

激光光斑的高斯曲面拟合应用

张 希, 王德亮, 韩 晶, 王 会

摘 要 文章提出了对不规则离散分布采样激光光斑数据的改进分析方法, 先对多组连续光斑数据进行统计分析过滤异常数据, 再做光斑数据归一化处理得到一组数据, 最后对这组数据进行高斯曲面拟合, 此种方法得到的拟合光斑更逼近原始光斑。

关键词 不规则离散分布; 激光光斑; 高斯曲面拟合

中图分类号 G2

文献标识码 A

DOI:10.16607/j.cnki.1674-6708.2019.04.083

文章编号 1674-6708 (2019) 229-0173-02

激光具备方向性好、发散度小等特性, 在武器系统、光学测量、检测仪器和航空航天等多个领域取得了广泛的应用。激光光斑大小作为激光功率计算的一个重要因素, 在激光实验应用中具有重要的意义。理论上激光光束光强分布满足高斯分布, 采用二维高斯曲面拟合即可求出激光光斑中心、大小等特性参数。本实验中, 激光探测组件靶板分布设计为米字型, 激光发射源处于移动状态, 采集激光时靶板上可能只有较少的几个探测探头能够接收到数据, 单帧采集数据样本点数较少, 且分布不均匀, 在这种情况下很难拟合出真实激光光斑。针对以上问题, 这里提出了该种实验下的处理方法, 采用多帧激光光斑归一化处理后进行二维高斯曲线拟合。

1 高斯曲面拟合原理及推导

二维高斯方程可以写成如下形式:

$$f(x, y) = G \times e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}} \quad (1)$$

其中 G 为高斯分布的峰值, x_0 为 x 方向上的中心坐标, y_0 为 y 方向上的中心坐标, σ_x 为 x 方向上的标准差, σ_y 为 y 方向上的标准差, 对公式 (1) 两边取对数, 并展开平方项, 整理后得到如下:

$$f \times \ln f = f \times \left[\ln G - \frac{x_0^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y_0^2}{2\sigma_y^2} + \frac{x_0}{\sigma_x^2}x - \frac{y_0}{\sigma_y^2}y - \frac{1}{2\sigma_x^2}x^2 - \frac{1}{2\sigma_y^2}y^2 \right] \quad (2)$$

这里假设参与拟合的数据点有 N 个, 将这 N 个数据点写成矩阵的形式为: $A=BC$, 其中: A 为 $N \times 1$ 的向量:

$$a_i = f_i \times \ln f_i \text{ (其中 } i=1, 2 \cdots N \text{)} \quad (3)$$

(其中 $=1, 2 \cdots N$)

B 为 $N \times 5$ 的矩阵:

$$B = [b_i] = [f_i, f_i x_i, f_i y_i, f_i x_i^2, f_i y_i^2] \text{ (其中 } i=1, 2 \cdots N \text{)} \quad (4)$$

(其中 $=1, 2 \cdots N$)

C 为一个由高斯参数组成的 5×1 的向量:

$$C^T = \left[\ln G - \frac{x_0^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y_0^2}{2\sigma_y^2}, \frac{x_0}{\sigma_x^2}, \frac{y_0}{\sigma_y^2}, -\frac{1}{2\sigma_x^2}, -\frac{1}{2\sigma_y^2} \right]$$

N 个数据点误差的列向量为 $E=A-BC$, 用最小二乘法拟合, 使其 N 个数据点的均方差最小, 即:

$$MSE = \frac{1}{N} \|E\|_2^2 = \frac{1}{N} E^T E = \frac{1}{N} (A - BC)^T (A - BC)$$

在图像数据处理时, 数据量比较大, 为减小计算量, 将矩阵 B 进行 QR 分解, 即 $B=QR$, 分解后得到的 Q 为一个 $N \times N$ 的正交矩阵, R 为一个 $N \times 5$ 的上三角矩阵, 对 $E=A-BC$ 进行如下推导:

$$E = A - BC \xrightarrow{Q^T \text{ 乘以等式两边}} Q^T E = Q^T A - Q^T BC \Rightarrow Q^T E = Q^T A - RC$$

由于 Q 为正交矩阵, 可以得到:

$$\|E\|_2^2 = \|Q^T E\|_2^2 = \|Q^T A - RC\|_2^2$$

令:

$$Q^T A = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 S 为一个 5 维列向量, T 为一个 $N-5$ 维列向量; R_1 为一个 5×5 的上三角方阵, 则

$$MSE = \frac{1}{N} \|E\|_2^2 = \frac{1}{N} \|Q^T A - RC\|_2^2 = \frac{1}{N} (\|S - R_1 C\|_2^2 + \|T\|_2^2)$$

上式中, 当 $S = R_1 C$ 取得最小值, 因此只需解出:

$$C = R_1^{-1} S \quad (5)$$

即可求出:

$$C^T = \left[\ln G - \frac{x_0^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y_0^2}{2\sigma_y^2}, \frac{x_0}{\sigma_x^2}, \frac{y_0}{\sigma_y^2}, -\frac{1}{2\sigma_x^2}, -\frac{1}{2\sigma_y^2} \right]$$

其中

$$c_0 = \ln G - \frac{x_0^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y_0^2}{2\sigma_y^2}, c_1 = \frac{x_0}{\sigma_x^2}, c_2 = \frac{y_0}{\sigma_y^2}, c_3 = -\frac{1}{2\sigma_x^2}, c_4 = -\frac{1}{2\sigma_y^2}$$

已知 c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 , 推导出光斑的 $x_0, y_0, \sigma_x, \sigma_y$ 这些参数如下:

$$x_0 = -\frac{c_1}{c_3}, y_0 = -\frac{c_2}{c_4}, \sigma_x = \sqrt{-\frac{1}{2c_3}}, \sigma_y = \sqrt{-\frac{1}{2c_4}} \quad (6)$$

由此得到光斑的中心和标准差。

2 实验装置及激光光斑分析

2.1 激光采集装置

激光采集装备包含信号采集器和 77 个激光探测探头，其中信号采集器与上位机通过 RS422 接口进行数据通信，各个激光探测探头采用同步线进行同步，同时对探头进行采集，探头分布在米字型靶板上，如图 1 所示。

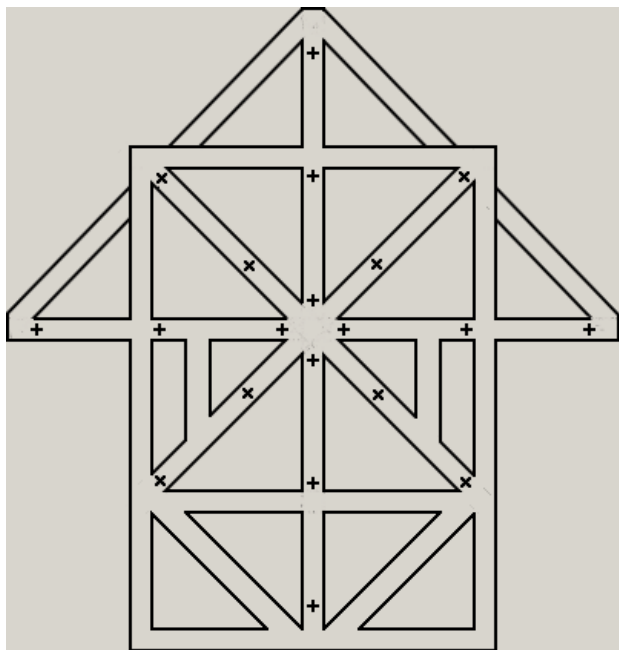


图1

2.2 激光发射装置

激光发射装置发散角为 0.3mrad，发射频率为 20Hz，实际测试距离范围为 2km 到 7km。实验时发射装置从远及近，以设定速度正面朝向激光采集靶板，发射激光光束。

2.3 激光光斑分析

因米字型靶板上探测探头分布不均匀，尤其是近距离照射时有可能只有四五个探头采集到数据，无法根据高斯算法拟合出真实激光光斑，因此选择连续的 10-20 帧激光数据，进行数据统计、筛选和数据归一化处理后，再进行二维高斯曲面拟合。实现方法如下：

第一步、逐帧数据进行统计分析，得出光斑中心，把采样点个数不满足要求及严重变形的数据滤除掉；

第二步、光斑数据归一化，将光斑数据进行一系列的变换处理，使之光斑中心处于同一点，得到了一组较之前信息量丰富的数据；

第三步、对这组数据进行二维高斯曲面拟合，对数据点集进行函数逼近，分析出光斑大小。本实验高斯曲面拟合算法通过 C++ 实现，采用第三方的

开源矩阵算法 Eigen，实现步骤如下：

1) 准备拟合数据，根据公式 (3) 和公式 (4) 将参与拟合的 77 个数据点转换成 77×1 矩阵 A 和 77×5 矩阵 B；

2) 对矩阵 B 进行 QR 分解，得到 R 和 Q，分解后 Q 为一个 77×77 的正交矩阵，R 为一个 77×5 的上三角矩阵。

3) 根据 Q 和 A 推导得到 S，S 为一个 5 维列向量；

4) 根据 R 取到 5×5 的上三角方阵 R1；

5) 根据公式 (5)，通过 R1 和 S 推导得到 C；

6) 根据公式 (6) 求得激光光斑中心 X、中心 Y、标准差 X、标准差 Y，根据标准差计算到靶光斑面积。

2.4 实验结果

根据该方法得到的实际计算光斑半径与理论到靶光斑半径更加接近，拟合显示出的光斑三维坐标图能较好测量发射激光。

表1

序号	激光距离	理论到靶光斑半径	实际计算光斑半径	拟合光斑剖面
1	6 km	0.9m	0.89 m	
2	4.5 km	0.675m	0.67m	
3	3 km	0.45m	0.45 m	

3 结论

本文根据实验条件进行算法改进，通过米字型靶板上的激光探测探头进行数据采集，得到不规则离散激光采集数据，高斯拟合之前先进行数据归一化处理，能够较准确计算出光斑的大小，拟合曲线与原始实验数据达到很好的逼近。

参考文献

- [1] 孔兵, 王昭, 谭玉山. 激光光斑的高斯拟合[J]. 激光技术, 2002, 26 (4): 277-278.
- [2] 王丽丽, 胡中文, 季杭馨. 基于高斯拟合的激光光斑中心定位算法[J]. 应用光学, 2012, 33 (5): 985-990.
- [3] 李伦, 巩马理, 刘兴占. 激光技术, 2000, 24 (6): 405-408.
- [4] 二维高斯曲面拟合法求取光斑中心及算法的C++实现 [EB/OL]. <https://blog.csdn.net/houjixin/article/details/8490653>.