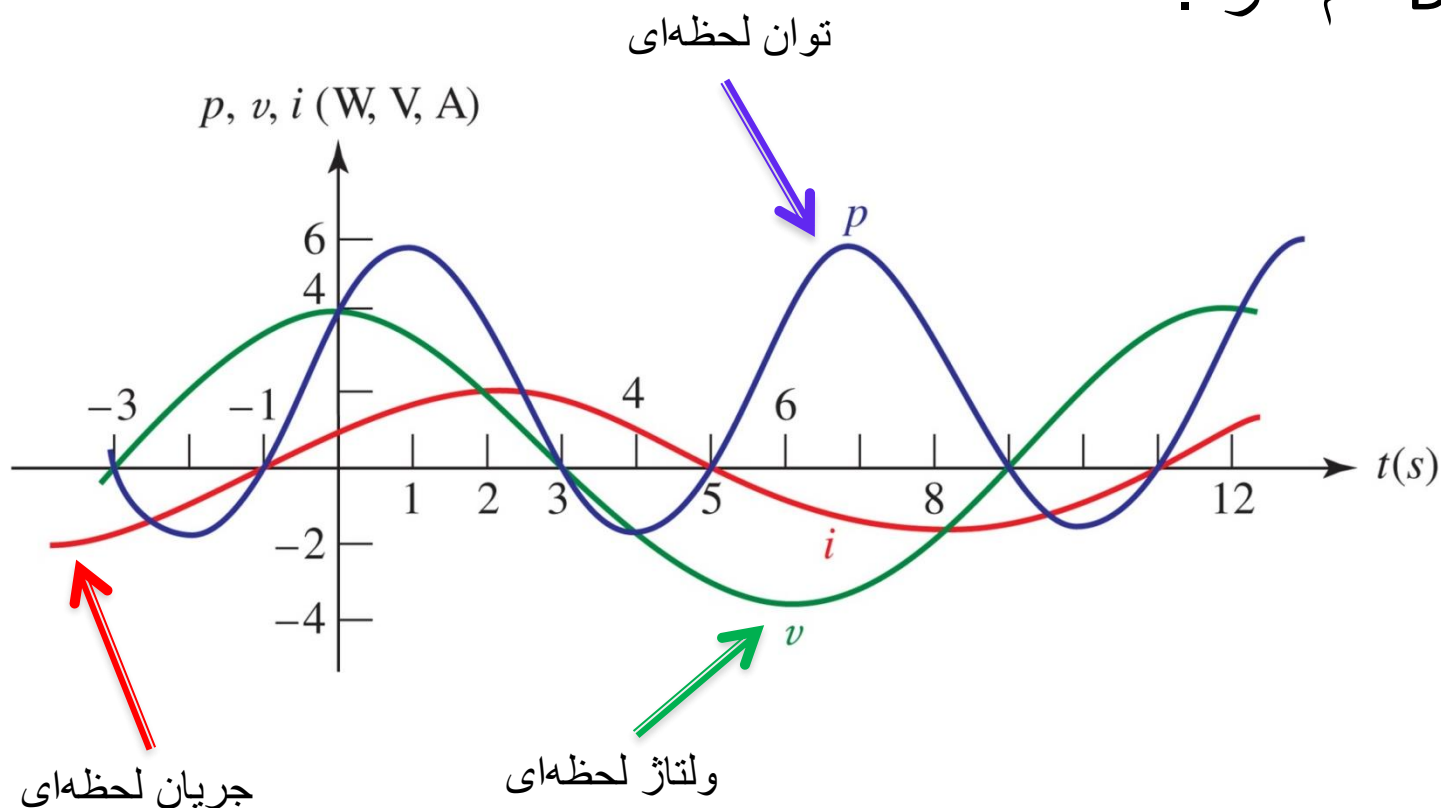
بخش ثابت

$$= \frac{V_m I_m}{2} \cos \phi + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \phi)$$

بخش متناوب با
فرکانس دو
برابر

توان لحظه‌ای در حضور منبع سینوسی

□ توان لحظه‌ای، یک سینوسی با فرکانس دو برابر است که مؤلفه DC هم دارد.



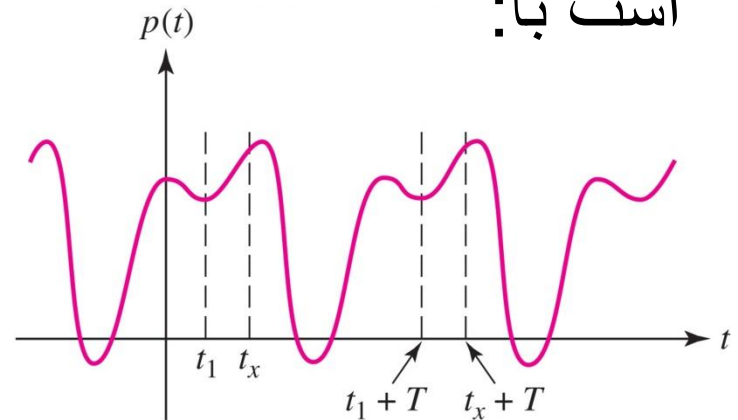
توان متوسط (توان اکتیو)

□ توان متوسط یک سیگنال در بازه t_1 تا t_2 طبق تعریف برابر است با:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

□ وقتی توان متناوب باشد، توان متوسط در یک دوره تناوب برابر است با:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_x}^{t_x+T} p(t) dt$$

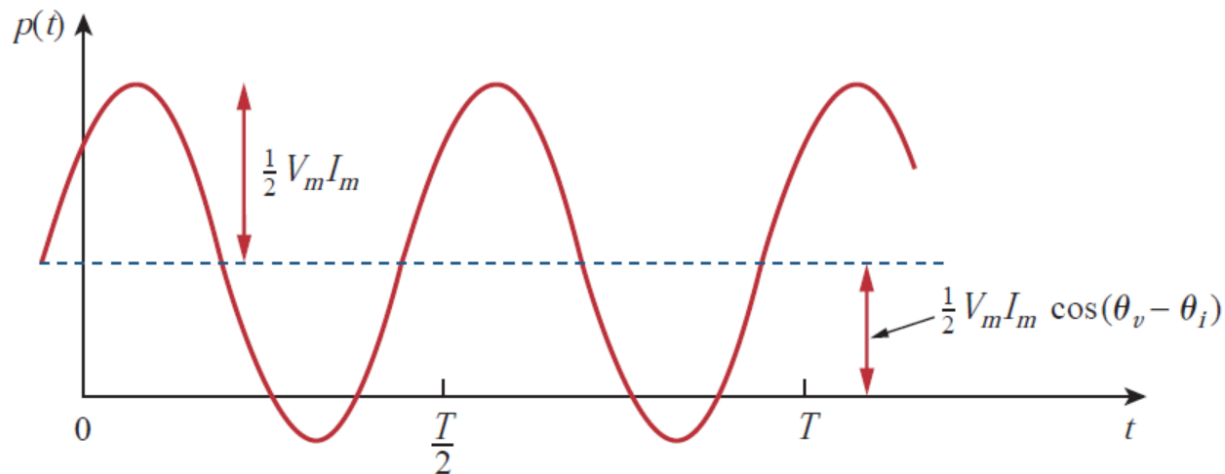


توان متوسط در حضور منبع سینوسی

□ اگر $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ و $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ باشد:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi)$$

$$\rightarrow P_{ave} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$



توان متوسط المان‌های مدار

□ طبق معادله اسلاید قبل، توان متوسط جذب شده توسط مقاومت برابر است با:

$$P_{ave,R} = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R} = \frac{1}{2} R I_m^2$$

□ توان متوسط سلف و خازن صفر است. زیرا همیشه جریان و ولتاژ 90 درجه اختلاف فاز دارند. پس:

$$\cos(\theta - \phi) = \cos(90) = 0 \rightarrow P_{ave,L,C} = 0$$

مثال: توان متوسط

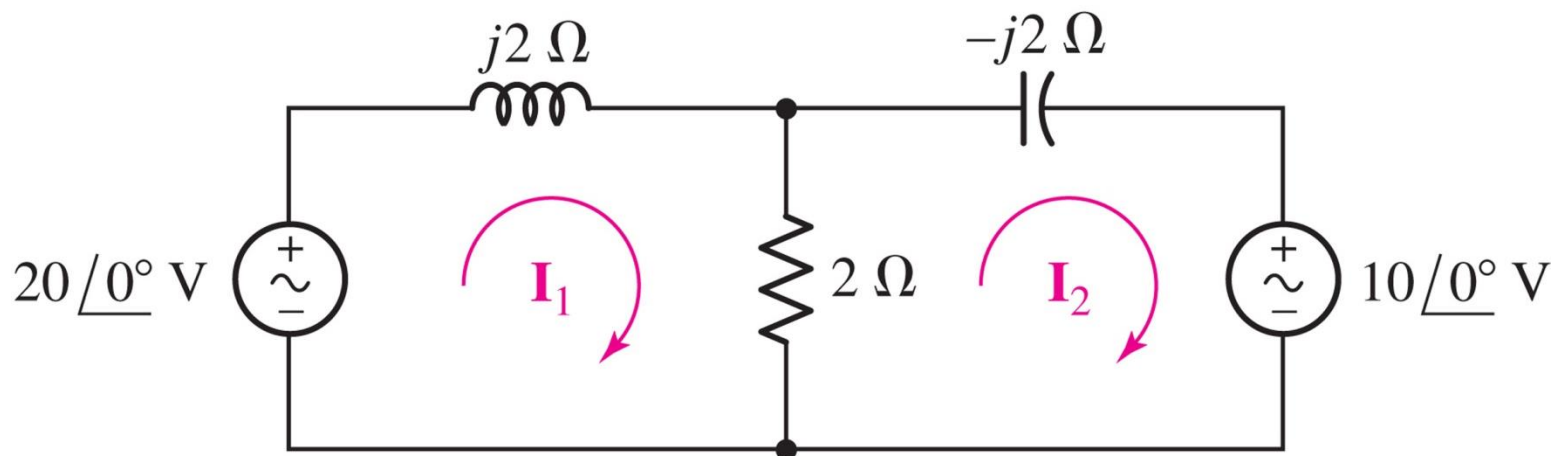
□ توان لحظه‌ای و متوسط همه المانها را در یک مدار RLC موازی بیابید.

$$i_s(t) = \sin t, R = L = C = 1 \quad \square$$

$$\square \text{ نشان دهید: } P_S = P_R, P_L = P_C = 0$$

مثال 2: توان متوسط

□ توان متوسط جذب شده همه المان‌ها را بیابید.



$$P_R = 25 \text{ W}$$

$$P_C = 0 \text{ W}, P_L = 0 \text{ W}$$

پاسخ:

$$P_{\text{right}} = 25 \text{ W}$$

$$P_{\text{left}} = -50 \text{ W}$$

مثال 3: توان متوسط

□ اگر از یک امپدانس $Z_L = 8 - 11j \Omega$ جریان فازوری I $= 5 \angle 20^\circ$ بگذرد، توان متوسط جذب شده آن چقدر است؟

□ پاسخ: چون فقط مقاومت 8 اهم توان متوسط جذب می‌کند داریم:

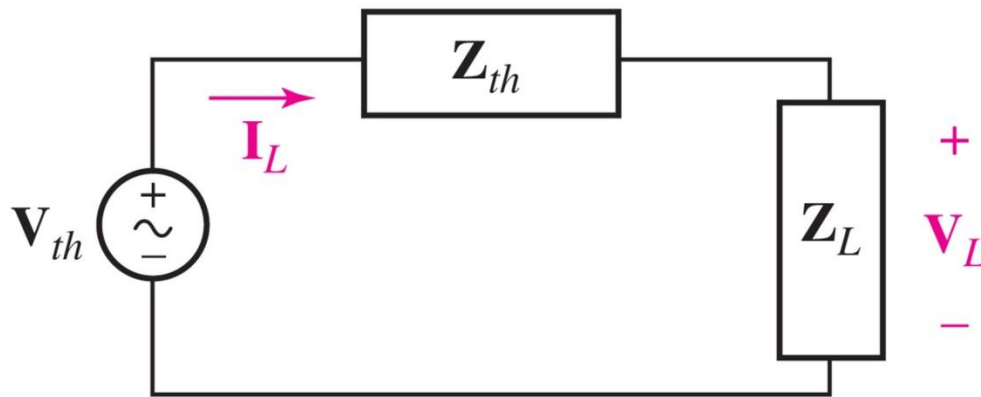
$$P_{ave} = (1/2)(5^2)8 = 100 W$$

قضیه انتقال توان بیشینه

یک منبع ولتاژ مستقل سری با امپدانس Z_{th} ، در هنگام اتصال به بار Z_L ، وقتی بیشینه توان را به آن منتقل می‌کند که Z_{th} مزدوج Z_L باشد.

$$Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$$
$$Z_L = R_L + jX_L$$

$$Z_{th} = Z_L^* \rightarrow$$
$$R_{th} = R_L$$
$$X_{th} = -X_L$$



اثبات قضیه انتقال توان بیشینه

□ ابتدا توان جذب شده توسط بار را به دست می آوریم:

$$P_{ave} = \frac{1}{2} I_m^2 R_L = \frac{\frac{1}{2} |V_{th}|^2 R_L}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}$$

□ مشخص است که این توان وقتی بیشینه است که: $X_L = -X_{th}$

□ با مشتق گیری P_{ave} نسبت به R_L و صفر کردن آن داریم:

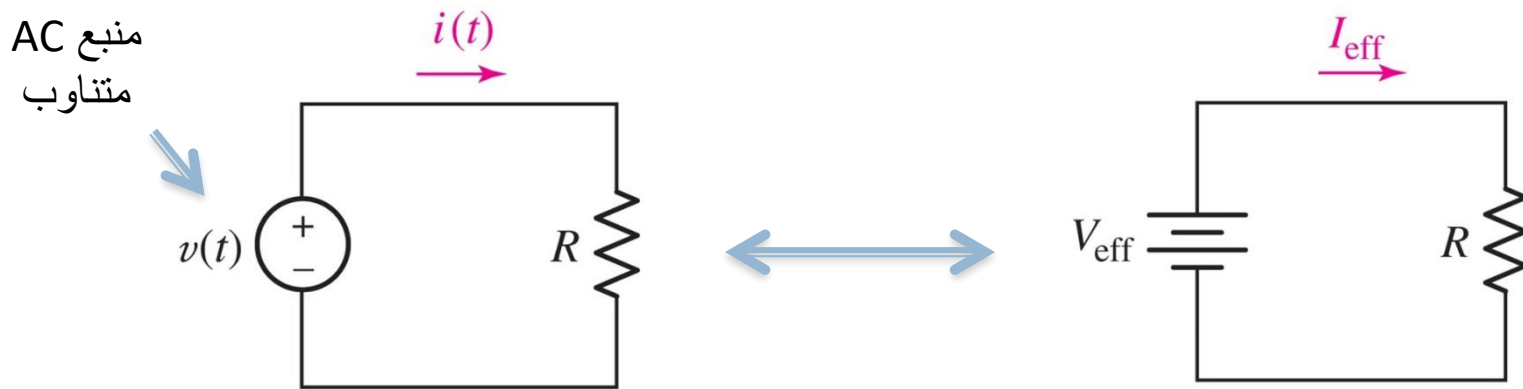
$$R_L = R_{th} \quad \square$$

قضیه جمع آثار برای توان

- در یک مدار خطی، جمع آثار برای جریان و ولتاژ المان‌ها صادق است.
- ولی برای توان لحظه‌ای صادق نیست! چرا؟
- قضیه جمع آثار برای توان متوسط صادق است، آنهم فقط زمانی که منابع سینوسی با فرکانس مختلف باشد.
- تمرین: اثبات کنید.

مقدار مؤثر جریان و ولتاژ

□ تعریف: مقدار مؤثر منبع ولتاژ (V_{eff}) مقداری است که اگر آن را به صورت DC به مقاومت اعمال می‌کردیم، همان توانی را به مقاومت می‌داد که منبع AC به طور متوسط می‌دهد.



□ مقدار مؤثر یک منبع ولتاژ، در واقع معیاری از میزان اثر بخشی آن منبع در رساندن توان به بار مقاومتی است.

نحوه محاسبه مقدار مؤثر

□ طبق تعریف، توان متوسط منبع AC $v(t)$ برابر با توان منبع DC V_{eff} است. پس:

$$\square \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v^2(t)}{R} dt = \frac{V_{eff}^2}{R} \rightarrow V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

□ این رابطه برای هر جریان یا ولتاژی صدق می‌کند.

□ به مقدار مؤثر، به خاطر رابطه آن که جذر، میانگین و توان 2 دارد RMS نیز می‌گویند (Root-Mean-Square).

مقدار مؤثر یک موج سینوسی

□ برای یک موج سینوسی $v(t) = V_m \sin \omega t$ داریم:

$$\square V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \sin^2 \omega t} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m \cong 0.7 V_m$$

مقدار مؤثر چند موج سینوسی

□ اگر چند موج سینوسی با فرکانس‌های متفاوت داشته باشیم، داریم:

$$\square i(t) = I_{m1}\cos\omega_1 t + I_{m2}\cos\omega_2 t + I_{m3}\cos\omega_3 t$$

$$\square P_{ave} = \frac{1}{2}(I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + I_{m3}^2)R_L = (I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2 + I_{3eff}^2)R_L$$

$$\square P_{ave} = I_{eff}^2 R_L$$

$$\square \rightarrow I_{eff} = \sqrt{I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2 + I_{3eff}^2}$$

نحوه محاسبه توان متوسط از روی مقدار مؤثر

□ با توجه به رابطه توان متوسط:

$$\square P_{ave} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

□ با توجه به رابطه مقدار مؤثر با مقدار بیشینه:

$$\square V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, \quad I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$\square \rightarrow P_{ave} = V_{eff} I_{eff} \cos(\theta - \phi)$$

□ توان متوسط مقاومت از رابطه زیر نیز قابل محاسبه است:

$$P_{ave} = R I_{eff}^2 = \frac{V_{eff}^2}{R}$$

توان ظاهری و ضریب توان

□ **تعریف:** به بیشینه توان متوسطی که یک بار می‌تواند از منبع بگیرد توان ظاهری می‌گویند.

$$P_{ave} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) = V_{eff} I_{eff} \cos(\theta - \phi)$$

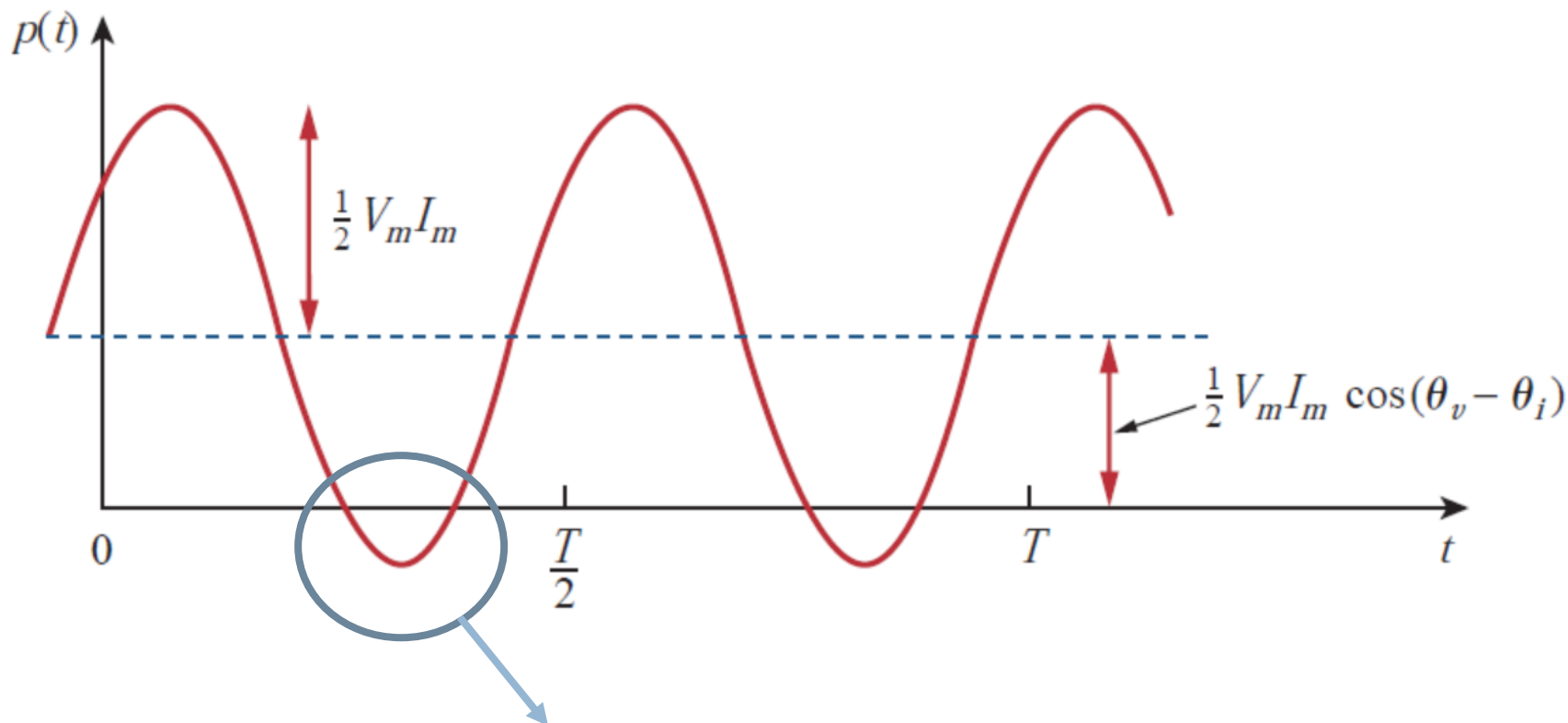
□ $ApparentPower = \frac{1}{2} V_m I_m = V_{eff} I_{eff}$

□ بدیهی است که برای اینکه بتوان این توان ظاهری را از منبع گرفت، امپدانس معادل بار باید مقاومتی باشد $\cos(\theta)$
 $\cos(\theta) = 1$ (یعنی $\theta = 0$).

□ واحد توان متوسط وات و واحد توان ظاهری، ولت-آمپر است.

□ به ضریب $\cos(\theta - \phi)$ ضریب توان گفته‌اند.

توان ظاهری



□ اگر ضریب توان کوچکتر از 1 باشد، در برخی زمانها، انرژی به منبع باز می‌گردد.

ضریب توان

□ ضریب توان:

$$PF = \frac{\text{average power}}{\text{apparent power}} = \frac{P}{V_{eff} I_{eff}}$$

□ برای بار مقاومتی: $PF=1$

□ برای بار دارای فقط سلف و خازن: $PF=0$

□ در حالت کلی: $0 \leq PF \leq 1$

ضریب توان پس فاز و پیش فاز

□ از آنجا که ضریب توان، کسینوس اختلاف فاز جریان و ولتاژ است، اطلاعات مربوط به پس فازی و پیش فازی در آن نیست.

$$PF = \cos(\theta - \phi)$$

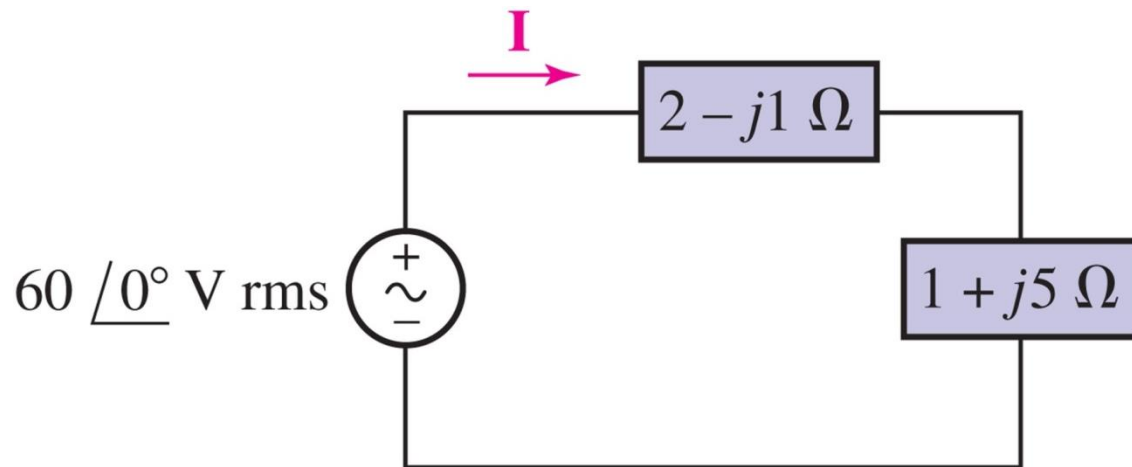
□ بنابراین پس فاز یا پیش فاز بودن بار باید در کنار ضریب توان قید شود، تا مشخص شود بار سلفی است یا خازنی.

□ بار سلفی، ضریب توان پس فاز دارد: $(\theta > \phi)$

□ بار خازنی، ضریب توان پیش فاز دارد: $(\theta < \phi)$

مثال:

□ توان متوسط جذب شده توسط هر المان، توان ظاهری تولیدی منبع و ضریب توان را بیابید.



Answer: 288 W, 144 W, 720 VA, PF=0.6 (lagging)

اثر ضریب توان بار بر هزینه برق مصرفی

- فرض کنید دستگاهی الکتریکی در منزل دارید که توان مصرفی آن 200 وات است (توان متوسط که مقاومت‌ها جذب می‌کنند).
- ولی دارای ضریب توان کمتر از 1 است (معمولاً به دلیل وجود سلف در موتور‌ها، ترانسفورماتور‌ها، ...).
- وجود سلف و خازن در دستگاه شما باعث می‌شود، شرکت برق مجبور باشد توان بیشتری از آنچه دستگاه شما نیاز دارد به شما تحویل دهد.
- هزینه تولید و انتقال توان بیشتر به شرکت برق تحمیل می‌شود.
- شرکت برق این هزینه اضافی را از شما می‌گیرد!
- در هنگام قرائت کنتور، ضریب توان نیز خوانده می‌شود و اگر از 0.9 کمتر بود شامل هزینه می‌شود.

توان راکتیو

□ توان متوسط المانهای سلف و خازن صفر است. اما توان لحظه‌ای آنها خیر.

□
$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi)$$

□ توان لحظه‌ای منبع جمع توان لحظه‌ای مقاومت و سلف است.

□ توان مقاومت یک کسینوسی با میانگین $\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$ است.

□ توان سلف یک کسینوسی با میانگین صفر و ماکزیمم $\frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta - \phi)$ است.

□ به مقدار ماکزیمم توانی که در سلف و خازن مدار ذخیره می‌شود توان راکتیو (Q) گویند. واحد آن VAR است.

توان راکتیو

□ پس داریم:

$$□ Q = \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta - \phi)$$

□ اگر ضریب توان 1 باشد (بار مقاومتی)، توان راکتیو صفر می‌شود.

□ در نتیجه توانی از سلف و خازن به منبع بر نمی‌گردد و شما نیز هزینه اضافی پرداخت نمی‌کنید.

□ به عبارت دیگر اگر مدار سلف و خازن هم داشته باشد، برای رسیدن به این حالت، سلف و خازن باید اثر یکدیگر را خنثی کنند تا از سر منبع فقط مقاومت دیده شود.

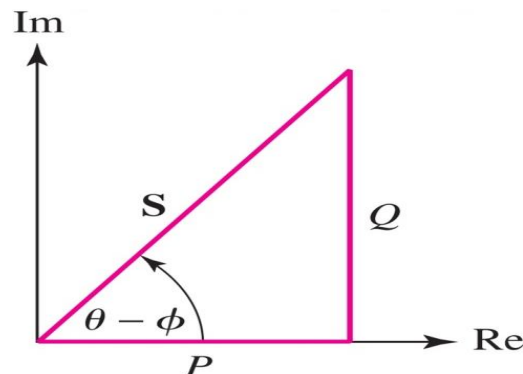
□ در این حالت، انرژی سلف و خازن بین یکدیگر جابجا می‌شود و از منبع انرژی نمی‌گیرند.

توان مختلط

- **تعریف:** توان مختلط یک عدد مختلط است که قسمت حقیقی آن توان اکتیو (متوسط) و قسمت موهومی آن توان راکتیو است.
- اندازه آن نیز برابر توان ظاهری است.

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff} \mathbf{I}_{eff}^* = V_{eff} I_{eff} e^{j(\theta - \phi)} = P + jQ$$

$$Apparent Power = |S| = V_{eff} I_{eff} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



توان مختلط

□ اگر از مقادیر بیشینه استفاده کنیم:

$$V = V_m e^{j\theta} \quad \square$$

$$I = I_m e^{j\phi} \quad \square$$

$$\text{Since } V = ZI \rightarrow S = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} Z I_m^2 = \frac{1}{2} V_m^2 / Z^* \quad \square$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi), Q = \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta - \phi) \quad \square$$

□ اگر از مقادیر مؤثر استفاده کنیم:

$$V = V_{rms} e^{j\theta} \quad \square$$

$$I = I_{rms} e^{j\phi} \quad \square$$

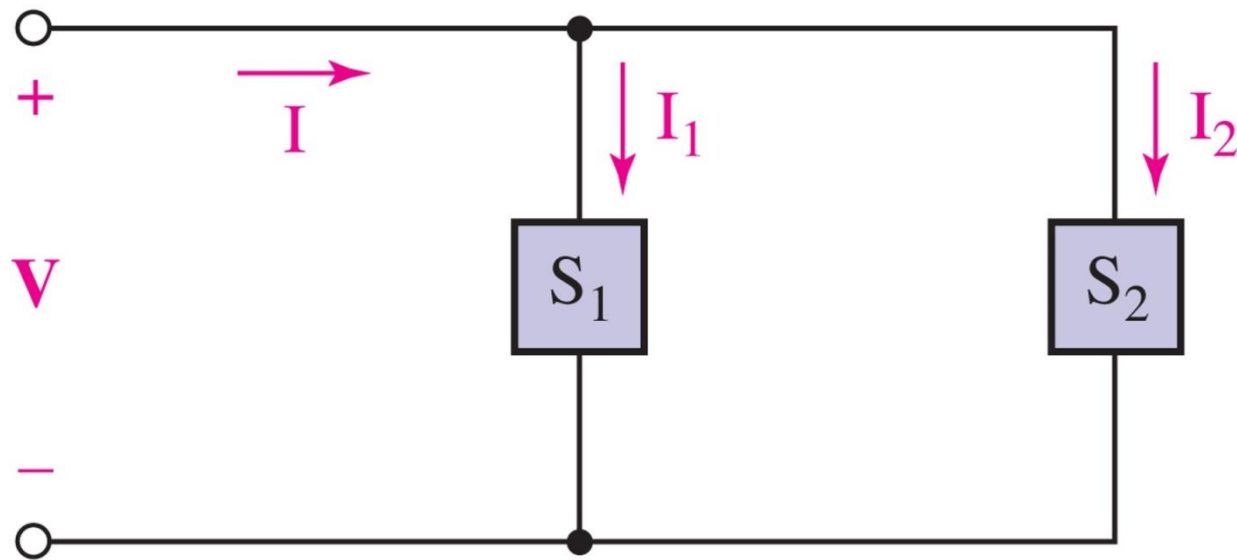
$$\text{Since } V = ZI \rightarrow S = V I^* = Z I_{rms}^2 = V_{rms}^2 / Z^* \quad \square$$

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta - \phi), Q = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta - \phi) \quad \square$$

توان مختلط و اثر جمع‌شوندگی

□ توان مختلط المان‌ها را می‌توان جمع کرد.

$$S = VI^* = V(I_1 + I_2)^* = V(I_1^* + I_2^*) = S_1 + S_2$$



اصلاح ضریب توان

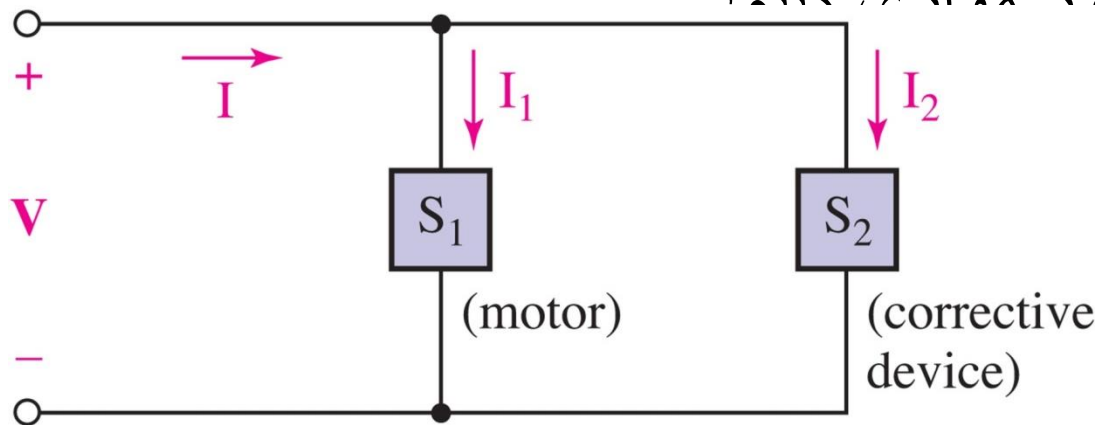
- گفتیم ضریب توان پایین بار باعث هدررفت توان بر روی خطوط انتقال و اعمال هزینه بیشتر به کاربر خواهد بود.
- اگر مداری که طراحی کرده‌ایم ضریب توان کمی دارد، می‌توان با اضافه کردن سلف یا خازن به آن، ضریب توان را بهبود داد.
- این روش را با یک مثال بررسی می‌کنیم.

اصلاح ضریب توان: مثال

□ فرض کنید یک مصرف‌کننده صنعتی، یک موتور القایی 50 کیلوواتی با ضریب توان پس‌فاز 0/8 دارد. ولتاژ تغذیه 230 ولت مؤثر است.

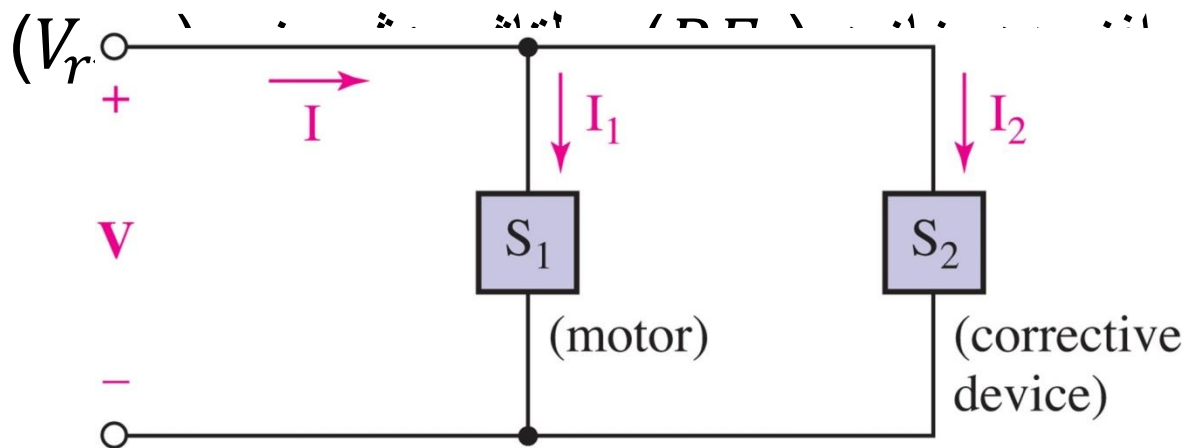
□ برای کاهش هزینه‌ها، مصرف‌کننده می‌خواهد ضریب توان را به 0/95 پس‌فاز برساند.

□ چه المانی با موتور ...



راه حل

- از آنجا که ضریب توان موتور پس فاز است، پس بار سلفی است.
- برای کاهش توان راکتیو و خنثی کردن اثر سلف باید خازن اضافه کنیم.
- معلومات مسئله:
- توان اکتیو موتور (P_1) ، ضریب توان موتور (PF_1) ، ضریب توان بار معادل پس از



راه حل (ادامه)

(موتور)

$$S_1 = P_1 + jQ_1 \quad \square$$

(خازن موازی)

$$S_2 = 0 + jQ_2 \quad \square$$

$$S = S_1 + S_2 = P_1 + j(Q_1 + Q_2) \quad \square \text{ در مجموع:}$$

\square توان ظاهری موتور برابر است با:

$$P_1 = 50KW = |S_1| \cos \phi_1 \rightarrow |S_1| = \frac{50K}{0.8} = 62.5KVA$$

\square توان راکتیو موتور برابر است با:

$$Q_1 = |S_1| \sin \phi_1 = 62.5K \times \sqrt{1 - 0.8^2} = 37.5KVA$$

\square از آنجا که پس از افزودن خازن، توان متوسط تغییری نمی‌کند، توان ظاهری موتور پس از افزودن خازن:

$$P = 50KW = |S| \cos \phi \rightarrow |S| = \frac{50K}{0.95} = 52.63KVA$$

راه حل (ادامه)

□ توان راکتیو پس از افزودن خازن:

$$Q = |S| \sin \phi = 52.63K \times \sqrt{1 - 0.95^2} = 16.43KVA$$

□ توان راکتیو خازن:

$$Q_2 = Q - Q_1 = 16.43K - 37.5K = -21.07KVA$$

□ محاسبه جریان خازن و در نهایت مقدار خازن:

$$S_2 = jQ_2 = -j21.07KVA = V_2 I_2^* = 230 I_2^*$$

$$\rightarrow I_2 = j91.6 \rightarrow Z = \frac{230}{j91.6} = -j2.51 = \frac{1}{Cj\omega}$$

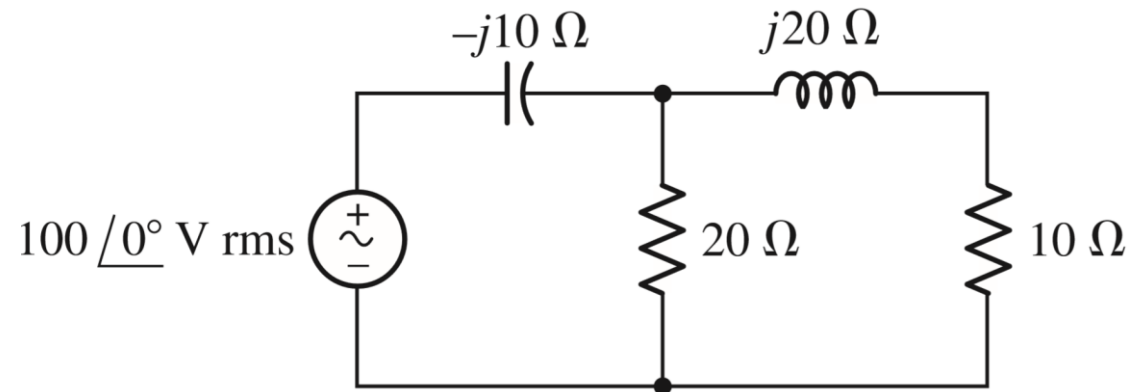
$$\rightarrow C\omega = 0.398$$

Term	Symbol	Unit	Description
Instantaneous power	$p(t)$	W	$p(t) = v(t)i(t)$. It is the value of the power at a specific instant in time. It is <i>not</i> the product of the voltage and current phasors!
Average power	P	W	In the sinusoidal steady state, $P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$, where θ is the angle of the voltage and ϕ is the angle of the current. Reactances do not contribute to P .
Effective or rms value	V_{rms} or I_{rms}	V or A	Defined, e.g., as $I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$; if $i(t)$ is sinusoidal, then $I_{\text{eff}} = I_m / \sqrt{2}$.
Apparent power	$ S $	VA	$ S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$, and is the maximum value the average power can be; $P = S $ only for purely resistive loads.
Power factor	PF	None	Ratio of the average power to the apparent power. The PF is unity for a purely resistive load, and zero for a purely reactive load.
Reactive power	Q	VAR	A means of measuring the energy flow rate to and from reactive loads.
Complex power	S	VA	A convenient complex quantity that contains both the average power P and the reactive power Q : $S = P + jQ$.

تمرین کلاسی 1

□ توان مختلط؟

$$f = 50\text{Hz}$$



□ چه خازنی با مقاومت 10 اهم موازی کنیم تا ضریب توان 0/95 شود؟

□ چه خازنی با مقاومت 10 اهم موازی کنیم تا ضریب توان 1 شود؟