

CALCULO DE CENTROS DE MASA

EXPRESION GENERAL:

La posición del centro de masas de un sistema de partículas viene dada por la expresión:

$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (1)$$

donde M es la masa total del sistema de partículas.

Esta es una ecuación vectorial, cada una de las componentes de la posición del centro de masas vendrá dada por:

$$x_{C.M.} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \quad y_{C.M.} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \quad z_{C.M.} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M} \quad (2)$$

Ejemplo: Sistema de 3 partículas:

$$m_1 = 1\text{kg}, m_2 = m_3 = 2\text{kg}, \vec{r}_1 = (1, -1, 0)\text{m}, \vec{r}_2 = (-1, 2, 1)\text{m}, \vec{r}_3 = (2, 2, 1)\text{m}$$

$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{(1, -1, 0) + 2(-1, 2, 1) + 2(2, 2, 1)}{1 + 2 + 2} \text{m} = \left(\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{m}$$

PASO AL CONTINUO:

Cuando un sistema está formado por un número extremadamente grande de partículas (como es el caso de un sólido, un volumen líquido, etc.) Se realiza lo que se llama el paso al continuo que consiste en considerar el sistema constituido no por partículas individuales sino como un continuo de materia. En este caso se divide al sistema en pequeños diferenciales de masa dm , cada uno con su posición correspondiente. Las sumas de la expresión anterior se transforman ahora en integrales (ya que en el límite estamos sumando un número infinitamente grande de cantidades infinitesimalmente pequeñas), y la expresión de la posición del centro de masas queda ahora:

$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} dm}{M} \Rightarrow x_{C.M.} = \frac{\int x dm}{M} \quad y_{C.M.} = \frac{\int y dm}{M} \quad z_{C.M.} = \frac{\int z dm}{M} \quad (3)$$

Si el cuerpo es filiforme (tiene forma de hilo o alambre) los diferenciales de masa dm en que lo dividimos están asociados a diferenciales de longitud dl : $dm = \lambda dl$, donde λ es la densidad lineal (masa por unidad de longitud). Esta densidad lineal puede ser constante o no. En caso de que sea constante puede salir fuera de las integrales en el numerador y el denominador simplificándose. Las integrales se transforman en integrales de longitud y las ecuaciones (3) quedan en este caso:

$$x_{C.M.} = \frac{\int x dl}{L} \quad y_{C.M.} = \frac{\int y dl}{L} \quad z_{C.M.} = \frac{\int z dl}{L} \quad (4)$$

donde L es la longitud total del cuerpo.

Si el cuerpo tiene forma de placa los diferenciales de masa dm en que lo dividimos están asociados a diferenciales de área dA : $dm = \sigma dA$, donde σ es la densidad superficial (masa por unidad de superficie). Esta densidad superficial puede ser constante o no. En caso de que sea constante, igual que en el caso anterior, puede salir fuera de las integrales en el numerador y el denominador simplificándose. Las integrales se transforman en integrales de superficie y las ecuaciones (3) quedan en este caso:

$$x_{C.M.} = \frac{\int x dA}{A} \quad y_{C.M.} = \frac{\int y dA}{A} \quad z_{C.M.} = \frac{\int z dA}{A} \quad (5)$$

donde A es la superficie total del cuerpo.

Por último, si el cuerpo es volúmico los diferenciales de masa dm en que lo dividimos están asociados a diferenciales de volumen dV : $dm = \rho dV$, donde ρ es la densidad volúmica (masa por unidad de volumen). Esta densidad lineal puede ser constante o no. En caso de que sea constante, como en los dos casos anteriores, puede salir fuera de las integrales en el numerador y el denominador simplificándose. Las integrales se transforman en integrales de volumen y las ecuaciones (3) quedan en este caso:

$$x_{C.M.} = \frac{\int x dV}{V} \quad y_{C.M.} = \frac{\int y dV}{V} \quad z_{C.M.} = \frac{\int z dV}{V} \quad (6)$$

donde V es el volumen total del cuerpo.

NOTA: Es un error típico utilizar las siguientes expresiones para calcular la masa de un objeto utilizando las densidades lineal, superficial o volúmica:

$$M = \lambda L \quad , \quad M = \sigma A \quad , \quad M = \rho V$$

Esto sólo es correcto cuando las densidades son constantes, es decir, cuando la masa del objeto está uniformemente repartida a lo largo de su longitud, superficie o volumen, según sea el caso. Si las densidades no son constantes la forma correcta de calcular la masa del objeto es por integración:

$$M = \int \lambda dl \quad , \quad M = \int \sigma dA \quad , \quad M = \int \rho dV$$

EJEMPLOS PRACTICOS:

En cualquiera de los tres casos el cálculo de la posición del centro de masas puede realizarse de muchas formas posibles dependiendo de cómo se haya dividido el sistema en diferenciales de masa. Dependiendo de la elección dicho cálculo puede ser más o menos laborioso. De forma de ilustrar diferentes formas de calcular un mismo C.M. vamos a analizar un caso concreto.

1) USO DE DIFERENCIALES DE MASA “CORRECTOS”

NOTA: Es un error muy común encontrar la expresión del diferencial de longitud, superficie o volumen, según sea el caso, a partir de la expresión de la longitud, superficie o volumen total diferenciando.

En el caso del ejemplo del semicírculo, su superficie total es $A = \frac{1}{2}\pi R^2$. El razonamiento erróneo consiste en interpretar que el diferencial de área debe forzosamente tomar la expresión: $dA = \pi R dR$.

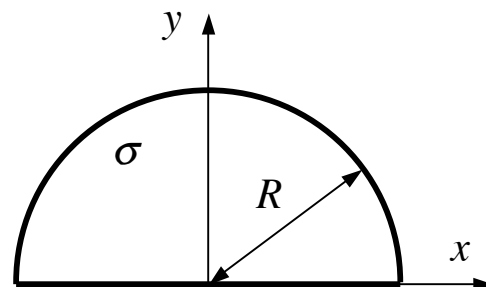
Por un lado no tiene sentido hablar de un dR , R es el radio del semicírculo, ¡es una constante, no una variable!

Un segundo error bastante habitual consiste en que dándose cuenta del razonamiento erróneo anterior se sustituye R por la variable r , tomando como diferencial de área la expresión: $dA = \pi r dr$.

El origen de todos estos errores está en el concepto matemático de diferencial. Cuando se aplica a un ejemplo concreto, el diferencial no es algo abstracto que se pueda manipular matemáticamente sin entender qué es lo que se está haciendo, sino que tiene una geometría determinada. Se puede y se debería dibujar, para indicar claramente con qué tipo de diferencial, de los muchos posibles con los que se puede trabajar, (ver ejemplos) estamos realmente trabajando.

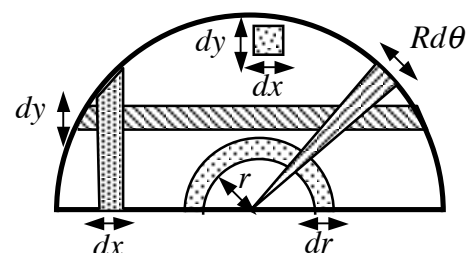
Ejemplo:

Cálculo de la posición del C.M. de un semicírculo homogéneo (densidad superficial σ constante)

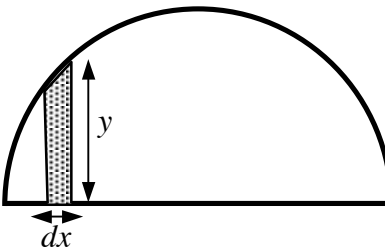


Primeramente deberemos dividir al semicírculo en diferenciales de área y después aplicar las ecuaciones (5). En nuestro caso si el semicírculo se encuentra en el plano XY, no es necesario calcular la coordenada $z_{c.m.}$ ya que todas las partículas del semicírculo tienen coordenada z nula con lo que $z_{c.m.} = 0$.

La elección del diferencial de área “correcto” debe hacerse de forma de poder calcular las integrales de las ecuaciones (5). En la figura de la derecha se presentan algunas de las muchas elecciones posibles de diferencial de área.



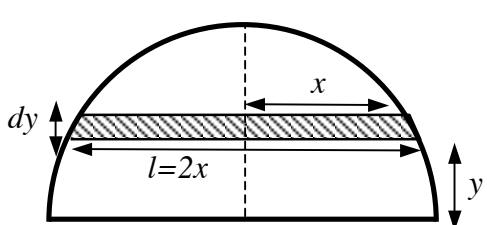
Para el cálculo de la coordenada $x_{c.m.}$, el diferencial de área escogido debe tener una coordenada x bien determinada. Si escogemos el rectángulo de lados dx , dy , todos los puntos de dicho diferencial de área tienen la misma coordenada x (y la misma coordenada y). Nuestra integral se transformaría en una integral doble en x y en y de forma de coger los infinitos rectángulos infinitesimalmente pequeños que forman el semicírculo. Una manera de simplificar el cálculo sería coger bandas verticales de espesor dx . Todos los puntos de dichas bandas tienen la misma coordenada x , y nuestra integral será una integral sencilla en x , desde x igual a $-R$ hasta x igual a R :

$$\left. \begin{array}{l} dA = y dx \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{array} \right\} \Rightarrow dA = \sqrt{R^2 - x^2} dx$$


The diagram shows a semicircle of radius R. A vertical differential strip of width dx is highlighted at a position x from the center. The height of the strip is y .

$$\int x dA = \int_{-R}^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left[-\frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right]_{-R}^R = 0 \Rightarrow x_{c.m.} = 0$$

Para el cálculo de la coordenada $y_{c.m.}$, el diferencial de área escogido debe tener una coordenada y bien determinada. Por analogía con el cálculo anterior, nos convendría coger bandas horizontales de espesor dy . Todos los puntos de dichas bandas tienen la misma coordenada y , y nuestra integral será una integral sencilla en y , desde y igual a 0 hasta y igual a R :

$$\left. \begin{array}{l} dA = 2x dy \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{array} \right\} \Rightarrow dA = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$$


The diagram shows a semicircle of radius R. A horizontal differential strip of height dy is highlighted at a position y from the base. The length of the strip is $l = 2x$.

$$\int y dA = \int_0^R 2y \sqrt{R^2 - y^2} dy = \left[-\frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{2}{3} R^3$$

$$\Rightarrow y_{c.m.} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{\pi}{2} R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

Los cálculos realizados en el ejemplo anterior no tienen por qué ser la forma más sencilla de calcular C.M., simplemente constituyen la forma más directa de cálculo de C.M. de acuerdo con lo que dicta la teoría: **la elección del diferencial de área "correcto" debe hacerse de forma de poder calcular las integrales.** Es el tipo de cálculos que se hacen cuando no se tiene gran experiencia. A medida que se va cogiendo experiencia en este tipo de cálculos se ve la posibilidad de escoger diferenciales de masa que aunque en una primera impresión no parecen ser los más correctos permitirán, como vamos a ver a continuación, simplificar grandemente los cálculos.

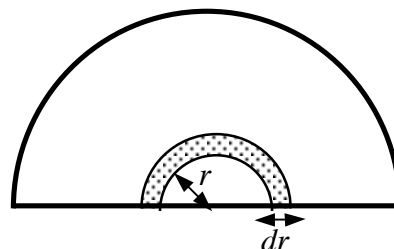
2) USO DE DIFERENCIALES DE MASA “APARENTEMENTE INCORRECTOS”

Repitamos de nuevo los cálculos pero cogiendo ahora como diferenciales de superficie bandas semicirculares de radio r y de espesor dr . Estos diferenciales de superficie no tienen una coordenada x o y bien determinada. Los puntos que forman estos diferenciales de superficie tienen coordenadas x que van desde $-r$ hasta r , y coordenadas y que van desde 0 hasta r . A primera vista estos diferenciales de superficie no parecen ser los más idóneos para el cálculo del C.M., sin embargo podemos interpretar estos diferenciales de superficie de espesor infinitesimal como alambres semicirculares de radio r . Bien porque lo hemos calculado anteriormente o porque disponemos de tablas sobre C.M. de diferentes cuerpos, sabemos que el centro de masas de un alambre de este tipo viene dado por la posición: $(0, 2r/\pi)$. Esta es la posición que va a caracterizar a nuestro diferencial de superficie.

$$dA = \pi r dr \quad x_{banda} = 0, \quad y_{banda} = \frac{2r}{\pi}$$

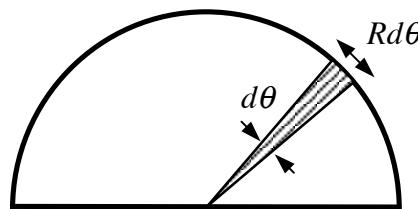
$$\int x_{banda} dA = \int_0^R (0) \pi r dr = 0 \Rightarrow x_{C.M.} = 0$$

$$\int y_{banda} dA = \int_0^R \left(\frac{2r}{\pi} \right) \pi r dr = \left[\frac{2}{3} r^3 \right]_0^R = \frac{2}{3} R^3 \Rightarrow y_{C.M.} = \frac{\int y_{banda} dA}{A} = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{1}{2} \pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$



Vemos que en este caso las integrales que aparecen son más sencillas que las que aparecían en los cálculos anteriores.

Otra manera de calcular el C.M. del semicírculo sería dividiendo éste en sectores circulares de abertura $d\theta$. Al igual que en el ejemplo anterior estos diferenciales no parecen ser los más idóneos ya que no tienen una coordenada x o y bien determinada. Al igual que hicimos en el caso anterior podemos interpretar dichos diferenciales como triángulos con base $Rd\theta$, y área $dA = \frac{1}{2} R^2 d\theta$. Como el C.M. de un triángulo se encuentra a un tercio de la altura sobre la base, la posición que va a caracterizar a nuestro diferencial de superficie será: $\left(\frac{2}{3} R \cos \theta, \frac{2}{3} R \sin \theta \right)$.



$$\int x_{sector} dA = \int_0^\pi \left(\frac{2}{3} R \cos \theta \right) \frac{1}{2} R^2 d\theta = \left[\frac{1}{3} R^3 \sin \theta \right]_0^\pi = 0 \Rightarrow x_{C.M.} = 0$$

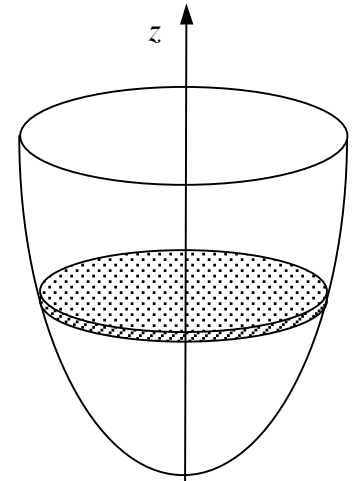
$$\int y_{sector} dA = \int_0^\pi \left(\frac{2}{3} R \sin \theta \right) \frac{1}{2} R^2 d\theta = \left[-\frac{1}{3} R^3 \cos \theta \right]_0^\pi = \frac{2}{3} R^3 \Rightarrow y_{C.M.} = \frac{\int y_{sector} dA}{A} = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{1}{2} \pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

De nuevo las integrales que surgen son más sencillas que las que aparecían en los primeros cálculos.

Vemos pues que el uso de elementos de masa que en un primer momento pueden parecer inadecuados porque no tienen una coordenada x o y única para todos sus puntos (anillos semicirculares, cuñas triangulares en el ejemplo anterior) puede facilitar el cálculo del C.M. de la figura que nos interesa. Para dichos elementos de masa utilizamos como posición representativa su propio centro de masas que ya conocemos por haberlo calculado anteriormente o por disponer de tablas.

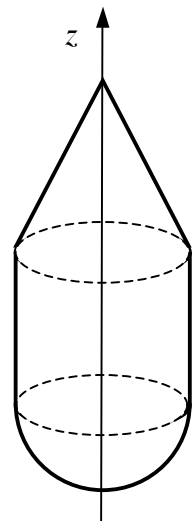
Otros ejemplos de aplicación de este método es calcular la posición del C.M. de una figura homogénea de revolución (esfera, paraboloide, etc) dividiéndola por ejemplo en infinitas rodajas perpendiculares al eje de revolución. Cada rodaja sería un disco cuya posición representativa en los cálculos sería la de su centro:

$$z_{C.M.} = \frac{\int z_{rodaja} dm_{rodaja}}{M}$$



Por otro lado, no es necesario que dicha división en elementos de masa sea en un número infinito de ellos. Se puede dividir la figura en un número finito de piezas, y utilizar para cada pieza la posición de su centro de masas:

$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_{cono} \vec{r}_{cono} + m_{cilindro} \vec{r}_{cilindro} + m_{semiesfera} \vec{r}_{semiesfera}}{m_{cono} + m_{cilindro} + m_{semiesfera}}$$



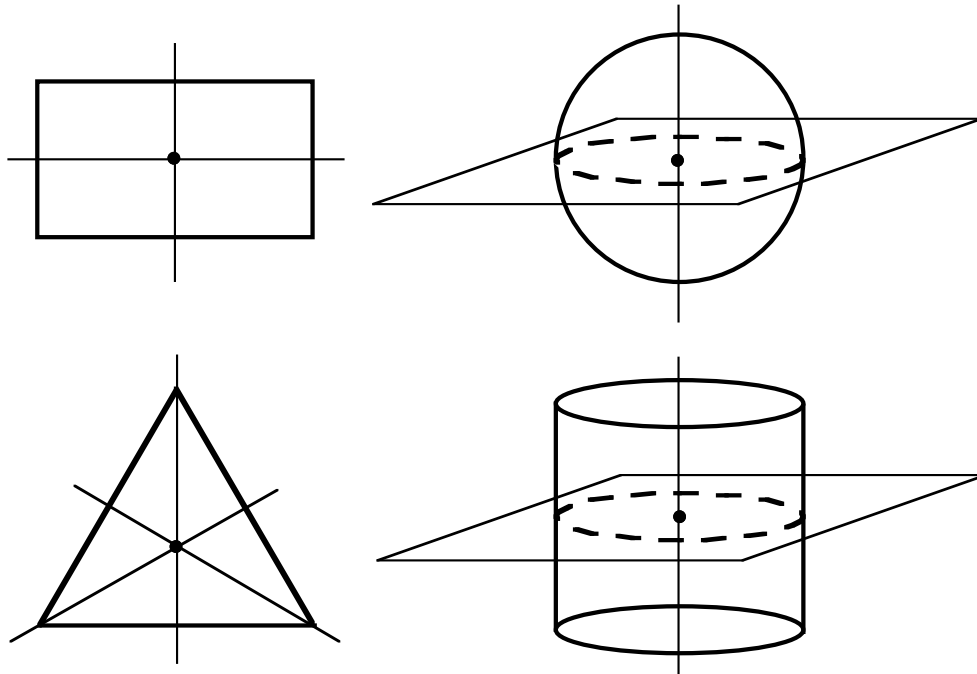
NOTA: Es un error considerar que el cálculo de la posición del CM de una figura verifica la propiedad aditiva y escribir para el último ejemplo:

$$\vec{r}_{C.M.} = \sum_i \vec{r}_i = \vec{r}_{cono} + \vec{r}_{cilindro} + \vec{r}_{semiesfera}$$

esta expresión es incorrecta ya que no tiene en cuenta las masas de las diferentes piezas en las que ha sido dividida la figura.

PIEZAS CON SIMETRÍA

Otra forma de ahorrarse trabajo matemático consiste en fijarse si el objeto en cuestión posee algún tipo de simetría (ejes de simetría, planos de simetría, etc.). Si es así el C.M. debe encontrarse en algún punto de dicho elemento de simetría. En el caso estudiado del semicírculo, el eje de coordenadas Y es un eje de simetría que divide al semicírculo en dos cuartos de círculo simétricos. Por lo tanto el C.M. que estamos buscando se encontrará en el eje Y , y su coordenada x por lo tanto será nula: $x_{c.m.} = 0$. Nos podíamos haber evitado de esta forma la mitad del trabajo matemático, ocupándonos solo del cálculo de $y_{c.m.}$. En los casos en los que haya más de un elemento de simetría, el C.M. debe pertenecer a cada uno de dichos elementos de simetría, y estará por lo tanto en la intersección de dichos elementos de simetría. El ahorro matemático en estos casos puede ser total, de forma que conozcamos la posición del C.M. sin necesidad de realizar ningún cálculo. En la siguiente figura se muestran los elementos de simetría de diversos objetos y la posición del C.M. de cada uno de ellos.



TEOREMAS DE PAPPUS-GULDIN:

Existen dos teoremas que relacionan C.M. con longitudes, superficies y volúmenes. Conocidos estos últimos se puede calcular la posición del C.M. sin necesidad de hacer ninguna integral. Y viceversa, si se conoce la posición del C.M. se puede calcular la longitud, superficie o volumen que nos interese.

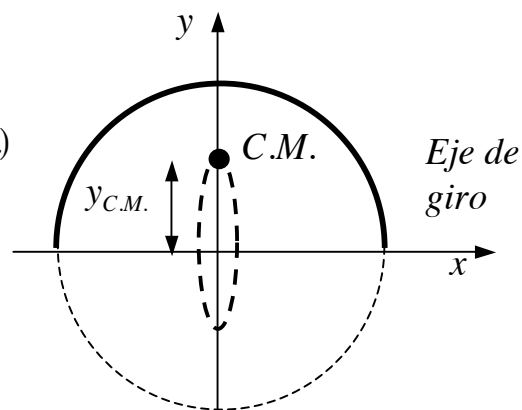
1^{er} Teorema: Si tenemos una curva de longitud L y la hacemos girar alrededor de un eje se genera una superficie de revolución de área A . Este área, la longitud de la curva y la posición del C.M. de la curva están relacionados por la ecuación:

$$A = L (\text{recorrido del C.M. de la curva})$$

Ejemplo: C.M. de un alambre semicircular de radio R .

$$A_{\text{sup.esférica}} = L_{\text{semicircunferencia}} \text{ (recorrido del C.M. de la semicircunf.)}$$

$$\Rightarrow 4\pi R^2 = \pi R (2\pi y_{C.M.}) \Rightarrow y_{C.M.} = \frac{2R}{\pi}$$



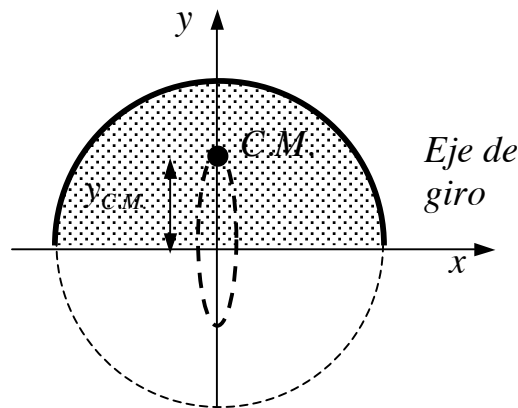
2º Teorema: Si tenemos una placa plana de superficie A y la hacemos girar alrededor de un eje se genera un cuerpo de revolución de volumen V . Este volumen, el área de la placa y la posición del C.M. de la placa están relacionados por la ecuación:

$$V = A \text{ (recorrido del C.M. de la placa)}$$

Ejemplo: C.M. de un semicírculo de radio R .

$$V_{\text{esfera}} = L_{\text{semicírculo}} \text{ (recorrido del C.M. del semicírculo)}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{2}R^2 (2\pi y_{C.M.}) \Rightarrow y_{C.M.} = \frac{4R}{3\pi}$$



NOTA: Un error muy común consiste en utilizar los teoremas de Pappus-Guldin para calcular C.M. de cuerpos volúmenes. En cualquiera de los dos teoremas el C.M. que aparece en las fórmulas es el del cuerpo que rota. El primer teorema nos permite calcular por lo tanto C.M. de cuerpos filiformes o alambres, mientras que el segundo teorema nos permite calcular C.M. de placas.

Los teoremas de Pappus-Guldin son también válidos si la rotación no es completa (el recorrido del C.M. del cuerpo que rota no será en este caso una circunferencia completa). Estos teoremas no son válidos si el eje de rotación corta a la curva (1º teorema) o a la placa (2º teorema) que rota.