مدارهای الکتریکی و الکترونیکی
فصل هفتم: مدارهای RLC

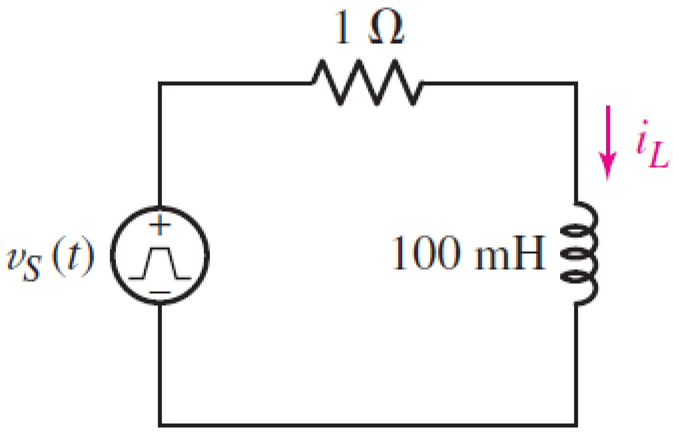
استاد درس: محمود ممتازپور

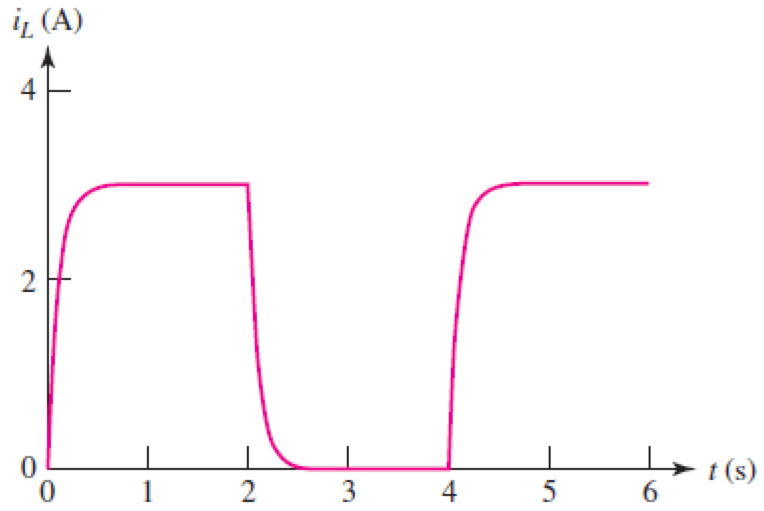
ceit.aut.ac.ir/~momtazpour

فهرست مطالب

- کاربرد مدارهای RL و RC
- مدارهای مرتبه دوم: RLC
  - مدار RLC موازی بدون منبع
  - مدار RLC سری بدون منبع
  - پاسخ کامل در حضور منبع و شرایط اولیه
    - نحوه محاسبه شرایط اولیه

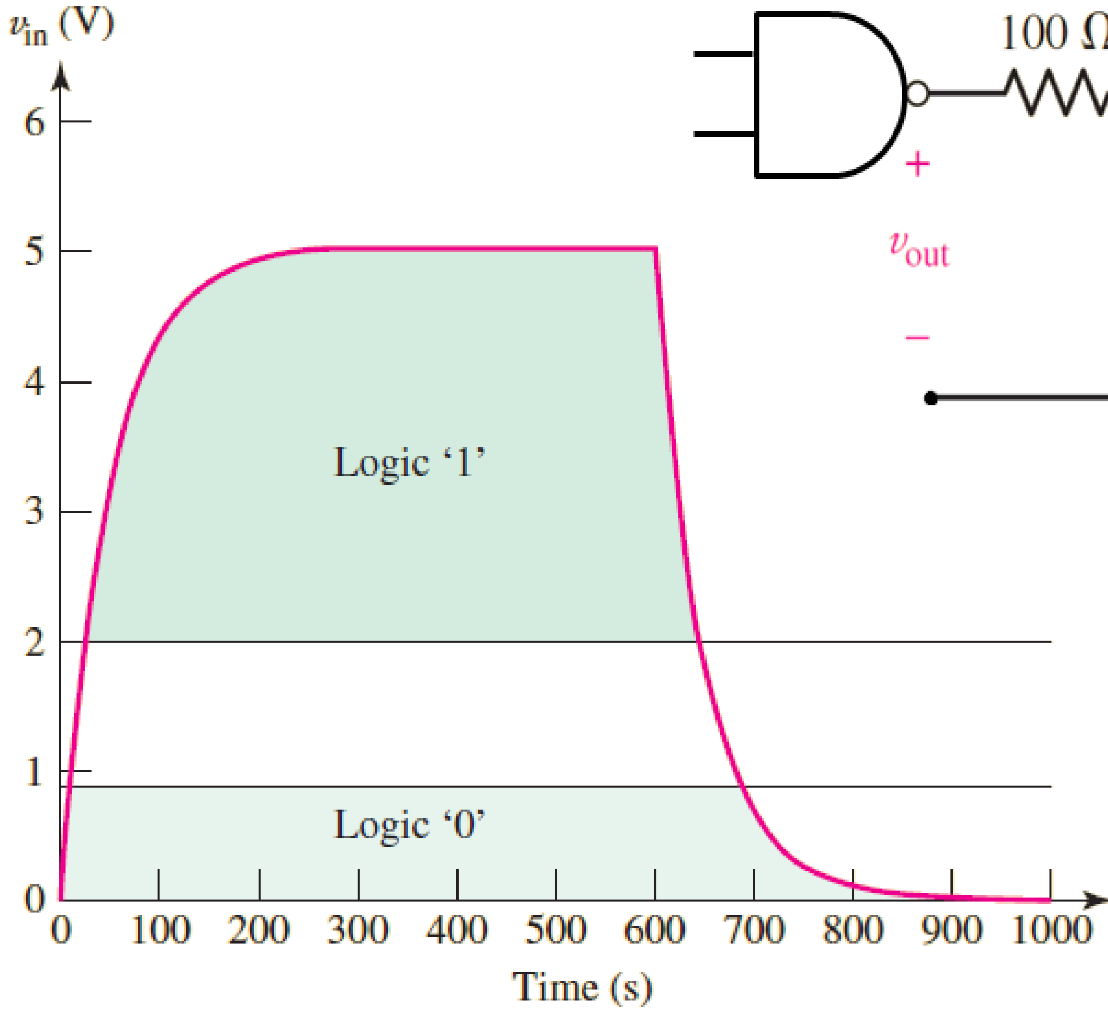
مدارهای RL و RC

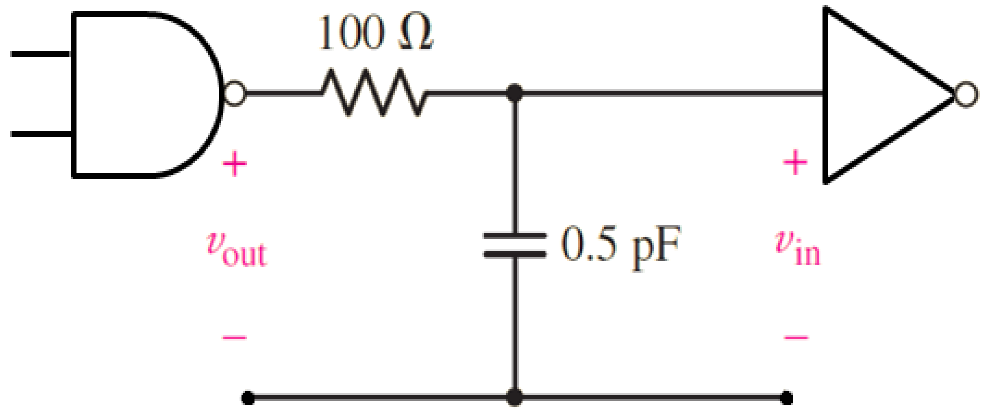




$$i_L(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)u(t)$$

کاربرد در تحلیل تأخیر مدارهای مجتمع



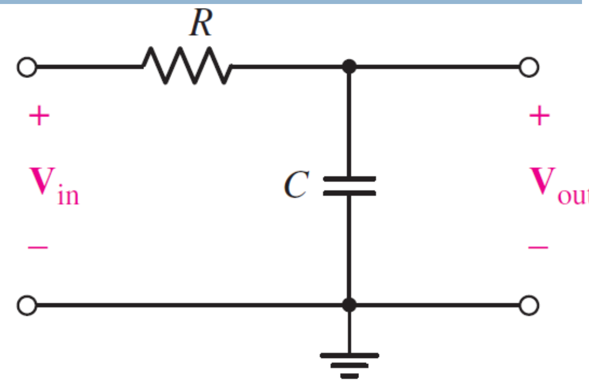


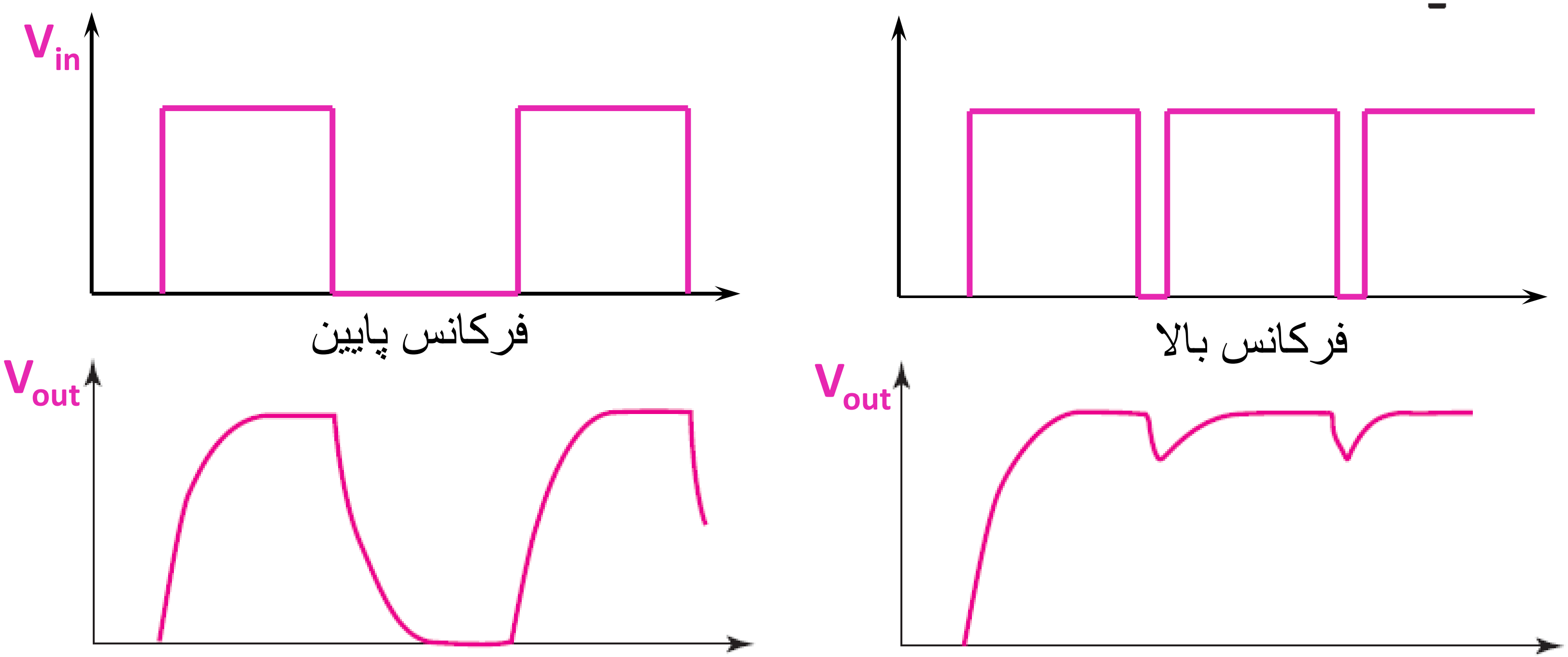
مقاومت و خازن پارازیتی سیم متصل کننده دو گیت منطقی باعث افزایش تأخیر می‌شود.

بیشینه فرکانس مجاز:

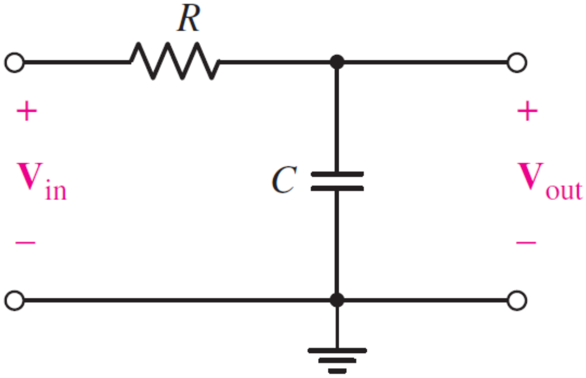
$$f_{max} = \frac{1}{2 \times 5\tau} = 2Ghz$$

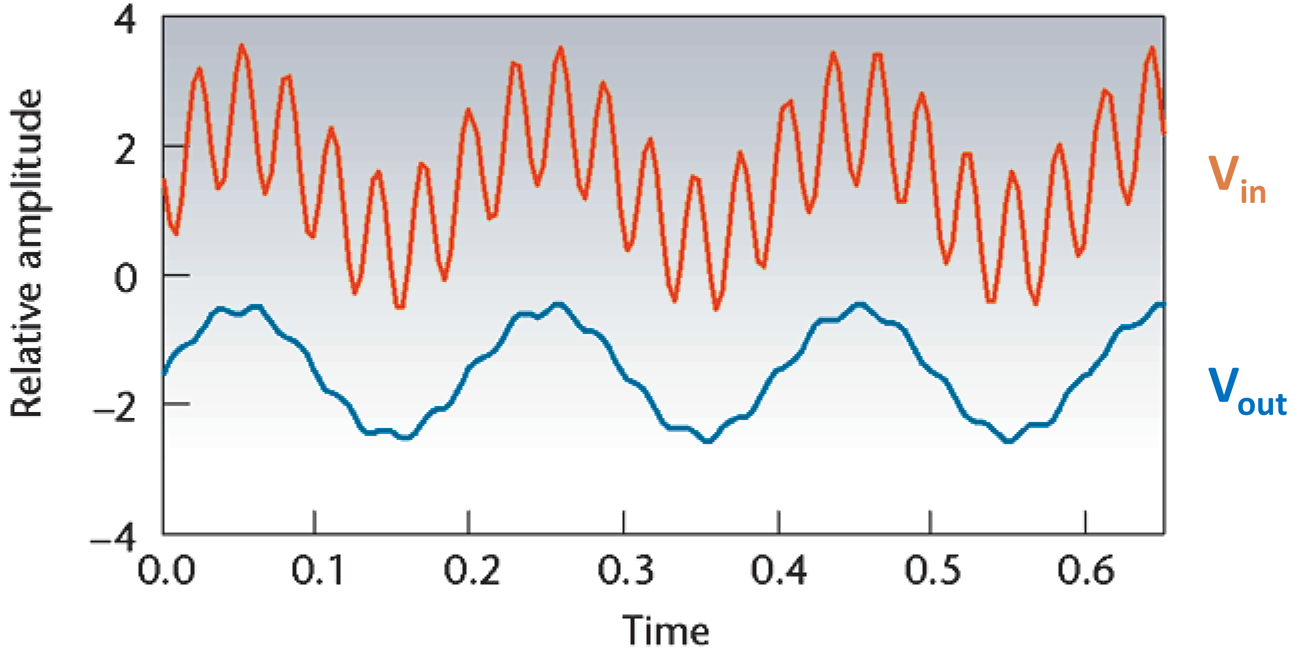
کاربرد به عنوان یک فیلتر فرکانس





کاربرد به عنوان یک فیلتر فرکانس: حذف نویز



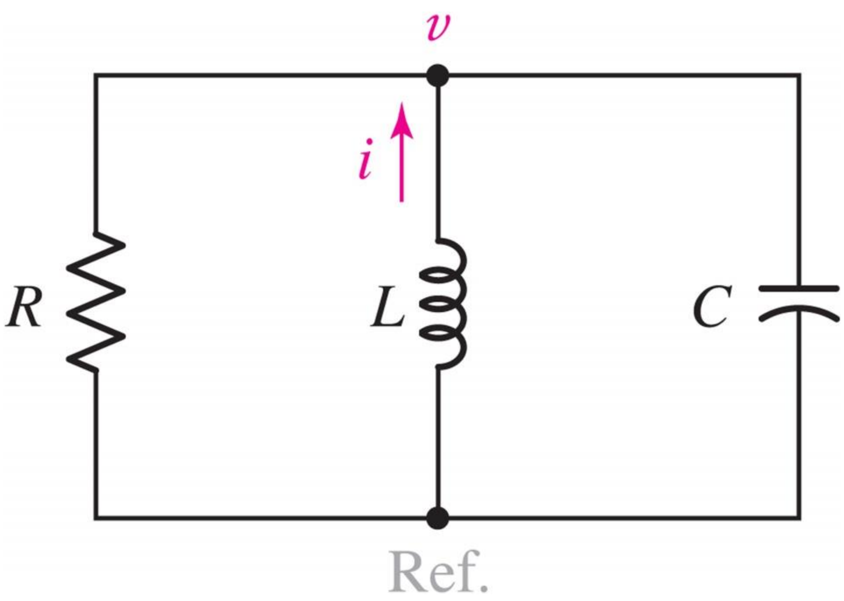


مدار RLC

- یک مدار RLC هم دارای سلف است و هم دارای خازن. در صورتی‌که فقط یک سلف و یک خازن داشته باشد، مدار مرتبه دوم خواهد بود.
  - البته با دو خازن و یا دو سلف نیز می‌توان مدار مرتبه دوم ساخت.
- مدارهای RLC کاربردهای بسیار متنوعی دارند:
  - نوسان‌ساز: مداری که یک پالس متناوب تولید می‌کند (برای ساخت کلاک)
  - فیلتر فرکانس: مثلاً برای حذف نویز
  - گیرنده رادیوی آنالوگ و ...
  - همچنین مدل‌سازی رفتار سیستم تعلیق خودرو، آسانسور، هواپیما، کنترلر دما و ... با استفاده از یک مدار RLC امکان‌پذیر است.

مدار RLC موازی بدون منبع

- با اعمال KCL و مشتق‌گیری از آن داریم:



$$C\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v=0$$

حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

- از طریق یافتن ریشه‌های معادله مشخصه:

$$Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0$$

- اگر s_1 و s_2 ریشه‌های معادله مشخصه باشند، پاسخ طبیعی برابر است با:

$$v_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

تحلیل پاسخ طبیعی

- ریشه‌های معادله مشخصه برابرند با:

$$s_1, s_2 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

- تعریف 1: فرکانس تشدید ω_0

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

- تعریف 2: ضریب میرایی α

تحلیل پاسخ طبیعی

- با تعاریف صفحه قبل، ریشه‌های معادله مشخصه برابرند با:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- برای یافتن ضرایب A_1 و A_2 نیاز به دو شرط اولیه داریم.

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

سه حالت ممکن برای پاسخ طبیعی

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- اگر $\alpha > \omega_0$ باشد، ریشه‌ها حقیقی و متمایزند و پاسخ میرای شدید نامیده می‌شود.
  - پاسخ حالت نوسانی ندارد. مانند رها کردن یک پاندول در یک ظرف محتوی گریس، یا رها کردن یک فنر خیلی سفت.
- اگر $\alpha = \omega_0$ باشد، معادله مشخصه یک ریشه حقیقی مضاعف دارد و پاسخ میرای بحرانی نامیده می‌شود.
  - مدار در مرز نوسانی شدن است ولی هنوز نوسانی نیست.
- اگر $\alpha < \omega_0$ باشد، ریشه‌ها مختلط و مزدوج‌اند و پاسخ میرای ضعیف نامیده می‌شود.
  - پاسخ مدار به صورت میرای نوسانی است. مانند رها کردن یک پاندول

پاسخ میرای شدید $(\alpha>\omega_0)$

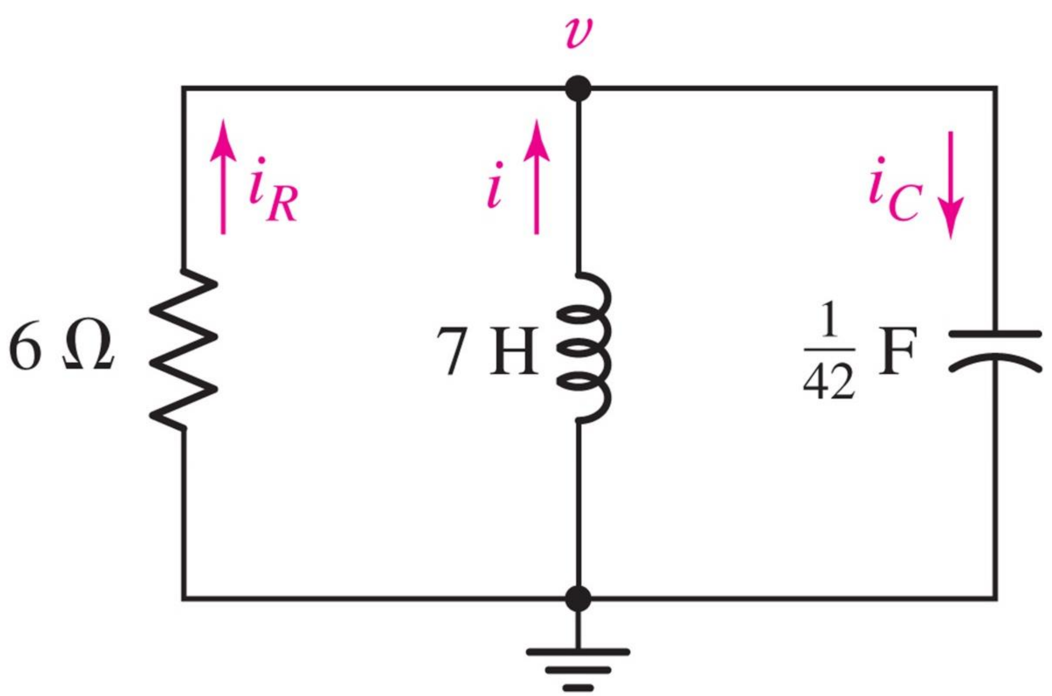
$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- هر دو ریشه حقیقی و متمایزند.
- فرم پاسخ طبیعی به صورت زیر است.

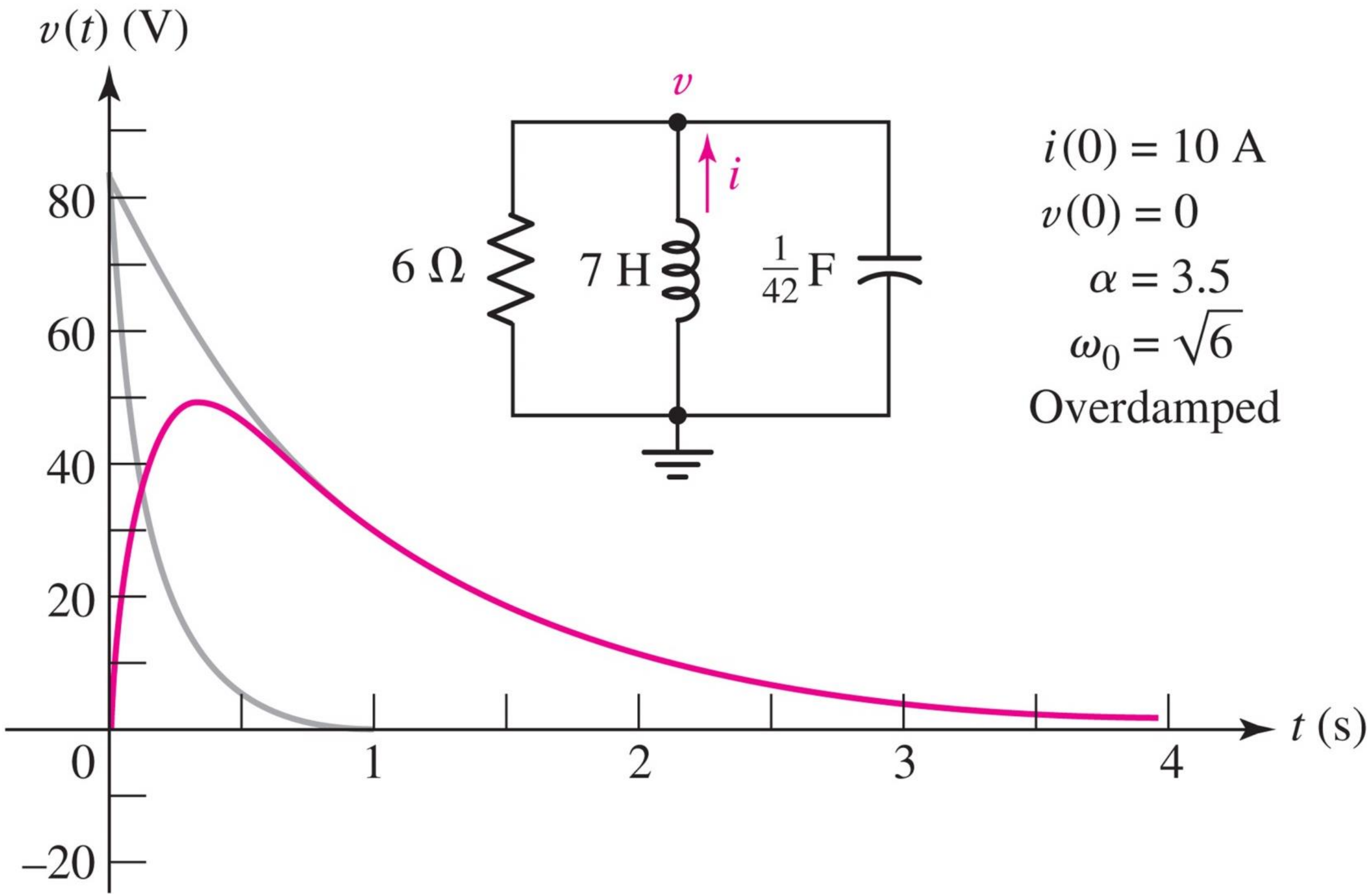
$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

مدار RLC میرای شدید: مثال 1

- اگر $i(0^+) = 10A$ و $v(0^+) = 0V$ باشد، نشان دهید
$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$$

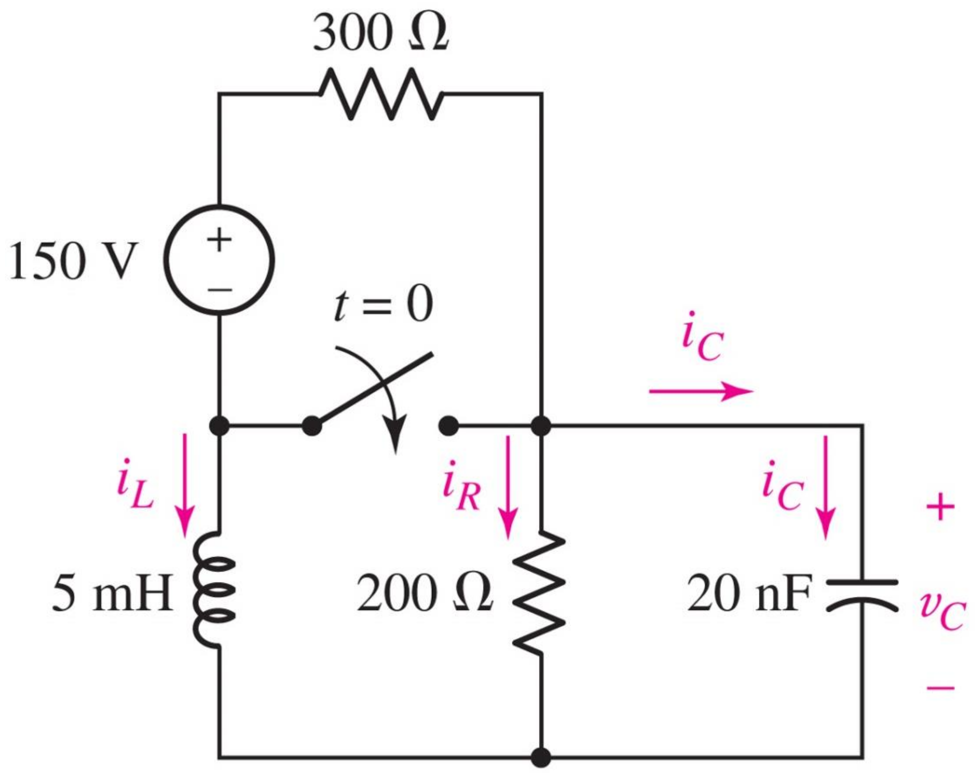


رسم پاسخ مدار در حالت میرای شدید



مدار RLC میرای شدید: مثال 2

- نشان دهید $v_C(t) = 80e^{-50000t} - 20e^{-200000t}\ V$



پاسخ میرای بحرانی ($\alpha=\omega_0$)

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- یک ریشه حقیقی مضاعف:

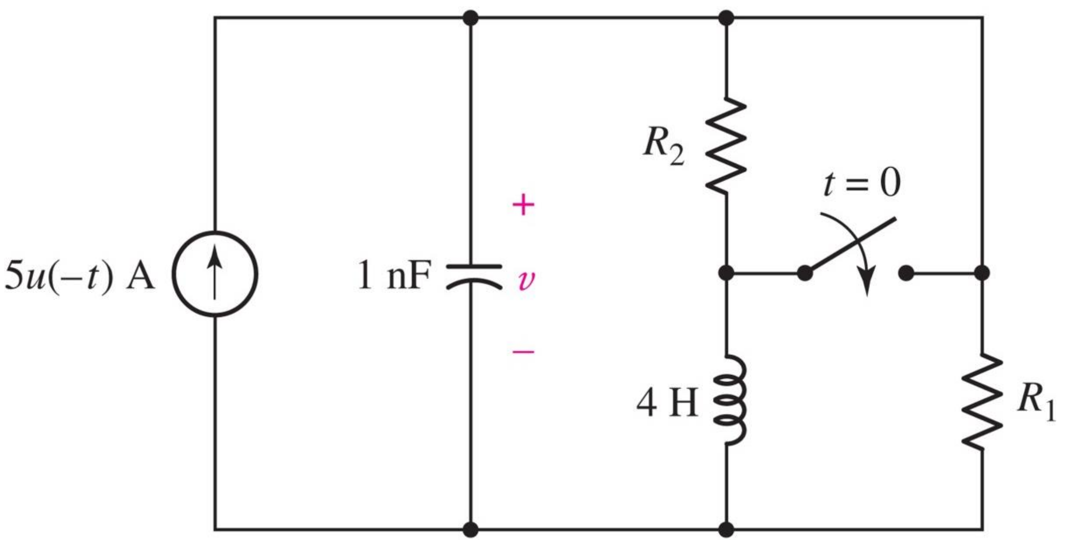
$$s_1 = s_2 = -\alpha$$

- فرم پاسخ طبیعی به صورت زیر است:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 t + A_2\right)$$

مدار RLC میرای بحرانی: مثال

- با فرض $v(0^+) = 2V$، R_1 و R_2 را طوری به‌دست آورید که پاسخ مدار میرای بحرانی باشد.



- *Answer: R_1 = 31.63 kΩ, R_2=0.4Ω*

پاسخ میرای ضعیف $(\alpha<\omega_0)$

- ریشه‌های مختلط مزدوج
- با تعریف $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$

داریم:

$$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$
$$s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

$$s_1=-\alpha+j\omega_d$$
$$s_2=-\alpha-j\omega_d$$

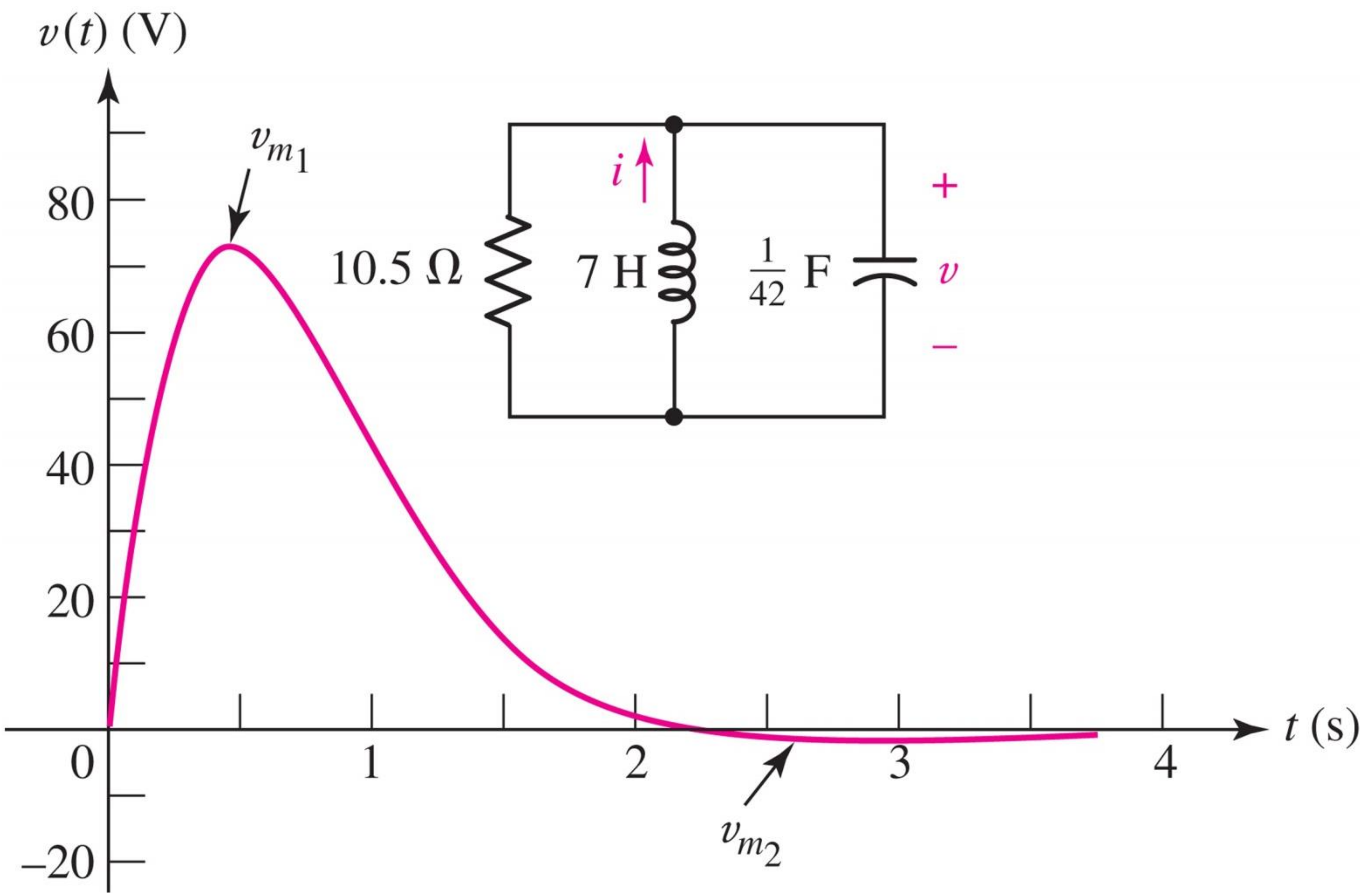
- فرم پاسخ میرای ضعیف:

$$v(t)=e^{-\alpha t}\left(A_1e^{j\omega_d t}+A_2e^{-j\omega_d t}\right)$$

- یا به عبارت دیگر:

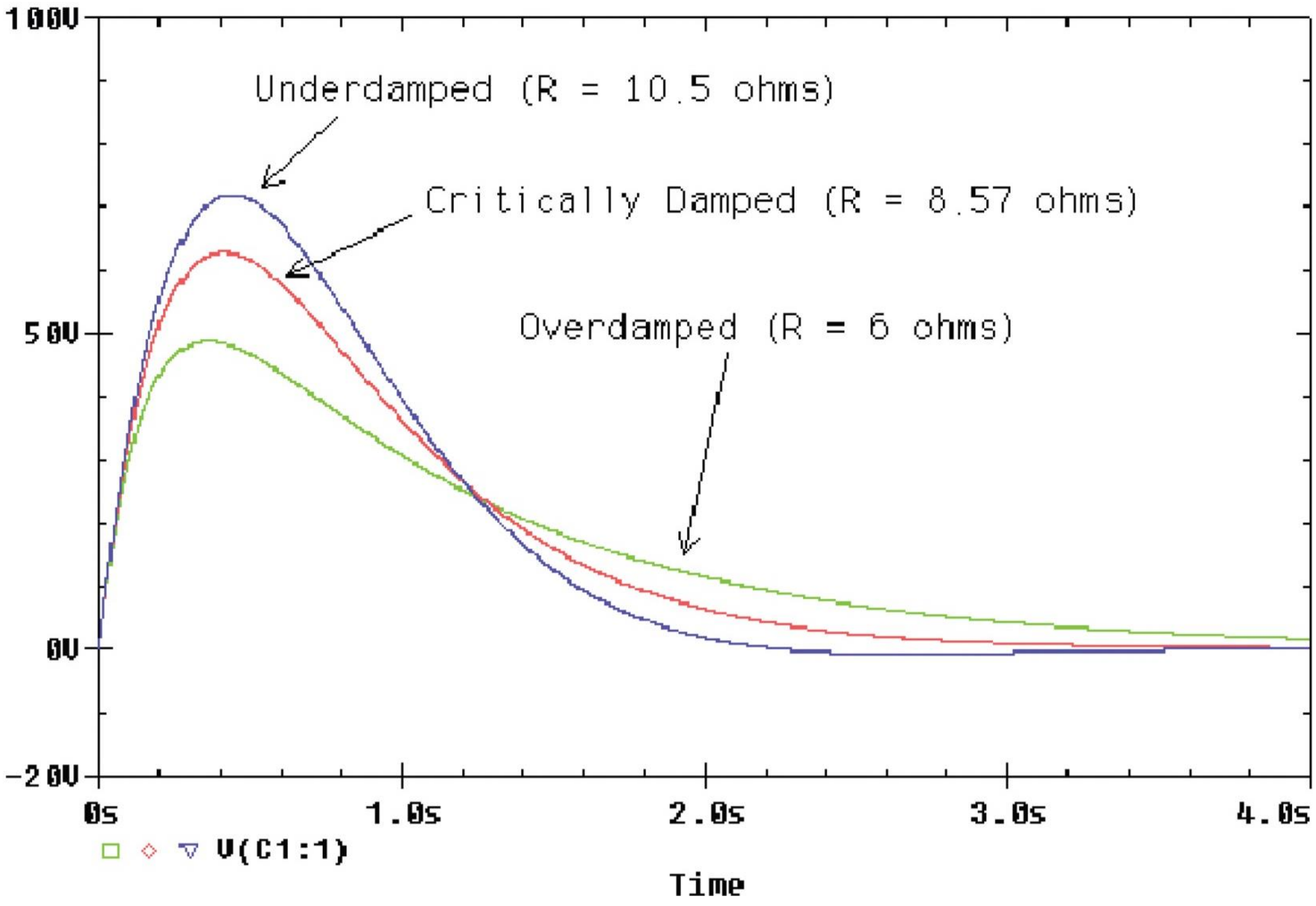
$$v(t)=e^{-\alpha t}\left(B_1\cos(\omega_d t)+B_2\sin(\omega_d t)\right)$$

مدار RLC میرای ضعیف: مثال 1



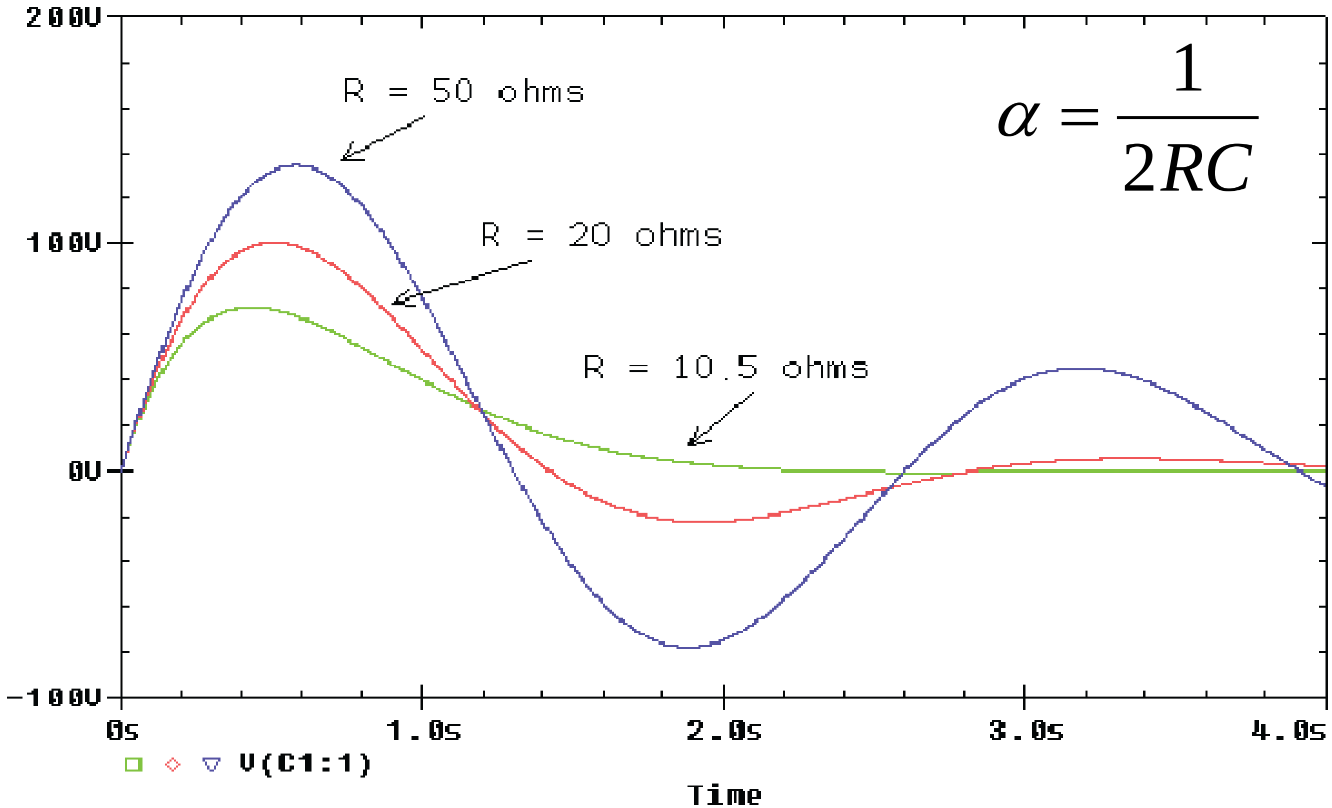
$$v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

مقایسه پاسخ‌های مختلف



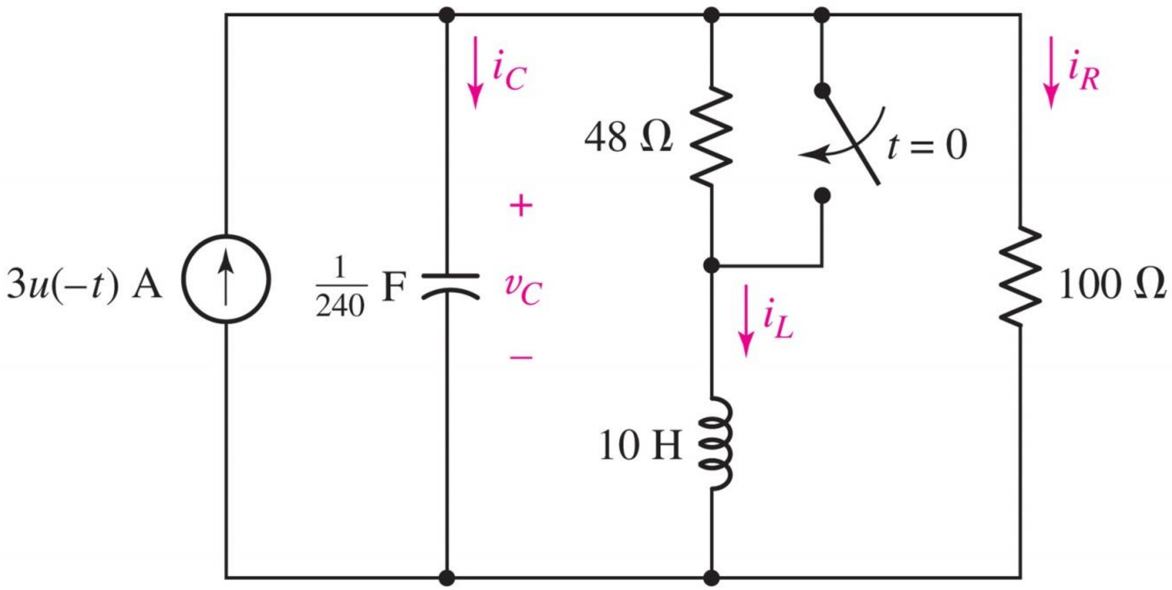
مقایسه پاسخ‌های مختلف

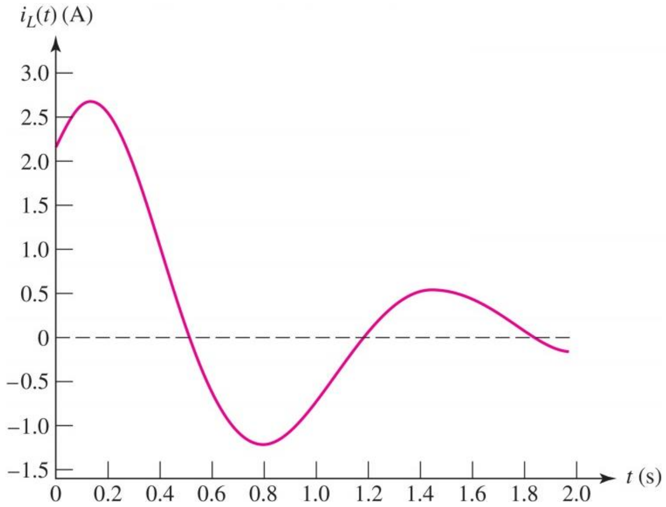
- با افزایش R در مدار RLC موازی، ضریب میرایی α کاهش یافته و روند میرایی کند می‌شود.



مدار RLC میرای ضعیف: مثال 2

- نشان دهید $i_L = e^{-1.2t}(2.03\cos 4.75t + 2.56\sin 4.75t)$

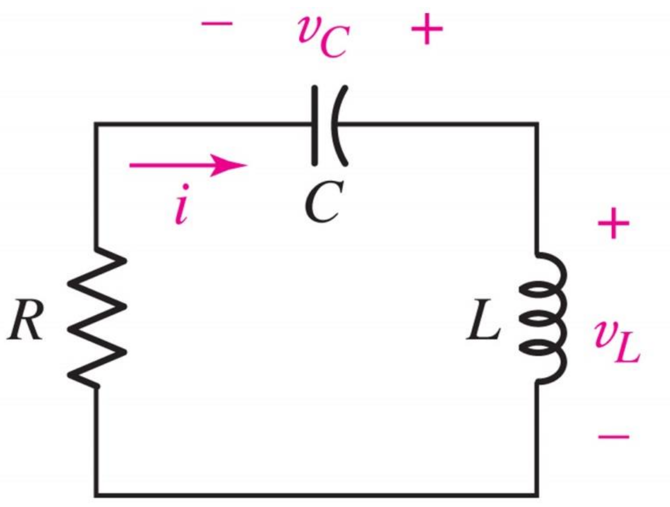




مدار RLC سری بدون منبع

- با نوشتن KVL و مشتق‌گیری از آن داریم:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0$$



- این مدار دوگان مدار RLC موازی است.

حل معادله مرتبه دوم برای یافتن پاسخ طبیعی

- مانند مدار موازی، با حل معادله مشخصه زیر و یافتن ریشه‌ها شروع می‌کنیم:

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0$$

- ریشه‌ها:

$$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

سه حالت ممکن پاسخ طبیعی

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- تعریف ضریب میرایی و فرکانس تشدید:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \qquad \alpha = \frac{R}{2L}$$

- میرای شدید $(\alpha > \omega_0)$:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

- میرای بحرانی $(\alpha = \omega_0)$:

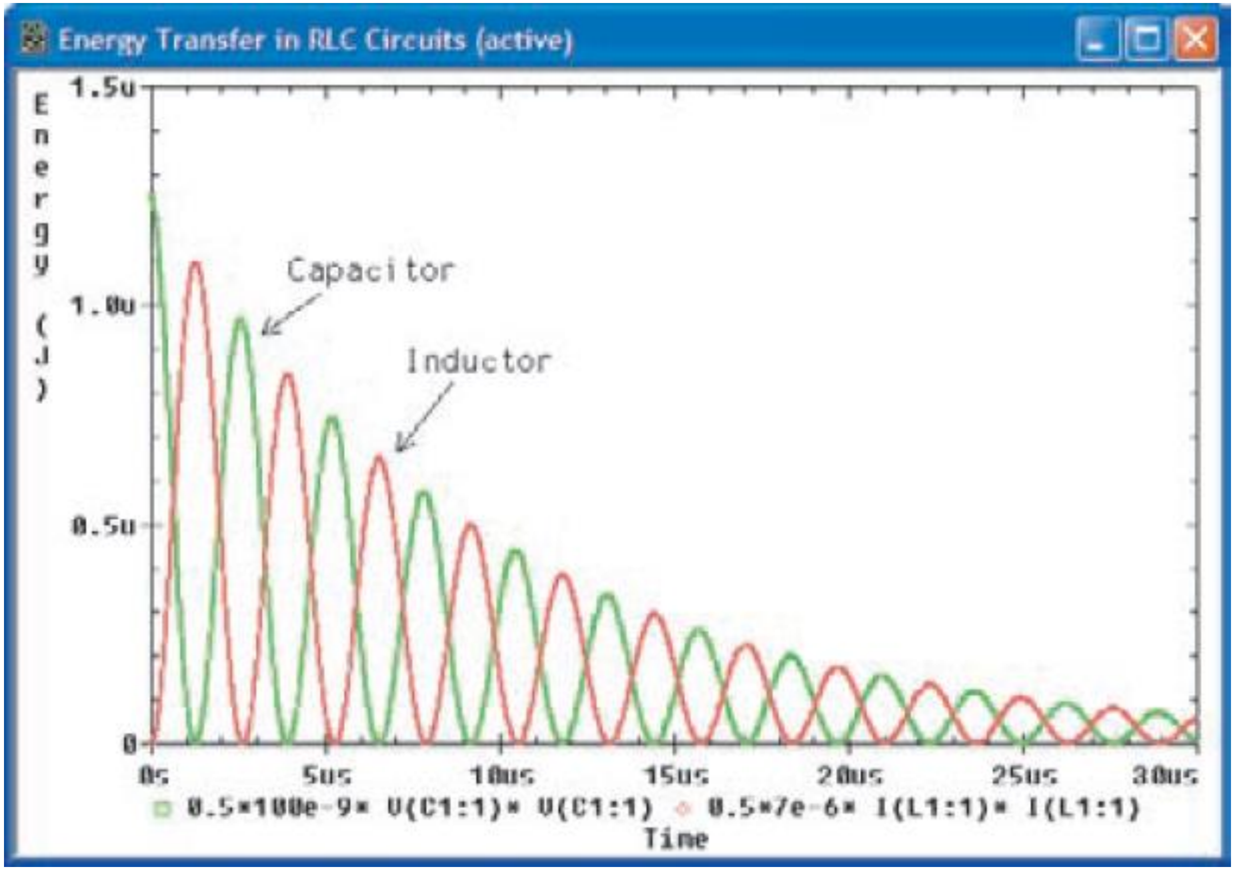
$$v(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 t + A_2\right)$$

- میرای ضعیف $(\alpha < \omega_0)$:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left(B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)\right)$$

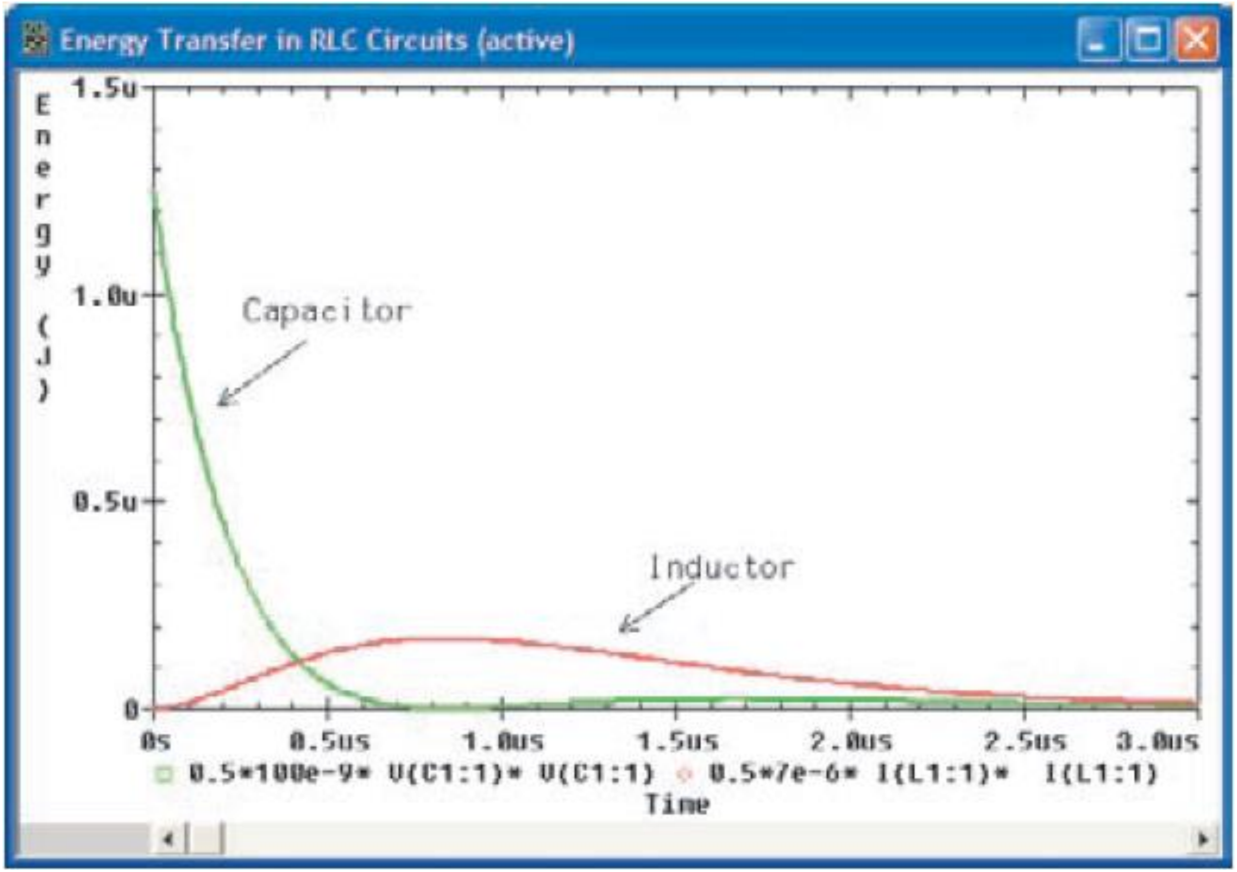
انتقال انرژی بین سلف و خازن در مدار RLC موازی

- میرای ضعیف $(R = 100\ \Omega)$ $\quad C = 100nF, L = 7\mu H$



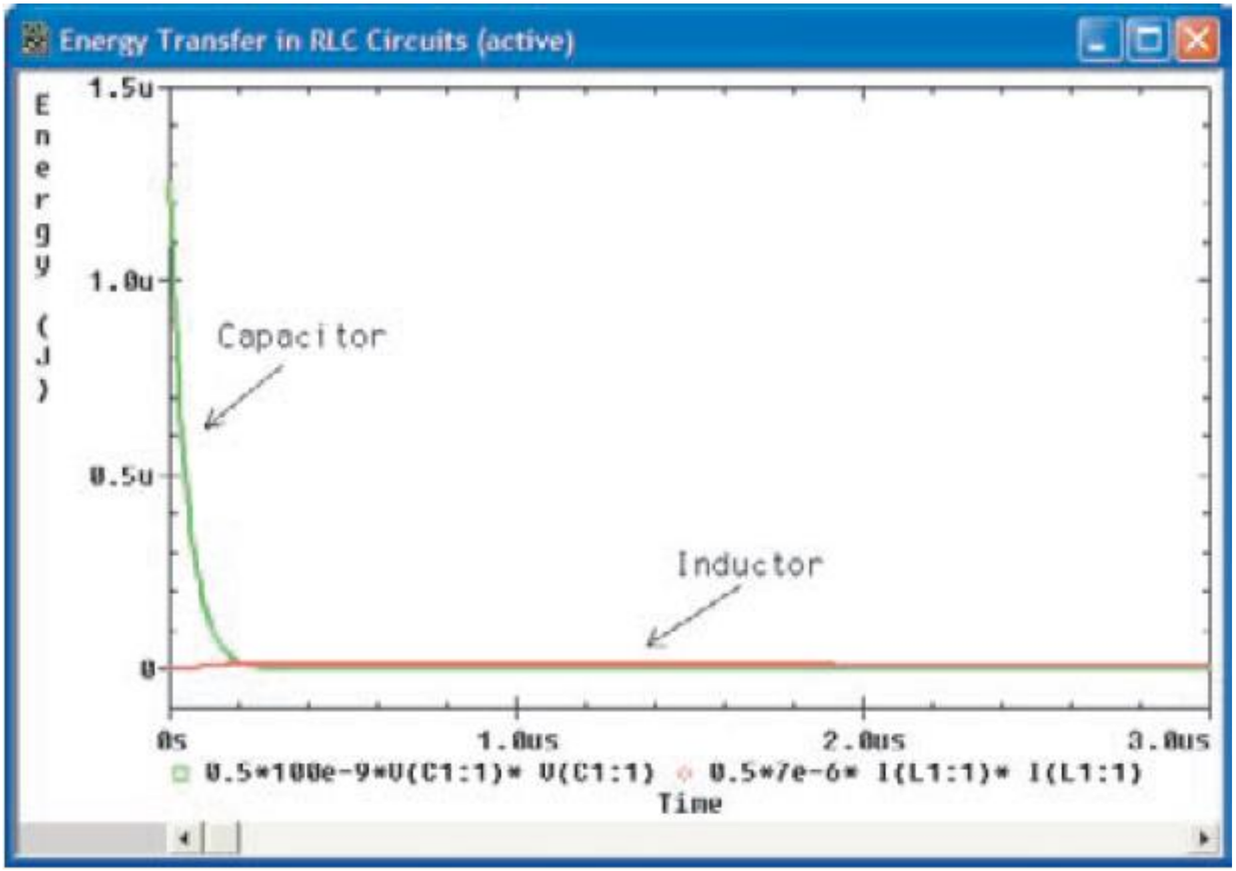
انتقال انرژی بین سلف و خازن در مدار RLC موازی

- میرای بحرانی $(R = 4.1833\ \Omega)$ $C = 100nF, L = 7\mu H$



انتقال انرژی بین سلف و خازن در مدار RLC موازی

- میرای شدید $(R = 1\ \Omega)$ $C = 100nF, L = 7\mu H$



خلاصه مدارهای RLC بدون منبع

نوع	وضعیت	شرط	α	ω_0	فرم پاسخ طبیعی
موازی	Overdamped	$\alpha > \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$
سری			$\frac{R}{2L}$		
موازی	Critically damped	$\alpha = \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$
سری			$\frac{R}{2L}$		
موازی	Underdamped	$\alpha < \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(B_1 cos\omega_d t + B_2 sin\omega_d t)$ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
سری			$\frac{R}{2L}$		

پاسخ کامل

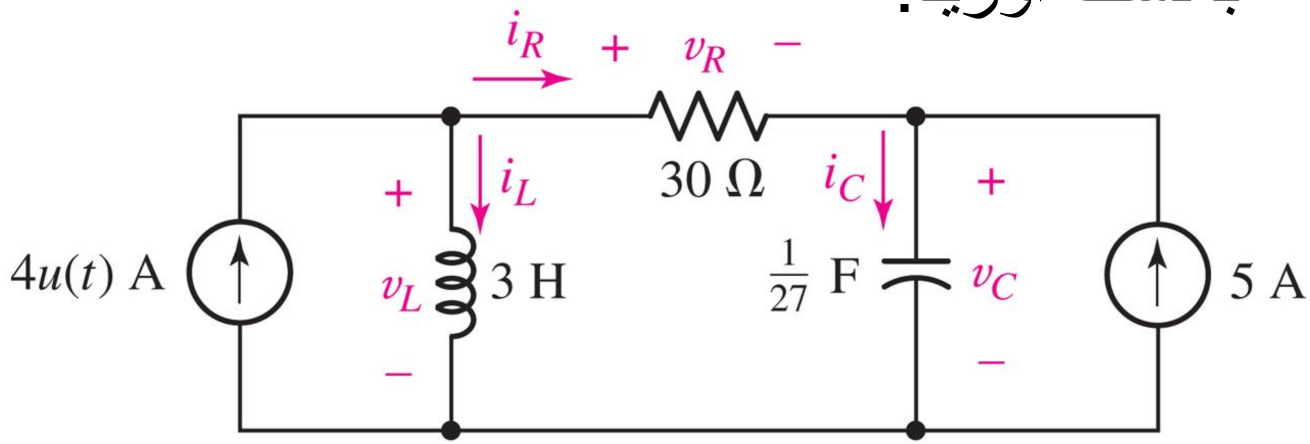
- پاسخ کامل مدارهای RLC مانند قبل از جمع پاسخ طبیعی و اجباری به‌دست می‌آید:

$$v(t) = v_n(t) + v_f(t)$$

- هر دو شرط اولیه $v(0^+)$ و $\frac{dv}{dt}(0^+)$ باید در پاسخ کامل صدق کنند.
- برای مثال در حضور منابع DC:
  - پاسخ طبیعی $v_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$
  - پاسخ کامل: $v(t) = K + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$
  - صدق دادن شروط اولیه: $v(0^+) = V_f + A + B, \ \frac{dv}{dt}(0^+) = As_1 + Bs_2$

نحوه محاسبه شروط اولیه: مثال

- مقادیر اولیه جریان‌ها و ولتاژهای نام‌گذاری شده را در 0^+ و 0^- به‌دست آورید.



پاسخ:

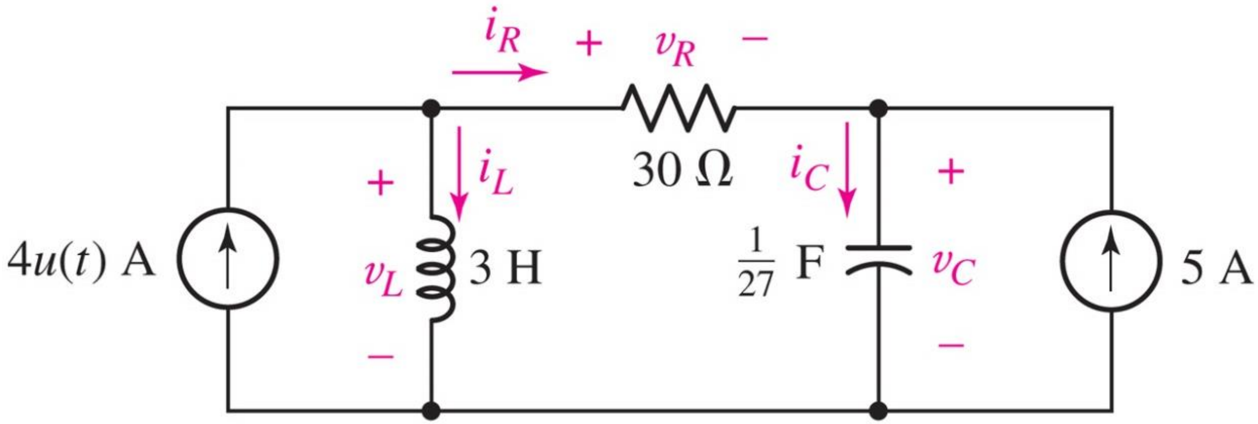
$i_R(0^-) = -5$ A　　$v_R(0^-) = -150$ V　　$i_R(0^+) = -1$ A　　$v_R(0^+) = -30$ V

$i_L(0^-) = 5$ A　　$v_L(0^-) = 0$ V　　$i_L(0^+) = 5$ A　　$v_L(0^+) = 120$ V

$i_C(0^-) = 0$ A　　$v_C(0^-) = 150$ V　　$i_C(0^+) = 4$ A　　$v_C(0^+) = 150$ V

نحوه محاسبه مقادیر اولیه مشتقات: مثال

- مقادیر مشتق ولتاژها و جریان‌های نام‌گذاری شده را در 0^+ به‌دست آورید.



$dv_R/dt(0^+) = -1200$ V/s $\quad di_R/dt(0^+) = -40$ A/s

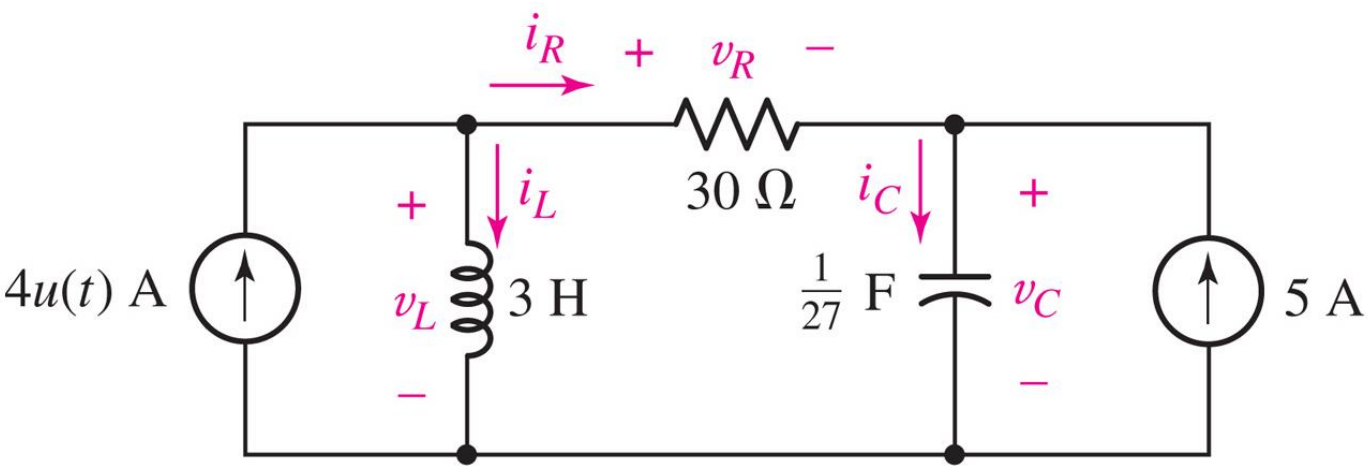
$dv_L/dt(0^+) = -1092$ V/s $\quad di_L/dt(0^+) = 40$ A/s

$dv_C/dt(0^+) = 108$ V/s $\quad di_C/dt(0^+) = -40$ A/s

محاسبه پاسخ کامل: مثال

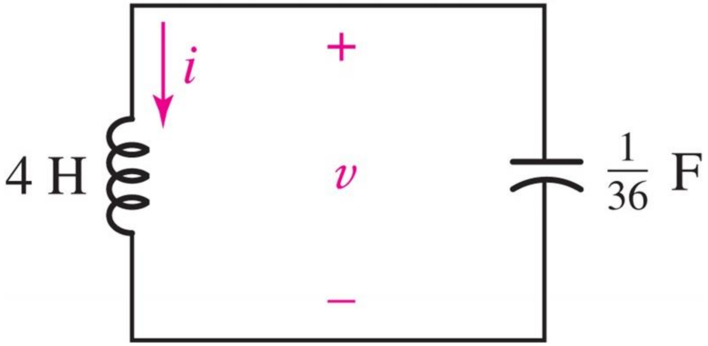
نشان دهید برای t>0 داریم:

$$v_C(t) = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t})\, volts$$



مدار LC بدون اتلاف

- وجود مقاومت در مدار RLC باعث میرا شدن پاسخ می‌شود.
- وقتی در یک مدار RLC سری مقدار مقاومت صفر یا در یک مدار RLC موازی مقدار مقاومت بی‌نهایت شود، پاسخ کاملاً نوسانی غیرمیرا است (حالت بدون اتلاف).
- مثال: در شکل زیر، با فرض $i(0) = -1/6\ A$ و $v(0) = 0\ V$ داریم:

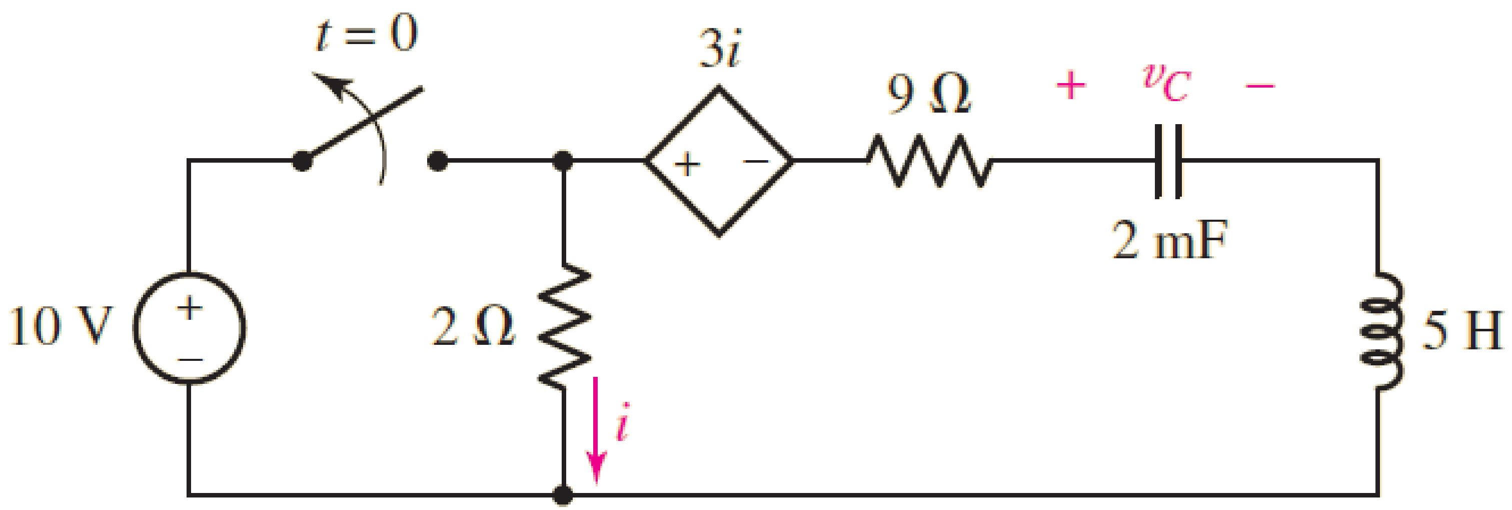


$$v(t) = 2\sin 3t$$

تمرین کلاسی 1

- نشان دهید:

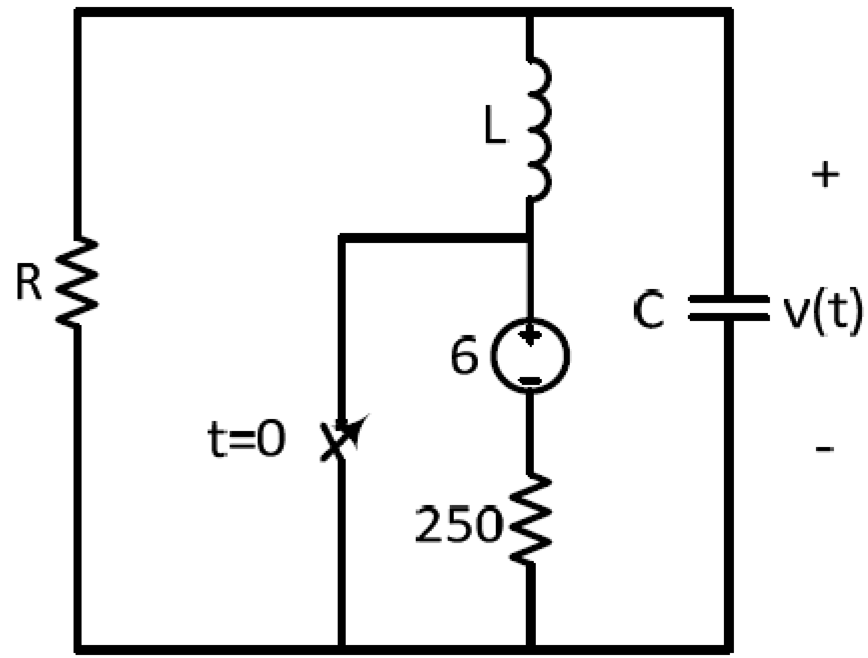
$$v_C(t) = -e^{-0.8t}(5\cos 9.97t + 0.4\sin 9.97t)V$$



تمرین کلاسی 2

- کلید در زمان $t = 0$ بسته می‌شود. R، L و C را طوری بیابید که:

$$v(t) = 5e^{-400t}\cos(300t)$$



تمرین کلاسی 3

- $v_c(t)$ را بیابید.