# Actividad 13
# Física Computacional 1
# Reporte de Soluciónes Numéricas de Ecuaciones Diferenciales Parciales

María Fernanda Vences Mendoza

30 de abril del 2021

## 1 Introducción

En la actividad 10 realizamos la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales donde se involucran dos o más variables. Se hizo por el método de diferencias finitas la solucion de la ecuacion de calor en una dimensión para la temperatura $U(t, x)$, da la condición inicial y sus 2 condiiones de fronteras. Esto para una barra de cobre de longitud 1 donde los extremos son termicamente aislados a cierta temperatura fija.

En la actividad 11 fue par ala solución de la ecuación de onda donde es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo hiperbólico que incluye dos derivadas en el tiempo y dos derivadas en tiempo y otras dos en el espacio.

$$U_{tt} = c^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz})$$

Donde $c^2$ es la velocidad con la que se propaga la información en el dominio de solución.

Usando el método de diferencias finitas, realizando un video del movimiento. Y usando la ecuación de KdV para ecuaciones diferenciales parciales no lineales que describen el movimiento de ondas supericiales de agua en aguas poco profundas. Dando como solución una secante hiperbólica.

Para la actividad 12 fue la solución numérica de la ecuación de Poisson donde es una ecuación diferencial parcial de tipo elíptica generalizando con una ecuacion de Laplace. Resolvemos un problema de eigenvalores del operador de Laplace. En este caso para los ejercicios se resolvieron la ecuación de Poisson con las condiciones de Dirichlet, sobre un cuadrado unitario y con condiciones de frontero tipo Neumann.

# 2 Descripción de las tres grandes familias de Ecuaciones Diferenciales Parciales:

### 2.0.1 Parabólica

Una **ecuación parabólica en derivadas parciales** es una ecuación diferencial parcial de segundo orden del tipo:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

En la cual la matriz Z queda:

$$Z = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

Teniendo esta matriz **Z** un determinante igual a 0.

Ejemplos de este tipo de ecuaciones son la ecuación de Schröndinger y la ecuación del calor.

También se puede decir que las ecuaciones parabólicas corresponden a flujos en los que aparecen mecanismos disipativos debido a efectos viscosos o de conducción térmica; en estos problemas la solución presenta distribuciones suaves de magnitudes, y los gradientes tienden a reducirse con el tiempo si las condiciones de contorno son estacionarias.

Por ejemplo un problema parabólico es la conducción no estacionaria de calor, que en el caso unidimensional está descrito de esta forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}.$$

### 2.0.2 Hiperbólicas

Una **ecuación hiperbólica en derivadas parciales** es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden del tipo:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

en la cual la matriz **Z** tiene la forma:

$$Z = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

Cuyos coeficientes pueden ser constantes o funciones continuas en las variables$(x, y)$, tiene un determinante **negativo**.

Un ejemplo de una ecuación diferencial en derivadas parciales hiperbólica es la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{v_x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v_y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{v_z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Como ya se ha dicho, si no existen mecanismos disipativos, la solución permanece con amplitud constante en el tiempo si las ecuaciones son lineales, pudiendo incluso crecer si las ecuaciones son no lineales. Este tipo de solución es típica en flujos descritos por ecuaciones hiperbólicas. El ejemplo más sencillo de este tipo de problemas es la propagación de ondas descrita por una ecuación lineal de la forma:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

Las ecuaciones que describen flujos no viscosos y no estacionarios son también de tipo hiperbólico no lineales. También es hiperbólica la ecuación lineal de convección pura siguiente:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

donde **u** es una velocidad conocida.

### 2.0.3 Elípticas

Una **ecuación elíptica en derivadas parciales** es uan ecuación diferencial parcial tal que los coeficientes de las derivadas de grado máximo son positivas. Se trata de la aplicación de un **operador elíptico**, un operador deferencial definido sobre un espacio de funciones que generaliza al operador de *LaPlace*.

Por ejemplo, una ecuación elíptica de segundo orden tiene la forma:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

Donde la matriz **Z** es:

$$Z = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

donde esta matriz es definida **positiva**.

Ejemplos son la ecuación de Poisson, ecuación de LaPlace, ecuación Biarmónica y **ecuación de Scröndinger** independiente del tiempo.

En mecánica de fluidos las ecuaciones elípticas corresponden siempre a problemas estacionarios. El ejemplo más simple es el de la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

que describe el flujo potencial incompresible o la transmisión de calor por conducción en ausencia de fuentes de calor ($\Phi$ sería la temperatura en este caso). Ya se ha comentado que el flujo potencial, estacionario, compresible y subsónico también es un problema elíptico. Las ecuaciones de conservación estacionarias de la cantidad de movimiento y de la energía, por ejemplo, son también en general de tipo elíptico.

## 2.1 Descripción de los tres tipos de Condiciones a la Frontera:

### 2.1.1 Dirichlet

La**condición de frontera de Dirichler** o de **primer tipo** es un tipo de condición de frontera o contorno, denominada asi en honor a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

Estas condiciones de **Dirichlet**, con las qu se fija el valor de las variables dependientes en el contorno. Se especifica en valor de la función en todos los puntos del contorno. Si este valor es nulo, la condición es de Dirichlet homogénea. Por ejemplo, el valor de cada una de las componentes de la velocidad es nulo en las condiciones sin deslizamiento.

### 2.1.2 Neumann

La**condición de frontera de Neumann** o de **segundo tipo** es un tipo de condición de frontera llamada asi por Carl Neumann. Con las que se fija el valor de las derivadas de las variables dependientes en el contorno.

Se especifica la derivada de la función en todos los puntos del contorno. De nuevo, si esta es nula la condición es homogénea. Por ejemplo, en la superficie libre de un líquido la componente normal de la velocidad tiene una derivada tangencial que se suele considerar despreciable.

### 2.1.3 Robin (mixto)

Son una combinación lineal ponderada de las condiciones de **Dirichlet** y **Neumann**.

## 2.2 Descripción del Método de Diferencias Finitas

Son una clase de técnicas numéricas para resolver ecuaciones diferenciales meiante la aproximación de erivadas con diferencias finitas. Tanto el dominio espacial como el intervalo de tiempo están discretizados o divididos en un número finito de pasos, y el valor de la solución en estos puntos discretos se aproxima resolviendo ecuaciones algebraicas que contienen diferencias finitas y valores de puntos cercanos.

Usar este método convierten las **ecuaciones diferenciales ordinarias** o las **ecuaciones diferenciales parciales**, que pueden ser **no lineales**, en un sistema de ecuaciones lineales que pueden resolverse mediante técnicas de álgebra matricial.

Suponiendo que la función cuyas derivadas deben aproximarse se comporta correctamente, según el **teorema de Taylor**, podemos crear una expansión en **serie de Taylet**

$f(x_0{+}h) = f(x_0){+}\ fracf'(x_0)1!h{+}\ fracf^{(2)}(x_0)2!h^2{+}\ cdots{+}\ fracf^{(n)}(x_0)n!h^n{+}R_n(x)$

Donde **n!** denota el factorial de **n** y $R_n(x)$ es un término restante, que denota la diferencia entre el polinomio de Taylor de grado **n** y la función original. Derivaremos una aproximación para la primera derivada de la función **f** truncando primero el polinomio de Taylor:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R_1(x)$$

Configuración, $x_0 = a$ tenemos:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + R_1(x)$$

Diidiendo entre $h$ nos da:

$$\frac{f(a+h)}{h} = \frac{f(a)}{h} + f'(a) + \frac{R_1(x)}{h}$$

Resolviendo para $f'(a)$:

$$f'(a) = \frac{f(a+h)-)}{h} - \frac{R_1(x)}{h}$$

Asumiendo que $R_1(x)$ es suficientemente pequeña, la aproximación de la primera derivada de $f$ es:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esto es, no por casualidad, similar a la definición de derivada, que se da como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Excepto por el límite hacia cero (el método lleva el nombre de este).

# 3 Solución de los métodos utilizados para las Actividades 10, 11 y 12 realizadas.

Actividad 10.

https://github.com/Ferna45/Fisica-Computacional-1/blob/master/Actividad_10/Actividad_10.ipynb

Actividad 11.

https://github.com/Ferna45/Fisica-Computacional-1/blob/master/Actividad_11/Actividad_11.ipynb

Actividad 12.

https://github.com/Ferna45/Fisica-Computacional-1/blob/master/Actividad_12/Actividad_12.ipynb

## 3.1 Solución de la Ecuación del Calor:

Para esta solución se uso los algoitmos vistos en clase. En el ejercicio 1 caso a, se encontró la solución de la ecuación de calor. Con una barra metálica de lonfitud 10 su coeficientes y condición inicial.

AL igual se proporcionó las condiciones de frontera.

En el algoritmo declaramos las condiciones de frontera, se calculó la temperatura en los puntos poniendo algunos parámetros. Tomando tiempo inicial, final; los puntos en las direcciones. Usando la condición inical de $\sin\pi * x$ pudimos obtener la eolución de la temperatura para la barra con esa función.

En el caso b fue usando el mismo algoritmo pero con diferentes condiciones. Era para la misma barra de longitud 10 con coeficiente de difuión térmica de 0.25. La condición inicial también cambió a $u(x,0) = 20$, las condiciones de frontera fueron estos $u(0,t) = 20 + 10\sin(\frac{\pi * t}{12})$ $u(L,t) = 20$ para un tiempo de 0 a 48.

la verdad usé el mismo algoritmo solo que cambie las condiciones. Para asi tener la gráfica de la evolución de temperatura.

Para el segundo ejercicio checamos la variación de la tmpertura en el suelo. para esto usamos el algoritmo propocionado de tipo Neumann, ya que cuenta con las condiciones de este tipo.

Las condiciones que nos dan es qu la temperatura no cambia y hay una cierta profundidad para L. Suponiendo que la variación de la temperatura terrestre varía así:

$$u(0,t) = u_0 + u_a \sin(\frac{2\pi t}{P})$$

Con uan constante de periodo de variación diaria de temperatura.

Si se le da un subconjunto abierto U de $R^{ny}$ un subintervalo I de R , se dice que una función u : U × I → R es una solución de la ecuación de calor si

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Como tal, la ecuación de calor a menudo se escribe de manera más compacta como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

Entonces se dice que $u$ es una solución de la ecuación de calor si

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$$

Entonces, de acuerdo con la regla de la cadena , uno tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t/\alpha, x) = \alpha^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}(t/\alpha, x) = \Delta u(t/\alpha, x) = \Delta v(t,x)$$

Enlace a la sesión de Jupyter de la Actividad 10 en Github. https://github.com/Ferna45/Fisica-Computacional-1/blob/master/Actividad_10/Actividad_10.ipynb

## 3.2 Solución de la Ecuación de Onda:

En esta Actividad se encontró la solución para la ecuación de onda donde en el algoritmo ya se nos fue proporcionado.

Para este problema definimos la ecuación de onda por:

$$u(x,t) = u(jh, nk) = u_j^n$$

despejamos para el valor desconocido

$$u_j^{n+1}$$

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + C^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Usando la constante de Courant

$$C^2 = \frac{c^2 k^2}{h^2}$$

Tenemos la condición inicial por diferencias finitas por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j^0 = \frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2k} = 0$$

lo que indica que $u_j^1 = u_j^{-1}$.

Sustituimos la igualdad anterior en la ecuación de onda y nos queda que

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{C^2}{2}(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)$$

Y ya tendremos dos niveles de valores para $u(x,t)$ para calcular los valores de $u_j^{n+1}$ usando el esténcil de 5 puntos.

En el ejercicio uno, se encontró la solución para la ecuación de onda amortiguada en una en una dimensión, dada por la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \qquad x \in (0, L], t \in (0, T]$$

donde $b \geq 0$ y $c$ son constantes. Donde las condiciones iniciales y a la frontera para encontrar la solución son las siguientes.

$$u(x, 0) = I(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

Usando **diferencias finitas** aproximamos la primer derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) \approx \frac{u(x,t+k) - u(x,t-k)}{2k}$$

Suponiendo las mismas características del ejemplo presentado en la actividad 10 $L = 10$, $c = 100\frac{m}{s}$, $t = (0, 0.25)$, y **coeficiente de amortiguamiento** $b = 0.5$ con **condiciones iniciales**

$$u(x,0) = x(1-x)$$

y

$$\partial u(x,0)/\partial t = 0$$

y **condiciones a la frontera**

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

. En el ejercicio 2, se encontró la solución la ecuación de onda con un **término de forzamiento** $f(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + f(x,t) \qquad x \in (0,L], t \in (0,T]$$

Con las **condiciones iniciales** y **a la frontera** para encontrar la solución.

$$u(x,0) = I(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

En el ejercico 3, se encontro la solución para la ecuación KdV, para 2 solitones que empiecen en $x_{01} = 0.25 * L$ y $x_{02} = 0.75 * L$, con velocidades $c_1 = 0.75$ y $c_2 = 0.01$ donde se integra para llegue a la frontera.

En el ejercicio 4, fue el mismo que el ejercicio 3 solo que es para 3 solitones que empiezan comenzando en $x_{01} = 0.25 * L$, $x_{02} = 0.5 * L$, y $x_{03} = 0.75 * L$, con velocidades $c_1 = 0.75$, $c_2 = 0.5$ y $c_3 = 0.25$ Para integrar hasta llegar a la frontera.

En el ejercicio 5, se nos dio un ejercicio resuelto donde se mostró la evolución de la condición inicial

$$u_0^{(2,1)}(x,y,0) = \sin(\pi x)\sin(\frac{\pi y}{2})$$

Mostrando el modo (1,2) de oscilación natural de la membrana.

En este Ejercicio se pidió mostrar la evolución del modo (1,1), con la condición inicial:

$$u_0^{(1,1)}(x,y,0) = \sin(\frac{\pi x}{2})\sin(\frac{\pi y}{2})$$

En el ejercicio 6, es bajo el mismo contexto que el ejercicio 5 ya que se muestra la evolución de la superposición modos (3,1)+ (1,3) dada la condición inicial

$$u_0^{(3,1)+(1,3)}(x,y,0) = \sin(\frac{3\pi x}{2})\sin(\frac{\pi y}{2}) + \sin(\frac{\pi x}{2})\sin(\frac{3\pi y}{2})$$

Enlace a la sesión de Jupyter de la Actividad 11 en Github. https://github.com/Ferna45/Fisica-Computacional-1/blob/master/Actividad_11/Actividad_11.ipynb

## 3.3 Solución de la Ecuación de Poisson:

En la actividad 12 vimos la **solución de ecuaciones diferenciales parciales** del tipo **elíptico** con la ecuación de Poisson.

$$-\nabla^2 u(x,y,z) = f(x,y,z)$$

con distintas condiciones a la frontera:

**Condiciones de** (especificando valores de la función $u$) **Condiciones de Neumann** (especificando valores de la derivada de la función $u$ perpendicular a la frontera ($\frac{\partial u}{\partial n}$). La Ecuación de Poisson aparece en problemas de campos gravitatorios, campos eléctricos y otros problemas en la Física. La **Ecuación de Poisson** es la generalización de la **Ecuación de Laplace**.

$$\nabla^2 u = 0$$

En el ejercicio 1, se pidió encontrar la solución para la ecuación de Poisson sobre un cuadrado unitario, con **condiciones de Dirichlet** cero en las fronteras.

$$-\nabla^2 u(x,y) = \cos(2\pi x)\sin(3\pi y)$$

dadas las condiciones

$$u(0,y) = 0$$

$$u(1,y) = 0$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(x,1) = 0$$

Ene el ejercicio 2, se nos pidió encontrar la solución para la **ecuación de Poisson** sobre un cuadrado unitario, para encontrar los modos de vibración de una membrana:

$$-\nabla^2 u(x, y) = \sin(n\pi x)\sin(m\pi y)$$

dadas las condiciones

$$u(0, y) = 0$$
$$u(1, y) = 0$$
$$u(x, 0) = 0$$
$$u(x, 1) = 0$$

para los siguientes casos:

$n = 1; m = 1$, modo (1,1) $n = 1; m = 3$, modo (1,3) $n = 2; m = 2$, modo (2,2) En el ejercicio 3, se encontró la solución para la **ecuación de Poisson** sobre un cuadrado unitario

$$-\nabla^2 u(x, y) = -\pi\cos(\pi x) - \pi\cos(\pi y)$$

con condiciones de flujo cero en las fronteras con **condiciones de frontera tipo Neumann**.

$$u_x(0, y) = 0$$
$$u_x(1, y) = 0$$
$$u_y(x, 0) = 0$$
$$u_y(x, 1) = 0$$

En el ejercicio 4 se encontró la solución para la **ecuación de Poisson** sobre un cuadrado unitario

$$-\nabla^2 u(x, y) = -2\pi^2\sin(\pi(x + y))$$

con condiciones de flujo cero en las fronterascon **condiciones de frontera tipo Neumann**.

$$u_x(0, y) = 0$$
$$u_x(1, y) = 0$$
$$u_y(x, 0) = 0$$
$$u_y(x, 1) = 0$$

Enlace a la sesión de Jupyter de la Actividad 12 en Github. https://github.com/Ferna45/Fisica-Computacional-1/blob/master/Actividad_12/Actividad_12.ipynb

## 4 Resumen y conclusiones

Es una muy buena práctica la que tuvimos ya que nos facilitara para futuras materias ya que el tema de ecuaciones diferenciales siempre lo vamos a ver dentro de la carrera. Podemos entender graficamente estas ecuaciones y entenderle mejor. En general, pensé ue iba a batallar para agarrarle el rollo a programar en Python pero con estos trabajos me hice más fácil la vida.

La ayuda y las explicaciones del profe fueron muy buenas, aunque no pregunte tanto ni mis compañeros, con las lecturas que proporcionaba se entendía mejor el tema. Para concluir, le quiero dar gracias al profesor por este semestre, aprendí bastante y a no tener miedo a aprender otros lenguajes. La interacción no fue la mejor pero aun asi se dio un buen resultado.

Feliz Fin de Semestre :)

## References


[1] Colaboradores de Wikipedia. (2019a,octubre 22). *Ecuación parabólica en derivadas parciales.* Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_parab%C3%B3lica_en_derivadas_parciales

[2] Hernández Rodríguez, J.(2001). *Ecuaciones parabólicas.* UNED. https://www2.uned.es/ing-fluidos/IntroMF/node89.html

[3] Colaboradores de Wikipedia. (2019b,diciembre 22). *Ecuación hiperbólica en derivadas parciales.* Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_hiperb%C3%B3lica_en_derivadas_parciales

[4] Hernández Rodríguez, J.(2001). *Ecuaciones elípticas.* UNED. https://www2.uned.es/ing-fluidos/IntroMF/node93.html

[5] Colaboradores de Wikipedia. (2019a,octubre 22). *Ecuación elíptica en derivadas parciales.* Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_el%C3%ADptica_en_derivadas_parciales

[6] Hernández Rodríguez, J.(2001). *Condiciones iniciales y de contorno.* UNED. https://www2.uned.es/ing-fluidos/IntroMF/node94.html

[7] Colaboradores de Wikipedia. (2020,febrero 21). *Condición de Frontera de Dirichlet* Wikipedia, la enciclopedia libre.

https://es.wikipedia.org/wiki/Condici%C3%B3n_de_frontera_de_Dirichlet#:~:text=En%20matem%C3%A1ticas%2C%20la%20condici%C3%B3n%20de,los%20valores%20de%20la%20soluci%C3%B3n

[8] Colaboradores de Wikipedia. (2021,abril 14). *Método de diferencias finitas.* Wikipedia, la enciclopedia libre.

https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method#Implicit_method