مدارهای الکتریکی و الکترونیکی
فصل ششم: مدارهای RL و RC

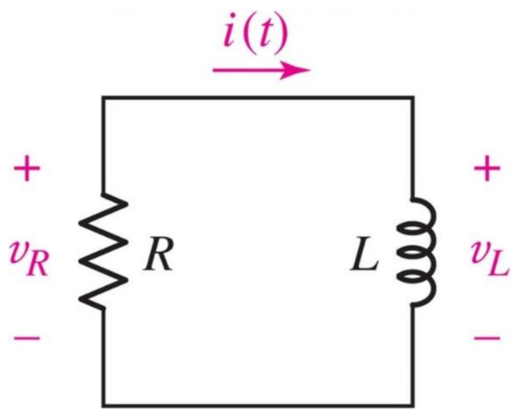
استاد درس: محمود ممتازپور
ceit.aut.ac.ir/~momtazpour

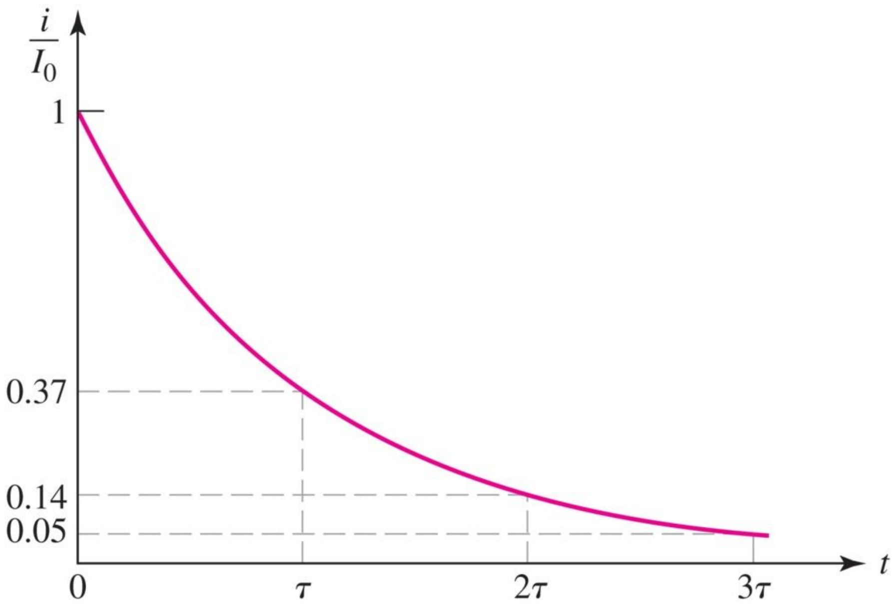
فهرست مطالب

- یافتن پاسخ زمانی مدارهای مرتبه اول
  - مدار RL بدون منبع
  - مدار RC بدون منبع
  - مدار RL با منبع
  - مدار RC با منبع

هدف

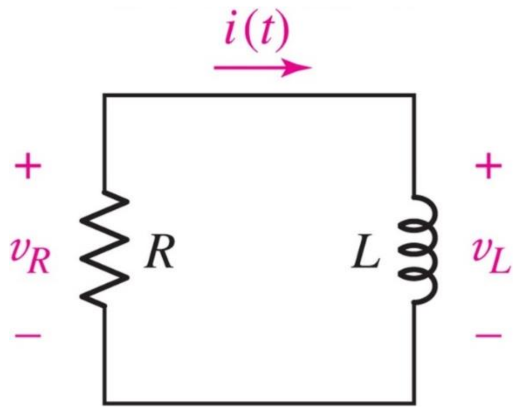
- یافتن پاسخ زمانی یک مدار RL یا RC (مدارهای مرتبه اول)
  - بررسی و تحلیل نحوه شارژ یا دشارژ شدن سلف و خازن در طول زمان و به‌دست آوردن یک رابطه ریاضی برای آن





مدار RL بدون منبع

- صورت مسئله: یافتن پاسخ زمانی جریان یک سلف با مقدار اولیه I_0 در یک مدار RL



- با اعمال KVL داریم:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

- با در نظر گفتن شرط اولیه معادله یعنی $i(0) = I_0$، می‌توان پاسخ طبیعی را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad t > 0$$

محاسبه پاسخ طبیعی (عمومی) معادله مرتبه اول

- راه حل اول:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\, dt \rightarrow \ln i = -\frac{Rt}{L} + k \rightarrow i = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$i(0) = I_0 \rightarrow i = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$$

- راه حل دوم: تشکیل دادن معادله مشخصه

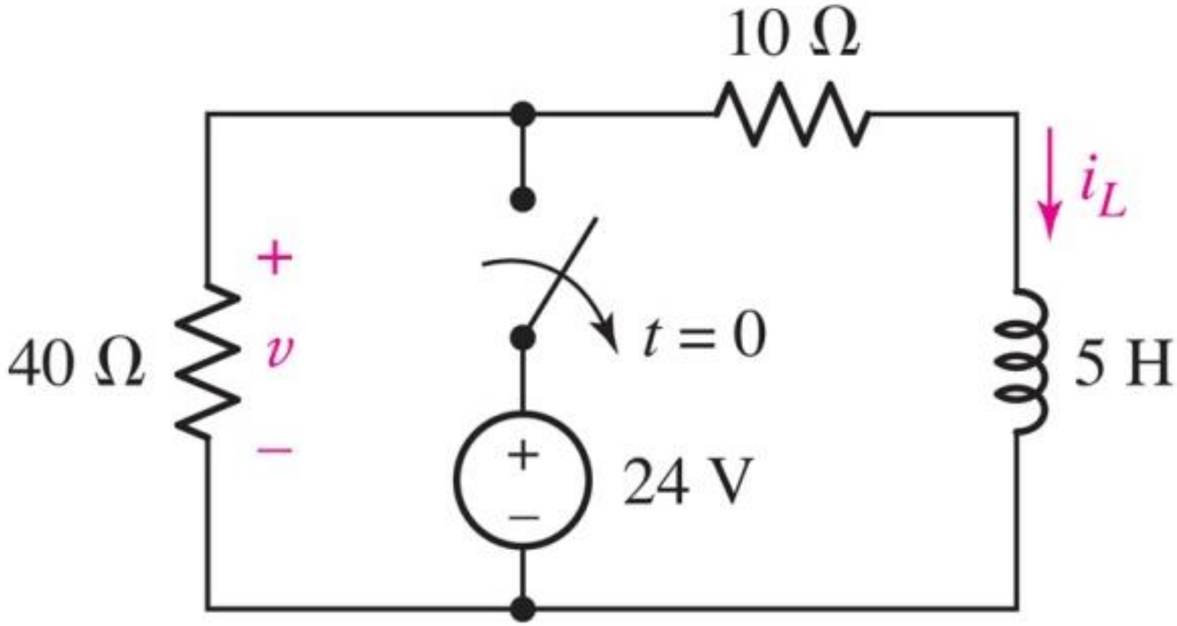
$$s + \frac{R}{L} = 0 \rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

$$i = Ae^{st} = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$i(0) = I_0 \rightarrow i = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$$

مثال:

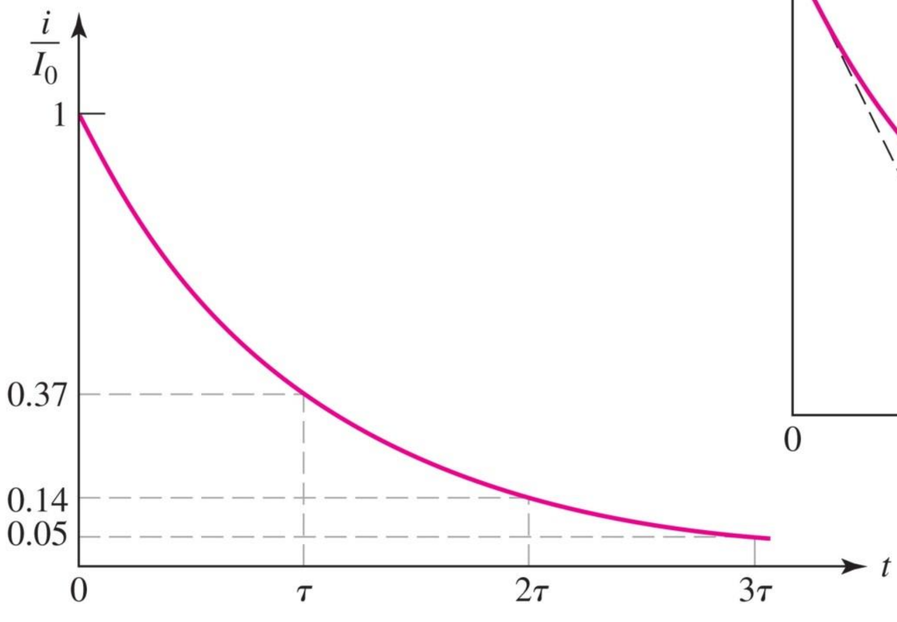
- نشان دهید ولتاژ v در لحظه 200 میلی ثانیه برابر 13- ولت است.

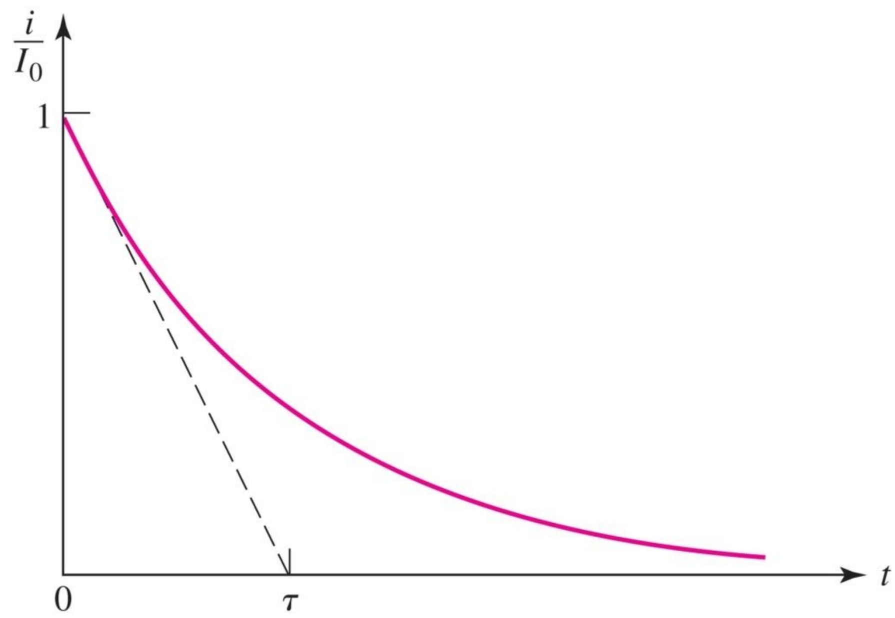


پاسخ طبیعی مدار RL به صورت تابع نمایی

- نرخ میرایی تابع نمایی $(\tau = L/R)$ را ثابت زمانی گویند. هر چه مقدار بزرگتری داشته باشد، تابع کندتر میرا می‌شود.

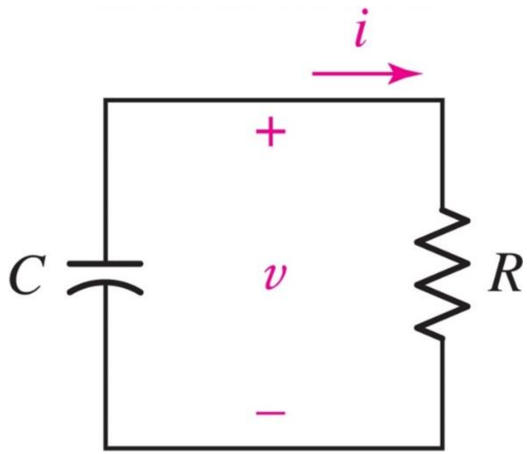
$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$





مدار RC بدون منبع

- با اعمال KCL داریم:



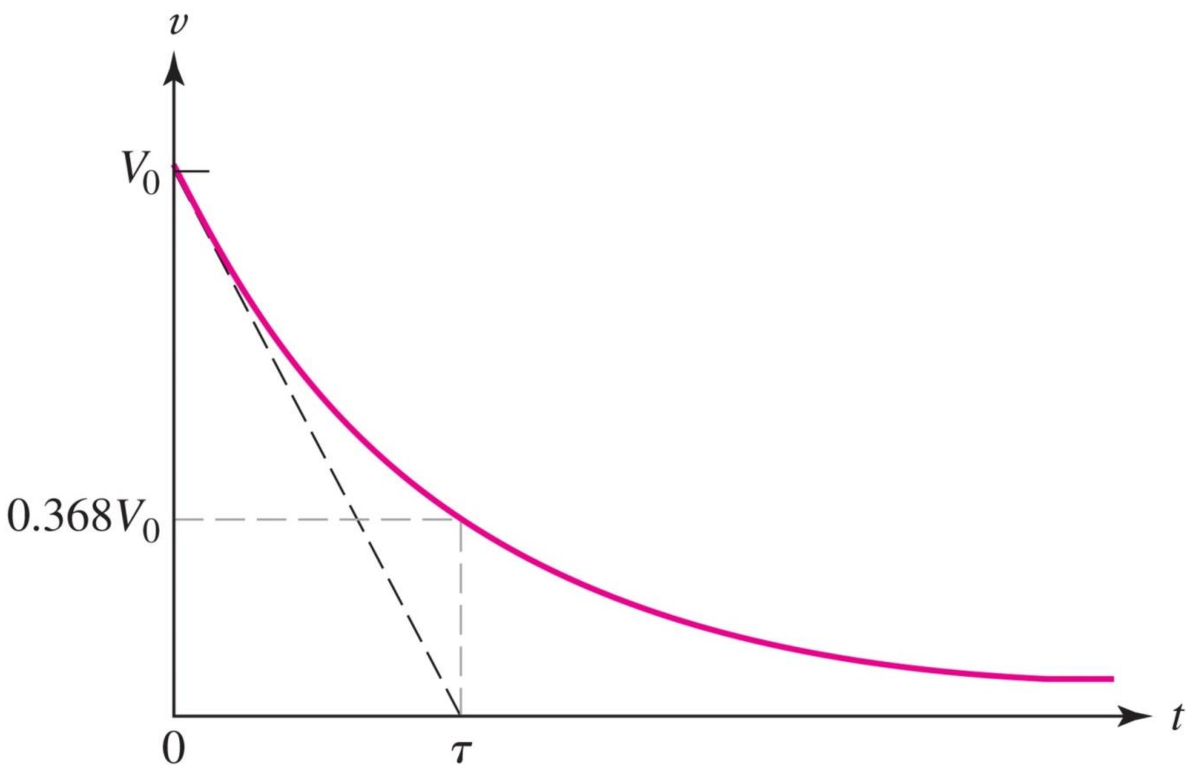
$$\frac{dv}{dt}+\frac{1}{RC}v=0$$

- اگر شرط اولیه معادله یعنی مقدار اولیه ولتاژ خازن $v(0)=V_0$ را بدانیم، می‌توان پاسخ طبیعی را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$v(t)=V_0e^{-\frac{t}{RC}},\qquad t>0$$

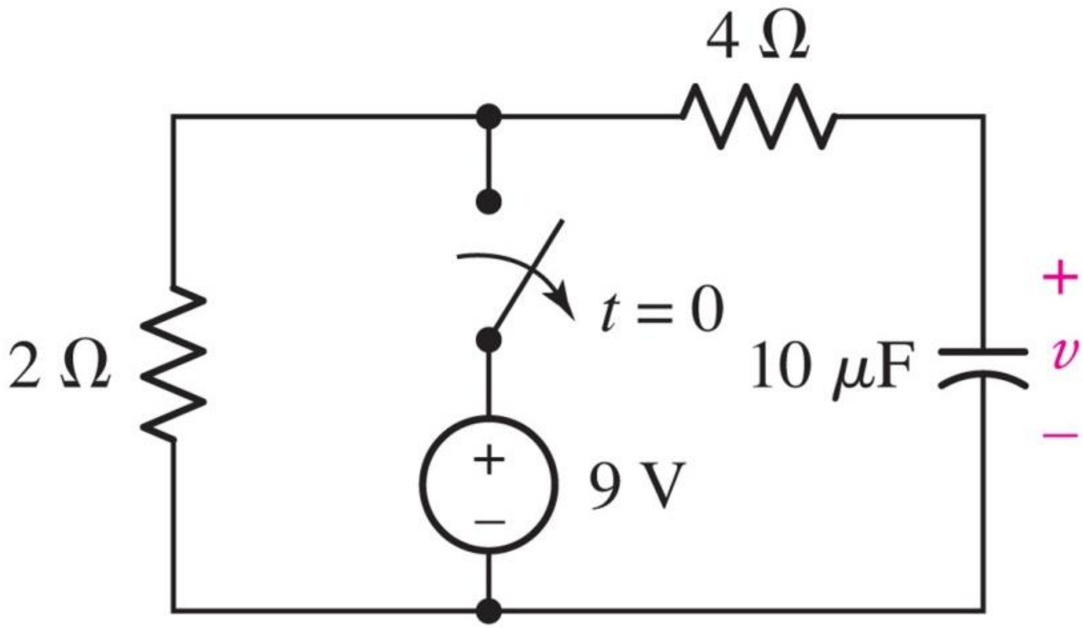
پاسخ طبیعی مدار RC به صورت تابع نمایی

- ثابت زمانی برابر $\tau = RC$ است.



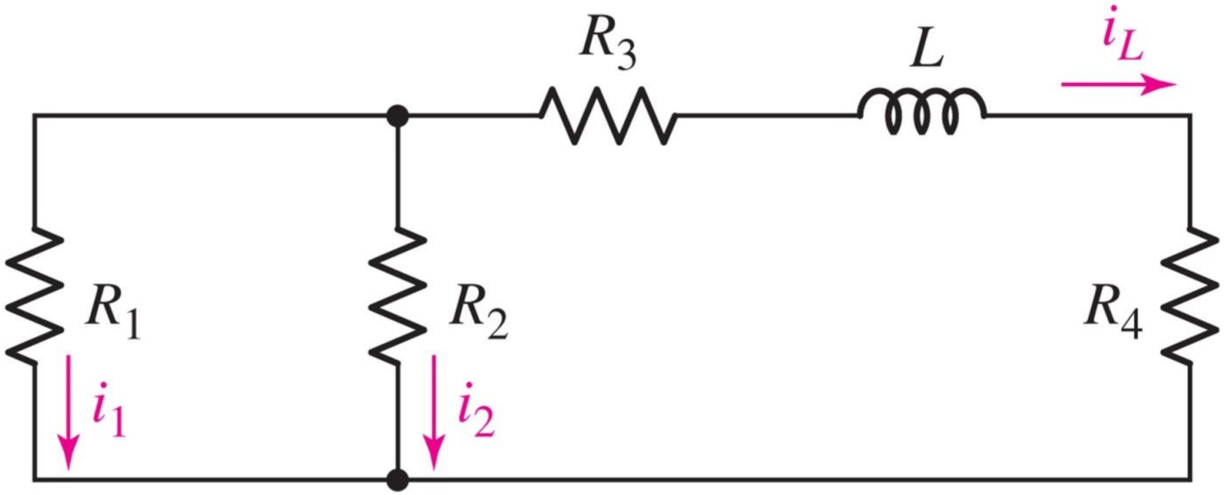
مثال:

- نشان دهید ولتاژ v در لحظه 200 میکروثانیه برابر 321 میلی ولت است.



مدار RL مرتبه اول بدون منبع در حالت کلی

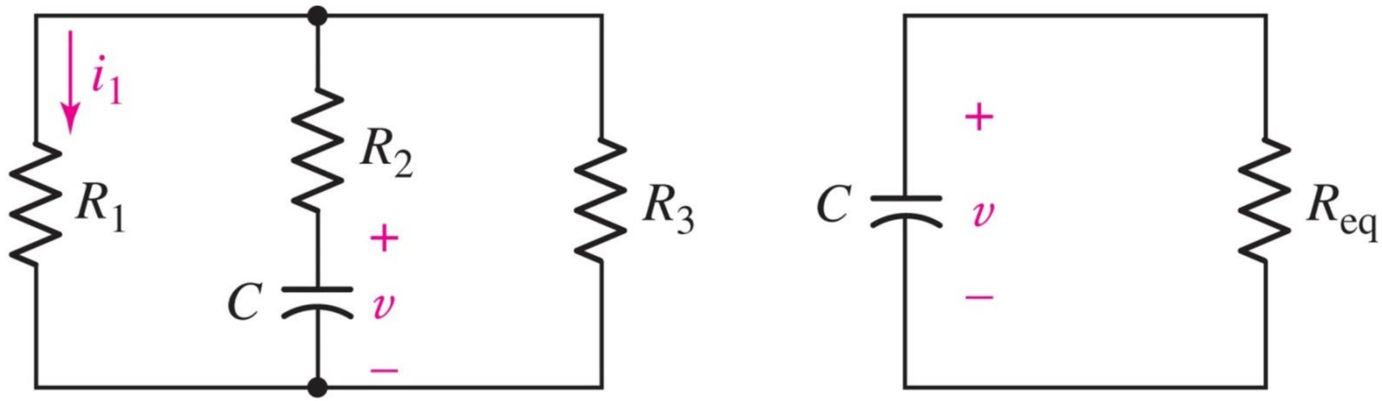
- ثابت زمانی پاسخ طبیعی مداری شامل یک سلف و تعدادی مقاومت برابر با $\tau = L/R_{eq}$ است که R_{eq} مقاومت معادلی است که از دو سر سلف دیده می‌شود.



$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

مدار RC مرتبه اول بدون منبع در حالت کلی

- ثابت زمانی پاسخ طبیعی مداری شامل یک خازن و تعدادی مقاومت برابر با $\tau = R_{eq}C$ است که R_{eq} مقاومت معادلی است که از دو سر خازن دیده می‌شود.



$$R_{eq} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

چند نکته در مورد مدارهای مرتبه اول

- با فرض عدم وجود ولتاژ و جریان بی‌نهایت، ولتاژ خازن و جریان سلف تغییر آنی نخواهد داشت. پس قبل و بعد از کلیدزنی مقدار یکسانی خواهند داشت.

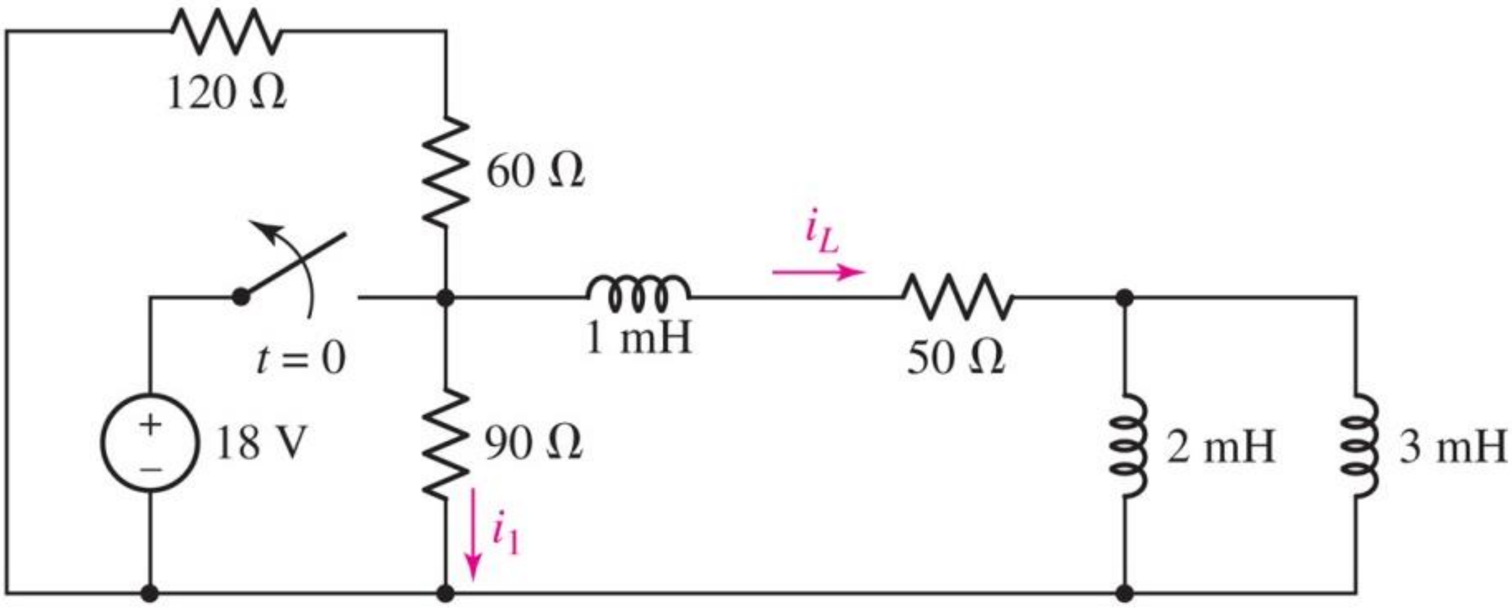
$$v_C(0^+) = v_C(0^-), \quad i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

- ولتاژ و جریان مقاومت و منابع، ولتاژ سلف و جریان خازن این ویژگی را ندارند و مقدار آنها در لحظه کلیدزنی می‌تواند پرش کند.

- همه ولتاژها و جریان‌ها در مدار دارای پاسخ طبیعی به فرم $e^{-\frac{t}{\tau}}$

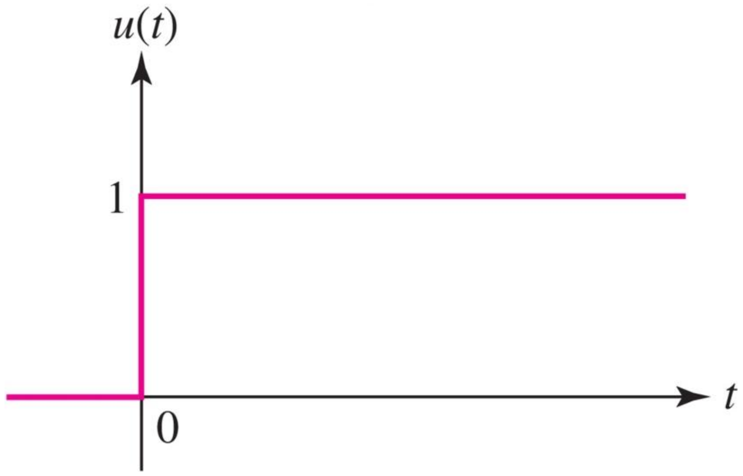
مثال:

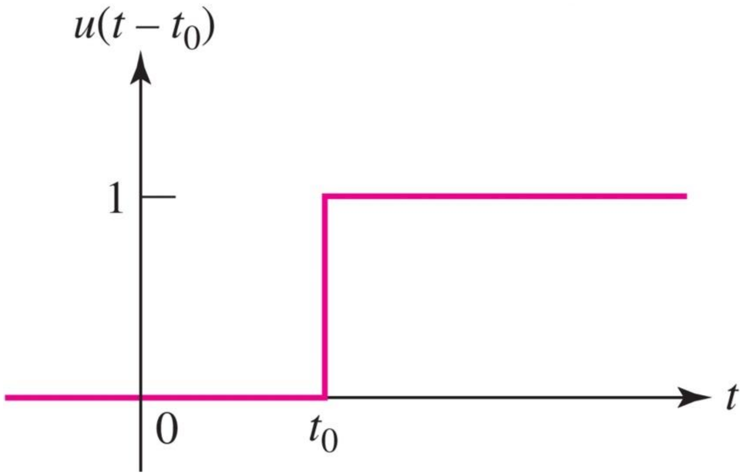
- $i_1(t)$ و $i_L(t)$ را برای زمانهای $t > 0$ بیابید.



Unit Step Function تابع پله واحد

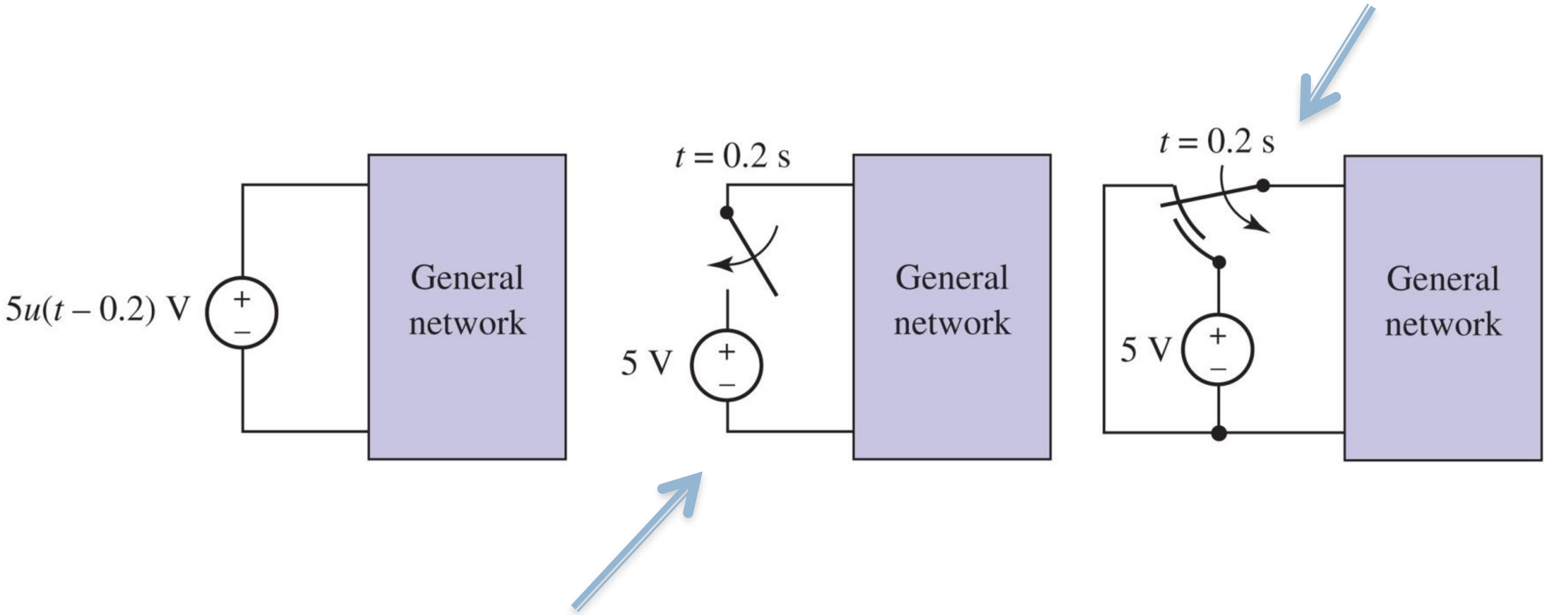
- تابع پله واحد که با $u(t)$ نمایش داده می‌شود بیانگر تغییر آنی از صفر به یک در زمان $t = 0$ است:





مدل‌سازی رفتار کلید با تابع پله

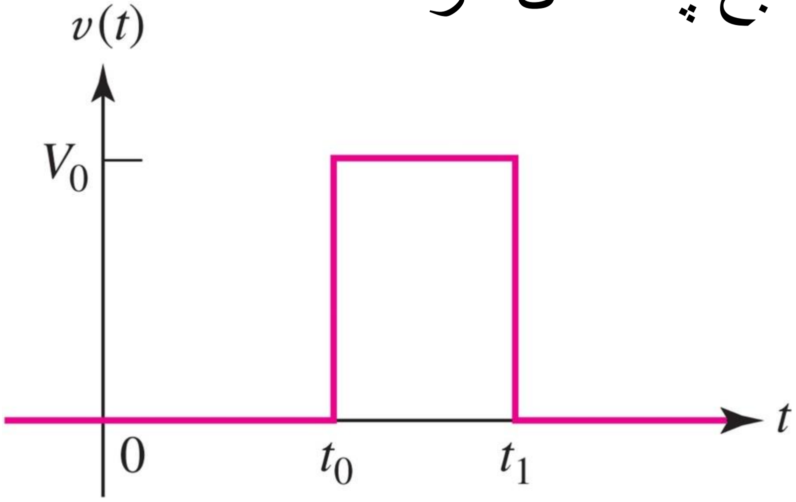
- تابع پله واحد یک کلید «دبل-ترو» را مدل می‌کند.



- کلید «سینگل-ترو» در زمانهای قبل از 0.2 مدار باز است نه اتصال کوتاه.

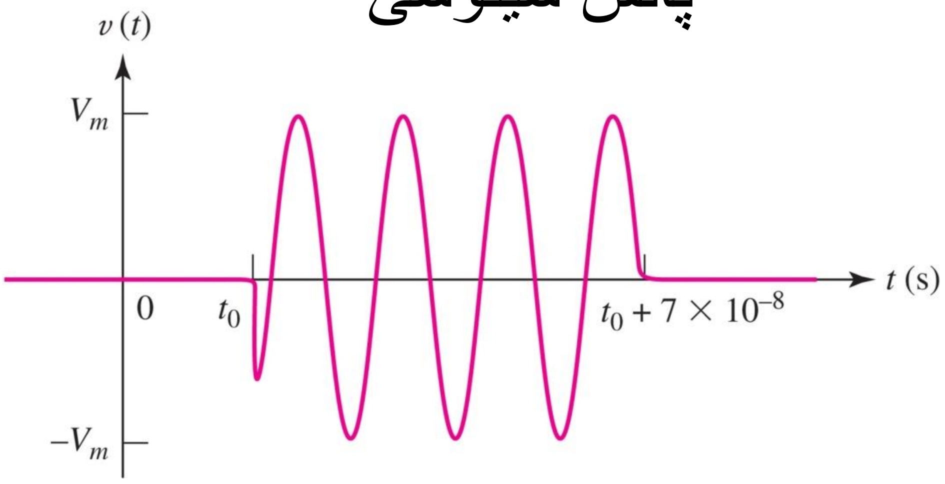
مدل‌سازی پالس با تابع پله

- آیا می‌توان توابع زیر را بر حسب تابع پله مدل کرد؟

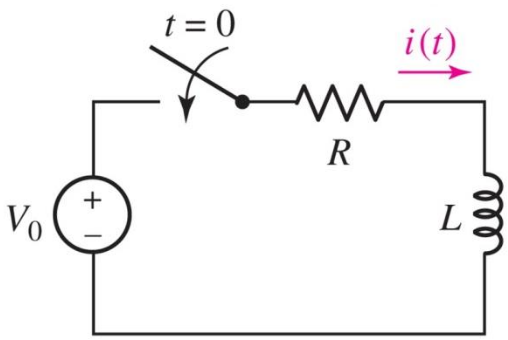


پالس مربعی

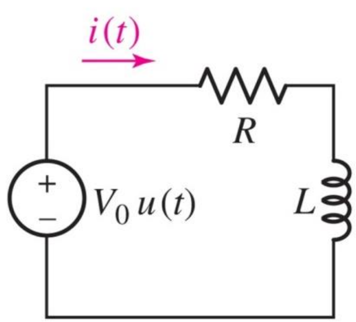
پالس سینوسی



مدار RL با منبع



(a)

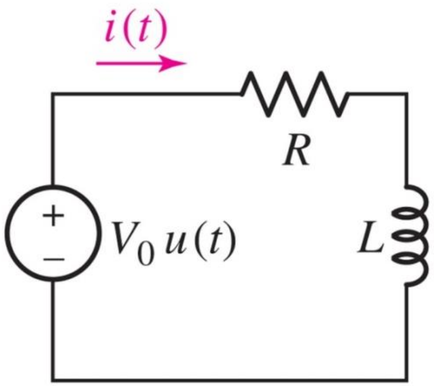


(b)

- دو مدار نشان داده شده رفتار مشابهی در زمانهای قبل و بعد از کلیدزنی دارند.
- در حضور منبع، باید هم پاسخ طبیعی و هم پاسخ اجباری (خصوصی) مدار را بیابیم:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 u(t)$$

مدار RL با منبع



$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 u(t)$$

$$i(0^+) = 0$$

- پاسخ عمومی:

$$Ls + R = 0 \rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

$$i_n = Ae^{st} = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$$

- پاسخ اجباری (از جنس منبع):

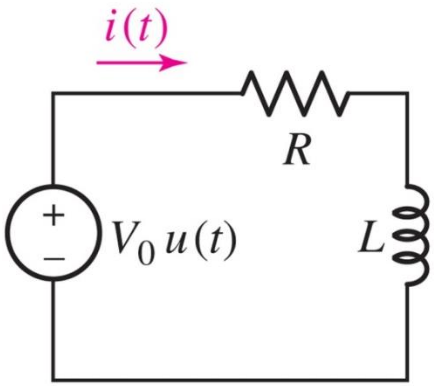
$$i_f = K \xrightarrow{\text{صدق دادن در معادله}} i_f = \frac{V_0}{R}$$

- پاسخ کامل = پاسخ طبیعی + پاسخ اجباری:

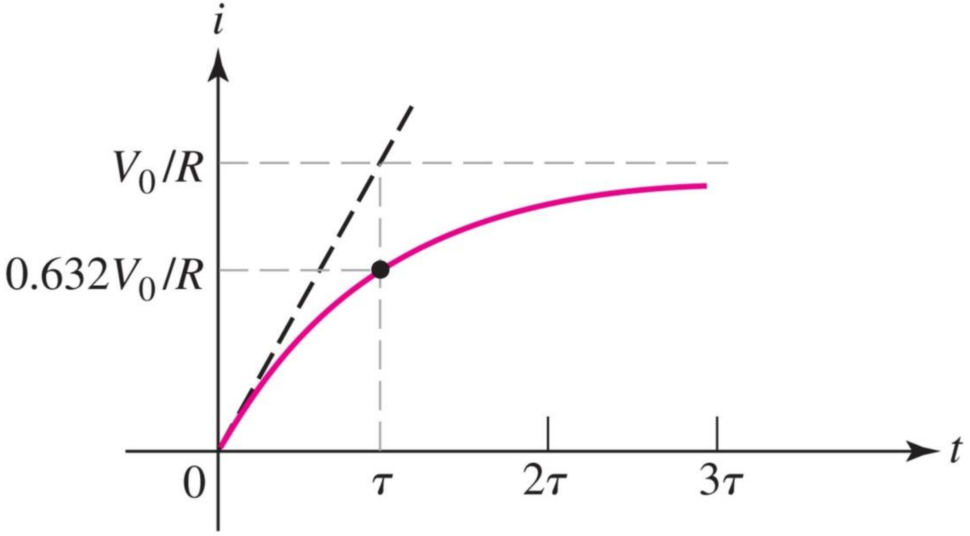
$$i(t) = Ae^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{V_0}{R} \xrightarrow{\text{صدق دادن شرایط اولیه}} i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)u(t)$$

مدار RL با منبع: پاسخ پله

- در این مدار، جریان سلف به صورت نمایی تا مقدار نهایی $\frac{V_0}{R}$ شارژ می‌شود.



$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)u(t)$$



پاسخ کامل

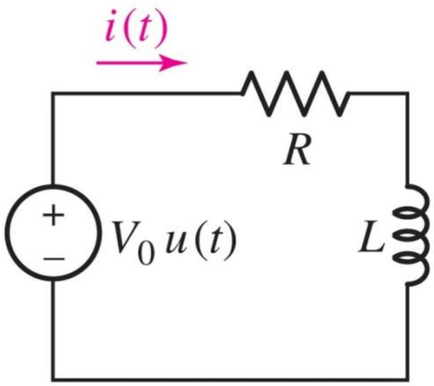
- حال اگر مدار هم منبع داشته باشد و هم شرط اولیه چه؟
- دو راه حل:
  - حل معادله دیفرانسیل با شرط اولیه داده شده
    - پاسخ کامل = پاسخ طبیعی + پاسخ اجباری
  - استفاده از جمع آثار:
    - پاسخ کامل = پاسخ مدار با منبع (بدون شرط اولیه)+پاسخ مدار بدون منبع (با شرط اولیه)

منابع را نگه دار ولی شرایط اولیه را صفر کن

منابع را حذف کن ولی شرایط اولیه را نگه دار

مثال:

- اگر $i(0^-) = I_0$، $i(t)$ را بیابید.



1) جمع آثار:

- پاسخ بدون منبع:

$$i_{sf} = I_0 e^{-Rt/L}$$

- پاسخ با منبع:

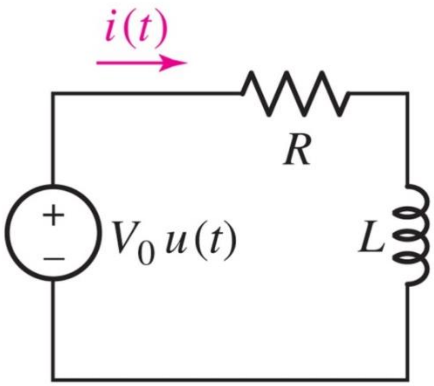
$$i_d = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

- پاسخ کامل:

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} + \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

مثال (ادامه)

2) حل معادله دیفرانسیل با شرط اولیه:



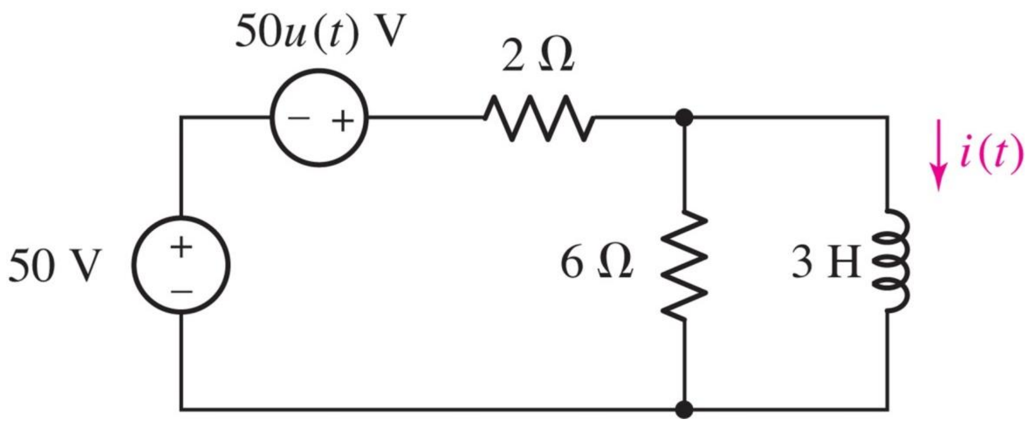
$$i' + \frac{R}{L} i = \frac{V_0}{L}, \qquad i(0^+) = I_0$$

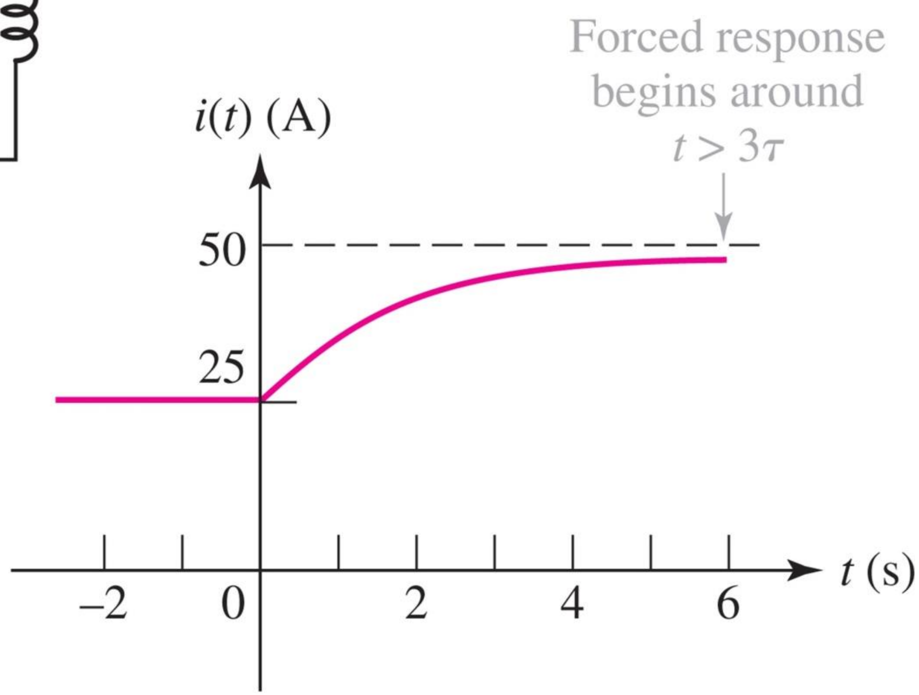
- پاسخ طبیعی: $i_n = Ke^{-Rt/L}$
- پاسخ اجباری: $i_f = \frac{V_0}{R}$
- پاسخ کامل: $i(t) = Ke^{-Rt/L} + \frac{V_0}{R}$

$$i(0) = I_0 \rightarrow K = I_0 - \frac{V_0}{R}, \qquad i(t) = \frac{V_0}{R} + (I_0 - \frac{V_0}{R})e^{-Rt/L}$$

مثال: مدار RL با ورودی پله

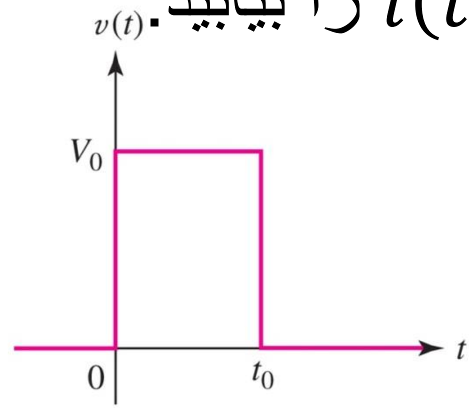
- $i(t)$ را بیابید.



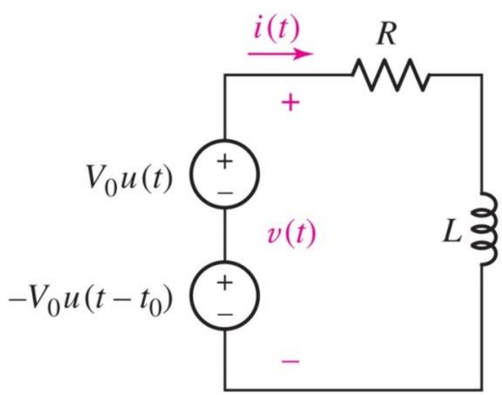


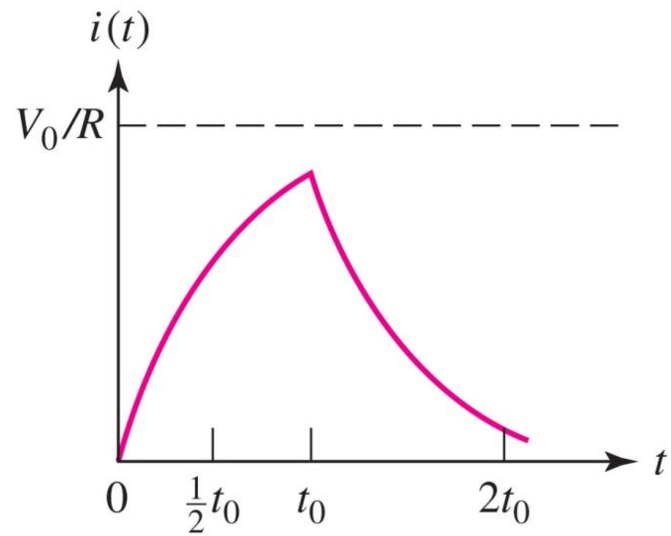
مثال: پاسخ مدار RL به ورودی پالس

- با فرض ولتاژ ورودی داده شده، جریان $i(t)$ را بیابید.

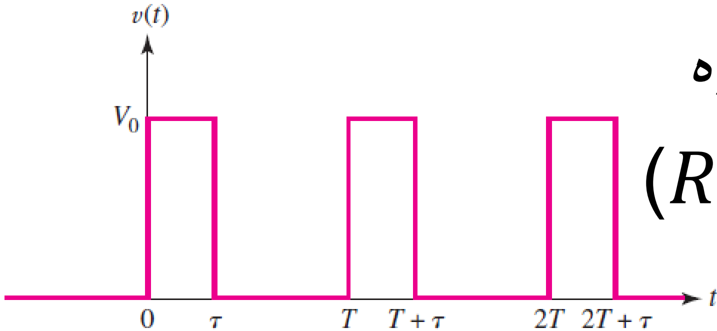


(a)





پاسخ مدار RL یا RC به ورودی قطار پالس:

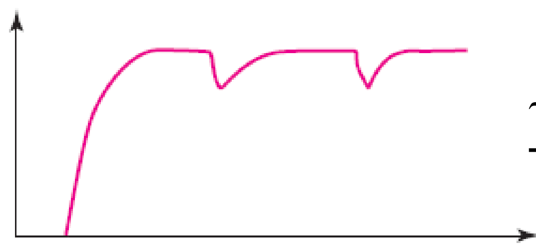


- بسته به مقادیر عرض پالس (τ)، دوره تناوب پالس (T) و ثابت زمانی مدار (RC) چهار حالت مختلف به‌وجود می‌آید:

τ>>RC
T-τ>>RC

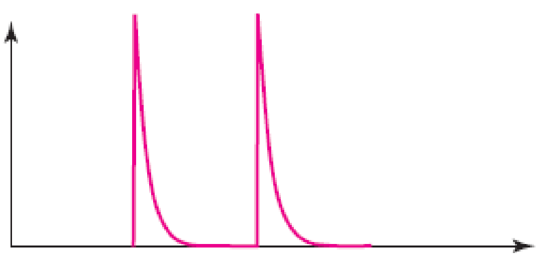
(a)

τ>>RC
T-τ<<RC



(b)

τ<<RC
T-τ>>RC



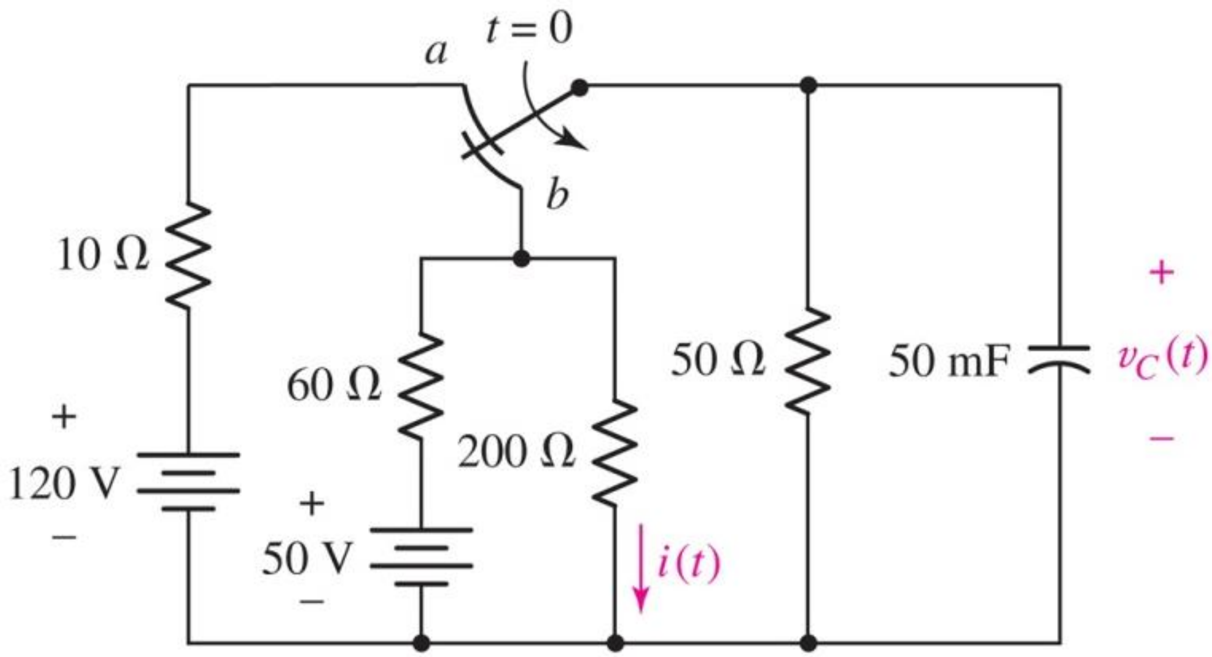
(c)

τ<<RC
T-τ<<RC

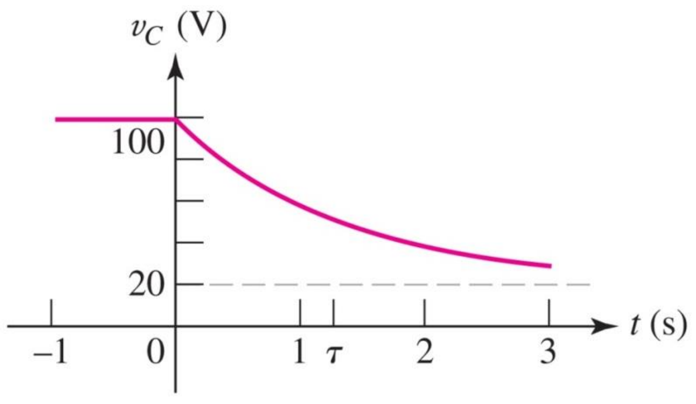
(d)

مثال: مدار RC با منبع

- در مدار داده شده، $v_c(t)$ و $i(t)$ را بیابید.

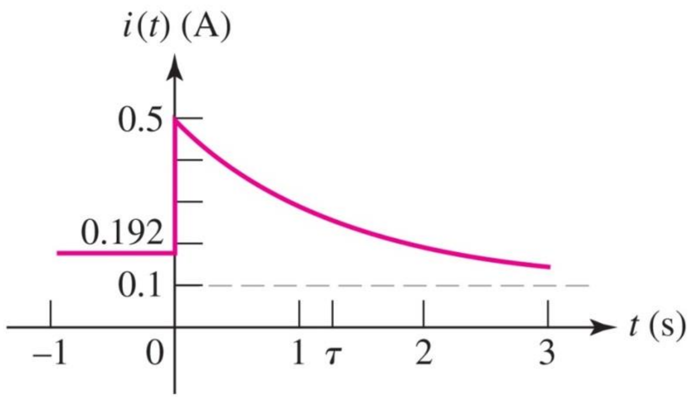


مثال: مدار RC با منبع (ادامه)



(a)

$$v_C = 20 + 80e^{-\frac{t}{1.2}} V$$

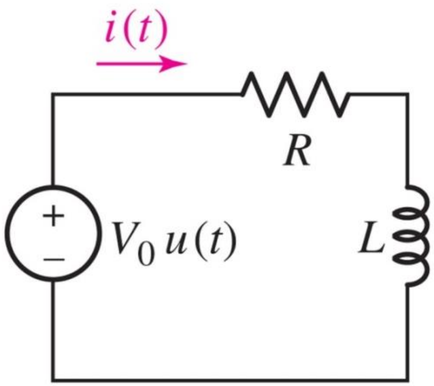


(b)

$$i = 0.1 + 0.4e^{-\frac{t}{1.2}} A$$

راه‌حل میان‌بر برای یافتن پاسخ پله مدارهای RL و RC

- برای یک مدار RL، پاسخ جریان را قبلاً صورت زیر محاسبه کردیم:



$$i(t) = \frac{V_0}{R} + (I_0 - \frac{V_0}{R})e^{-Rt/L}$$

- به‌طور کلی می‌توان نشان داد پاسخ پله یک مدار RL یا RC از رابطه زیر نیز قابل حصول است:

$$x(t) = x(\infty) + [x(0^+) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

پاسخ مدارهای مرتبه اول به منابع AC

- حال اگر منابع مدار DC نباشند چه؟
  - پاسخ طبیعی که مستقل از منبع است و به همان فرم (Ke^{st}) خواهد بود.
  - پاسخ

منبع	پاسخ اجباری
K	K'
$K_1 t + K_2$	$K't + k''$
$Ke^{bt}\ (b != s)$	$K'ebt$
$Ke^{bt}\ (b == s)$	$K'tebt$
$K\cos(wt + p)$	$K'\cos(wt + p')$

پاسخ کامل

- یک روش دیگر برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر:

$$x'(t) + ax(t) = Q(t)$$

- دو طرف معادله را در e^{at} ضرب می‌کنیم:

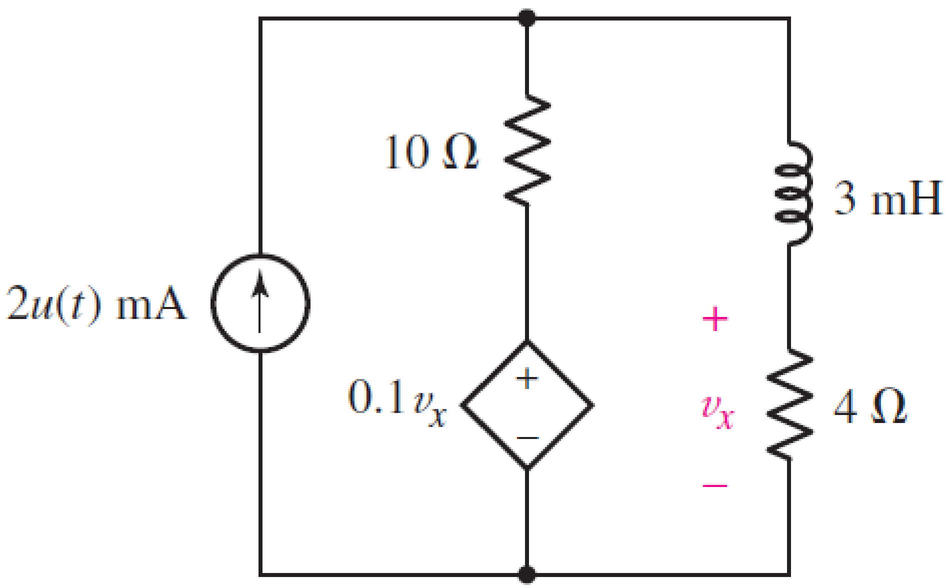
$$e^{at}x'(t) + ae^{at}\,x(t) = e^{at}Q(t)$$

$$\rightarrow \left(e^{at}x(t)\right)' = e^{at}Q(t)$$

$$\rightarrow x(t) = \underbrace{e^{-at}\int e^{at}Q(t)}_{\text{پاسخ اجباری}} + \underbrace{c\,e^{-at}}_{\text{پاسخ طبیعی}}$$

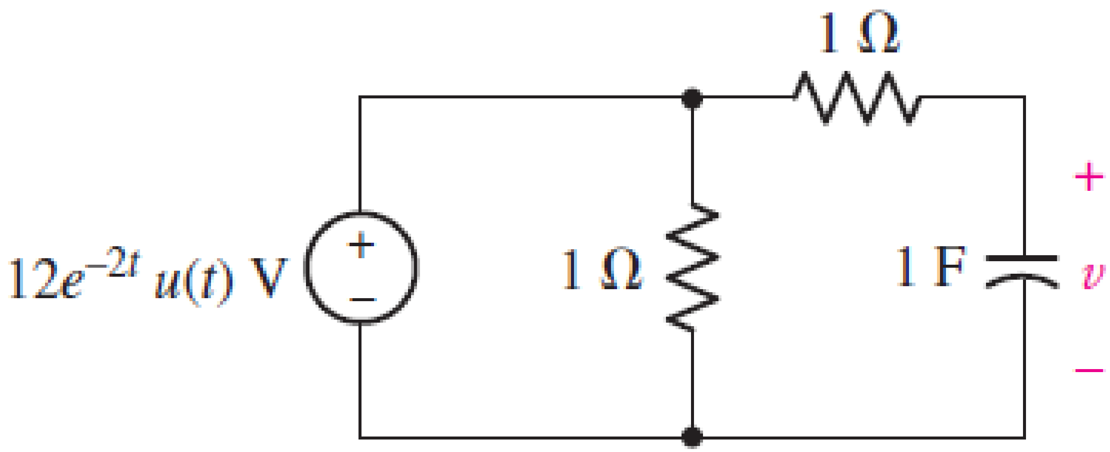
تمرین کلاسی 1

- $v_x(t)$ را بیابید.



تمرین کلاسی 2

- $v(t)$ را بیابید.



- پاسخ:

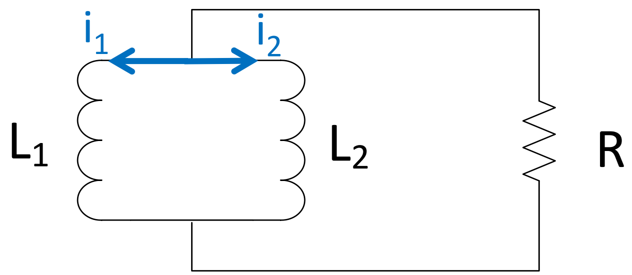
$$v(t) = 12(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

- اگر مقدار منبع برابر با $12e^{-t}u(t)$ بود چه؟
  - پاسخ:

$$v(t) = 12te^{-t}u(t)$$

تمرین کلاسی 3

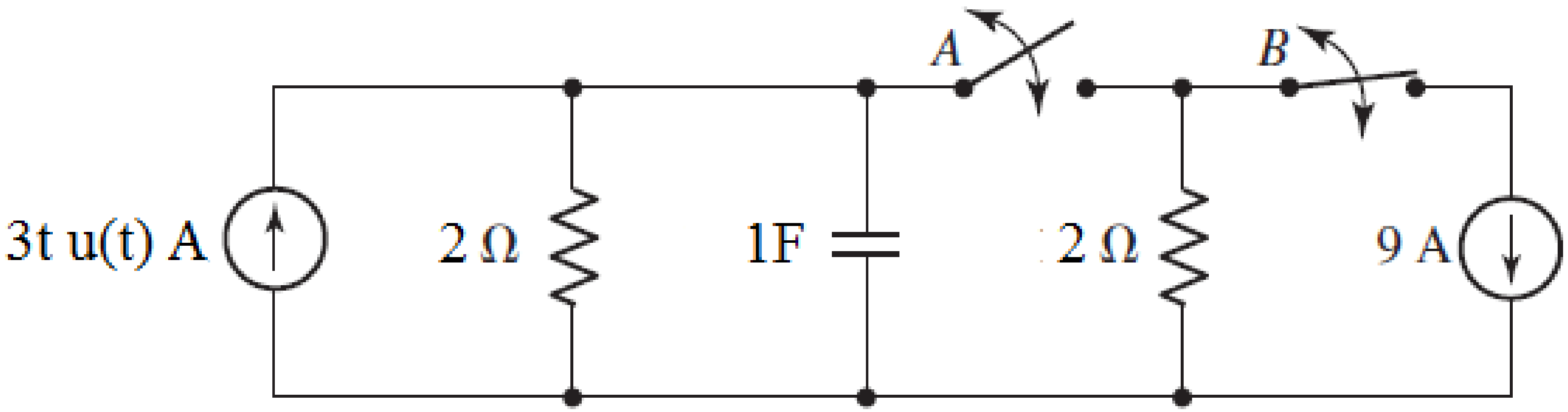
- $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را در مدار روبرو بیابید.
  - $L_1 = 6H, i_1(0) = 2A$
  - $L_2 = 3H, i_2(0) = 1A$
  - $R = 6\Omega$



Hint: $V_{L_1} = V_{L_2} \rightarrow L_1 i_1' = L_2 i_2' \rightarrow L_1 i_1 = L_2 i_2 + K$

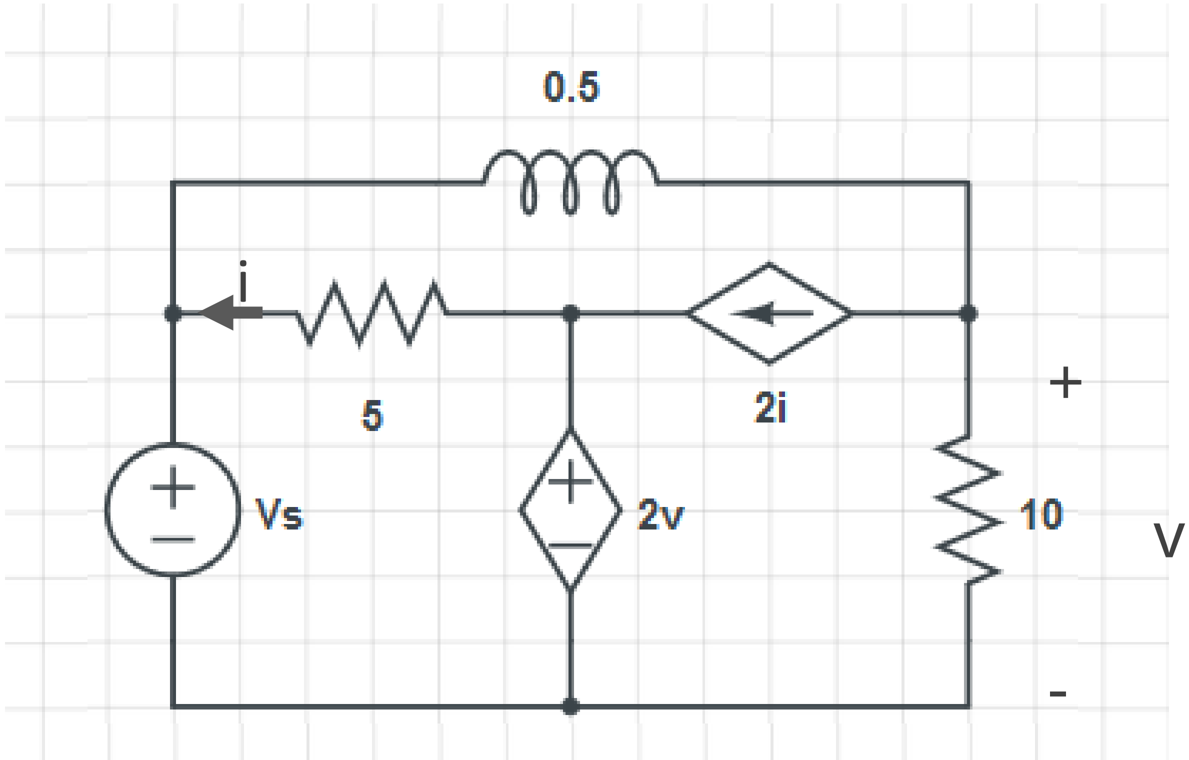
تمرین کلاسی 4

- $v_C(t)$ را بیابید. فرض کنید کلیدهای A و B در ابتدا بسته‌اند. B در ثانیه 1 باز می‌شود و A در ثانیه 2.



تمرین کلاسی 5

- اگر $v_s = u(t)$، $v(t)$ را بیابید.   پاسخ: $\left(1-\frac{5}{9}e^{-\frac{20t}{9}}\right)u(t)$
- اگر $v_s = \cos t\, u(t)$ باشد چه؟



خلاصه مطالب

- حل مدارهای RL و RC با حضور منبع و شرایط اولیه
  - حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول با ضرایب ثابت
    - پاسخ کامل = پاسخ طبیعی (Ke^{st}) + پاسخ اجباری (از جنس منبع)
  - حل با استفاده از اصل جمع آثار
    - پاسخ کامل = پاسخ با منبع بدون شرط اولیه + پاسخ بدون منبع با شرط اولیه
- پاسخ پله مدارهای RL و RC