

مدارهای الکتریکی و الکترونیکی

فصل چهارم: روش‌های مفید برای تحلیل مدار

استاد درس: محمود ممتازپور

ceit.aut.ac.ir/~momtazpour

فهرست مطالب

□ روش‌های تحلیل مدار پرکاربرد

□ قضیه جمع آثار

□ منابع واقعی

□ تبدیل منابع

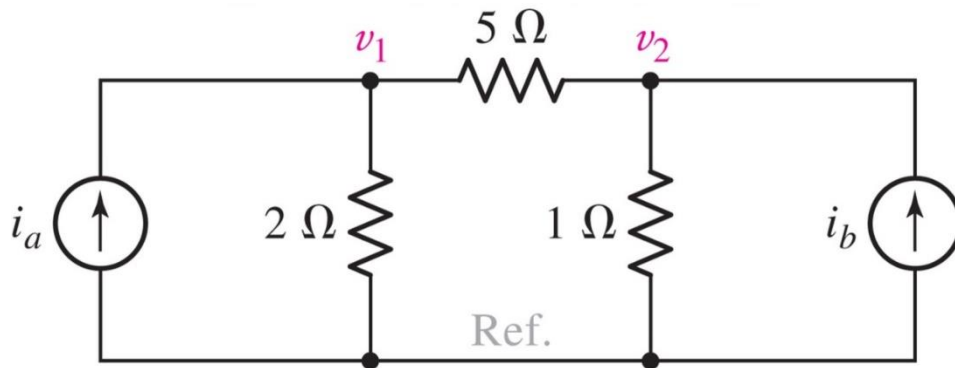
□ مدارهای تونن و نورتن

□ قضیه انتقال توان بیشینه

□ تبدیل ستاره-مثلث

قضیه جمع آثار: مثال

□ در مثال زیر، ولتاژ گره‌ها را می‌توان بر حسب جریان منابع



نوشت:

$$\frac{v_1 - v_2}{5} + \frac{v_1}{2} - i_a = 0$$

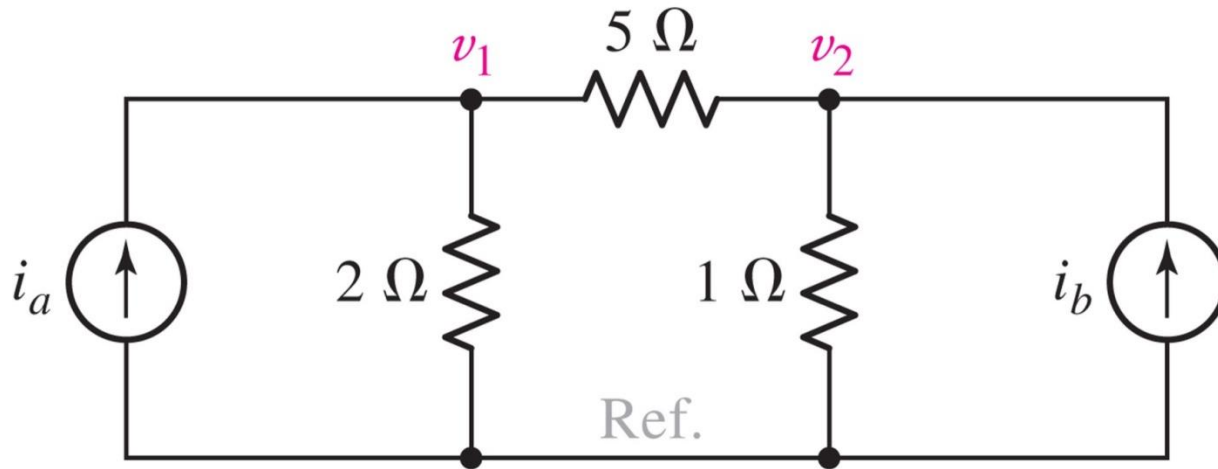
$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{1} - i_b = 0$$

□ اگر مدار خطی باشد، روابط را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

قضیه جمع آثار: مثال (ادامه)



□ داریم:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} i_a \\ 0 \end{bmatrix} + A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ i_b \end{bmatrix}$$

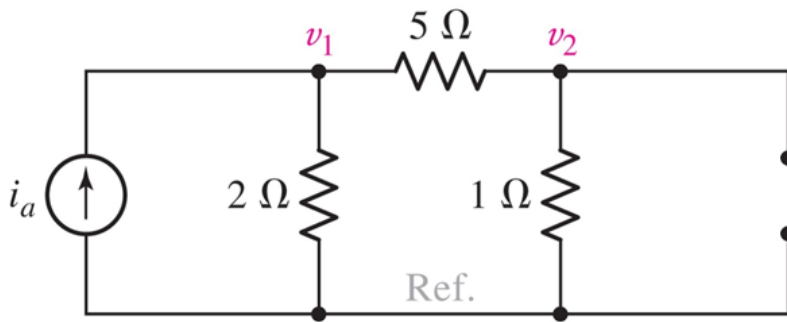
آزمایش A: حذف منبع i_b

آزمایش B: حذف منبع i_a

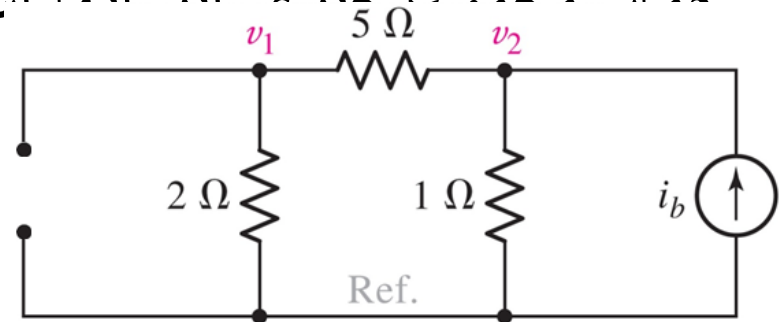
قضیه جمع آثار: تعریف

□ در یک مدار خطی، ولتاژ (یا جریان) هر المان را می توان به صورت مجموع جبری مقادیر ولتاژ (یا جریان) آن المان نوشت، به نحوی که هر مقدار فقط با در نظر گرفتن یکی از منابع مستقل به دست آمده باشد.

□ به عبارت دیگر، اثری که هر یک از منابع مستقل بر روی پارامترهای مدار می گذارند از هم مستقل بوده و برآیند اثرات آنها می توان به دست آورد.



آزمایش A: حذف منبع



آزمایش B: حذف منبع i_a

نحوه اعمال قضیه جمع آثار

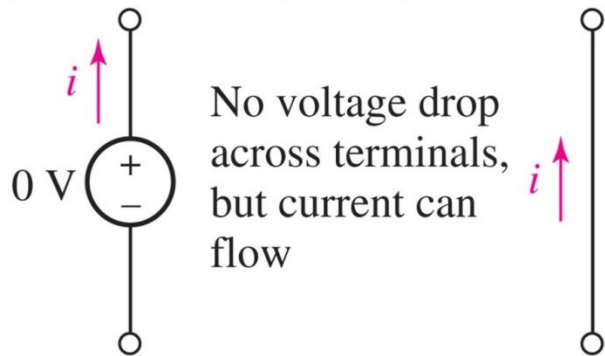
□ در هنگام محاسبه اثر هر منبع مستقل:

□ مقدار منابع مستقل دیگر را صفر می‌کنیم.

■ منبع ولتاژ اتصال کوتاه

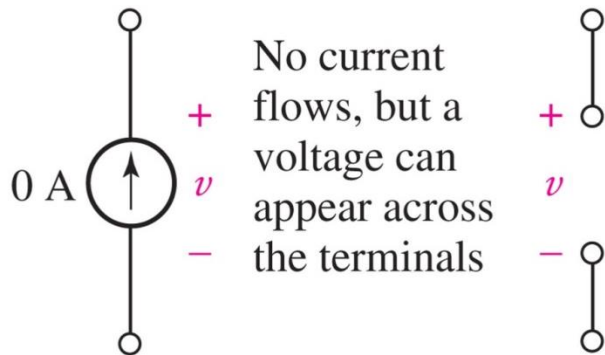
■ منبع جریان مدار باز

□ منابع وابسته بدون تغییر باقی می‌مانند.



No voltage drop
across terminals,
but current can
flow

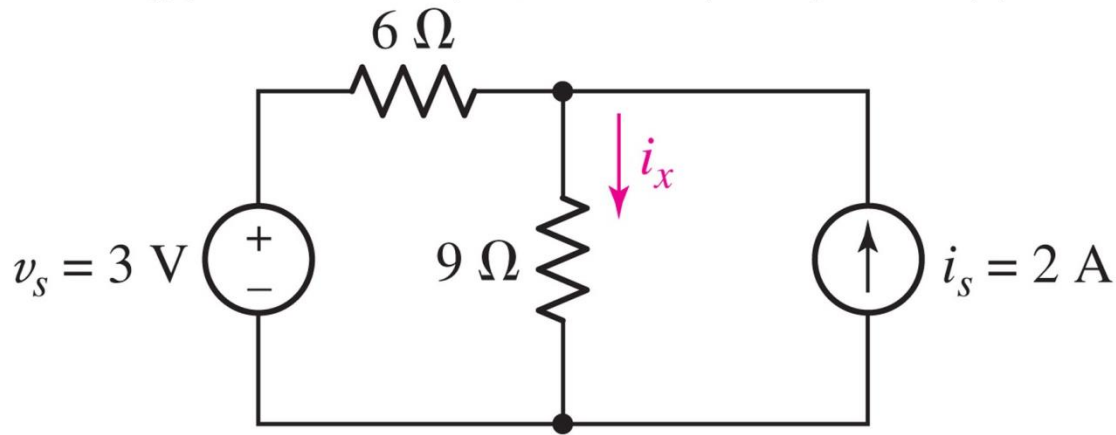
(a)



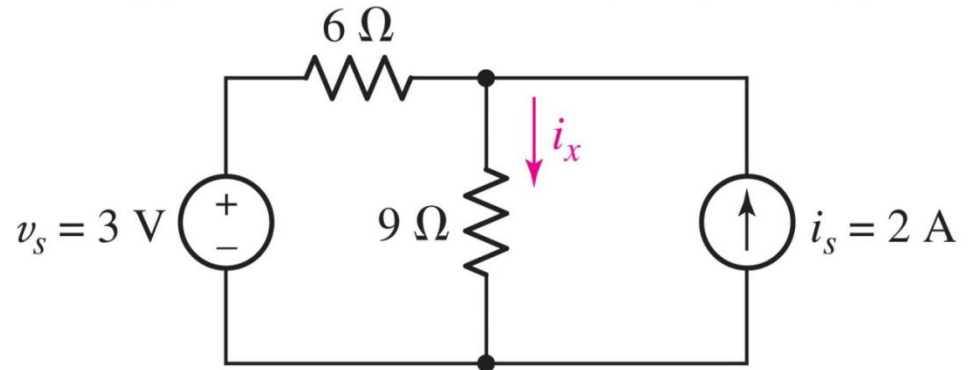
No current
flows, but a
voltage can
appear across
the terminals

قضیه جمع آثار: مثال 1

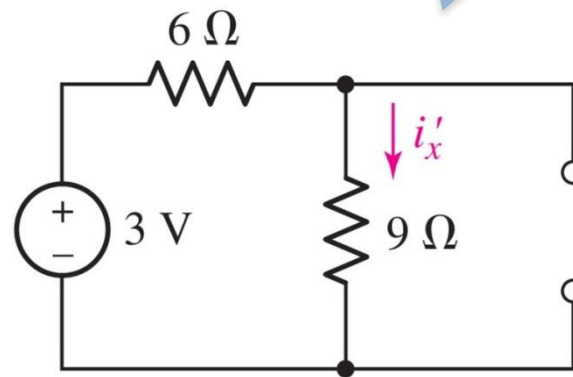
□ با استفاده از قضیه جمع آثار، مقدار جریان i_x را به دست آورید.



قضیه جمع آثار: مثال 1 (ادامه)

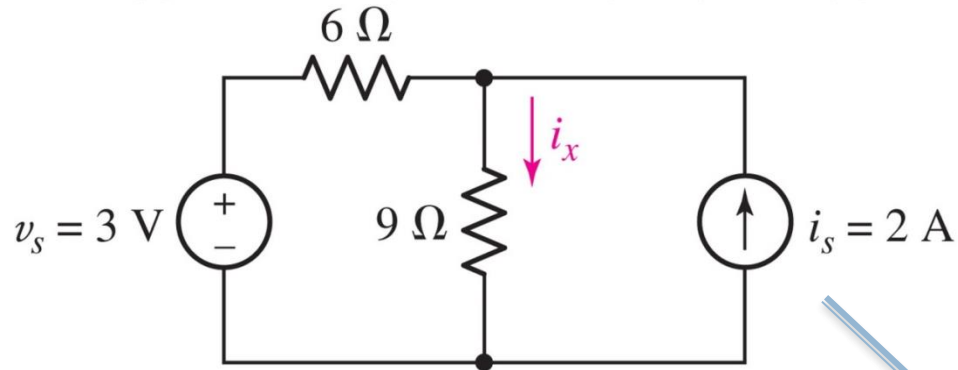


ابتدا، منبع جریان را حذف می‌کنیم.



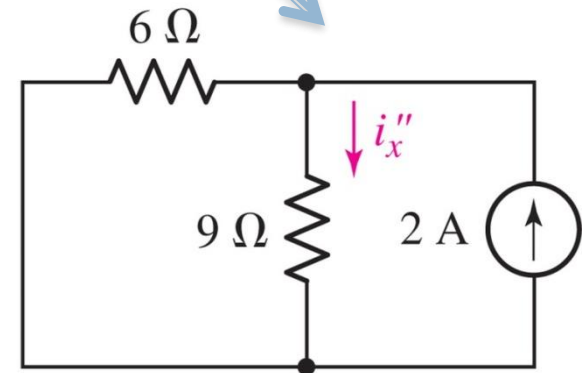
$$i'_x =$$

قضیه جمع آثار: مثال 1 (ادامه)

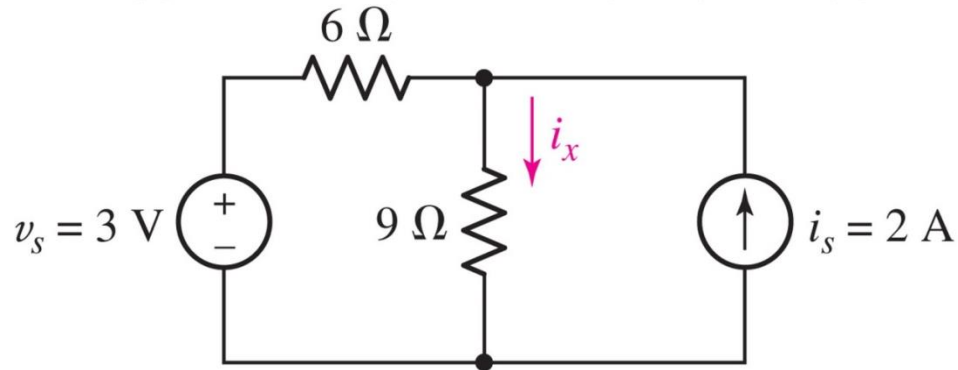


سپس، منبع ولتاژ را حذف می‌کنیم.

$$i_x'' =$$



قضیه جمع آثار: مثال 1 (ادامه)

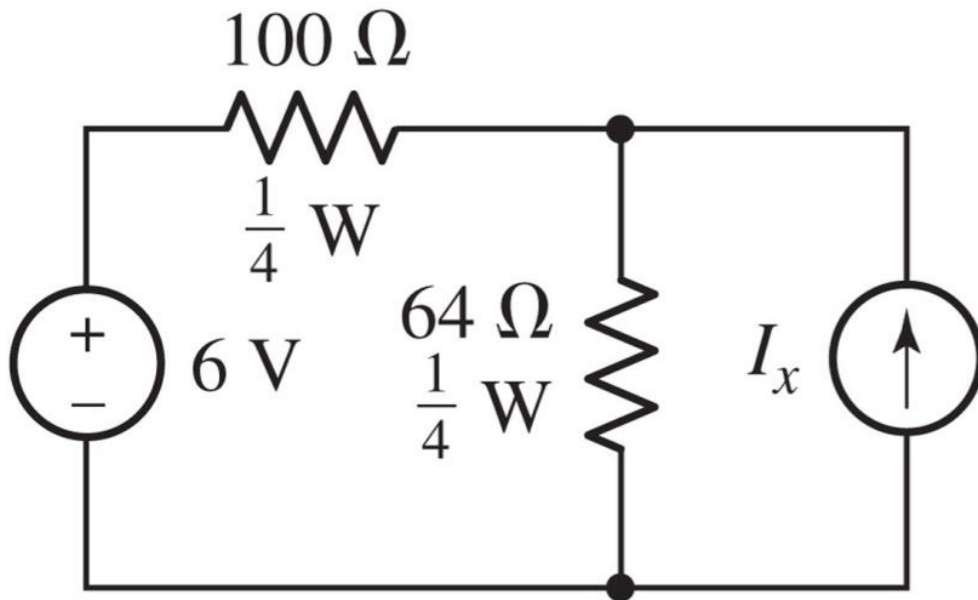


در انتها، نتایج را با هم جمع می‌کنیم:

$$i_x = i_x' + i_x'' =$$

قضیه جمع آثار: مثال 2

□ توان بیشینه قابل تحمل مقاومت‌ها در مدار زیر 0.25 وات است.
بیشترین مقدار منبع I_x چقدر می‌تواند باشد؟



Answer: $I_x < 42.49 \text{ mA}$

قضیه جمع آثار: مثال 2 (راه حل)

Maximum current magnitude in 100Ω resistor is $\sqrt{0.25 / 100} = 50\text{mA}$

Maximum current magnitude in 64Ω resistor is $\sqrt{0.25 / 64} = 62.5\text{mA}$

Current from voltage source alone is $6/164 = 36.6\text{mA}$ flowing clockwise

Current in 100Ω from I_x alone is $\frac{64}{164} I_x$ flowing to the left.

Therefore $\left| 0.0366 - \frac{64}{164} I_x \right| < 0.05$ or $-0.05 < 0.0366 - \frac{64}{164} I_x < 0.05$

$221.9\text{mA} > I_x > -34.33\text{mA}$

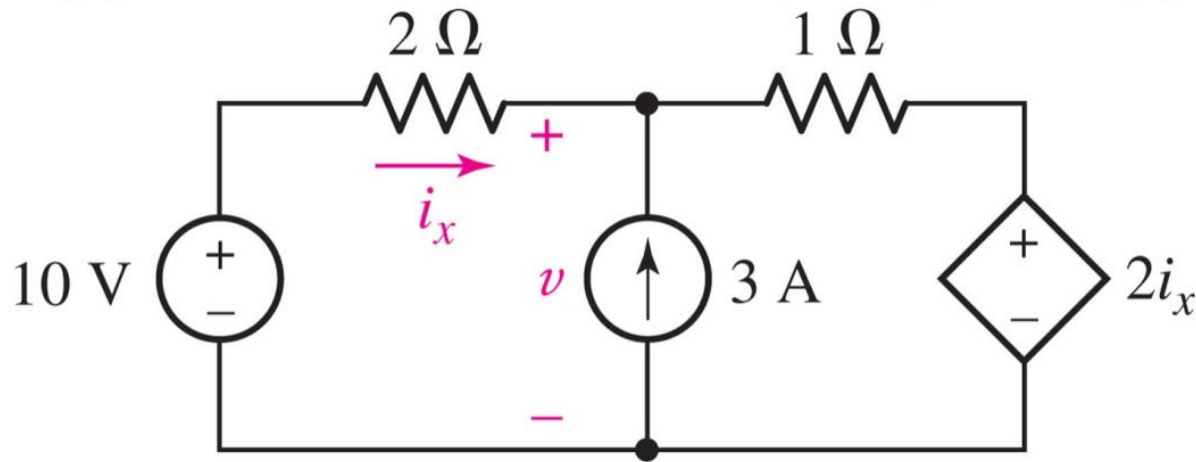
Current in 64Ω from I_x is $\frac{100}{164} I_x$ flowing downward.

Therefore $\left| 0.0366 + \frac{100}{164} I_x \right| < 0.0625$ or $-0.0625 < 0.0366 + \frac{100}{164} I_x < 0.0625$

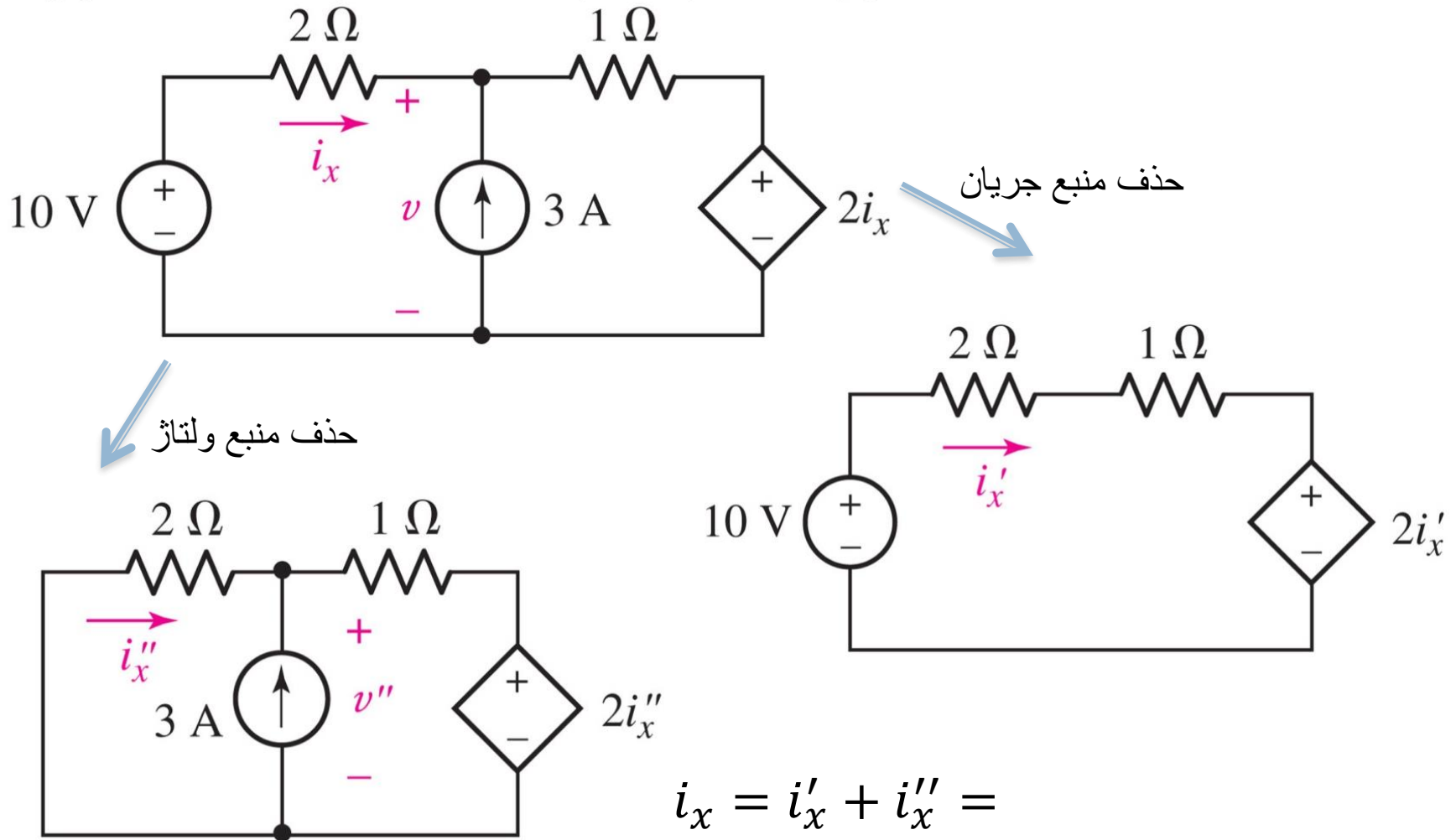
$-0.1625 < I_x < 0.04247$

جمع آثار در حضور منابع وابسته

□ منابع وابسته در هنگام اعمال قضیه جمع آثار هرگز حذف نمی‌شوند.

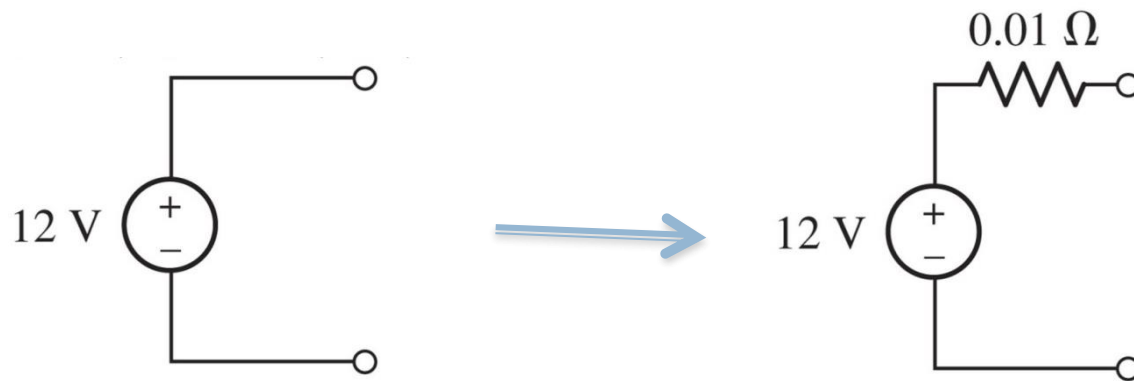


جمع آثار در حضور منابع وابسته



منبع ولتاژ واقعی

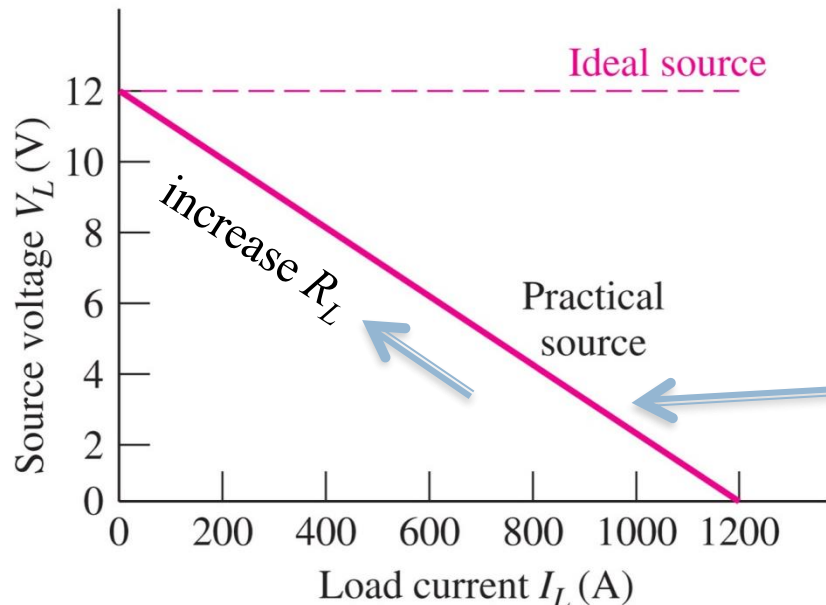
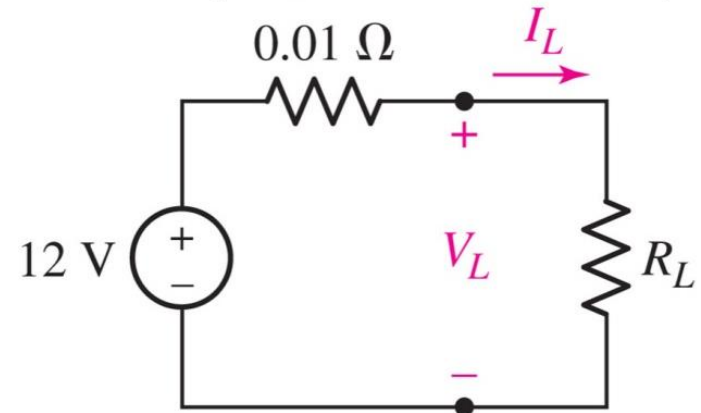
- منابع ایده‌آل یک تخمین مرتبه اول از منابع واقعی هستند.
- چرا باتری‌های واقعی محدودیت جریان‌دهی دارند و با افزایش جریان، ولتاژ آنها دچار افت می‌شود؟
- مدل واقعی‌تر باتری ماشین:



اثر اتصال بار به منبع ولتاژ واقعی

برای مثال باتری ماشین:

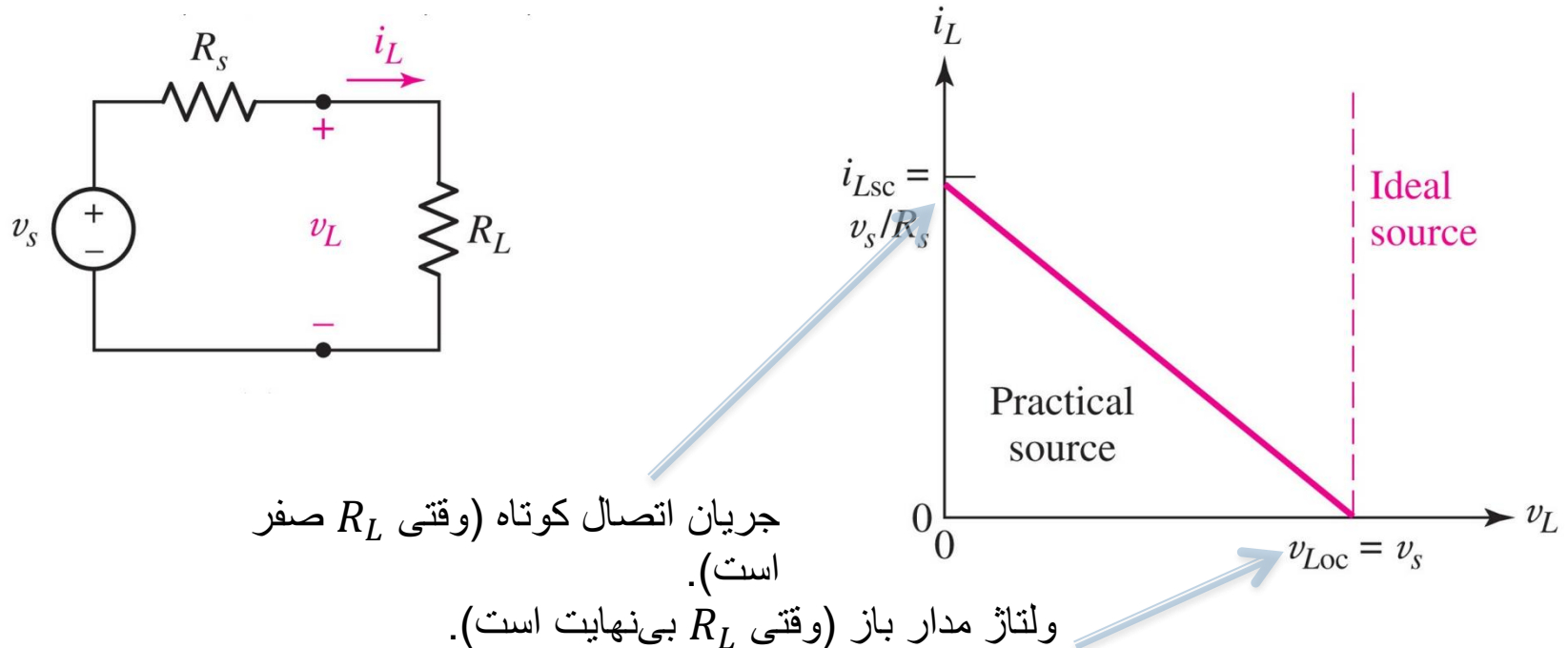
$$V_L = 12 - 0.01 I_L$$



این خط همه
مقادیر R_L
ممکن را نشان
می‌دهد.

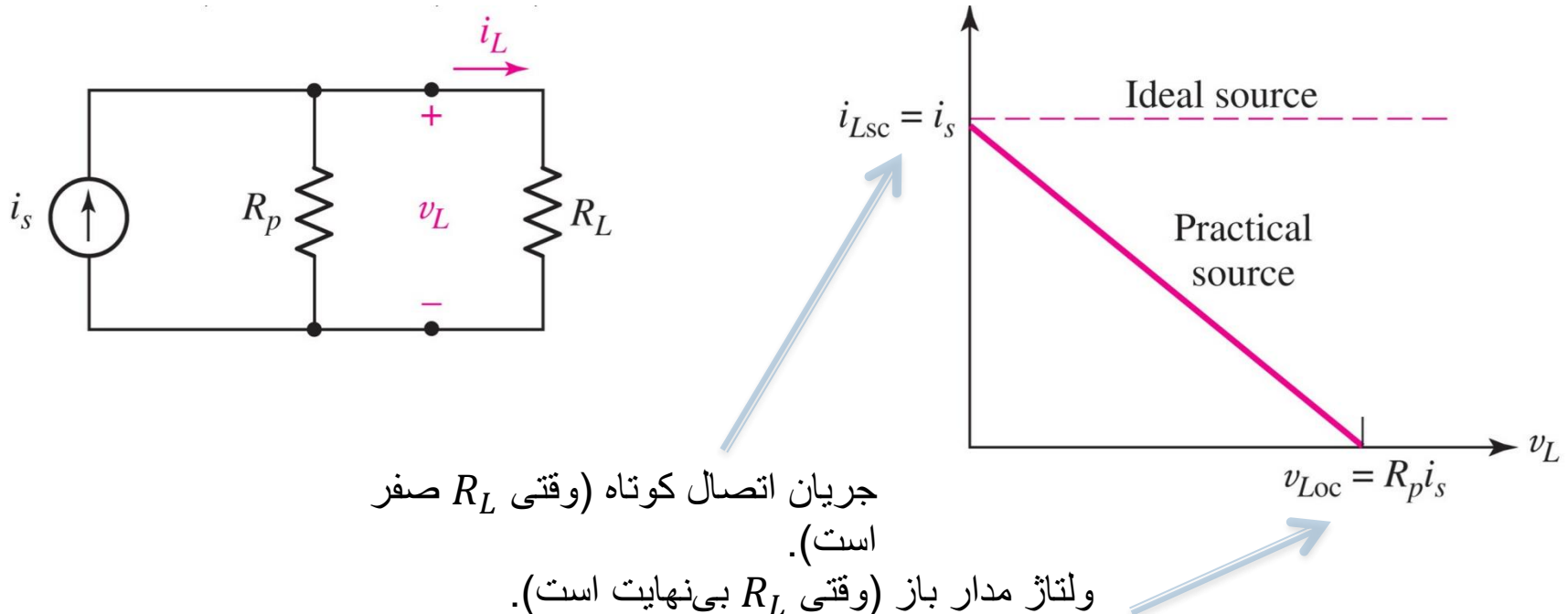
منبع ولتاژ واقعی

□ یک منبع ولتاژ دارای یک مقاومت داخلی (مقاومت خروجی) است که به صورت سری با آن قرار گرفته و با R_s نشان داده می‌شود.



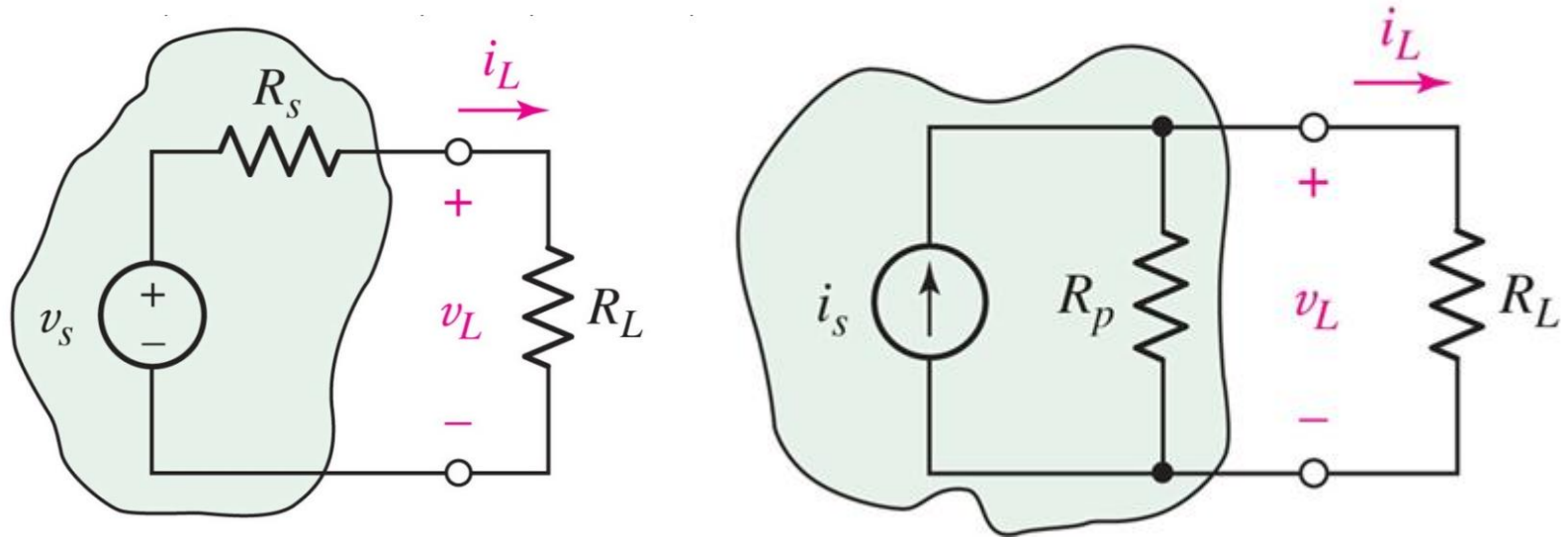
منبع جریان واقعی

□ یک منبع جریان دارای یک مقاومت داخلی (مقاومت خروجی) است که به صورت موازی با آن قرار گرفته و با R_p نشان داده می‌شود.

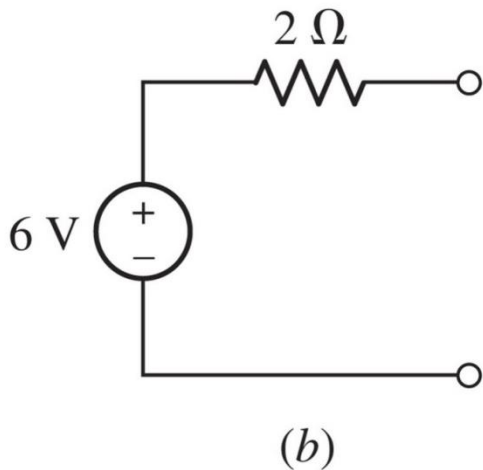
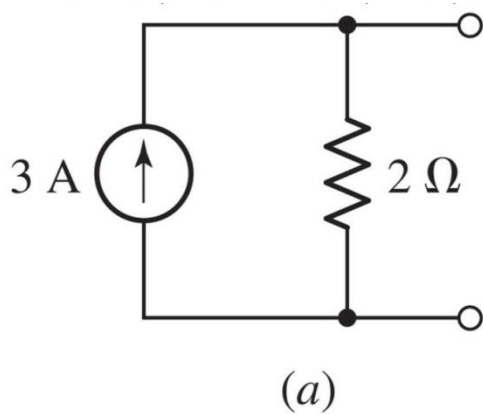


تبدیل منابع: مثال

□ برای اینکه دو تکه مدار زیر با هم معادل باشند (از دید مقاومت R_L تفاوتی بین آن دو نباشد)، چه شرطی باید بین v_s ، R_p ، R_s و i_s برقرار



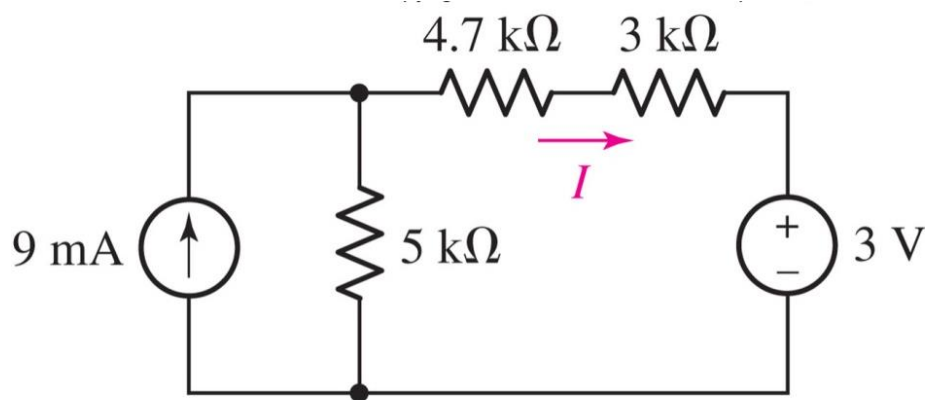
قضیه تبدیل منابع



- دو مدار a و b با یکدیگر معادل اند.
- برای ساده کردن تحلیل مدار می توان آنها را به جای هم استفاده کرد.
- به این عملیات **تبدیل منابع** گویند.

کاربرد تبدیل منابع: مثال

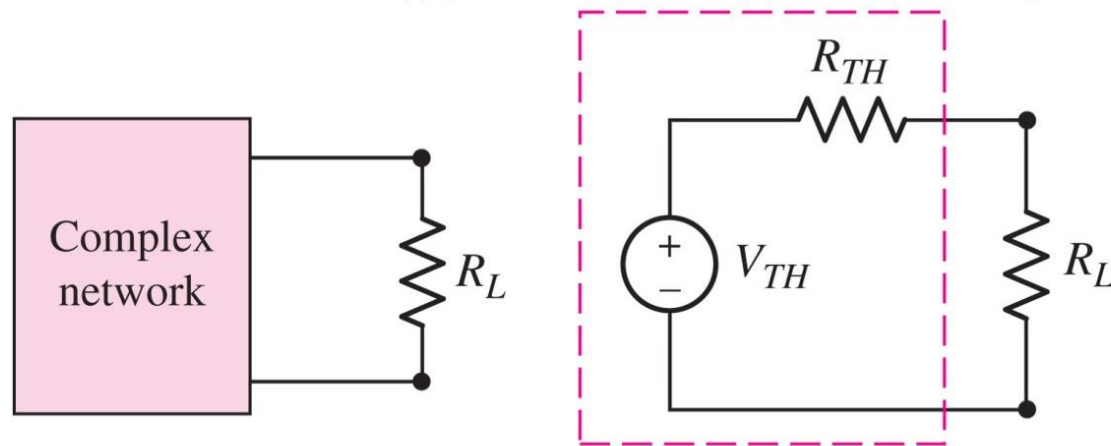
□ جریان I را در مدار زیر با استفاده از تبدیل منابع بیابید.



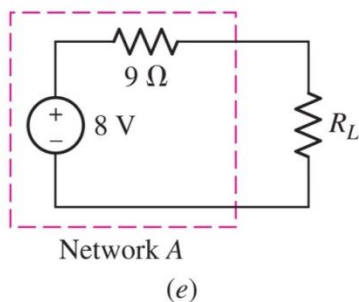
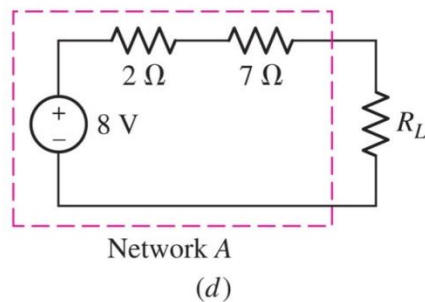
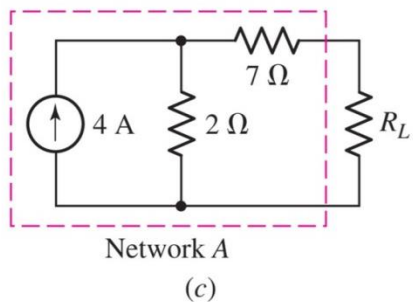
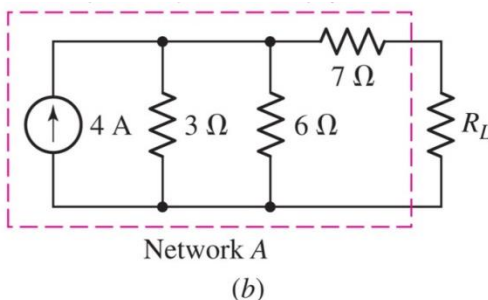
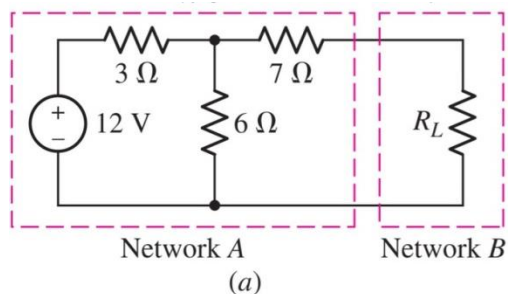
مدار معادل تونن Thévenin's Theorem

□ هر مدار خطی (شامل مقاومت، منابع مستقل و وابسته) را می‌توان با یک مدار ساده شامل یک منبع ولتاژ و یک مقاومت سری جایگزین کرد، به نحوی که جریان و ولتاژ مقاومت R_L تغییری نکند.

□ به این مدار جدید، **مدار معادل تونن** گویند. به V_{TH} **ولتاژ تونن** و به R_{TH} **مقاومت تونن** گویند.



مثال: یافتن مدار معادل تونن با استفاده از تبدیل منابع

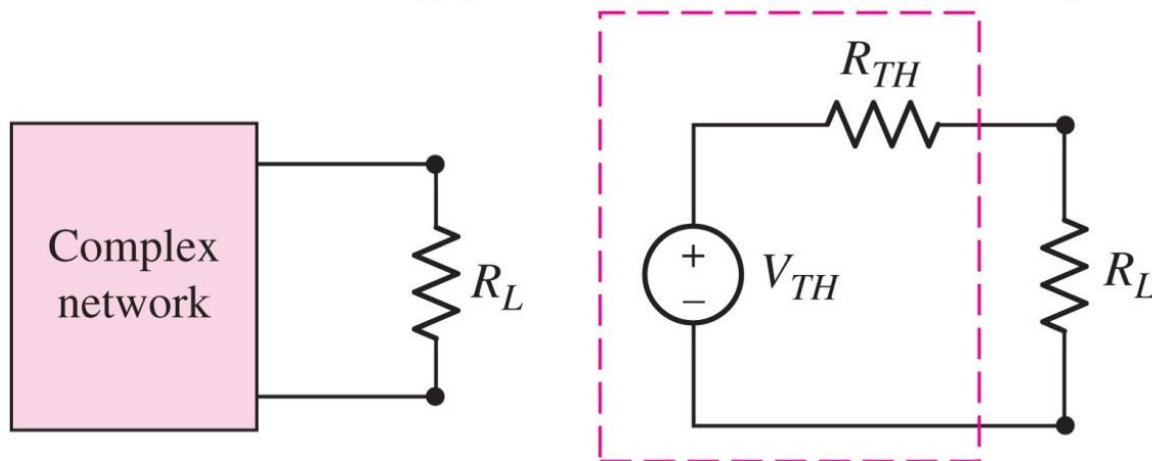


□ با اعمال پی‌درپی روش تبدیل منابع، می‌توان مدار a را به مدار معادل تونن e تبدیل کرد.

□ البته این روش را به همه مدارها نمی‌توان اعمال کرد. بنابراین باید یک راه‌حل اصولی‌تر وجود داشته باشد.

روش محاسبه مدار معادل تونن

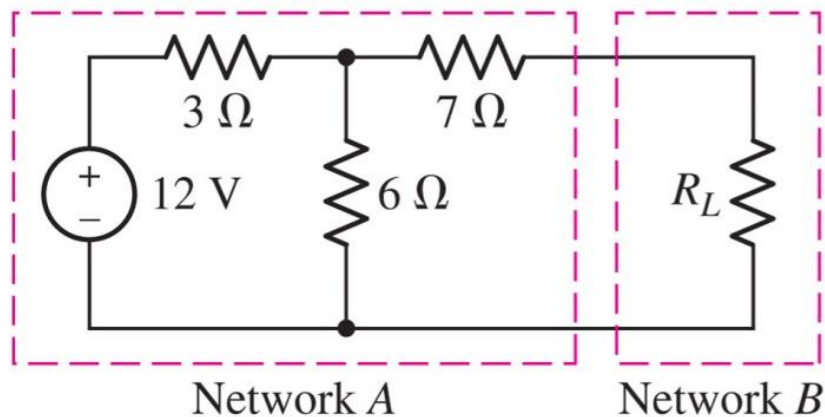
1. مدار مورد نظر را از بقیه مدار جدا کنید.
2. ولتاژ مدار باز v_{oc} را محاسبه کنید.
3. مقاومت معادل مدار R_{eq} را با خاموش کردن همه منابع مستقل به دست آورید.



داریم:

$$V_{TH} = v_{oc} \quad \text{و}$$
$$R_{TH} = R_{eq}$$

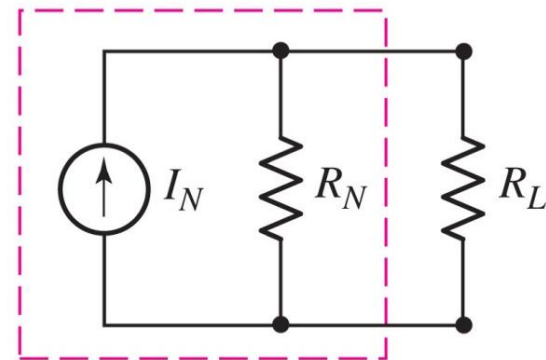
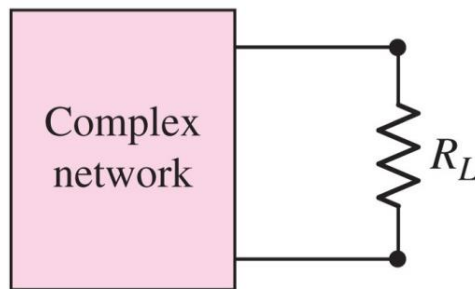
□ مدار معادل تونن شبکه A را بیابید.



مدار معادل نورتن

Norton's Theorem

- هر مدار خطی (شامل مقاومت، منابع مستقل و وابسته) را می‌توان با یک مدار ساده شامل یک منبع جریان و یک مقاومت موازی جایگزین کرد، به نحوی که جریان و ولتاژ مقاومت R_L تغییری نکند.
- به این مدار جدید، **مدار معادل نورتن** گویند. به I_N **جریان نورتن** و به R_N **مقاومت نورتن** گویند.

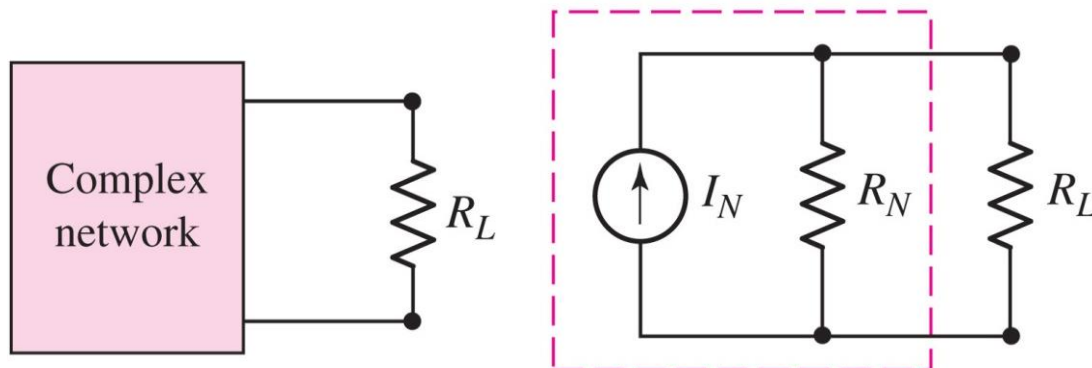


روش محاسبه مدار معادل نورتن

1. مدار مورد نظر را از بقیه مدار جدا کنید.
2. جریان اتصال کوتاه i_{sc} را محاسبه کنید.
3. مقاومت معادل مدار R_{eq} را با خاموش کردن همه منابع مستقل به دست آورید.

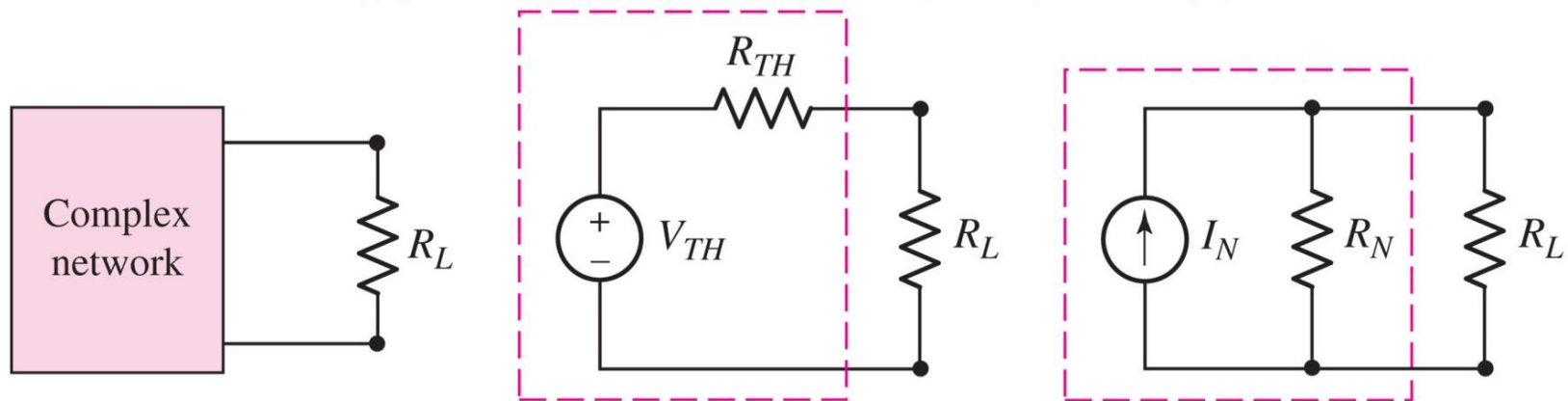
داریم:

$$I_N = i_{sc} \text{ و } R_N = R_{eq}$$



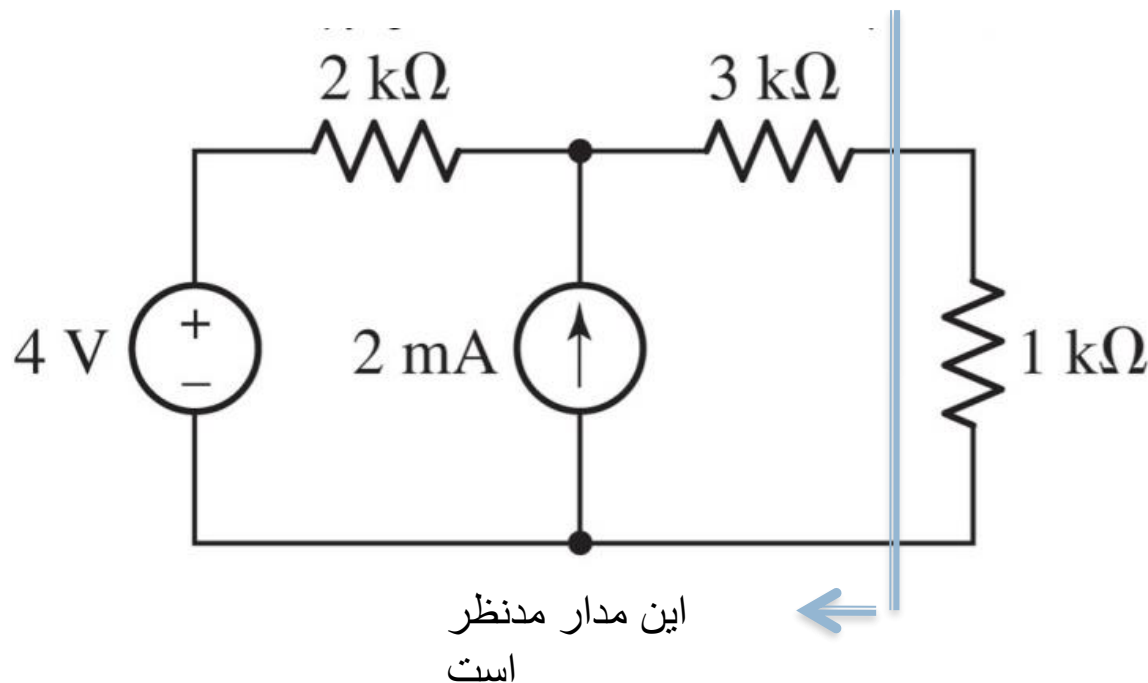
تبدیل منابع و قضیه تونن و نورتن

□ مدارهای معادل تونن و نورتن را می‌توان با تبدیل منابع از روی یکدیگر به‌دست آورد.

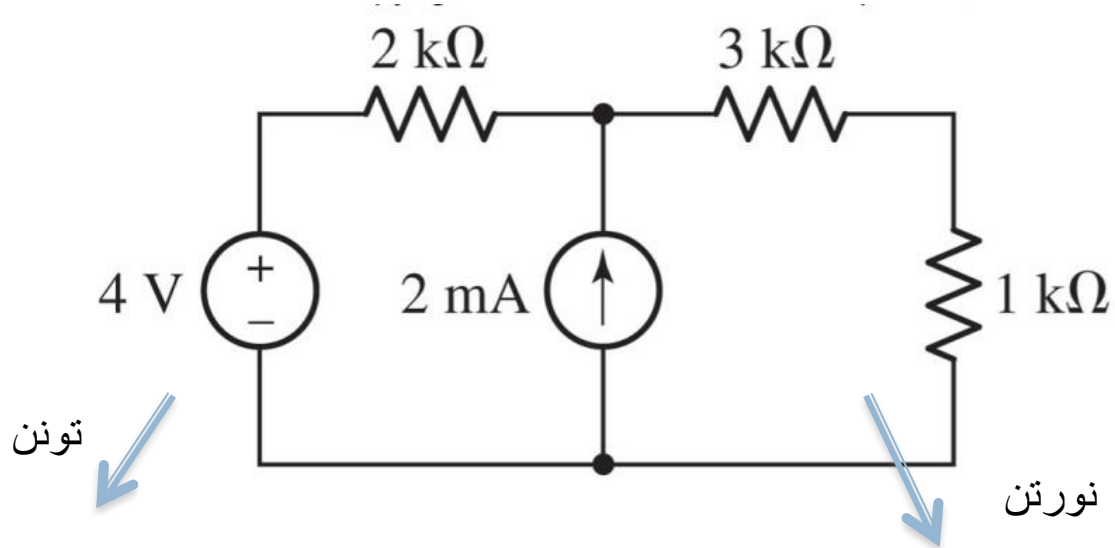


مدار معادل تونن و نورتن: مثال

□ مدار معادل تونن و نورتن مداری که در سمت چپ مقاومت 1 کیلو اهم قرار دارد را محاسبه کنید.



مدار معادل تونن و نورتن: مثال

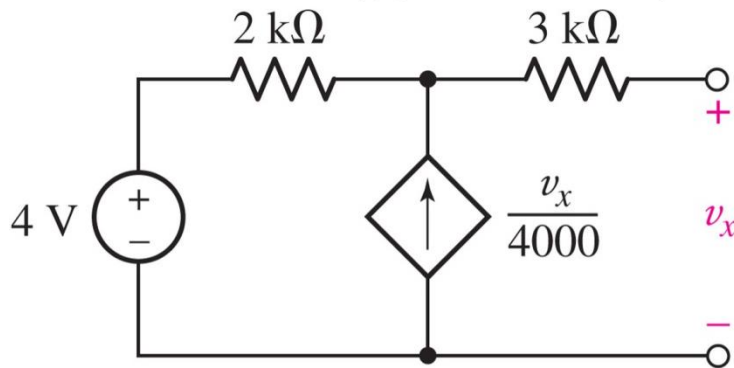


مدار معادل تونن و نورتن و منابع وابسته

□ روش اول: محاسبه V_{TH} و I_N و محاسبه R_{TH} از طریق:

$$R_{TH} = R_N = \frac{V_{TH}}{I_N}$$

□ مثال:

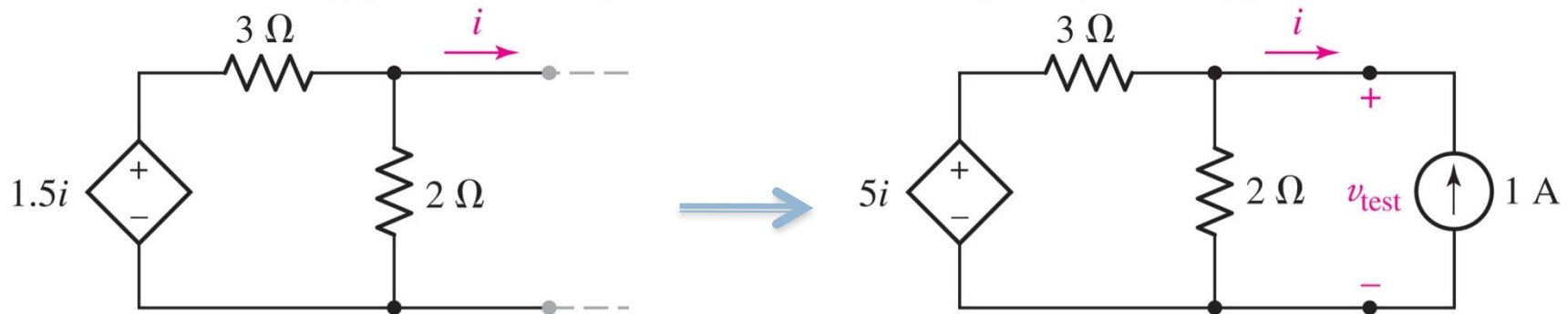


مدار معادل تونن و نورتن و منابع وابسته

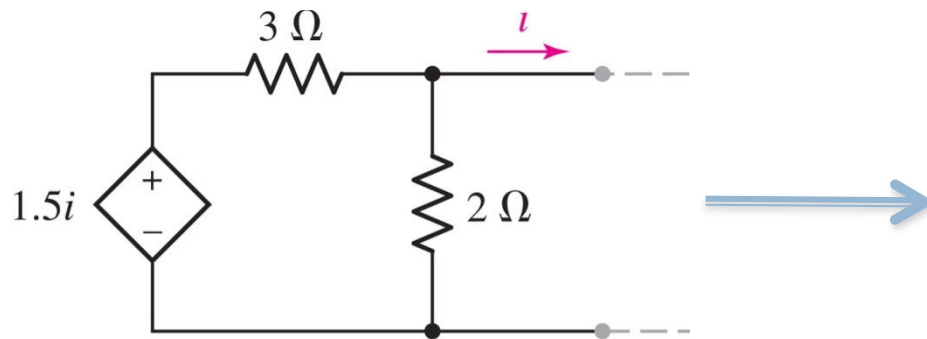
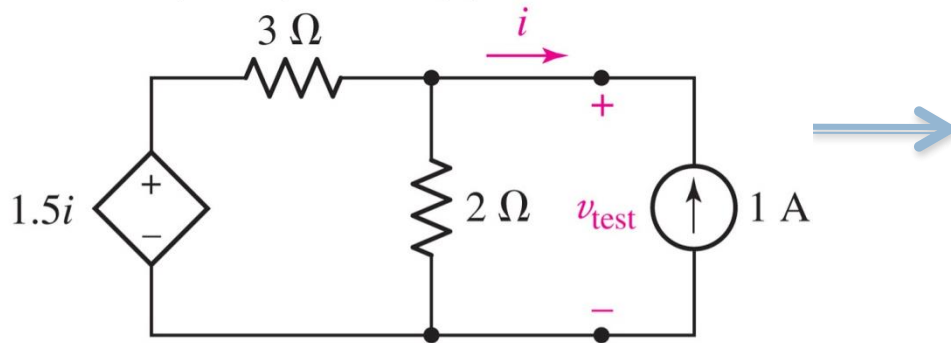
□ وقتی V_{TH} و I_N هر دو صفر باشند، روش اول شکست می‌خورد.

□ روش دوم: استفاده از یک منبع تست

□ در مثال زیر، v_{test} برابر مقاومت تونن خواهد بود. چرا؟

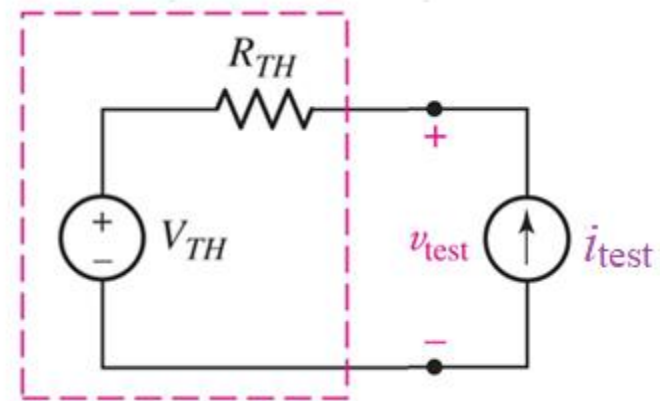
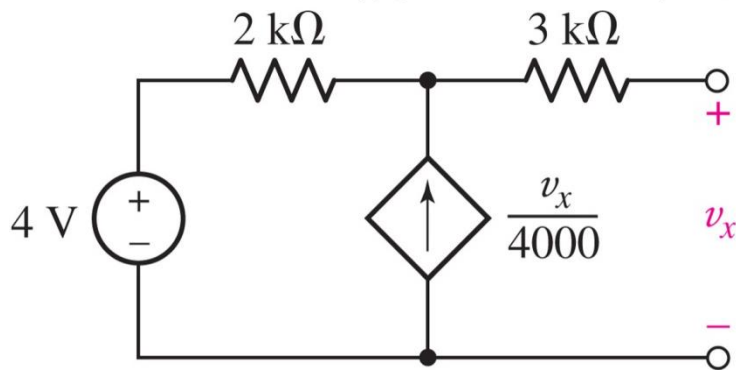


مدار معادل تونن و نورتن و منابع وابسته



استفاده از منبع تست برای یافتن مدار معادل

□ در حالت کلی نیز می‌توان از منبع تست برای یافتن مدار معادل تونن و نورتن هر مداری استفاده کرد.

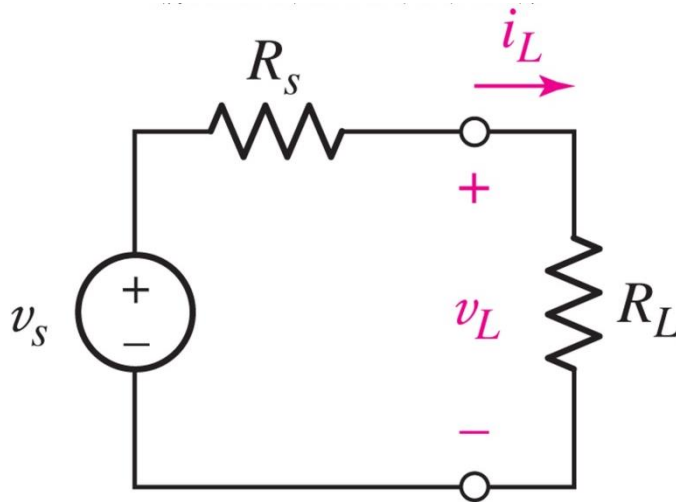


$$v_{test} = R_{TH} i_{test} + V_{TH}$$

□ با قرار دادن منبع تست، معادله‌ای به‌دست می‌آید که در آن ضریب i_{test} همان مقاومت تونن و مقدار جمع شده با آن ولتاژ

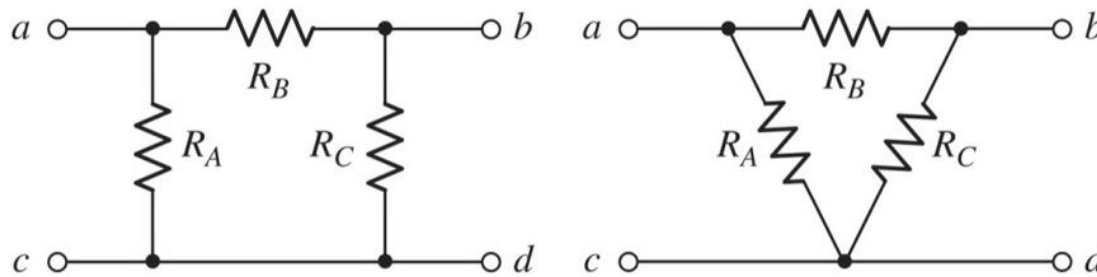
قضیه انتقال توان بیشینه

□ در هنگام اتصال یک بار R_L به یک منبع ولتاژ واقعی، مقدار بار چقدر باشد تا بیشینه توان به آن انتقال یابد؟

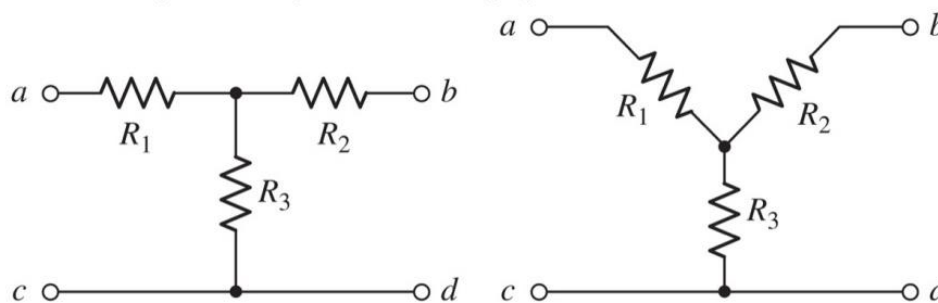


تبدیل ستاره-مثلث

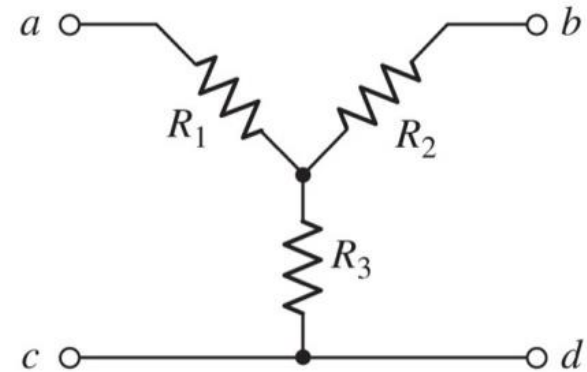
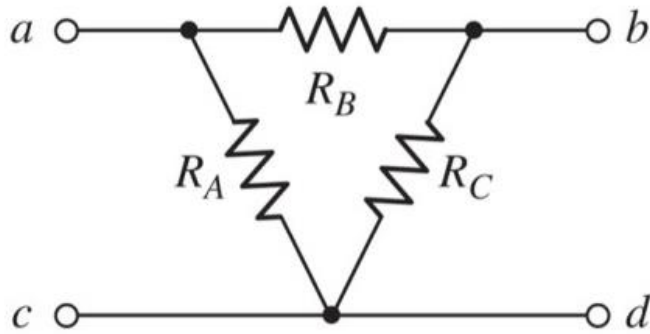
□ آرایش مثلث Δ



□ آرایش ستاره γ



تبدیل ستاره-مثلث



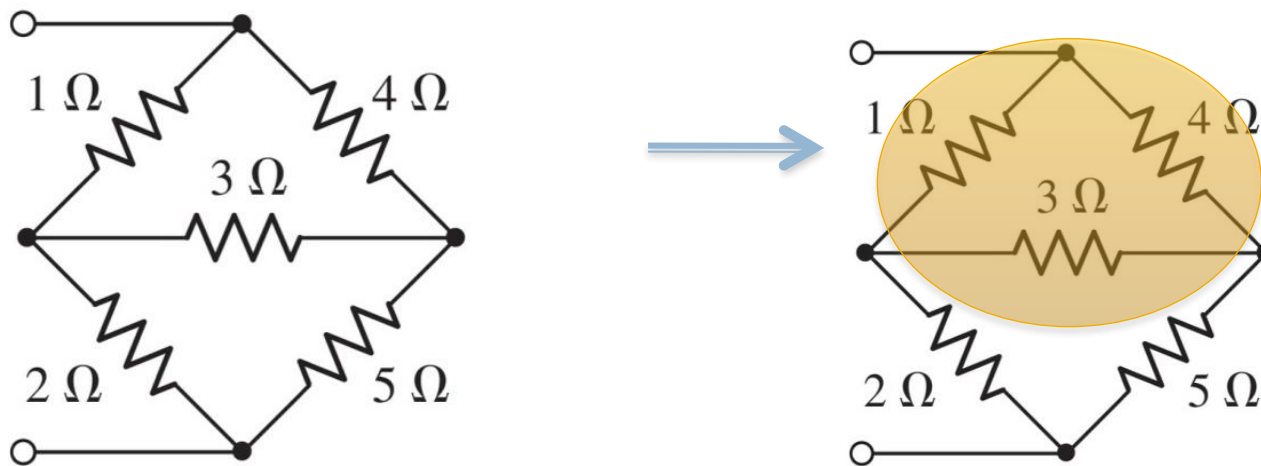
□ این دو مدار معادل اند اگر:

$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$
$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$
$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

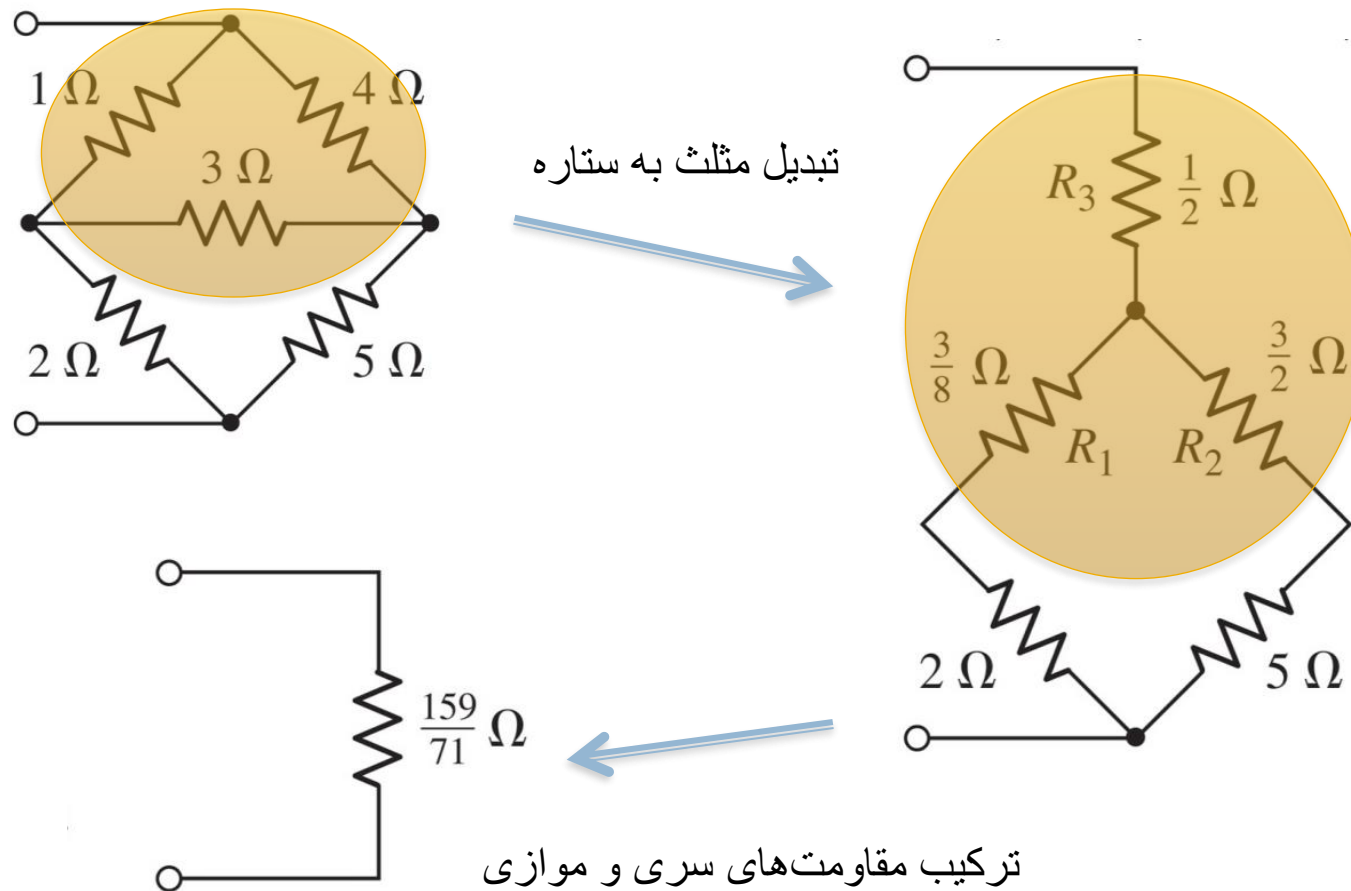
$$R_1 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$
$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$
$$R_3 = \frac{R_C R_A}{R_A + R_B + R_C}$$

تبدیل ستاره-مثلث: مثال

□ مقاومت معادل مدار سمت چپ را با استفاده از تبدیل ستاره-مثلث بیابید.



تبدیل ستاره-مثلث: مثال



خلاصه مطالب

- آنچه در این اسلاید آموختید:
- قضیه جمع آثار و نحوه استفاده از آن
- منابع واقعی
- تبدیل منابع و کاربرد آن در ساده‌سازی مدار
- مدار معادل تونن و نورتن و نحوه محاسبه آنها
- قضیه انتقال توان بیشینه
- تبدیل ستاره-مثلث و کاربرد آن در ساده‌سازی مدار

تمرین کلاسی

□ در صورت اتصال یک بار R_L به دو سر a و b ، مقدار آن را برای انتقال بیشینه توان بیابید. مقدار توان بیشینه را نیز محاسبه کنید.

