Actividad 8
Física Computacional 1
Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Python

María Fernanda Vences Mendoza

12 de marzo del 2021

1 Introducción

El método de Euler es un método de primer orden, lo que significa que el error local es proporcional al cuadrado del tamaño del paso. El método de Euler regularmente sirve como base para construir métodos más complejos.

Para esto consiste en dividir lo intervalos que va de x_0 a x_f en n subintervalos de ancho h haciendo:

$$h = \frac{x_f - x_0}{n}$$

De manera que se obtiene un conjunto discreto de $n{+}1$ puntos: $x_0, x_1, x_2, \cdot, x_n$ del intervalo de interés $[x_0, x_f]$. Para cualquiera de estos puntos se cumple que :

$$x_i = x_0 + ih \qquad 0 \leq i \leq n$$

La **condición inicial** $y(x_0 = y_0$, representa el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ por donde pasa la curva solución de la ecuación del planteamiento inicial, la cual se denotará como $F(x) = y$. Ta teniendo el punto P_0 se puede evaluar la primera derivada de $F(x)$ en ese punto:

$$F(x) = \frac{dy}{dx}|_{P_0} = f(x_0, y_0)$$

En el **ejercicio 1** se encontró la solución para la ecuación diferencial del oscilador de Van der Pol:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Donde x es la posición y μ es un parámetro de la parte no lineal.

Se encontró para diferentes valores de μ con tiempo de integración de $[0, 50]$. En el **ejercicio 2** fue con el mismo oscilador de Van der Pol, solo que tuvimos que gráficar el plano fase (θ, ω) como se aprecia en la página de Wikipedia.

Aquí solamente después de establecer el tiempo de integración, al momento de hacer la gráfica pusimos los valores para el oscilador y asi en cuanto entre a la función de VanderPol nos de los resultados.

El **método de Runge-Kutta** son un conjunto de métoos iterativos (implícitos y explícitos) para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente, del problema de valor inicial.

Sean

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

una ecuación diferencial ordinaria, con $f : \Omega \subset R \times R^n \to R^n$ donde Ω es un conjunto abierto, junto con la condición de que el valor inicial de f sea

$$(t_0, y_0) \in \Omega$$

Por lo tanto ete método de orden s tiene la siguiente expresión:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

donde **h** es el paso por iteración, el incremento Δt_n entre los sucesivos puntos t_n y t_{n+1}. Los coeficientes k_i son términos de aproximación intermedios, evaluados en de manera local

$$k_i = f(t_n + hc_i, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j \quad i = 1, ..., s.$$

Con a_{ij}, b_i, c_i son coeficientes propios del espquema numérico elegido dependiente de la **regla de cuadratura** utilizada. Los esquemas de este método pueden ser implícitos o explícitos dependiendo de las constantes.

En el **ejercicio 3** se encontró las soluciónes de ecuaciones diferenciales ordinarias usando tres métodos.

- *Método de Euler*
- *Método de Runge-Kutta*
- *Función* $scipy.integrate.odeint$ *ó* $scipy.integrate - solve_ivp$

Para el **ejercicio 3.1** se uso la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k(\frac{dx}{dt})^2 - g = 0$$

con las siguientes condiciones

$$x(0) = 0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0$$

$$k > 0$$

donde se pudo resolver bajo los tres métodos.

3.2 fue con

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + y^5 = 0$$

Con estas condiciones

$$y(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dx}(0) = 0.$$

Como esta ecuación no dependen de 2 variables no se puede solucionar por el **método de Euler** ni de **Runge-Kutta** por lo tanto uasamos la función $odeint$.

Para el **ejercicio 3.3** tenemos esta ecuación

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (x-1)^2 + y^2 + \frac{dy}{dx} - 2$$

con estas condiciones

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y''(0) = 2$$

Es similar al ejercicio anterior ya que es una ecuación de primer orden y no dependen de 2 variables, por lo que se usa la función $odeint$ para su solución.

¿Que puedes decir del uso de las dos funciones de $scipy.integrate$: $odeint, solve\_ivp$. ¿Serán de utilidad para ti, después del curso? o ¿qué utilizarías?

Son prácticas para pode gráficar más fácil y tener una solución más rápida a hacer todo el algoritmo de Runge kutta o Euler. Lo volveria a usar dependiendo del problema y sus condiciones.

2 Retroalimentación

Esta actividad fue fácil ya exploramos los métodos diferentes de encontrar la solución para varios problemas. Con la función resultó ser más fácil ya que no es tanto lo que tenmos que escribir para poder obtener la gráfica.

El nivel de la actividad sería medio ya que si no se consultan las teorias se puede confundir al momento de querer resolver la ecuación.

References

[1] COLABORADORES DE WIKIPEDIA. (2020,mayo 29). *Método de Runge-Kutta* Wikipedia, la enciclopedia libre.

https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta#:~:text=Los%20m%C3%A9todos%20de%20Runge%2DKutta%20(RK)%20son%20un%20conjunto,del%20problema%20de%20valor%20inicial.

[2] COLABORADORES DE WIKIPEDIA. (2020, diciembre 11). *Método de Euler* Wikipedia, la enciclopedia libre.

https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler#:~:text=El%20m%C3%A9todo%20de%20Euler%20es%20un%20m%C3%A9todo%20de%20primer%20orden,para%20construir%20m%C3%A9todos%20m%C3%A1s%20complejos.