IMT2220 Semestre 2022-2
Tarea 3

Elwin van 't Wout

19 de octubre de 2022

Introducción

Dado un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, su área $A(D)$ está dado por

$$A(D) = \iint_D 1 \, \mathrm{d}A.$$

Para dominios regulares, como los del tipo I y II, se puede parametrizar el dominio y calcular el área como una integral iterada sobre los ejes. Sin embargo, este no es siempre posible para cualquier dominio. Un ejemplo de dominios que no permiten esta parametrización son los fractales. En estos casos, ya no es posible calcular el área analíticamente pero debe ser aproximada con un método numérico.

El conjunto de Mandelbrot es uno de los ejemplos más conocidos de los fractales. Este conjunto se define como todos los números complejos c tal que la sucesión $x_0 = 0$, $x_n = x_{n-1}^2 + c$, $n = 1, 2, \ldots$ se mantiene acotada en valor absoluto. Es decir, $|x_n|$ es acotado para $n \to \infty$. Se puede demostrar que el número complejo c pertenece al conjunto de Mandelbrot si $|x_n| < 2$ para todos n. Al revés, si $|x_j| \geq 2$ para algún j, entonces no pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Calcular el área del conjunto de Mandelbrot es desafiante debido a su carácter fractal. Uno de los métodos numéricos para estimar su área se llama *pixel counting*, lo cual es similar al método de Monte Carlo. En este algoritmo, distintos valores complejos c son generados de forma aleatoria en una región

adecuada del plano complejo. En seguido, se calcula la sucesión x_n y se verifica su convergencia. La proporción de puntos que se mantiene acotados entrega la estimación del área del conjunto de Mandelbrot.
Se puede resumir el algoritmo como sigue.

1. Eligen un dominio $V \subset \mathbb{C}$ para lo cual puedes demostrar que contiene todo el conjunto de Mandelbrot.

2. Eligen m puntos aleatorios $c_j \in V$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

3. Inicialicen los valores $x_{0,j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

4. Iterar sobre $k = 1, 2, 3, \ldots, K$ con K el número de iteraciones.

   a) Calculen $x_{k,j} = x_{k-1,j}^2 + c_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.
   b) Cuenten el número de valores $|x_{k,j}| < 2$, $j = 1, 2, \ldots, m$.
   c) Aproximen el área $\hat{A}_k(D)$.

El área del conjunto de Mandelbrot es $A(D) = \lim_{m,K \to \infty} \hat{A}_K(D)$ pero en la práctica tomar un m y K fijo y largo es suficiente para tener una aproximación razonable.

Tarea

Esta tarea contempla el cálculo del superficie del conjunto de Mandelbrot.

1. Programen el método de *pixel counting*.

2. Visualizen la convergencia de las aproximaciones $\hat{A}_k(D)$ para todos los valores k y verifiquen si el resultado final es cerca del valor esperado de 1,506.

3. Visualizen el conjunto de Mandelbrot en el plano complejo: dibujen los puntos c_j tal que $|x_{K,j}| < 2$.

Responden las preguntas siguientes.

1. ¿Cómo eligieron el dominio V?

2. ¿Cuál es tu mejor aproximación del área de Mandelbrot?

Evaluación

Entreguen todo el código y las respuestas a las preguntas en un Jupyter notebook a través de Canvas.

Los reglamientos del curso se puede encontrar en Canvas. Se destaca que las tareas deben ser hechas de forma individual. No se puede compartir código entre compañeros, tampoco usar código de fuentes externos como p.ej. el internet.

Sugerencias

La librería `numpy.random` ofrece funcionalidad para generar números aleatorios. Revisen bien el intervalo de estos números: dibujen los puntos que crearon.

Pueden representar un número complejo como `a + 1j * b` en Python con `a` y `b` números o Numpy arrays. La variable `1j` representa la unidad imaginaria $\imath$: $\imath^2 = -1$.