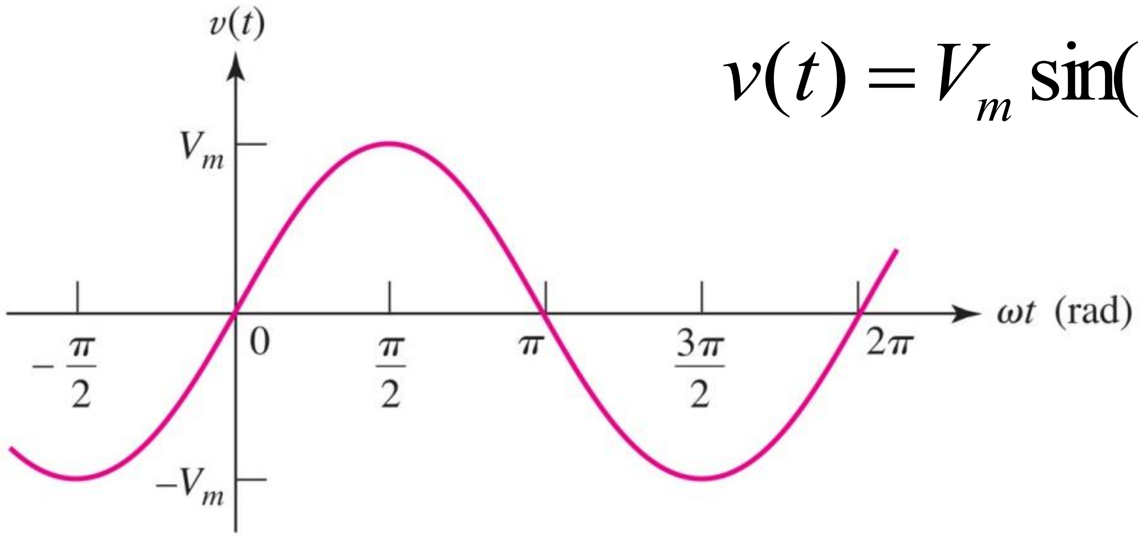
مدارهای الکتریکی و الکترونیکی
فصل هشتم: تحلیل پاسخ دائمی سینوسی

استاد درس: محمود ممتازپور
ceit.aut.ac.ir/~momtazpour

فهرست مطالب

- مقدمه: موج سینوسی و اعداد مختلط
- پاسخ اجباری به ورودی سینوسی
- مفهوم فازور

موج سینوسی



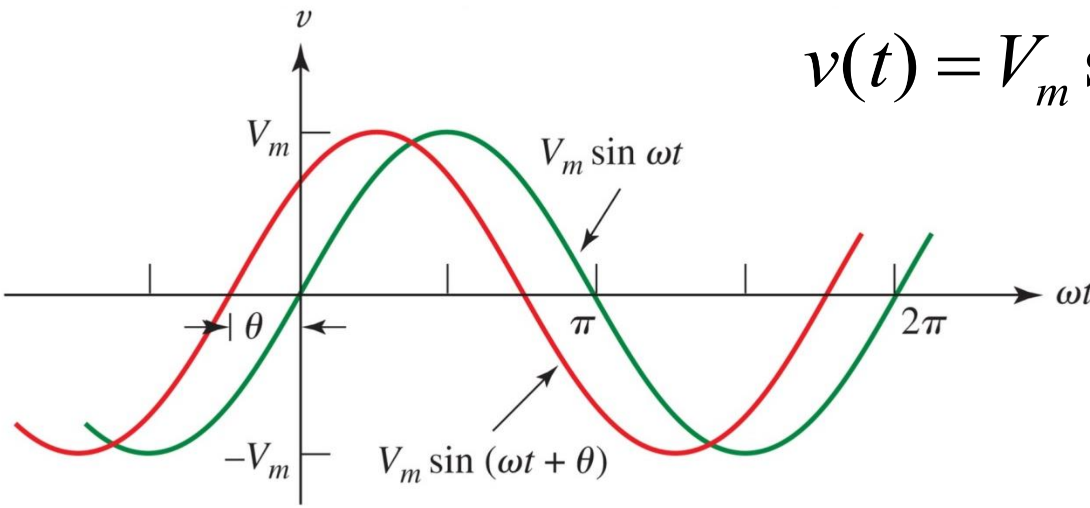
$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$

- دامنه V_m
- آرگومان ωt
- فرکانس زاویه‌ای ω
- دوره تناوب T
- فرکانس f

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \omega = 2\pi f$$

فاز موج سینوسی

در حالت کلی‌تر، موج سینوسی شامل یک فاز θ است.



$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

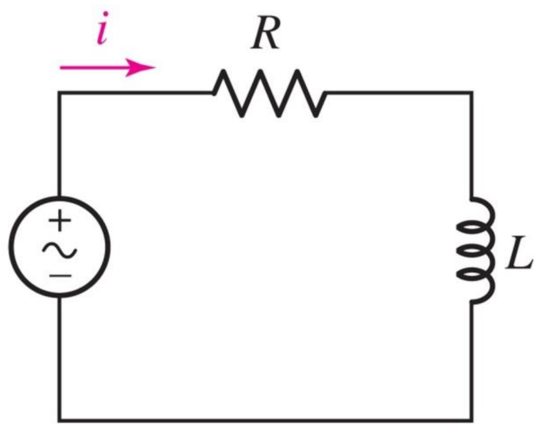
- می‌گوییم موج جدید نسبت به موج اصلی به اندازه θ پیش‌فاز یا lead است.
- می‌گوییم موج اصلی نسبت به موج جدید به اندازه θ پس‌فاز یا lag است.

عدد مختلط

- یک عدد مختلط را به فرم‌های زیر نمایش می‌دهیم:
- $a + bj \leftrightarrow Ae^{j\theta}$
  - $A = \sqrt{a^2 + b^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$
  - $a = A\cos\theta\,,\quad b = A\sin\theta$
- $Ae^{j\theta}$ را به‌صورت $A\measuredangle\theta$ نیز نشان می‌دهند.
- مثال:
- $2\measuredangle 45° = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}45} = 2\cos 45 + j2\sin 45 = \sqrt{2} + \sqrt{2}j$
- $\frac{1}{1+2j} = \frac{1\measuredangle 0}{\sqrt{5}\measuredangle\tan^{-1}2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\measuredangle - \tan^{-1}2$

پاسخ اجباری به ورودی سینوسی

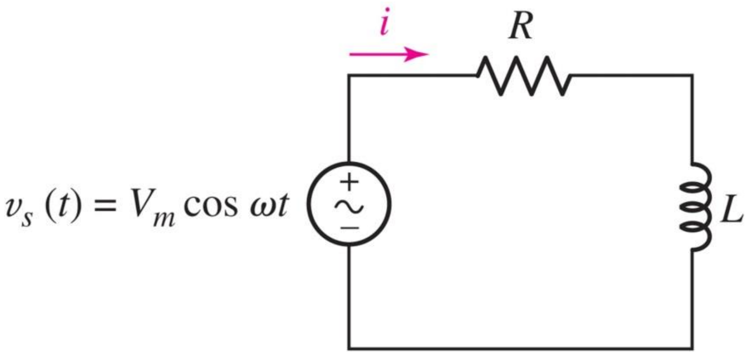
- در بسیاری از کاربردها، وقتی ورودی سینوسی است، پاسخ گذرا (طبیعی) برای ما اهمیتی ندارد و فقط به‌دنبال یافتن پاسخ دائمی (اجباری) هستیم.



$v_s(t) = V_m \cos \omega t$

- در اینجا به‌دنبال راهی هستیم که بتوانیم این پاسخ را ساده‌تر به‌دست آوریم.

یافتن پاسخ دائمی با استفاده از معادله دیفرانسیل



1. KVL را اعمال می‌کنیم:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos(\omega t)$$

2. پاسخ اجباری از جنس ورودی است:

$$i(t) = I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t$$

3. با صدق دادن در معادله دیفرانسیل، ضرایب به‌دست می‌آید:

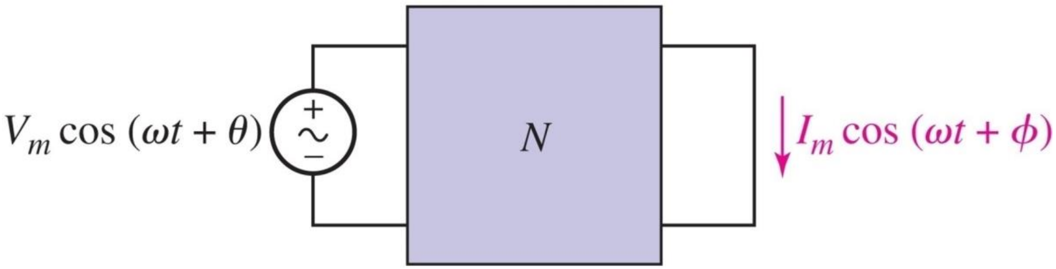
$$i(t) = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t$$

نتیجه؟

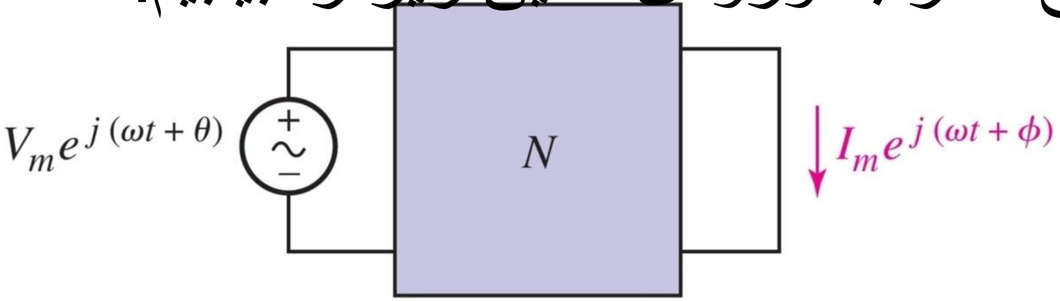
- می‌توان پاسخ اجباری به ورودی سینوسی را مانند قبل با به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل به‌دست آورد.
- آیا راهی برای اجتناب از معادلات دیفرانسیل و تنها با اتکا به محاسبات جبری برای محاسبه پاسخ اجباری سینوسی وجود دارد؟
- بله، با استفاده از مفهوم فازور!

استفاده از ورودی نمایی مختلط به جای سینوسی حقیقی

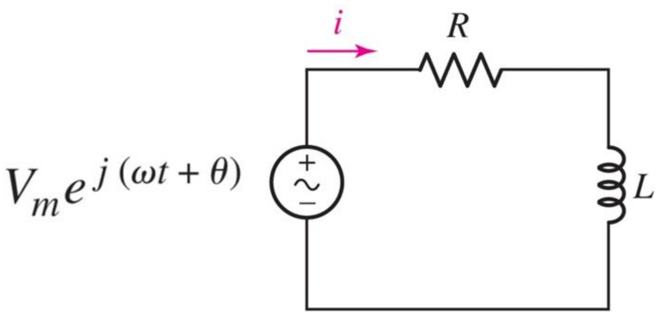
- صورت مسئله اصلی: یافتن پاسخ دائمی مدار N با ورودی سینوسی



- راه فرعی: بیایید پاسخ مدار به ورودی نمایی زیر را بیابیم:



پاسخ اجباری به ورودی نمایی مختلط



1. با اعمال KVL داریم:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v_s$$

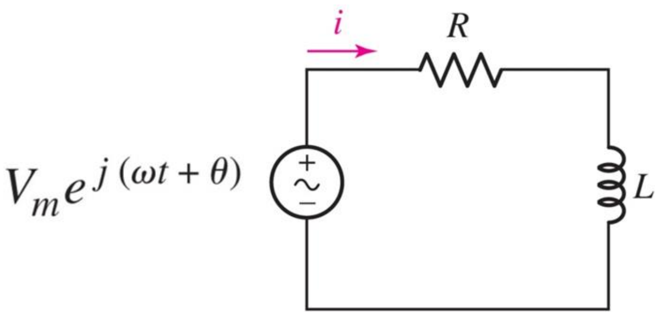
2. پاسخ اجباری از جنس خروجی:

- $i(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)}$

3. صدق دادن در معادله دیفرانسیل:

- $j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)} + R I_m e^{j(\omega t+\phi)} = V_m e^{j(\omega t+\theta)}$
- $j\omega L I_m e^{j\phi} + R I_m e^{j\phi} = V_m e^{j\theta}$
- $I_m e^{j\phi} = \frac{V_m e^{j\theta}}{R+j\omega L} \rightarrow \ I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}, \quad \phi = \theta - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$
- $i(t) = Re\left[I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right] = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \theta - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R})$

مفهوم فازور



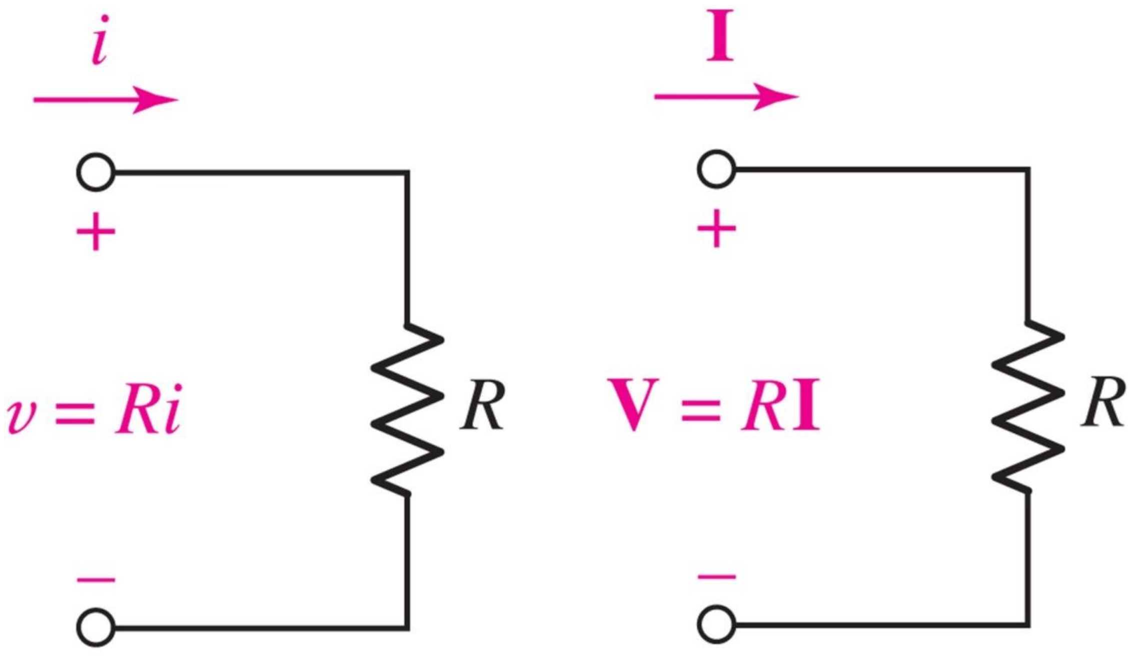
- در مدار نمونه روبرو، به رابطه زیر رسیدیم:

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m e^{j\theta}}{R+j\omega L}$$

- عدد مختلطی که دارای اندازه V_m و زاویه θ است و با $V_m e^{j\theta}$ نشان می‌دهیم را فازور می‌نامیم.
- به‌همین ترتیب، فازور جریان $I_m e^{j\phi}$ است.
- رابطه بین فازورهای مدار، یک رابطه جبری است نه دیفرانسیلی!

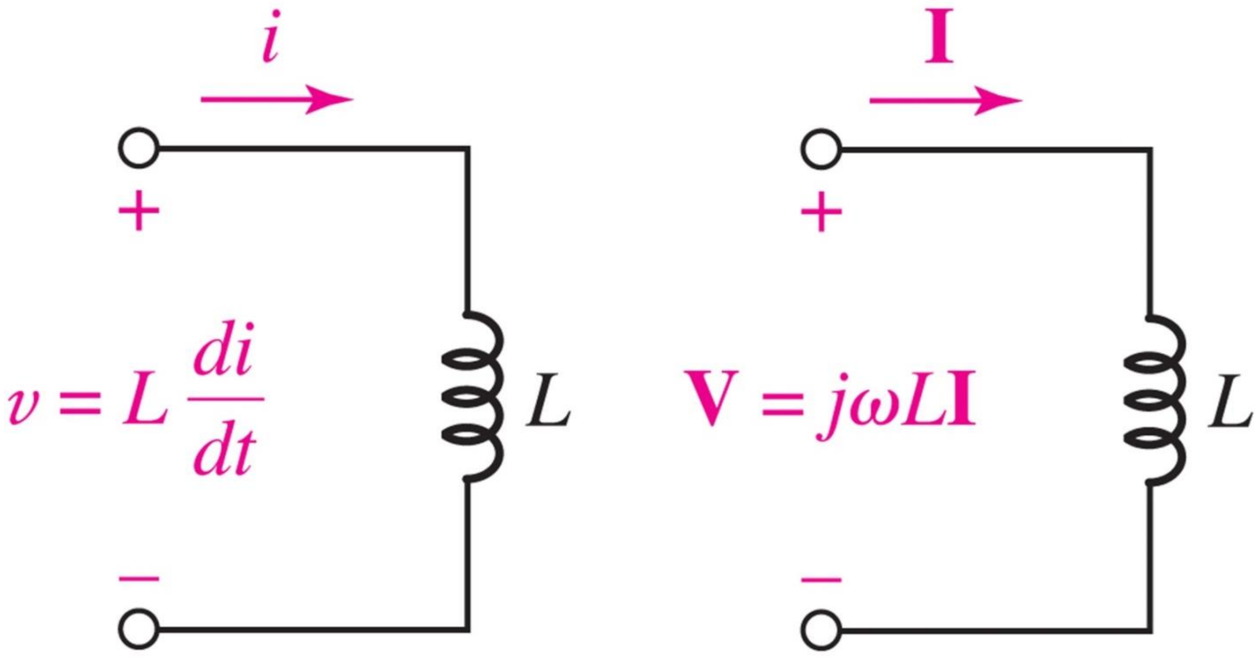
فازور مقاومت

- فازور ولتاژ و فازور جریان یک مقاومت نیز از قانون اهم پیروی می‌کنند.
- پس فازور مقاومت همان R است.



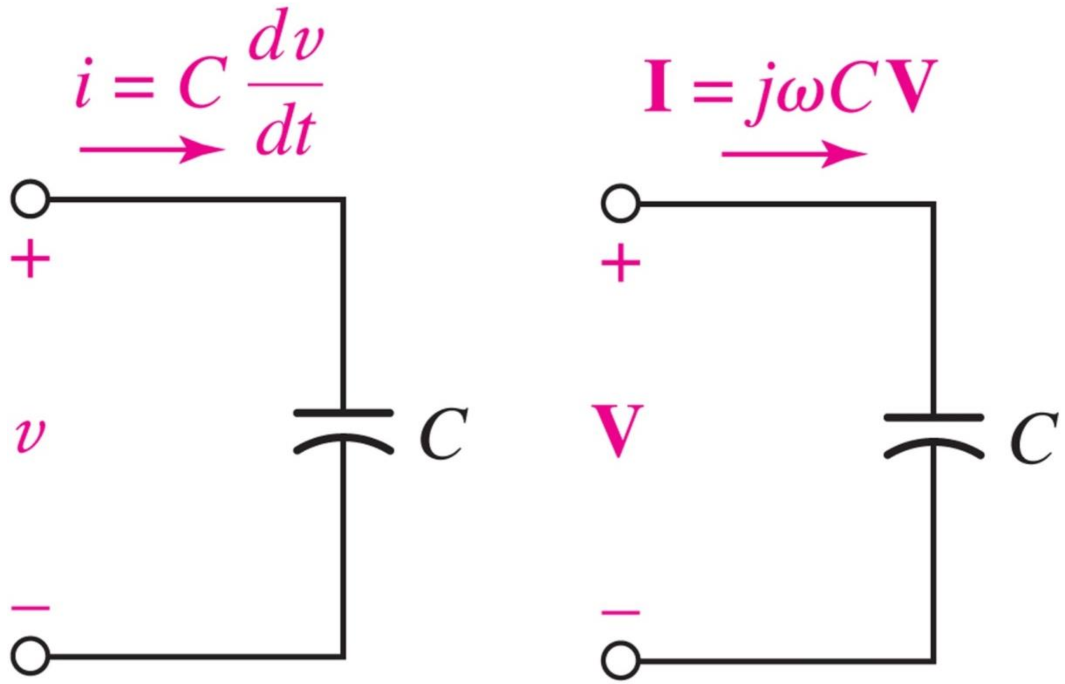
فازور سلف

- رابطه دیفرانسیلی بین جریان و ولتاژ سلف در حوزه زمان، به رابطه جبری در حوزه فازور تبدیل می‌شود.
- فازور سلف $j\omega L$ است و فازور ولتاژ و جریان آن رابطه اهمی دارند.



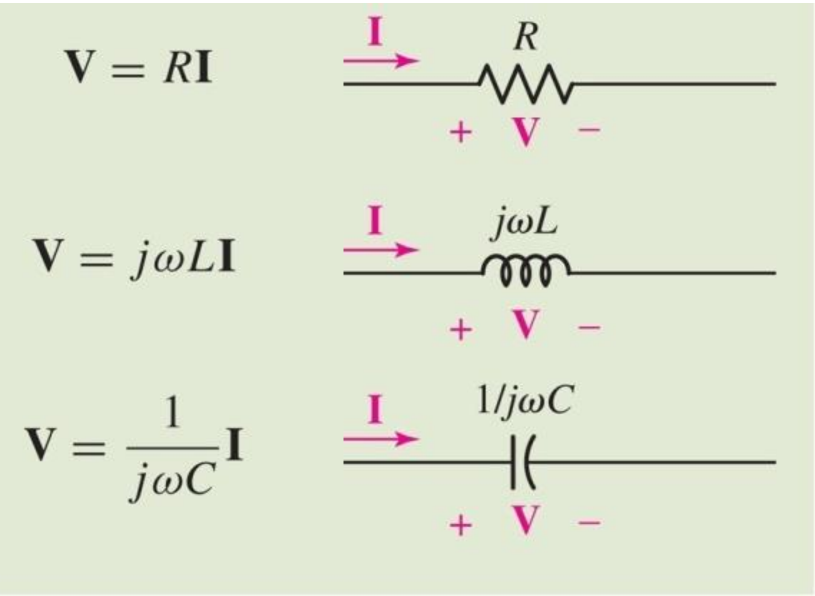
فازور خازن

- فازور خازن نیز $\frac{1}{j\omega C}$ است و رابطه بین ولتاژ و جریان آن در حوزه فازور مانند سلف و مقاومت رابطه اهمی است.



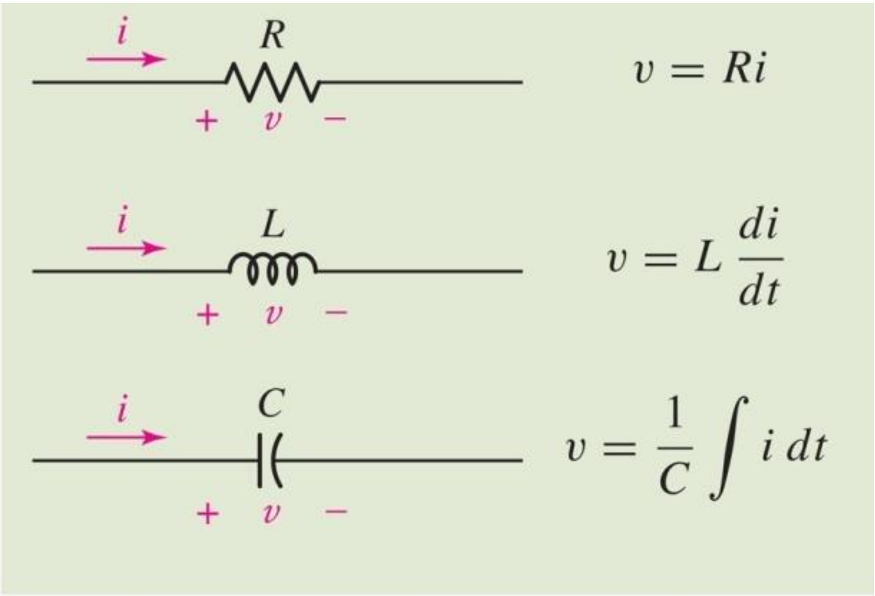
خلاصه

حوزه فازور



محاسبات جبری با اعداد مختلط

حوزه زمان



محاسبات دیفرانسیلی با اعداد حقیقی

قوانین کرشهف برای فازورها

- رابطه KVL برای فازورهای ولتاژ در یک حلقه نیز برقرار است.

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_N = 0$$

- همینطور رابطه KCL برای فازورهای جریان در یک گره نیز برقرار است.

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \cdots + \mathbf{I}_N = 0$$

امپدانس

- به حاصل تقسیم فازور ولتاژ بر فازور جریان، امپدانس می‌گوییم.

$$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = 1/j\omega C$$

- امپدانس معادل مقاومت در حوزه فازور است.
- امپدانس یک عدد مختلط است و واحد آن اهم است.
  - به قسمت حقیقی امپدانس، رزیستانس و به قسمت موهومی آن راکتانس می‌گویند.
- امپدانس‌های سری و موازی مانند مقاومت‌ها قابل ترکیب‌اند.

ادمیتانس

- معکوس امپدانس را ادمیتانس می‌نامیم.

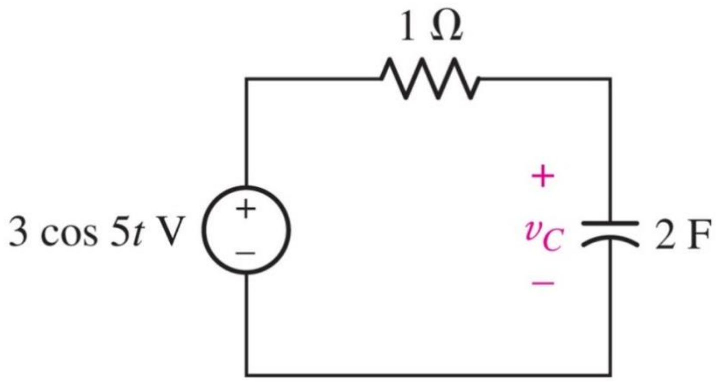
$$Y_R = 1/R \qquad Y_L = 1/j\omega L \qquad Y_C = j\omega C$$

- ادمیتانس معادل رسانایی است.
- ادمیتانس یک عدد مختلط است و واحد آن زیمنس است.
  - به قسمت حقیقی ادمیتانس، کنداکتانس و به قسمت موهومی آن سوسپتانس می‌گویند.

خلاصه روش استفاده از فازور

- امپدانس همه المانها را با توجه به فرکانس منبع به‌دست آورید.
  - $Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = 1/j\omega C$
- مقدار منابع را نیز با فازور آنها جایگزین کنید.
- مدار را در حوزه فازور مانند یک مدار مقاومتی تحلیل کنید و فازور همه جریان‌ها و ولتاژهای مدار را به‌دست آورید.
- بردن فازور به حوزه زمان: فازور مورد نظر را در $e^{j\omega t}$ ضرب کنید و قسمت حقیقی آن را به عنوان پاسخ نهایی نگه دارید.

مثال 1: استفاده از فازور



- پاسخ دائمی ولتاژ خازن را بیابید.

$$V_s = 3\measuredangle 0, \qquad Z_R = 1, \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{10j} = -0.1j$$

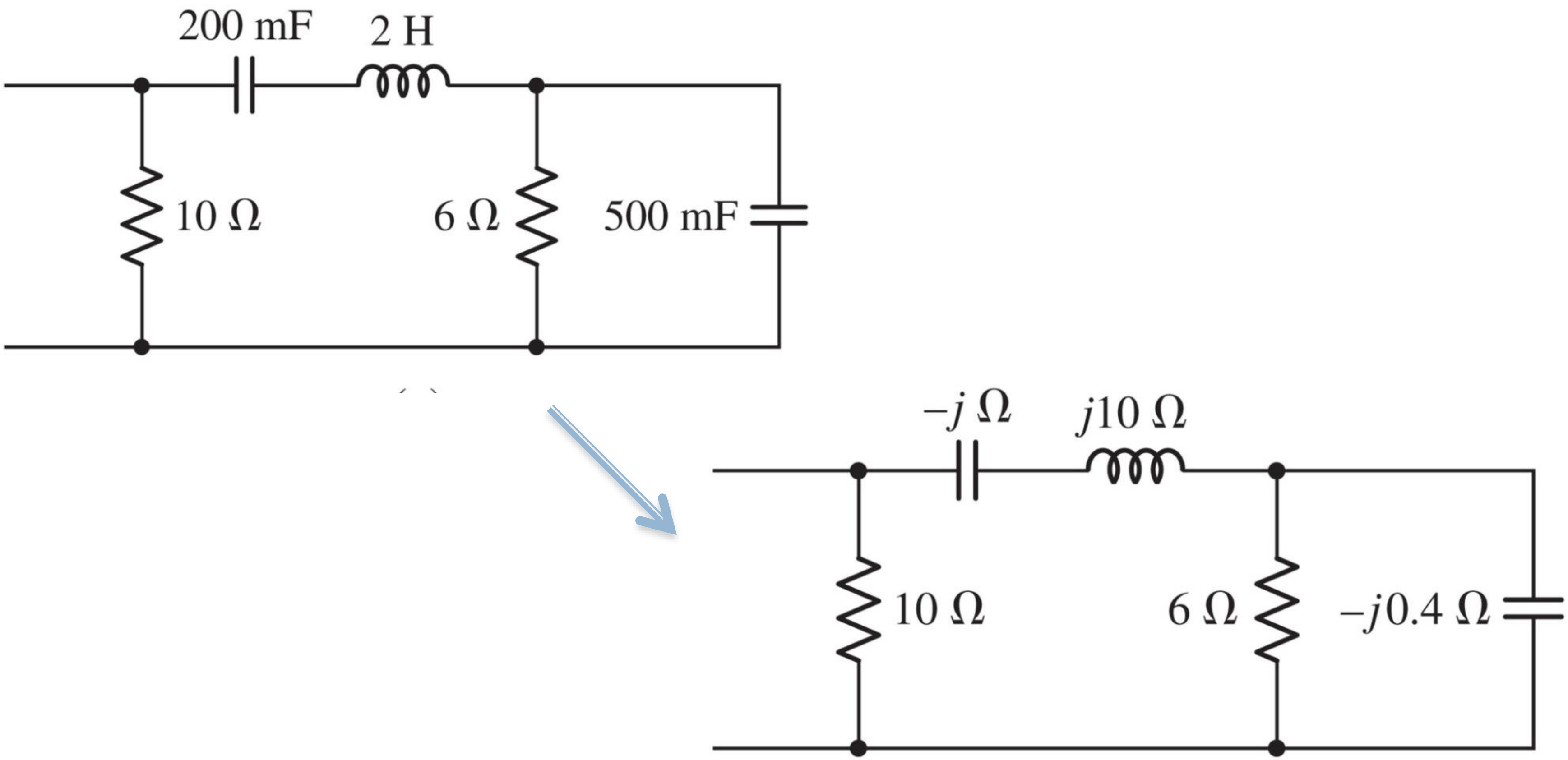
$$V_c = \frac{-0.1j}{1-0.1j} \times 3 = \frac{3}{1+10j} = \frac{3\measuredangle 0}{\sqrt{101}\measuredangle \tan^{-1} 10}$$

$$= 29.8\measuredangle -84.3$$

$$v_C(t) = Re\left[29.8e^{j(5t-84.3)}\right] = 29.8\cos(5t - 84.3)$$

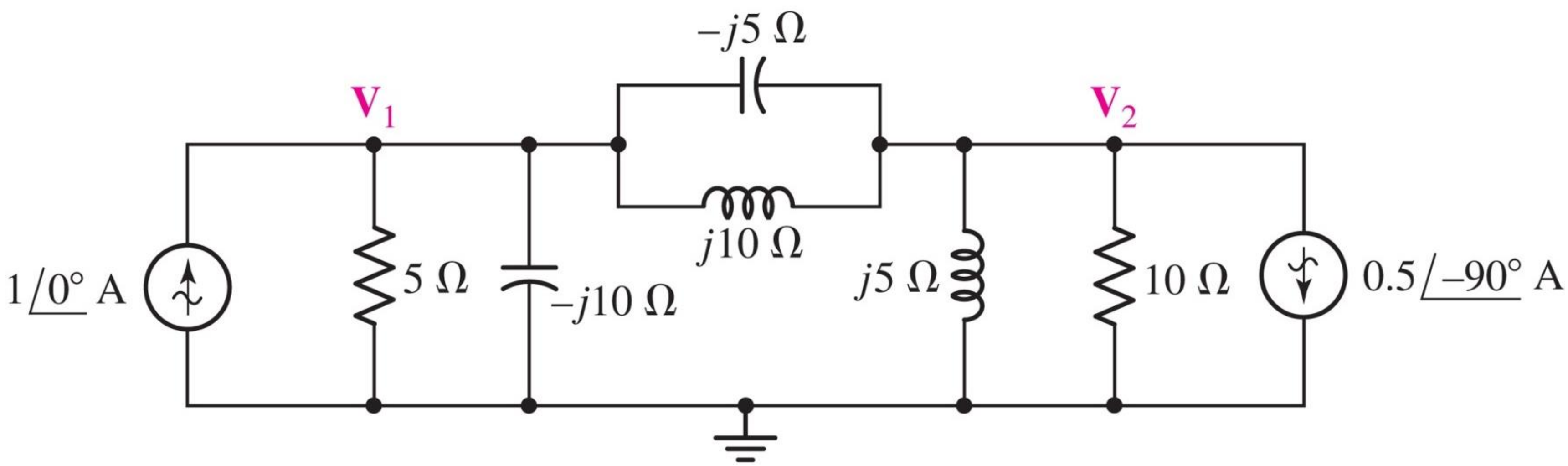
مثال 2: محاسبه امپدانس معادل

- امپدانس معادل مدار زیر را در فرکانس 5 rad/s بیابید.



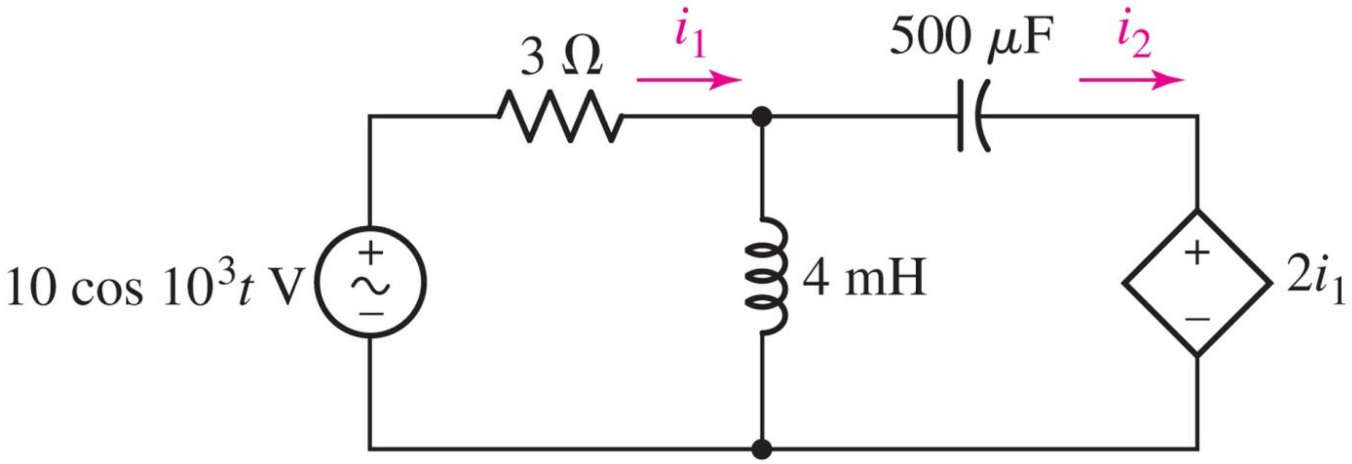
مثال 3: تحلیل گره

- فازورهای ولتاژ V_1 و V_2 را بیابید.



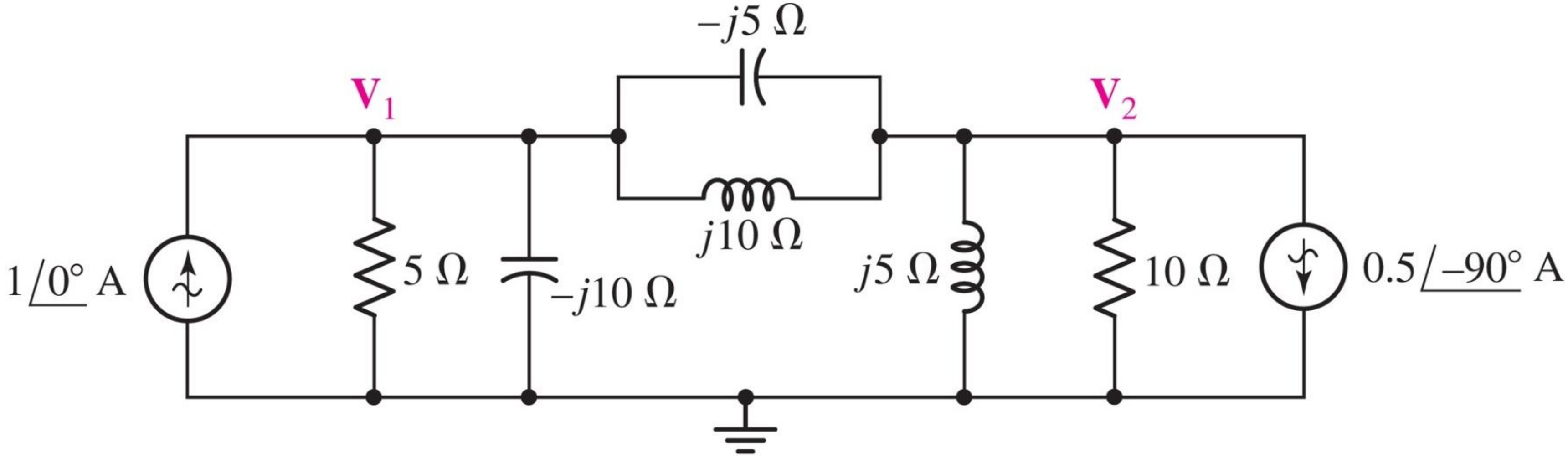
مثال 4: تحلیل مش

- جریان‌های $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را بیابید.



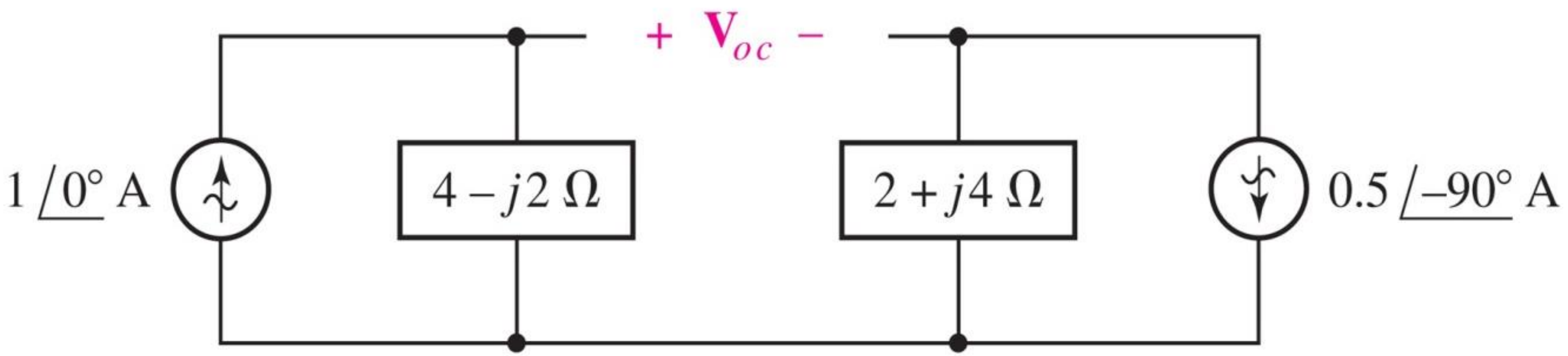
مثال 5: جمع آثار

- اصل جمع آثار برای فازورها نیز صادق است. با استفاده از آن ولتاژ $\boldsymbol{V}_1$ را بیابید.



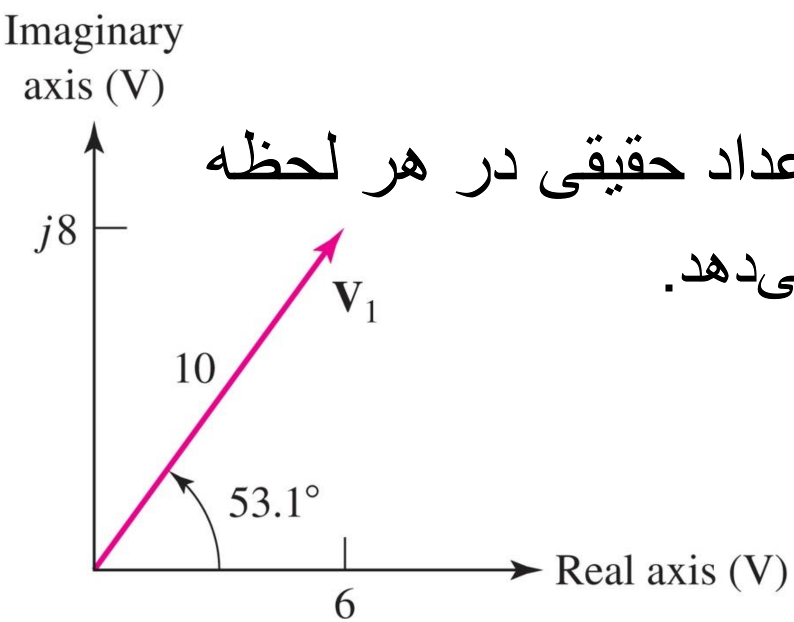
مثال 6: مدار معادل تونن

- قضایای تونن و نورتن نیز برای فازورها صادق است. با محاسبه مدار معادل تونن شکل زیر، ابتدا جریان گذرنده بین گره‌های V_1 و V_2 را به‌دست آورده و سپس ولتاژ V_1 را به‌دست آورید.



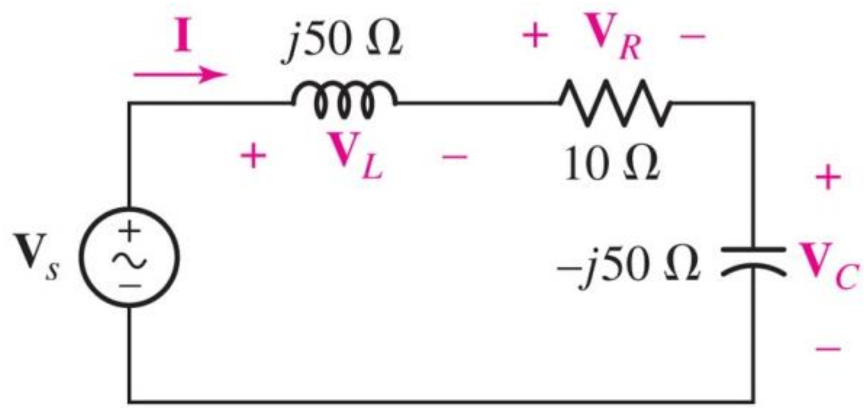
دیاگرام برداری فازورها

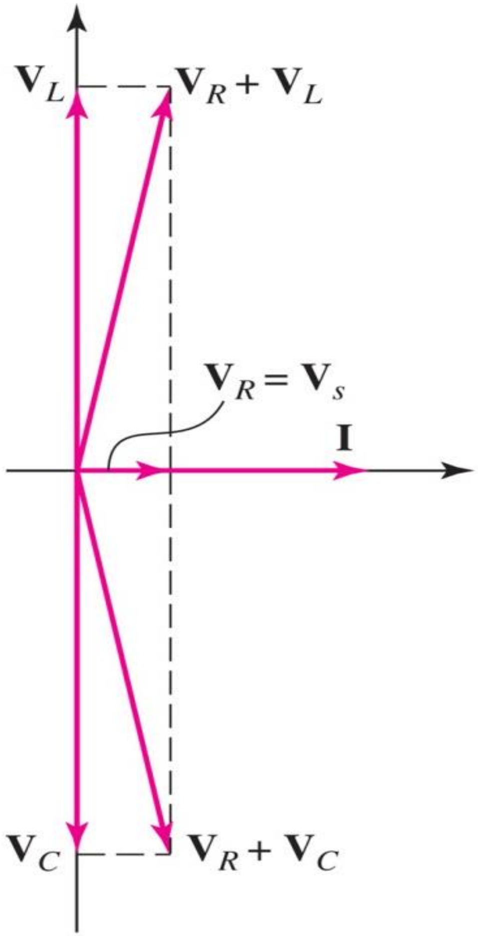
- فرض کنید در صفحه اعداد مختلط برداری داریم که با سرعت زاویه‌ای ω حول مبدأ مختصات می‌چرخد.
- شکل زیر وضعیت این بردار را در لحظه $t = 0$ نشان می‌دهد. این همان فازور ولتاژ V_1 است با اندازه 10 و زاویه 53.1.
  - $V_1 = 10e^{j53.1}$
- تصویر این بردار بر روی محور اعداد حقیقی در هر لحظه مقدار لحظه‌ای ولتاژ $v_1(t)$ را نشان می‌دهد.
  - $v_1(t) = 10\cos(\omega t + 53.1)$



دیاگرام برداری فازور: مثال

- با فرض $I = 1\angle 0$ داریم:

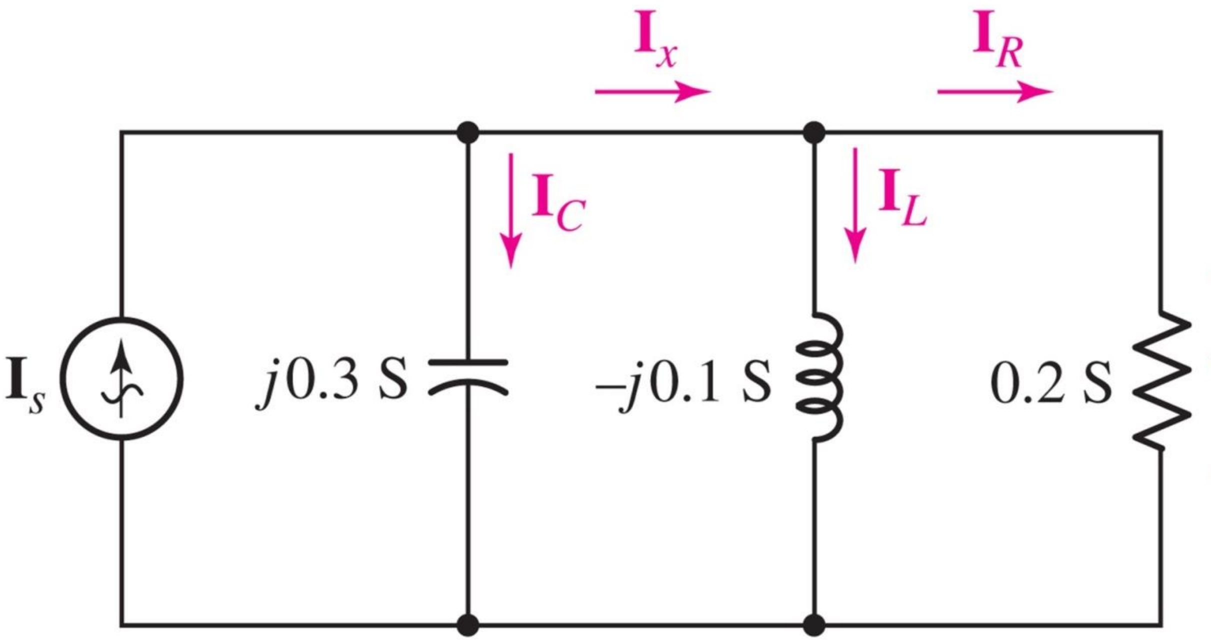


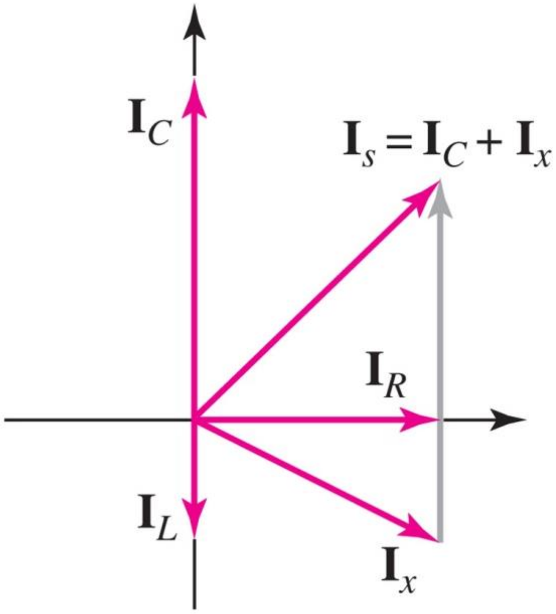


- سلف 90 درجه پس‌فاز است. یعنی جریانش 90 درجه از ولتاژش عقب‌تر است.
- خازن 90 درجه پیش‌فاز است.

دیاگرام برداری فازور: مثال 2

- با فرض $V = 1\measuredangle 0$ داریم:





پاسخ دائمی منابع با فرکانس‌های مختلف

- سؤال: اگر در یک مدار همزمان منابعی با فرکانس‌های متفاوت وجود داشتند چه کنیم؟
  - هنگام محاسبه $j\omega L$ و $\frac{1}{j\omega C}$ کدام ω را قرار دهیم؟
- پاسخ: در این حالت باید اثر هر یک از منابع را جداگانه به‌دست آوریم و پاسخ‌ها را <u>در حوزه زمان </u>با یکدیگر جمع کنیم (اصل جمع آثار)

- مهم: دقت کنید فازورهایی که متعلق به دو فرکانس متفاوتند با هم جمع‌پذیر نیستند! باید ابتدا آنها را به حوزه زمان برد و بعد با هم جمع کرد.

تمرین کلاسی

- در مدار زیر توان مصرفی مقاومت 10 اهمی را در حالت دائمی بیابید.