Apontamentos de

Equações Diferenciais

(Complementos de Análise Matemática EE)

Jorge Figueiredo, Carolina Ribeiro

Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

2013

Conteúdo

Estes apontamentos são baseados nos livros:

Braun M., Differential Equations and Their Applications
Springer-Verlag, 1992 (4ł edição)

Pinsky M.A., Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications
McGraw-Hill International Editions, 1998 (3ł edição)

Ross S.L., Differential Equations
John Wiley, 1989 (4ł edição)

O presente texto reflete, em boa medida, a experiência dos autores na lecionação da unidade curricular de Complementos de Análise Matemática (EE) quer a vários cursos da Escola de Engenharia da Universidade do Minho, quer ao curso de Licenciatura em Estatística Aplicada da Escola de Ciências da Universidade do Minho.

Universidade do Minho, dezembro 2013

Parte I

Equações Diferenciais Ordinárias

Capítulo 1

Introdução às equações diferenciais

1.1 Equações diferenciais: Algumas definições e classificações

Definição 1.1 *Uma equação envolvendo derivadas de uma ou mais variáveis dependentes (as incógnitas) em ordem a uma ou mais variáveis independentes designa-se **equação diferencial**.*

Exemplo 1.1 *São equações diferenciais*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{d^3v}{dt^3} + 5v\frac{dv}{dt} = \cos t, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} = w - v. \tag{1.4}$$

Definição 1.2 *Uma equação diferencial envolvendo derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a uma variável independente designa-se **equação diferencial ordinária** (EDO).*

Exemplo 1.2 *As equações (1.1) e (1.2) são exemplos de equações diferenciais ordinárias (EDOs).*

Definição 1.3 *Uma equação diferencial envolvendo derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a mais do que uma variável independente designa-se **equação diferencial parcial** (EDP).*

Exemplo 1.3 *As equações (1.3) e (1.4) são exemplos de equações diferenciais parciais (EDPs).*

As equações diferenciais, quer ordinárias, quer parciais, são ainda classificadas de acordo com a ordem da derivada de ordem mais elevada que nelas figura.

Definição 1.4 *A **ordem de uma equação diferencial** é a ordem máxima da(s) derivada(s) que nela figura(m).*

Exemplo 1.4 *Assim, a equação (1.1) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (e não de quarta ordem!). A equação (1.2) é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem. As equações (1.3) e (1.4) são equações diferenciais parciais de segunda e primeira ordem, respetivamente.*

Pode-se, ainda, classificar as equações diferenciais ordinárias quanto à sua linearidade (o mesmo acontece, como veremos mais adiante, com as equações diferenciais parciais).

Definição 1.5 *Seja I um intervalo aberto da reta real. Uma* ***equação diferencial ordinária linear*** *de ordem n, na variável dependente y e na variável independente x, é uma equação que é (ou pode ser) expressa da seguinte forma*

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x), \tag{1.5}$$

onde as funções a_0, a_1, ..., a_n são funções (conhecidas) contínuas no intervalo I e a função a_0 não se anula nesse intervalo.

No caso de se tratar de uma equação diferencial de primeira ordem ($n = 1$), então (1.5) assume a forma

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = b(x), \tag{1.6}$$

resultando, para o caso $n = 2$,

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = b(x).$$

Definição 1.6 *Uma* ***equação diferencial ordinária não linear*** *é uma equação diferencial ordinária que não pode ser expressa na forma (1.5).*

Exemplo 1.5 *Constituem exemplos de equações diferencias ordinárias lineares, supondo $y = y(x)$,*

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y &= 0, \\
\frac{dy}{dx} + (\cos x)\, y &= 0, \\
-x\frac{d^3y}{dx^3} + xe^x\frac{dy}{dx} + x^3y &= \cos x, \\
\frac{d^3y}{dx^3} - 5xe^x\frac{d^2y}{dx^2} &= 2\cosh 2x.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Exemplo 1.6 *São equações diferenciais ordinárias não lineares, supondo $y = y(x)$,*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \tag{1.8}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3y = 0, \tag{1.10}$$

$$\frac{dy}{dx} + x\cos y = 0, \tag{1.11}$$

$$\frac{dy}{dx} - 3e^{2y} = 0. \tag{1.12}$$

Na equação (1.8) a não linearidade deve-se ao termo y^2*; na equação (1.9) é devida ao produto* $y\,dy/dx$*; na equação (1.10) é causada pelo termo* $(dy/dx)^2$*; finalmente, nas equações (1.11) e (1.12) é devida às funções transcendentes cosseno e exponencial que têm como argumento* y *ou uma função de* y*. Repare-se, desde já, na semelhança entre as equações (1.7) e (1.11) que, no entanto, têm caraterísticas diferentes no que se refere à linearidade.*

Note-se, portanto, que nas equações diferenciais lineares:

(i) tanto y como as suas derivadas são sempre de primeiro grau;

(ii) não surgem produtos de y ou das suas derivadas;

(iii) não figuram funções transcendentes de y (exponencial, seno, cosseno, logaritmo, potência, etc.) ou das suas derivadas.

Nota No caso das equações diferenciais de primeira ordem, e conforme veremos de seguida, estas podem ser escritas essencialmente de três formas equivalentes:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}, \qquad f(x,y)\,dx - dy = 0.$$

Esta caraterística faz com que em muitos casos se possa escolher a variável independente que seja mais vantajosa na ótica da análise e resolução da equação diferencial em causa. Em particular, pode acontecer que determinada equação diferencial de primeira ordem não seja linear para determinada escolha da variável independente, mas passe a ser linear se for reescrita considerando outra variável independente (na prática, trocando o papel das variáveis dependente/independente). Por exemplo, a equação diferencial não linear (1.12) também se pode escrever como

$$\frac{dy}{dx} - 3e^{2y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3e^{2y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}e^{-2y},$$

onde se assumiu que $x = x(y)$. Esta equação diferencial já é linear (na variável dependente x). No entanto, já a aplicação deste procedimento à equação diferencial (1.11) não conduz a uma equação linear dado que se obtém

$$\frac{dy}{dx} + x\cos y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -x\cos y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y\frac{dx}{dy} + \frac{1}{x} = 0,$$

a qual não é linear (na variável dependente x) devido ao termo $1/x$. Voltaremos a tratar esta questão posteriormente quando este tipo de equação diferencial for abordado de forma mais pormenorizada.

Nota Para tornar a escrita menos pesada, ao longo deste texto adotar-se-ão duas notações distintas para representar as derivadas de uma função f em ordem ao seu argumento x. Assim, sempre que tal não gere ambiguidade, serão usadas para representar as sucessivas derivadas de uma função f em ordem ao seu argumento x as notações

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, \frac{d^4f}{dx^4}, \ldots, \frac{d^kf}{dx^k}$$

ou (equivalentemente)

$$f', \ f'', \ f''', \ f^{(iv)}, \ldots, f^{(k)}.$$

Exercícios sobre classificação de equações diferenciais

Exercício 1.1 *Classificar cada uma das seguintes equações diferenciais como ordinárias ou parciais; mencionar a ordem de cada equação; averiguar, no caso de se tratar de uma equação diferencial ordinária, se esta é linear.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = x^2e^x + \cos x;$

(b) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6y = x^2 \operatorname{sen} x;$

(c) $\triangle u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

(d) $\dfrac{du}{dt} = t - u^2;$

(e) $\dfrac{d^2v}{dx^2} - \left(\dfrac{dv}{dx}\right)^3 + v = 3x + 1;$

(f) $\dfrac{dy}{dx} = y \operatorname{sen} x;$

(g) $\dfrac{ds}{dt} = t \cos s;$

(h) $x^2 \dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0;$

(i) $\nabla^4 v \equiv \dfrac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 v}{\partial y^4} = 0;$

(j) $x\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} y.$

1.2 Soluções de equações diferenciais

Considere-se agora, e antes de abordar qualquer método relativo à determinação de soluções de equações diferenciais, o conceito de **solução de uma equação diferencial ordinária** de ordem n.

Para poder abordar esta questão com alguma generalidade convém ter em mente que uma equação diferencial ordinária de ordem n (linear ou não) estabelece uma relação entre: (i) algumas derivadas da variável dependente em ordem à variável independente; (ii) a variável dependente; e (iii) a variável independente. Assim sendo, tal como a existência de uma relação entre as variáveis x, y e z se pode expressar genericamente na forma

$$f(x, y, z) = 0,$$

como é o caso de

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

correspondendo-lhe $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, o mesmo pode ser feito para representar qualquer equação diferencial ordinária de ordem n que envolva as variáveis y e x, a saber,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

onde se assumiu como anteriormente que $y = y(x)$. A igualdade anterior expressa, de forma genérica, que existe uma relação entre as "variáveis" que figuram como argumento da função real F, relação essa que constitui uma equação diferencial. Assim, a cada equação diferencial corresponde uma forma particular da função F, a qual tem $n+2$ argumentos (porquê?). Por exemplo, à EDO de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = xy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

corresponde

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx} - xy,$$

enquanto que à EDO de ordem 3

$$x\frac{d^3y}{dx^3} - y = e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad x\frac{d^3y}{dx^3} - y - e^{-x} = 0$$

corresponde

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = x\frac{d^3y}{dx^3} - y - e^{-x}.$$

Com este formalismo podemos abordar, de forma genérica, a noção de solução de uma equação diferencial ordinária independentemente da forma específica da EDO.

Definição 1.7 *Considere-se a equação diferencial ordinária de ordem n*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \tag{1.13}$$

onde F é uma função real dos seus $n+2$ argumentos. Diz-se que uma solução desta equação diferencial é qualquer relação (explícita ou implícita[1]) entre as variáveis x e y que não contenha derivadas e que verifique a equação (1.13).

Exemplo 1.7 *A relação (curva) $y(x) = x^2$ é uma solução (explícita) da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + y = x(x+2),$$

uma vez que substituindo y por x^2 na equação precedente se obtém uma identidade:

$$\frac{dy}{dx} + y = x(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\left(x^2\right)}{dx} + x^2 = x(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + x^2 = x(x+2).$$

Vejamos agora o que distingue as soluções explícitas das soluções implícitas.

[1] A relação diz-se explícita se é da forma $y = f(x)$, por exemplo $y = x+1$, dizendo-se implícita se é da forma $g(x, y) = 0$, por exemplo $y^2 - x^2 + 4 = 0$.

Definição 1.8 *Seja $f(x)$ uma função real, definida para todo x pertencente a um intervalo real aberto I, que tenha derivada de ordem n - e consequentemente também derivadas de ordem inferior a n - para todo $x \in I$. A função f designa-se uma **solução explícita** da equação diferencial (1.13) no intervalo I se satisfaz as condições:*

(a) $F\left[x,\, y,\, y',\dots,\, y^{(n)}\right]$ *está definida para todo* $x \in I$;

(b) $F\left[x,\, f,\, f',\dots,\, f^{(n)}\right] = 0$ *para todo* $x \in I$.

Ou seja, a função F, que está associada exclusivamente à forma da equação diferencial, deve, enquanto função explícita de x, fazer sentido para todo $x \in I$. Por outro lado, a substituição de $f(x)$ e das suas derivadas em (1.13) deve conduzir a uma identidade no intervalo aberto I.

Definição 1.9 *Uma relação (implícita) $g(x,y) = 0$ diz-se uma **solução implícita** da equação (1.13) se define pelo menos uma função real $f(x)$ num intervalo aberto I, tal que $f(x)$ é uma solução explícita de (1.13) em I.*

Pode-se assim dizer que uma solução da equação diferencial (1.13) é uma relação - explícita ou implícita - entre as variáveis x e y (ou seja, uma curva em $\mathbb{R}^2$) que satisfaz a referida equação num determinado intervalo aberto I, sempre que o domínio de y, y', y'', $\dots$, $y^{(n)}$ contenha I, o mesmo acontecendo com o domínio de F (enquanto função explícita de x).

Para fixar ideias, comecemos por ver alguns exemplos relativos a **soluções explícitas** de algumas EDOs.

Exemplo 1.8 *A função $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\, x + 3\cos x$ é uma solução explícita da equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{1.14}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

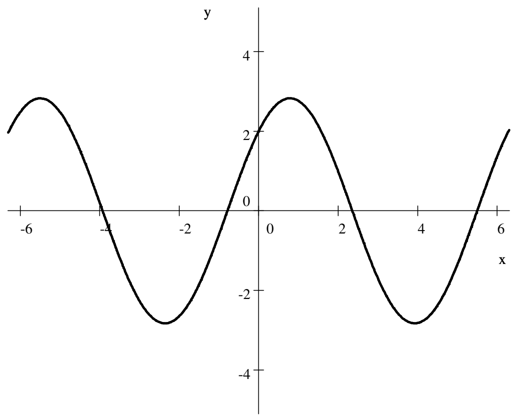
Solução. *Tem-se*

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,\mathrm{sen}\, x + 3\cos x, \\ f'(x) &= 2\cos x - 3\,\mathrm{sen}\, x, \\ f''(x) &= -2\,\mathrm{sen}\, x - 3\cos x, \end{aligned}$$

pelo que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Substituindo y por $f(x)$ e d^2y/dx^2 por $f''(x)$ em (1.14), obtém-se uma identidade

$$(-2\,\mathrm{sen}\, x - 3\cos x) + (2\,\mathrm{sen}\, x + 3\cos x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

que é válida para todo x real. Portanto, a função $f(x)$ diz-se uma solução explícita da equação diferencial (1.14) para todo $x \in \mathbb{R}$. Note-se ainda que a forma da equação diferencial (1.14) não impõe, por si só, qualquer restrição aos valores que a variável independente x pode tomar, pelo que $D_F = \mathbb{R}$. Em suma, a curva $y = f(x)$ verifica, para todo $x \in \mathbb{R}$, as condições impostas pela equação (1.14).



Representação gráfica da função $y = 2\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x$, solução da equação diferencial (1.14)

Exemplo 1.9 *A função $g(x) = 2x^{1/2}$ é uma solução explícita da equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1/2}$$

apenas no intervalo aberto $I = \,]0, +\infty[$.

Solução. *Tem-se $dg/dx = x^{-1/2}$ pelo que a função g verifica a equação diferencial dada. No entanto,*

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \quad e \quad D_{g'} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+,$$

pelo que $I = D_g \cap D_{g'} = \,]0, +\infty[$. Neste caso a forma da equação diferencial também impõe condições a x, embora, como se verá de seguida, tal não altere I. De facto, a equação diferencial em causa pode-se escrever na forma

$$\frac{dy}{dx} - x^{-1/2} = 0,$$

pelo que neste caso concreto

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = \frac{dy}{dx} - x^{-1/2}$$

e o domínio de F, enquanto função da variável independente x, é

$$D_F = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Assim, em bom rigor, tem-se

$$I = D_g \cap D_{g'} \cap D_F = \,]0, +\infty[\,,$$

pelo que o resultado obtido anteriormente para o intervalo I não se altera. De novo, pode fazer-se uma interpretação geométrica deste resultado: o declive da reta tangente ao gráfico da curva $y = 2x^{1/2}$, $x \in \,]0, +\infty[\,$, é em cada ponto dessa curva com coordenadas (x, y) igual a $x^{-1/2}$.

Exemplo 1.10 *A função $h(x) = x^2$ é uma solução explícita da equação diferencial*

$$x^{-1}\frac{dy}{dx} = 2$$

no intervalo $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Solução. *Por um lado, tem-se a identidade*

$$x^{-1}\frac{dh}{dx}=2.$$

Além disso, $D_h = D_{h'} = \mathbb{R}$. *No entanto,*

$$F\left(\frac{dy}{dx},\, y,\, x\right)=x^{-1}\frac{dy}{dx}-2,$$

pelo que $D_F=\{x\in\mathbb{R} : x\neq 0\}$ *e consequentemente* $I=D_g\cap D_{g'}\cap D_F=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Exemplo 1.11 *Considere-se a equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-12y=0.$$

Pretende-se averiguar para que valores da constante real k *é que a função* $u(x)=x^k$ *é uma solução explícita desta EDO e indicar o respetivo intervalo.*

Solução. *Comecemos por averiguar se*

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}-12u=0$$

se verifica para algum valor de k, *uma vez que essa é uma condição necessária para a função* u *ser uma solução explícita da EDO dada num intervalo aberto* I. *Tem-se,*

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}-12u=0 \quad\Rightarrow\quad x^2\frac{d^2\left(x^k\right)}{dx^2}-12x^k=0 \quad\Rightarrow\quad k(k-1)x^k-12x^k=0.$$

Assim, a constante k *terá de verificar a identidade* $k^2-k-12=0$ *(porquê?), pelo que*

$$k=-3 \ \vee\ k=4.$$

Temos então duas potenciais soluções explícitas $u_1(x)=x^{-3}$ *e* $u_2(x)=x^4$, *sendo que*

$$F\left(\frac{d^2u}{dx^2},\frac{du}{dx},\, u,\, x\right)=x^2\frac{d^2u}{dx^2}-12u,$$

resultando $D_F=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *(porquê?). Dado que* $D_{u_1}=D_{u_1'}=D_{u_1''}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *e* $D_{u_2}=D_{u_2'}=D_{u_2''}=\mathbb{R}$, *então devido ao termo*

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}$$

presente na EDO, tem-se que $u_1(x)=x^{-3}$ *e* $u_2(x)=x^4$ *são soluções explíticas da EDO dada no intervalo aberto* $I=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Problema *Determinar em que intervalo da reta real é que a função $h(x) = \ln x$ é uma solução explícita da equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1}.$$

Resp.: $]0, +\infty[$.

Problema *Determinar em que intervalo da reta real é que a função $\theta(x) = x^3 + k_1 x + k_2$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, é uma solução explícita da equação diferencial de segunda ordem*

$$x^{-1}\frac{d^2y}{dx^2} - 6 = 0.$$

Resp.: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Problema *Determinar em que intervalo da reta real I é que a função $p(x) = c_1x + c_2$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, é uma solução explícita da equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x.$$

Resp.: $I = \varnothing$ (não é solução em nenhum intervalo aberto da reta real uma vez que a reta vertical $x = 0$ não é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$).

Problema *Considere-se a equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0.$$

Averiguar para que valores da constante real n é que a função $v(x) = x^n$ é uma solução explícita desta EDO e indicar o respetivo intervalo.

Resp.: São soluções explícitas as funções $v_1(x) = x^2$ e $v_2(x) = x^{-2}$, qualquer uma delas no intervalo $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Vejamos agora alguns exemplos relativos a **soluções implícitas**.

Exemplo 1.12 *A relação $xy = 1$ é uma solução implícita da equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} \tag{1.15}$$

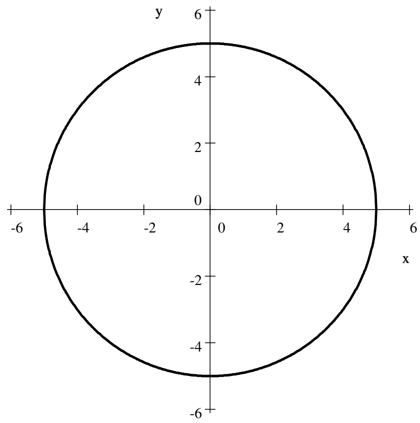
no intervalo $I = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Solução. *De facto, $xy = 1$ define uma função real $f(x) = x^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Facilmente se conclui que $f(x)$ é uma solução explícita da equação diferencial (1.15) em I, como requerido.*

Exemplo 1.13 *A relação $x^2 + y^2 - 25 = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial*

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.16}$$

no intervalo I definido por $-5 < x < 5$.



Representação gráfica da relação implícita $x^2 + y^2 - 25 = 0$

Solução. *Neste caso a relação (implícita) entre as variáveis x e y, $x^2 + y^2 - 25 = 0$, define duas funções reais*

$$f_1(x) = +\sqrt{25 - x^2} \quad e \quad f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2},$$

correspondendo cada uma delas a uma semi-circunferência (ver gráfico anterior). Tanto $f_1(x)$ como $f_2(x)$ são soluções explícitas da equação diferencial (1.16) em I. Vejamos que assim é para $f_1(x)$:

$$f_1(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad \Rightarrow \quad f_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

Substituindo $f_1(x)$ e $f_1'(x)$ em (1.16) obtém-se a identidade

$$x + \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}\sqrt{25 - x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0,$$

conforme requerido. Por outro lado, tem-se (porquê?) $D_{f_1} = [-5, 5]$ e $D_{f_1'} =]-5, 5[$, e ainda

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = x + y\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad D_F = \mathbb{R},$$

pelo que $I = D_{f_1} \cap D_{f_1'} \cap D_F =]-5, 5[$. A demonstração para $f_2(x)$ é similar.

Portanto, a relação $x^2 + y^2 - 25 = 0$ define duas funções, f_1 e f_2, que são soluções explícitas de (1.16) no intervalo $I =]-5, 5[$. Como vimos, é apenas necessário que uma delas tenha essa propriedade para se concluir que a relação $x^2 + y^2 - 25 = 0$ é uma solução implícita de (1.16) em I.

Note-se que se o intervalo proposto I contivesse pontos fora do intervalo $]-5, 5[$, então a relação $x^2+y^2-25 = 0$ não seria uma solução implícita da equação diferencial dada nesse intervalo, pois tanto $f_1'(x)$ como $f_2'(x)$ não estão definidas em nenhum ponto de $]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$ (ver gráfico anterior).

Problema *Determinar em que intervalo da reta real é que a relação $y^2 - x^2 = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

(Atenção: em geral $\sqrt{x^2} \neq x$).
Resp.: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Problema Determinar em que intervalo da reta real é que a relação $y^2 + 2xy + 4 = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial

$$(y+x)\,\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

(Requer o uso da "fórmula resolvente" para determinar uma relação explícita entre x e y a partir da relação implícita dada).
Resp.: $]-\infty, -2[\,\cup\,]2, +\infty[$.

Vejamos agora como lidar com casos em que a relação implícita dada entre as variáveis x e y é demasiado complexa para se poder definir uma relação explícita entre as duas variáveis (por exemplo, $y\cos y + x \operatorname{sen} x = 0$). Será que nestes casos ainda se pode concluir algo (útil) relativamente à solução de determinada equação diferencial?

Exemplo 1.14 *Seja k uma constante real. Considere-se a relação*

$$x^2 + y^2 + k = 0, \tag{1.17}$$

a qual coincide com a relação dada no exemplo precedente quando se toma $k = -25$. Considere-se ainda a equação diferencial que também surgiu no exemplo precedente

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.18}$$

Comecemos por determinar qual é o declive da reta tangente ao gráfico desta curva em cada ponto de coordenadas (x, y). Pode obter-se uma expressão para dy/dx usando duas abordagens equivalentes:

(i) *derivando os dois membros de (1.17) em ordem a x, tendo sempre em conta que y depende de x (regra da derivação da função composta):*

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2 + k\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x + \frac{dy^2}{dx} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x + \frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = -xy^{-1};$$

(ii) *tendo em conta que a relação (1.17) é do tipo $G(x, y) = 0$ com $G(x, y) = x^2 + y^2 + k$ e que nesse caso se tem (derivada total da função implícita)*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial G}{\partial x}}{\dfrac{\partial G}{\partial y}}.$$

Neste caso concreto, resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -xy^{-1},$$

tal como obtido em (i).

Substituindo a expressão obtida para dy/dx na equação diferencial (1.16), obtém-se

$$x + y\left(-xy^{-1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0,$$

*independentemente do valor de k. Assim, pode-se afirmar que a relação $x^2 + y^2 + k = 0$ **verifica formalmente** a equação (1.18) na medida em que nos pontos do plano onde a família de curvas $x^2 + y^2 + k = 0$ está definida, o declive da reta tangente ao gráfico da curva em cada ponto de coordenadas (x, y) é igual ao imposto pela equação diferencial.*

Poder-se-á concluir então que $x^2+y^2+k = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial dada? A resposta é negativa. Na realidade, $x^2 + y^2 + k = 0$ parece ser uma solução implícita da equação diferencial pois verifica-a formalmente, mas é ainda necessário que defina pelo menos uma função real que seja solução explícita da equação dada num determinado intervalo aberto I.

Vejamos, a relação $x^2+y^2+k = 0$ permite definir duas funções que são potenciais soluções explícitas da equação (1.18), a saber,

$$g_1(x) = +\sqrt{-k - x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dg_1}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{-k - x^2}},$$

$$g_2(x) = -\sqrt{-k - x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dg_2}{dx} = \frac{x}{\sqrt{-k - x^2}}.$$

Ora, tem-se

$$D_{g_1} \cap D_{g_1'} = D_{g_2} \cap D_{g_2'} = \left\{x : x^2 < -k\right\},$$

concluindo-se que

$$I = \begin{cases} \left]-\sqrt{-k}, \sqrt{-k}\right[, & k < 0 \\ \varnothing, & k \geq 0 \end{cases}.$$

Conclusão: a relação $x^2 + y^2 + k = 0$, que verifica formalmente a equação diferencial

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0,$$

só é uma solução implícita desta equação se $k < 0$. Assim, considerando por exemplo $k = 25$, conclui-se que $x^2 + y^2 + 25 = 0$ não é uma solução implícita desta equação diferencial em nenhum intervalo aberto da reta real (pela simples razão de que esta curva não existe em $\mathbb{R}^2$).

Do exemplo precedente pode-se concluir que, ainda que determinada relação implícita entre as variáveis x e y verifique formalmente uma equação diferencial, tal não quer dizer que seja uma solução dessa mesma equação.

Qual é então a utilidade de averiguar se determinada relação verifica formalmente uma equação diferencial? Conforme veremos mais adiante, averiguar se determinada expressão verifica formalmente uma dada equação diferencial é útil, pois caso tal não suceda pode-se concluir imediatamente que a expressão em causa não é uma solução implícita da equação diferencial em causa. Ou seja, a verificação formal pode ser vista como uma condição necessária, ainda que não suficiente, para que determinada relação entre as variáveis x e y seja uma solução da equação diferencial em estudo.

Do ponto de vista prático, este procedimento permitirá aferir se uma relação implícita obtida na sequência da resolução de uma equação diferencial de primeira ordem está ou não correta, pelo menos do ponto de vista formal (*i.e.* sem ter em conta qual é o intervalo I envolvido).

Exemplo 1.15 *Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

Pode $x^3 + y^2 x = 1$ *ser uma solução desta equação diferencial?*

Solução. *Da relação implícita proposta resulta (porquê?)*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y^2}{2xy}.$$

Então, para $x^3 + y^2 x = 1$ *ser uma solução da EDO dada, teria de verificar-se*

$$-\frac{x^2 + y^2}{2xy} = -\frac{3x^2 + y^2}{2xy}$$

para todo (x, y) *pertencente a algum conjunto aberto de* $\mathbb{R}^2$*. Ora, a igualdade acima só é válida para* $x = 0$*, lugar geométrico dos pontos situados no eixo dos yy (que não é um conjnto aberto de* $\mathbb{R}^2$*), concluindo-se assim que a resposta é negativa.*

Problema Mostrar que a relação $xy^2 + y = 1$ verifica formalmente a seguinte equação diferencial recorrendo: (i) à derivada da função composta; e (ii) à derivada total da função implícita.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{2xy + 1}.$$

Considere-se agora a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{1.19}$$

É simples verificar que função $f_0(x) = x^2$ é uma solução explícita desta equação diferencial para todo x real. São também soluções da equação diferencial (1.19), por exemplo, as funções

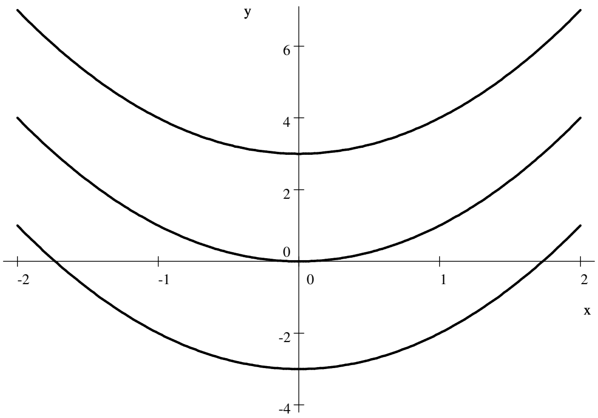
$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = x^2 + 2, \quad f_3(x) = x^2 + 3, \quad f_{\sqrt{7}}(x) = x^2 + \sqrt{7}.$$

De facto, para cada número real c, a função f_c definida para todo x real por

$$f_c(x) = x^2 + c \tag{1.20}$$

é uma solução da equação diferencial (1.19). Ou seja, a expressão (1.20) define uma família (infinita) de funções, uma para cada valor da constante real c, e toda a função desta família é uma solução de (1.19). A constante c designa-se **constante arbitrária**. A família de soluções assim definida escreve-se

$$y = x^2 + c. \tag{1.21}$$



Representação gráfica da família de parábolas $y = x^2 + c$; cada parábola é uma curva integral da equação diferencial (1.19)

Embora seja evidente que toda a função pertencente à família de soluções definida por (1.21) é uma solução de (1.19), tal não permite concluir que a família de soluções (1.21) contém todas as soluções de (1.19). Assim, podem, em princípio, existir outras funções que também sejam solução de (1.19), pelo que de momento não designaremos o conjunto (infinito) de soluções (1.21) como a "solução geral" da equação diferencial, mas apenas como "uma família de soluções" dessa equação. Voltaremos a este ponto mais adiante.

Considere-se de novo a equação diferencial de primeira ordem (1.19). Esta equação diferencial pode ser interpretada como definindo o declive, $2x$, da reta tangente ao gráfico da curva $y = y(x)$ no ponto de coordenadas (x, y) para todo o x real. Esta equação diferencial admite uma família de soluções da forma

$$y = x^2 + c, \tag{1.22}$$

onde c é uma constante real arbitrária. A família de funções (1.22) corresponde geometricamente a uma família de parábolas. Para cada uma delas, o declive da reta tangente ao gráfico da parábola no ponto de coordenadas (x, y) obedece a (1.19). Estas parábolas designam-se **curvas integrais** da equação diferencial (1.19).

Problema Determinar curvas integrais da equação diferencial $dy/dx = \cos x$.

Resp.: $y = \operatorname{sen} x + k_1,\ k_1 \in \mathbb{R}$.

Problema Determinar curvas integrais da equação diferencial $dy/dx = \operatorname{senh} 2x$.

Resp.: $y = \frac{1}{2}\cosh 2x + k_2,\ k_2 \in \mathbb{R}$.

Exercícios sobre soluções de equações diferenciais

Exercício 1.2 *Mostrar que a função*

$$f(x) = x + 2e^{-x}$$

é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y = x + 1.$$

Exercício 1.3 *Mostrar que toda a função f pertencente à família de funções*

$$f_c(x) = 2 + ce^{-2x^2},$$

onde c é uma constante arbitrária, é uma solução da equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x.$$

Exercício 1.4 *Mostrar que toda a função g definida por*

$$g(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x},$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, é uma solução da equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

Exercício 1.5 *Determinar todos os valores da constante real m para os quais a função $f(x) = e^{mx}$ é solução da equação diferencial*

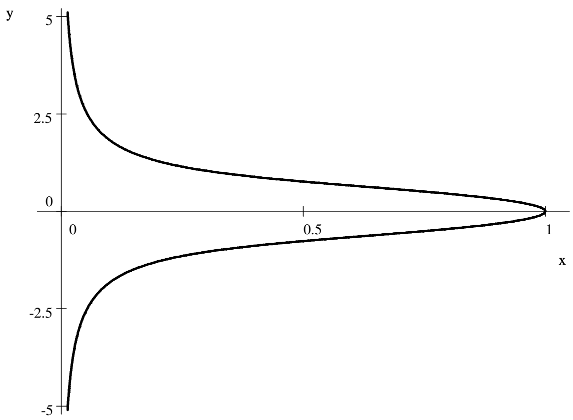
$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 12y = 0.$$

Nota: e^{2x} é uma solução da EDO (verificar), o que permite usar a regra de Ruffini.

Exercício 1.6 *Mostrar que $x^3 + 3xy^2 = 1$ é uma solução implícita da equação diferencial*

$$2xy\frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$$

no intervalo $I =]0, 1[$.

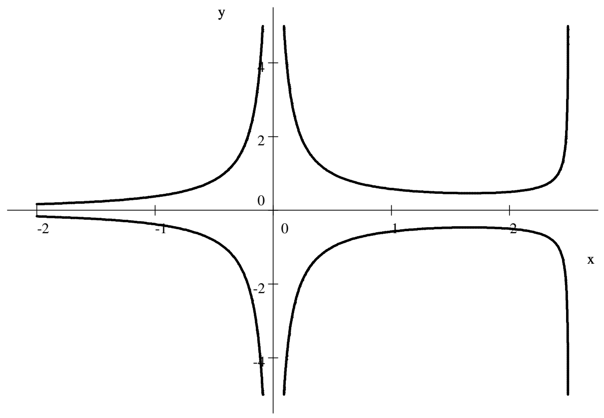


Representação gráfica da relação $x^3 + 3xy^2 = 1$ (ver Exercício 1.6)

Exercício 1.7 *Mostrar que $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ é uma solução implícita da equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^3$$

nos intervalos $]-\infty, 0[$ *e* $]0, \frac{5}{2}[$.

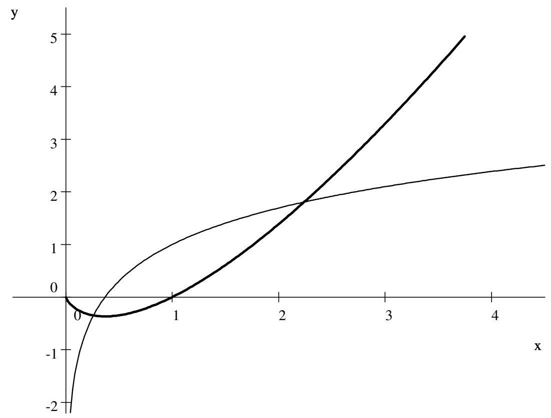


Representação gráfica da relação $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$*(ver Exercício 1.7)*

Exercício 1.8 *Mostrar que* $y = x \ln x$ *verifica formalmente a equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} = x + y,$$

mas não é uma solução explícita desta equação no intervalo $I =]-1, 1[$.



Representação gráfica da função $y = x \ln x$ *(a cheio) e da respetiva derivada (ver Exercício 1.8)*

Exercício 1.9 *Mostrar que* $y^2 + x = 1$ *não é uma solução implícita da equação diferencial*

$$y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$$

no intervalo $I =]0, 2[$, *apesar de a verificar formalmente.*

 J. Figueiredo, C. Ribeiro – 2013

1.3 Problemas de valores iniciais e problemas de valores de fronteira

1.3.1 Problemas de valores iniciais e problemas de valores de fronteira

Considere-se o problema que consiste em determinar a solução f da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x, \tag{1.23}$$

tal que em $x = 1$ a solução f assume o valor 4 (note-se que se assume que a solução existe e é única). Este problema, que corresponde a determinar a curva que passa pelo ponto de coordenadas $(x, y) = (1, 4)$ e cuja reta tangente ao seu gráfico tem declive x em cada ponto pode ser escrito, na forma abreviada,

$$\frac{dy}{dx} = x, \quad y(1) = 4. \tag{1.24}$$

Verifica-se facilmente que a equação (1.23) admite uma família de soluções que é

$$y = \frac{1}{2}x^2 + c, \tag{1.25}$$

onde c é uma constante arbitrária, pelo que apenas se necessita de determinar o valor de c de forma a ter-se $y = 4$ quando $x = 1$. Substituindo $x = 1$ e $y = 4$ em (1.25) resulta

$$y(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = \frac{1}{2} + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{7}{2}.$$

Obtém-se, portanto, a solução (parábola)

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{2},$$

a qual verifica as duas condições expressas por (1.24):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}\right) = x, \qquad y(1) = \left.\frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}\right|_{x=1} = 4.$$

Em aplicações envolvendo equações diferenciais de primeira ordem, ou de ordem mais elevada, os problemas mais frequentes são similares ao do exemplo precedente, já que envolvem uma equação diferencial e uma ou mais condições suplementares (tantas quantas a ordem da equação diferencial). Se todas as condições suplementares disserem respeito a um determinado valor da variável independente, diz-se que se está na presença de um **problema de valores iniciais** (PVI). Se as condições se referirem a dois valores distintos da variável independente, diz-se que se trata de um **problema de valores de fronteira** (PVF). Destas definições decorre que no caso de equações diferenciais de primeira ordem, estas só podem estar associadas a PVIs (porquê?), como é o caso do PVI (1.24).

Exemplo 1.16 *Considere-se o problema que consiste em determinar a solução do problema*

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \tag{1.26}$$

Trata-se de um PVI que consiste em determinar a solução da equação diferencial $y'' - y = 0$ *que assume o valor* 1 *em* $x = 0$ *e cuja primeira derivada tem valor* 2 *em* $x = 0$*. Conforme veremos, todas as soluções da equação diferencial dada podem-se escrever como*

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x},$$

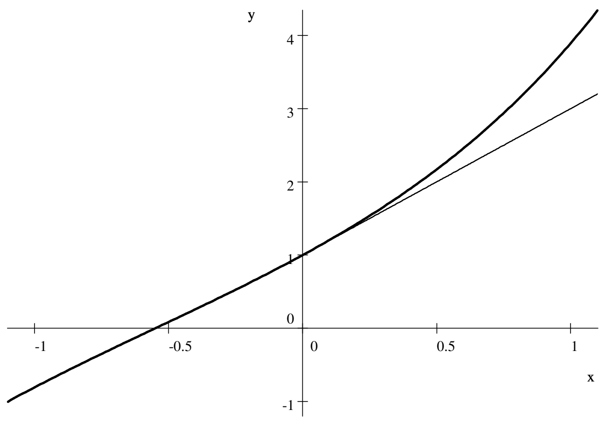
onde c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias, pelo que* $y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$*. Ora,*

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3/2 \\ c_2 = -1/2 \end{cases},$$

pelo que a solução deste PVI é

$$y(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x},$$

cuja representação é feita no gráfico seguinte.



Representação gráfica da solução do PVI (1.26) e da reta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa $x = 0$ *(cujo declive é igual a* 2*)*

Exemplo 1.17 *Considere-se o problema que consiste em determinar a solução de*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 5. \tag{1.27}$$

Trata-se, neste caso, de um PVF. Conforme veremos, todas as soluções da equação diferencial dada são da forma $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$*, onde* c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias. Assim,*

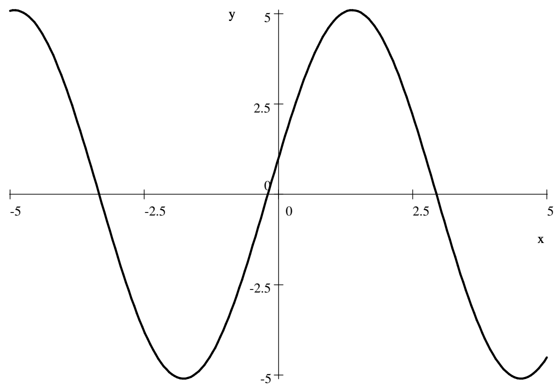
$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\pi/2) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 5 \end{cases}.$$

Portanto, a solução deste PVF é $y(x) = \cos x + 5 \operatorname{sen} x$*. No entanto, o PVF*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 5, \tag{1.28}$$

não tem solução pois as condições $y(0) = 1$ e $y(\pi) = 5$ não são compatíveis com uma solução do tipo $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\pi) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 = -5 \end{cases}.$$



Representação gráfica da função $y = 5 \operatorname{sen} x + \cos x$, solução do PVF (1.27)

Por outro lado, o PVF

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(2\pi) = 2$$

tem uma infinidade de soluções uma vez que

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2\pi) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_1 = 2 \end{cases},$$

e portanto c_2 pode ser qualquer, resultando $y(x) = 2\cos x + k \operatorname{sen} x$, onde k é uma constante real arbitrária.

O exemplo precedente mostra que os PVFs podem ter solução única, mais do que uma solução, ou não ter solução.

Convém, desde já, notar que os PVIs têm uma estrutura bastante rígida no que diz respeito às condições impostas, já que para uma equação diferencial de ordem n têm de ser impostas exatamente n condições para o mesmo valor da variável independente $x = x_0$, pelo que o PVI tem de ser obrigatoriamente da forma:

$$y(x_0) = y_0, \quad \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1, \quad \frac{d^2y}{dx^2}(x_0) = y_2, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1},$$

onde y_0, y_1, $\ldots$, y_{n-1} são constantes reais.

Tal não acontece nos PVFs. Por exemplo, pode ter-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(1) = 2,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(1) = 2.$$

É importante referir que quer se trate de um PVI quer de um PVF, as condições impostas nunca podem envolver derivadas de ordem igual ou superior à ordem da equação diferencial presente no problema em causa.

Problema Determinar uma solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad y(0) = 0.$$

Resp.: $y = x$.

Problema Determinar uma solução do PVF

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dx}(1) = 0.$$

Resp.: $y = 1$.

Vejamos agora algumas considerações sobre **problemas de valor inicial** envolvendo **equações diferenciais de primeira ordem**.

Definição 1.10 *Considere-se a equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.29}$$

onde f é uma função contínua de x e y nalgum domínio[2] *D do plano xy. Seja ainda (x_0, y_0) um ponto do domínio D. O PVI associado a (1.29) consiste em determinar uma solução $h(x)$ da equação diferencial (1.29), definida nalgum intervalo real contendo x_0, que satisfaça a condição inicial do problema $h(x_0) = y_0$. Este PVI escreve-se, habitualmente, na forma*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \tag{1.30}$$

[2] Um domínio é um conjunto aberto e conexo. Em termos simplistas, um domínio pode ser visto como o interior de uma curva fechada simples no plano.

Para resolver o problema (1.30) deve-se determinar uma função h que satisfaça não só a equação diferencial (1.29), mas também a condição inicial: tal função deve ter valor y_0 quando x toma o valor x_0. O método a usar para determinar h depende do tipo de equação diferencial presente no problema, ou seja, da forma da função $f(x, y)$.

Exemplo 1.18 *Determinar uma solução do PVI*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(3) = 4,$$

sabendo que a equação diferencial admite uma família de soluções que pode ser escrita na forma

$$x^2 + y^2 = c^2. \tag{1.31}$$

Solução. *A condição $y(3) = 4$ significa que se pretende determinar uma solução da equação diferencial dada, tal que $y = 4$ quando $x = 3$. Assim sendo, o par de valores $(x, y) = (3, 4)$ deve verificar a relação (1.31). Substituindo $x = 3$ e $y = 4$ em (1.31), obtém-se*

$$9 + 16 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 25.$$

Substituindo este valor de c^2 em (1.31), tem-se $x^2 + y^2 = 25$. Resolvendo em ordem a y, resulta

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}.$$

Deve-se escolher o sinal positivo para que $y = 4$ quando $x = 3$. Assim, a função f definida por

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad -5 < x < 5,$$

é uma solução do problema proposto e a respetiva solução escreve-se $y = \sqrt{25 - x^2}$.

1.3.2 Existência e unicidade de solução

No Exemplo 1.18 foi possível determinar uma solução do PVI em causa. Mas terão todos os PVIs e PVFs solução? Viu-se anteriormente que a resposta é negativa, uma vez que, por exemplo, o PVF

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 5,$$

não tem solução.

Surge, portanto, a questão da **existência** de soluções: dado um PVI ou um PVF, ele tem solução? Considere-se esta questão relativamente ao PVI genérico presente na Definição 1.10. Neste caso pode-se dar uma resposta inequívoca: todo PVI que satisfaça a Definição 1.10 tem pelo menos uma solução.

Coloca-se agora a questão da **unicidade**. Pode o referido problema ter mais do que uma solução? Considere-se o PVI

$$\frac{dy}{dx} = y^{1/3}, \quad y(0) = 0.$$

É fácil verificar que as funções f_1 e f_2 definidas, respetivamente, por

$$f_1(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, & x \geq 0 \end{cases},$$

são ambas soluções do PVI. De facto, este problema tem uma infinidade de soluções. A resposta relativa à unicidade é clara: o PVI, conforme atrás definido, não tem necessariamente solução única. Para garantir unicidade torna-se necessário impor algumas condições adicionais. Estas condições são dadas pelo seguinte teorema (de Picard).

Teorema 1.1 *(*Teorema de Existência e Unicidade*). Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.32}$$

onde

1. *A função f é contínua num domínio D do plano xy;*
2. *A derivada parcial $\partial f/\partial y$ também é contínua em D.*

Seja (x_0, y_0) um ponto de D. Então a equação diferencial (1.32) admite uma e uma só solução ϕ num intervalo $|x - x_0| < h$, para h suficientemente pequeno, que verifica a condição

$$\phi(x_0) = y_0.$$

Este teorema estabelece que em determinadas condições o PVI

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1.33}$$

tem uma solução única que é válida num determinado intervalo em torno de x_0 (isto é, numa vizinhança de x_0 suficientemente pequena). No entanto, o teorema não indica qualquer método para determinar a solução do problema, apenas garante a existência de solução única se forem verificadas determinadas condições. No caso de alguma dessas condições não se cumprir, então nada se pode concluir.

Exemplo 1.19 *Considere-se o PVI*

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(1) = 3.$$

O objetivo é tentar aplicar o Teorema 1.1, começando por verificar as suas hipóteses. Neste caso

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y.$$

As duas funções f e $\partial f/\partial y$ são contínuas em qualquer domínio D do plano xy. A condição inicial $y(1) = 3$ implica que $x_0 = 1$ e $y_0 = 3$. Ora, o ponto de coordenadas $(x_0, y_0) = (1, 3)$ pertence a algum destes domínios D. Portanto, verificam-se as hipóteses do teorema, pelo que a conclusão é válida. Ou seja, existe uma e uma só solução ϕ da equação diferencial $dy/dx = x^2 + y^2$, definida num intervalo $|x - 1| < h$ em torno de $x_0 = 1$, que satisfaz a condição inicial $\phi(1) = 3$.

Exemplo 1.20 *Considere-se os PVIs*

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^{1/3}}, \quad y(1) = 2;$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^{1/3}}, \quad y(0) = 2;$

3. $\dfrac{dy}{dx} = xy^{1/3}, \quad y(2) = 0.$

Que se pode concluir relativamente à existência e unicidade de solução destes PVIs?

Solução. *No caso dos problemas 1 e 2 tem-se*

$$f(x,y) = \frac{y}{x^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^{1/3}}.$$

Tanto f como $\partial f/\partial y$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, exceto nos pontos com abcissa x nula (isto é, ao longo do eixo dos yy). No problema 1, $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$. Ora, o quadrado de lado unitário centrado em $(1, 2)$ não interseta o eixo dos yy e assim tanto f como $\partial f/\partial y$ verificam, neste quadrado, as hipóteses do Teorema 1.1. O seu interior pode por isso ser considerado como o domínio D mencionado no Teorema 1.1 e o ponto de coordenadas $(1, 2) \in D$. Portanto, o Teorema 1.1 permite concluir que o problema 1 tem uma e uma só solução definida numa vizinhança de $x_0 = 1$ suficientemente pequena.

Vejamos o que se passa no problema 2. Neste caso $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$. Neste ponto nem f nem $\partial f/\partial y$ são contínuas. Por outras palavras, o ponto de coordenadas $(x, y) = (0, 2)$ não pertence a nenhum domínio D onde as condições do Teorema 1.1 sejam verificadas. Consequentemente, o Teorema 1.1 não permite concluir que o problema 2 tem uma e uma só solução na vizinhança do ponto de coordenadas $(0, 2)$. Note-se que este teorema também não permite concluir que a solução não é única. Em suma, o Teorema 1.1 não permite obter qualquer conclusão. Saliente-se ainda que uma vez que a função f não é contínua no ponto de coordenadas $(0, 2)$, então o problema 2 não está de acordo com a Definição 1.10 apresentada na página 22, pelo que não se pode sequer concluir que o problema 2 tenha solução.

No caso do problema 3 tem-se

$$f(x,y) = xy^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{3}xy^{-2/3}.$$

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}^2$, pelo que o problema 3 obedece à Definição 1.10 e por isso tem garantidamente solução numa vizinhança do ponto de coordenadas $(x, y) = (2, 0)$. No entanto, não se pode garantir que a solução seja única uma vez que $\partial f/\partial y$ não é contínua em nenhum domínio que contenha o ponto de coordenadas $(2, 0)$ (porquê?).

Problema Relativamente aos PVIs,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}, \quad y(0) = 3,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}, \quad y(3) = 0,$$

averiguar se é possível concluir que têm solução única.

Resp.: Apenas para o primeiro PVI podemos concluir que tem solução única.

Nota Atendendo ao resultado expresso no Teorema 1.1, quando noutros capítulos deste documento lidarmos com a solução de PVIs do tipo (1.33), qualquer referência à existência de solução única deverá ser entendida, à falta de um resultado mais forte, como algo que está garantido apenas numa vizinhança suficientemente pequena do ponto de coordenadas (x_0, y_0). Conforme veremos, caso a equação diferencial envolvida no PVI seja linear, então a solução única é global, mas em geral tal não está garantido.

Exercícios sobre problemas de valores iniciais, problemas de valores de fronteira, e existência e unicidade de solução

Exercício 1.10 *Mostrar que a função $f(x) = 4e^{2x} + 2e^{-3x}$ é uma solução do problema de valores iniciais*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0, \quad y(0) = 6, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 2.$$

Averiguar se $h(x) = 2e^{2x} + 4e^{-3x}$ também é uma solução deste PVI.

Exercício 1.11 *Sabendo que toda a solução da equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0$$

pode ser escrita na forma $f(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-3x}$, escolhendo adequadamente o valor das constantes c_1 e c_2, determinar a solução dos seguintes PVIs:

$$(a) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0, \quad y(0) = 5, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 6;$$

$$(b) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0 \quad y(0) = -2, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 6.$$

Exercício 1.12 *Sabendo que toda a solução da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

pode ser escrita na forma $y = c_1x + c_2x^2$ escolhendo c_1 e c_2 adequadamente, determinar a solução do PVF

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \quad y(2) = 0, \quad y(3) = 4.$$

Exercício 1.13 *Sabendo que toda a solução da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

pode ser escrita na forma $y = c_1 + c_2 x^2$, *mostrar que o PVF*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(-1) = 1$$

não tem solução única.

Exercício 1.14 *Sabendo que toda a solução da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

pode ser escrita na forma $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$, *mostrar que o problema de valores iniciais*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 5$$

tem solução $f(x) = 5 \operatorname{sen} x + \cos x$, *mas que o PVF*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(2\pi) = 5$$

não tem solução.

Exercício 1.15 *Aplicar o Teorema 1.1 (ver página 24) para mostrar que cada um dos seguintes PVIs tem uma e uma só solução definida num intervalo suficientemente pequeno,* $|x - 1| < h$, *em torno de* $x_0 = 1$:

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = x^2 \operatorname{sen} y, \quad y(1) = -2;$$

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x-2}, \quad y(1) = 0.$$

Exercício 1.16 *Considere-se o PVI*

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y, \quad y(2) = 5,$$

onde $P(x)$ *e* $Q(x)$ *são polinómios de terceiro grau em* x. *Este problema tem solução única num intervalo suficientemente pequeno,* $|x - 2| < h$, *em torno de* $x_0 = 2$? *Porquê?*

1.4 Soluções dos exercícios do Capítulo 1

1.1. (a) EDO, 1^a ordem, não linear se $y = y(x)$ ou $x = x(y)$;

(b) EDO, 4^a ordem, linear;

(c) EDP, 2^a ordem;

(d) EDO, 1^a ordem, não linear se $u = u(t)$ ou $t = t(u)$;

(e) EDO, 2^a ordem, não linear;

(f) EDO, 1^a ordem, linear se $y = y(x)$, mas não linear se $x = x(y)$.;

(g) EDO, 1^a ordem, não linear se $s = s(t)$ ou $t = t(s)$;

(h) EDO, 1^a ordem, não linear se $y = y(x)$ ou $x = x(y)$;

(i) EDP, 4^a ordem;

(j) EDO, 1^a ordem, não linear se $y = y(x)$, mas linear se $x = x(y)$.

1.5. $m_1 = -2$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$ (são soluções da EDO: e^{-2x}, e^{2x} e e^{3x}).

1.10. Não verifica, pois $h'(0) = -8 \neq 2$.

1.11. (a) $y = 3e^{4x} + 2e^{-3x}$; (b) $y = -2e^{-3x}$.

1.12. $y = -\dfrac{8}{3}x + \dfrac{4}{3}x^2$.

1.13. A solução é $y = 1 + c\left(x^2 - 1\right)$, onde c é uma constante arbitrária.

1.16. Sim. O Teorema de Existência e Unicidade é aplicável. A função $f(x, y) = P(x)y^2 + Q(x)y$ é contínua em $D = \mathbb{R}^2$, o mesmo sucedendo com $\partial f/\partial y = 2P(x)y + Q(x)$. Finalmente, o ponto de coordenadas $(x_0, y_0) = (2, 5)$ pertence ao domínio D.

Capítulo 2

Resolução analítica de equações diferenciais de primeira ordem

2.1 Algumas formas de representação

As equações diferenciais (ordinárias) de primeira ordem que estudaremos são muitas vezes representadas na "**forma normal**"

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2.1}$$

ou ainda

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{2.2}$$

a qual podemos designar como "**forma diferencial**". Conforme veremos, há outras formas de representação deste tipo de equações, mas o facto é que estas servem muitas vezes de ponto de partida para o estudo das mesmas.

Exemplo 2.1 *A equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2y^2}$$

está escrita na forma (2.1), onde

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2y^2}.$$

Pode-se também representá-la na forma (2.2), ou seja,

$$\left(x^2 + y^2\right)\, dx + \left(2y^2 + x^2\right)\, dy = 0,$$

correspondendo

$$M(x, y) = x^2 + y^2, \quad N(x, y) = 2y^2 - x^2.$$

É também possível escrever a mesma equação diferencial, por exemplo, como

$$-\left(x^2 + y^2\right)\, dx - \left(2y^2 + x^2\right)\, dy = 0, \qquad dx + \frac{2y^2 + x^2}{x^2 + y^2}\, dy = 0, \qquad \frac{x^2 + y^2}{2y^2 + x^2}\, dx + dy = 0,$$

pelo que se torna evidente que não existe uma forma única de escrever uma equação diferencial na forma diferencial.

Por outro lado, a equação diferencial

$$(\cos x + y)\ dx + (x + 2y)\ dy = 0,$$

que se encontra escrita na forma (2.2), pode ser escrita na forma (2.1)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x + y}{x + 2y}.$$

Neste caso, esta é a única forma de escrever a equação diferencial dada na forma normal.

Note-se que quando uma equação diferencial de primeira ordem se encontra escrita na forma normal, a presença do termo dy/dx *torna claro que* x *é a variável independente e* y *a variável dependente, isto é, a função* $y(x)$ *é a incógnita do problema. O mesmo não se passa quando a equação diferencial é expressa na forma diferencial. Em todo caso, assumiremos que se nada for dito em contrário* x *é a variável independente e* y *a variável dependente.*

Problema Escrever a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x - y}$$

na forma: i) $dx/dy = g(x, y)$; ii) $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$.

Problema Escrever a equação diferencial

$$x\, dx + y\, dy = 0$$

na forma: i) $dy/dx = f(x, y)$; ii) $dx/dy = h(x, y)$.

2.2 Equações diferenciais exatas

Começamos por introduzir o conceito de diferencial total de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, o qual será essencial na definição do primeiro tipo de equações diferenciais de primeira ordem que abordaremos: as equações diferenciais exatas.

Definição 2.1 *Seja* F *uma função real de duas variáveis reais que possui derivadas parciais contínuas (função de classe* $\mathcal{C}^1$*) num domínio* D *de* $\mathbb{R}^2$*. O* ***diferencial total*** dF *da função* F *é definido pela relação*

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\, dy \tag{2.3}$$

para todo $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 2.2 *Seja* $F(x, y)$ *a função de duas variáveis definida por*

$$F(x, y) = xy^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2xy,$$

tendo-se para o diferencial total de F, por aplicação de (2.3),

$$dF(x,y) = y^2\,dx + 2xy\,dy$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.3 *Seja $G(x,y)$ a função de duas variáveis definida por*

$$G(x,y) = xy^2 + 2x^3y, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então,

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = y^2 + 6x^2y, \quad \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = 2xy + 2x^3,$$

tendo-se, por aplicação de (2.3),

$$dG(x,y) = \left(y^2 + 6x^2y\right)\,dx + \left(2xy + 2x^3\right)\,dy$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Problema Determinar o diferencial total da função $H(x,y) = \cos xy$.
Resp.: $dH = -y\,\mathrm{sen}\,xy\,dx - x\,\mathrm{sen}\,xy\,dy$.

Definição 2.2 *A expressão*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \tag{2.4}$$

designa-se ***uma diferencial exata*** *num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ se existe uma função $F : D \longmapsto \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, tal que a expressão (2.4) é igual ao diferencial total de F para todo $(x,y) \in D$. Ou seja, atendendo às definições precedentes, conclui-se que a expressão (2.4) é uma diferencial exata em D se existir uma função F tal que*

$$dF(x,y) \equiv \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

para todo $(x,y) \in D$. De notar que nestas condições tem-se

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad e \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

para todo $(x,y) \in D$, designando-se F uma primitiva da forma diferencial dF.

Exemplo 2.4 *A expressão $y^2\,dx + 2xy\,dy$ é uma diferencial exata pois corresponde ao diferencial total da função xy^2, conforme se viu no Exemplo 2.2.*

Exemplo 2.5 *A expressão $(y^2 + 6x^2y)\,dx + (2xy + 2x^3)\,dy$ é uma diferencial exata pois corresponde ao diferencial total da função $xy^2 + 2x^3y$ (ver Exemplo 2.3).*

Estamos agora em condições de definir o conceito de equação diferencial exata.

Definição 2.3 *Se $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ é uma diferencial exata em $D \subset \mathbb{R}^2$, então a equação diferencial*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.5}$$

*designa-se uma **equação diferencial exata**.*

Note-se desde já que nestas condições existe, por definição de diferencial exata, uma função $F(x,y)$ tal que

$$dF(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

e, portanto, pode-se escrever

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dF(x,y) = 0.$$

Este resultado será, conforme veremos em seguida, o ponto de partida para a determinação de famílias de soluções de equações diferenciais exatas.

Exemplo 2.6 *A equação diferencial*

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0 \tag{2.6}$$

é uma equação diferencial exata em $\mathbb{R}^2$.

Solução. *Tal resulta do facto de $y^2\,dx + 2xy\,dy$ ser uma diferencial exata em $\mathbb{R}^2$ conforme se viu no Exemplo 2.4.*

Exemplo 2.7 *A equação diferencial*

$$\left(y^2 + 6x^2y\right)\,dx + \left(2xy + 2x^3\right)\,dy = 0$$

é uma equação diferencial exata em $\mathbb{R}^2$.

Solução. *Novamente, tal resulta do facto de $(y^2+6x^2y)\,dx + (2xy+2x^3)\,dy$ ser uma diferencial exata em $\mathbb{R}^2$ (ver Exemplo 2.5).*

Exemplo 2.8 *Considere-se agora a equação diferencial que se obtém dividindo ambos os membros da equação diferencial exata (2.6) por y, isto é,*

$$y\,dx + 2x\,dy = 0.$$

Será que esta equação diferencial é exata?

Solução. *Neste caso a resposta é negativa. O objetivo é averiguar se existe uma função $F(x,y)$, definida nalgum domínio de $\mathbb{R}^2$, tal que $dF(x,y) = y\,dx + 2x\,dy$, ou seja*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y \tag{2.7}$$

e

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2x. \tag{2.8}$$

Se tal função existir, então de (2.7) resulta

$$F(x,y) = \int y\,\partial x = xy + \phi(y),$$

onde ϕ só depende da variável y. Substituindo a expressão agora obtida para $F(x,y)$ em (2.8) resulta

$$\frac{\partial\,[xy + \phi(y)]}{\partial y} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dy} = x.$$

Ora, ϕ não pode depender de x, pelo que $d\phi/dy$ também não pode depender de x, contradizendo o resultado obtido: $d\phi/dy = x$. Chegamos assim a um absurdo que resultou do facto de termos suposto que existe uma função $F(x,y)$ tal que $dF(x,y) = y\,dx + 2x\,dy$. Conclui-se portanto, por redução ao absurdo, que tal função não existe e que consequentemente a equação diferencial dada não é exata.

Problema Mostrar que a equação diferencial que se obtém multiplicando ambos os membros da equação diferencial exata (2.6) por y, isto é,

$$y^3\,dx + 2xy^2\,dy = 0$$

não é exata.

Exemplo 2.9 *A equação diferencial*

$$(2x\cos y + 1)\ dx + \left(2 - x^2 \operatorname{sen} y\right)\ dy = 0 \tag{2.9}$$

é uma equação diferencial exata em $\mathbb{R}^2$.

Solução. *De facto, existe pelo menos função $F(x,y)$, definida em $\mathbb{R}^2$, tal que*

$$dF(x,y) = (2x\cos y + 1)\ dx + \left(2 - x^2 \operatorname{sen} y\right)\ dy. \tag{2.10}$$

Tal função obedece necessariamente ao sistema de equações

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 1, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2 - x^2 \operatorname{sen} y,$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x + g(y) \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2 - x^2 \operatorname{sen} y \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x + g(y) \\ \dfrac{\partial\left[x^2\cos y + x + g(y)\right]}{\partial y} = 2 - x^2 \operatorname{sen} y \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x + g(y) \\ -x^2 \operatorname{sen} y + \dfrac{dg}{dy} = 2 - x^2 \operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x + g(y) \\ \dfrac{dg}{dy} = 2 \end{cases},$$

isto é,

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x + g(y) \\ g(y) = 2y + c \end{cases} \Rightarrow \quad F(x,y) = x^2\cos y + x + 2y + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. De notar que se diferenciarmos a expressão agora obtida para $F(x, y)$ obtemos imediatamente a expressão (2.10), confirmando que o resultado obtido está correto.

Conclui-se que existe uma infinidade de funções definidas em $\mathbb{R}^2$ cujo diferencial total é igual a $(2x \cos y + 1)\, dx + (2 - x^2 \operatorname{sen} y)\, dy$, pelo que a equação diferencial (2.9) é exata.

Decorre do exemplo precedente que averiguar se uma expressão do tipo $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ é uma diferencial exata pode ser um processo algo moroso, dado que obriga a indagar se existe $F(x, y)$ tal que $dF(x, y) = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$. Seria desejável dispor de um critério, envolvendo unicamente as funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$, que permitisse averiguar de forma direta e simples se uma equação diferencial de primeira ordem é (ou não) exata. Tal critério é dado pelo seguinte teorema que estabelece condições necessárias e suficientes para que determinada equação diferencial de primeira ordem seja exata.

Teorema 2.1 *Considere-se a equação diferencial*

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{2.11}$$

onde $M(x, y)$ e $N(x, y)$ têm primeiras derivadas parciais contínuas em todos os pontos (x, y) de um domínio retangular $D \subset \mathbb{R}^2$. Nestas condições:

1. *Se a equação diferencial (2.11) é exata em D, então*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D; \tag{2.12}$$

2. *Reciprocamente, se*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D,$$

então a equação diferencial (2.11) é exata em D.

Em resumo,

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \ \text{ é exata em } D \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Demonstração Ponto 1. Se a equação diferencial (2.12) é exata em D, então $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ é uma diferencial exata em D. Existe por isso uma função $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

para todo $(x, y) \in D$. Então,

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$. Atendendo ao facto de, por hipótese, as primeiras derivadas parciais de M e N serem contínuas, podemos aplicar o Teorema de Schwarz[1],

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \forall (x, y) \in D,$$

[1] O Teorema de Schwarz diz que se uma função de duas variáveis $g(x, y)$ é tal que g, g_x, g_y, g_{xy} e g_{yx} são contínuas num domínio D, então $g_{xy} = g_{yx}$ em D.

resultando

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D,$$

conforme pretendido.

Ponto 2. Neste caso consideramos como hipótese

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x,y) \in D$ e pretendemos mostrar que $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é exata em D. Isto quer dizer que temos de provar que existe uma função F tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para todo $(x,y) \in D$. Atendendo a que F deve verificar as duas condições precedentes, podemos escolher qualquer uma delas e obter uma expressão para F primitivando adequadamente. Por exemplo,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y) = \int M(x,y)\,\partial x + \phi(y),$$

onde $\phi(y)$ é uma função arbitrária que só depende de y. Para obter $F(x,y)$ resta-nos determinar $\phi(y)$ substituindo a expressão de $F(x,y)$ na outra condição, ou seja,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,\partial x + \phi(y)\right] = N(x,y),$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x + \frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x.$$

Uma vez que ϕ só depende de y, o mesmo deve acontecer com a sua derivada, pelo que se deverá ter

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x\right] = 0$$

para todo $(x,y) \in D$. De facto, a equação precedente é equivalente a

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x\right] = 0$$

ou

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,\partial x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0$$

para todo $(x,y) \in D$. Uma vez que (2.12) é válida por hipótese, a equação precedente converte-se numa identidade. Podemos por isso escrever

$$\phi(y) = \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,\partial x\right] \partial y,$$

resultando

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\partial x + \phi(y) = \int M(x,y)\,\partial x + \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,\partial x\right] \partial y.$$

(Sugestão: realizar a mesma demonstração começando por primitivar a expressão

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Os passos subsequentes são semelhantes aos acima expostos). ■

O teorema precedente dá-nos um critério para decidir se determinada equação diferencial do tipo (2.11) é ou não exata. De facto, se a condição (2.12) for verificada então a equação diferencial (2.11) é exata, caso contrário ela não é exata. Por outras palavras, o teorema diz-nos que uma condição necessária e suficiente para que a equação diferencial (2.11) seja exata em D é que a condição (2.12) seja válida para todo $(x,y) \in D$.

A demonstração da segunda parte do teorema sugere qual o procedimento para obter $F(x,y)$ a partir de $M(x,y)$ e $N(x,y)$. O procedimento é relativamente simples e direto, conforme ilustra o seguinte exemplo (ver também o Exemplo 2.9).

Exemplo 2.10 *Considere-se novamente a equação diferencial (2.6)*

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

Vimos anteriormente que a equação diferencial é exata dado $y^2\,dx + 2xy\,dy$ ser a diferencial exata da função $F(x,y) = xy^2$. Em todo o caso, uma vez que em geral a função $F(x,y)$ não é conhecida à priori, apliquemos o critério que figura no Teorema 2.1 para averiguar se uma equação diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é exata.

Solução. *Tem-se,*

$$M(x,y) = y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y,$$

$$N(x,y) = 2xy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y.$$

Portanto, o critério (2.12) verifica-se pois

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, confirmando-se assim que a equação diferencial é exata em $\mathbb{R}^2$. Podemos então determinar uma função $F(x,y)$ tal que

$$dF(x,y) = y^2\,dx + 2xy\,dy$$

(uma vez que está garantido que tal função existe), isto é

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = y^2, \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2xy.$$

Tem-se

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y) = y^2 x + \phi(y).$$

Substituindo este resultado na segunda equação, obtém-se

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2xy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[y^2 x + \phi(y)\right] = 2xy,$$

ou seja,

$$2xy + \frac{d\phi(y)}{dy} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi(y)}{dy} = 0,$$

pelo que $\phi(y) = k$*, onde* k *é uma constante arbitrária. Tem-se então*

$$F(x,y) = xy^2 + k.$$

Sugestão: obter o mesmo resultado começando por primitivar a equação

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2xy.$$

Problema Considerar a equação diferencial

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Mostrar que a equação diferencial é exata e determinar $F(x,y)$, tal que $dF(x,y) = x\,dx + y\,dy$.
Resp.: $F(x,y) = x^2/2 + y^2/2 + c$.

Exemplo 2.11 *A aplicação do critério (2.12) permite agora mostrar de forma simples que a equação diferencial*

$$y\,dx + 2x\,dy = 0$$

não é exata.

Solução. *Tem-se* $M(x,y) = y$ *e* $N(x,y) = 2x$*, pelo que*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 \quad e \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2,$$

ou seja, a condição (2.12) não é verificada em nenhum domínio retangular de $\mathbb{R}^2$ *e consequentemente a equação diferencial não é exata.*

Problema *Averiguar se a equação diferencial* $y\,dx - x\,dy = 0$ *é exata.*
Resp.: A equação diferencial não é exata em nenhum domínio retangular de $\mathbb{R}^2$*.*

Dado que já temos uma forma de testar se determinada equação diferencial é ou não exata, o passo seguinte consiste em estabelecer um método para determinar (famílias de) soluções de equações diferenciais exatas. Conforme vimos, se a equação diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é exata num domínio retangular $D \subset \mathbb{R}^2$, então existe uma função $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para todo $(x, y) \in D$. Assim, a equação diferencial $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\, dy = 0,$$

ou seja, atendendo à definição de diferencial total de uma função (2.3),

$$dF(x, y) = 0.$$

Pode-se então concluir que a relação $F(x, y) = c$, onde c é uma constante arbitrária: (1) verifica formalmente a equação diferencial dada qualquer que seja o valor da constante arbitrária c; (2) define uma família de curvas que são solução dessa equação diferencial. Nestas condições diz-se que

$$F(x, y) = c$$

define uma **família de soluções da equação diferencial exata** dada.

Exemplo 2.12 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial exata*

$$y^2\, dx + 2xy\, dy = 0.$$

Solução. *Vimos anteriormente que se tem*

$$y^2\, dx + 2xy\, dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(xy^2) = 0,$$

pelo que $F(x, y) = xy^2$. *Assim, a relação (implícita)*

$$xy^2 = c,$$

onde c *é uma constante arbitrária, define uma família de soluções (curvas em* $\mathbb{R}^2$*) da equação diferencial dada. É importante que seja claro que a função* $F(x, y)$ *não é solução da equação diferencial dada, uma vez que nem sequer estabelece uma relação entre as variáveis* x *e* y. $F(x, y)$ *é apenas uma função (ou família de funções) que é usada para construir uma família de soluções da equação diferencial exata.*

Nota: no Exemplo 2.10 vimos com mais generalidade que $F(x, y) = xy^2 + k$, *onde* k *é uma constante arbitrária que surge sempre na expressão mais geral de* $F(x, y)$ *dada a natureza do sistema de equações a que* $F(x, y)$ *deve obedecer (porquê?). Assim, a família de soluções também podia ser escrita como*

$$xy^2 + k = \overline{c},$$

onde $\overline{c}$ *é uma constante arbitrária. Definindo a constante arbitrária* $c = \overline{c} - k$ *recuperamos o resultado* $xy^2 = c$. *Na prática, para simplificar o cálculo, e sem que tal implique qualquer perda de generalidade, é usual, para efeitos de escrita da família de soluções de equações diferenciais exatas, tomar-se* $k = 0$ *aquando da determinação de* $F(x, y)$ *conforme se ilustra nos exemplos seguintes.*

Exemplo 2.13 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\left(3x^2 + 4xy\right)\, dx + (2x^2 + 2y)\, dy = 0$$

e expressá-la na forma $G(x, y) = 0$.

Solução. *Primeiro averiguamos se a equação diferencial é exata. Sendo a equação dada do tipo* $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, *resulta*

$$M(x,y) = 3x^2 + 4xy, \quad N(x,y) = 2x^2 + 2y.$$

O critério (2.12) verifica-se pois

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 4xy\right) = 4x, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2 + 2y\right) = 4x.$$

Portanto, a equação diferencial é exata em $\mathbb{R}^2$. *Determinamos agora* $F(x,y)$ *tal que*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2 + 4xy, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2 + 2y.$$

Obtém-se,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2x^2 + 2y \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y) = \int \left(2x^2 + 2y\right)\,\partial y = 2x^2y + y^2 + \varphi(x),$$

pelo que $\varphi(x)$ *deve obedecer a*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2y + y^2 + \varphi(x)\right] = 3x^2 + 4xy,$$

resultando

$$4xy + \frac{d\varphi(x)}{dx} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = x^3 + k,$$

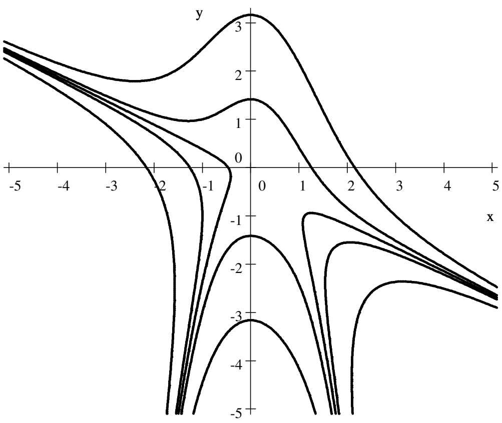
onde k *é uma constante arbitrária. Temos então*

$$F(x,y) = 2x^2y + y^2 + \varphi(x) = 2x^2y + y^2 + x^3 + k.$$

Portanto, uma família de soluções da equação diferencial dada é $F(x,y) = c$, *isto é (tomando* $k = 0$*),*

$$2x^2y + y^2 + x^3 = c,$$

onde c *é uma constante arbitrária. Esta equação pode ser expressa na forma* $G(x,y) = 0$, *bastando para esse efeito tomar, por exemplo,* $G(x,y) = 2x^2y + y^2 + x^3 - c$ *(porquê?).*



Representação gráfica da famíla de curvas $2x^2y + y^2 + x^3 = c$

Verifiquemos que o resultado obtido está correto, mostrando que a relação $2x^2y + y^2 + x^3 = c$ *(ou em alternativa* $2x^2y + y^2 + x^3 - c = 0$*) verifica formalmente a equação diferencial dada. De facto, tem-se*

$$d\left(2x^2y + y^2 + x^3\right) = d\,(c) \quad \Leftrightarrow \quad \left(3x^2 + 4xy\right)\,dx + \left(2x^2 + 2y\right)\,dy = 0,$$

que mais não é do que a equação diferencial proposta, o que mostra o resultado pretendido. Em alternativa, podíamos ter considerado

$$d\left(2x^2y + y^2 + x^3 - c\right) = d\,(0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(3x^2 + 4xy\right)\,dx + \left(2x^2 + 2y\right)\,dy = 0,$$

obtendo-se o mesmo resultado.

Problema Determinar uma família de soluções da equação diferencial

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

expressar a respetiva família de soluções na forma $F(x,y) = c$ e $G(x,y) = 0$, e mostrar que, em qualquer dos casos, a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.
Resp.: $x^2 + y^2 = c$ (ou equação equivalente); $x^2 + y^2 - c = 0$ (ou equação equivalente); tanto $d\left(x^2 + y^2\right) = d(c)$ como $d\left(x^2 + y^2 - c\right) = d(0)$ são equivalentes a $x\,dx + y\,dy = 0$.

Exemplo 2.14 *Sabendo que o PVI*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x\cos y + 3x^2y}{x^3 - x^2\operatorname{sen} y - y}, \quad y(0) = \frac{3}{4} \tag{2.13}$$

admite solução única da forma $G(x,y) = 0$ *na vizinhança do ponto de coordenadas* $(0, 3/4)$*, determinar uma expressão para* $G(x,y)$*.*

Solução. *Começamos por verificar se a equação diferencial é exata. Mostra-se facilmente que a equação dada pode ser escrita na forma diferencial*

$$\left(2x\cos y + 3x^2y\right)\,dx + \left(x^3 - x^2\operatorname{sen} y - y\right)\,dy = 0. \tag{2.14}$$

Tem-se

$$M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2y, \quad N(x,y) = x^3 - x^2\operatorname{sen} y - y,$$

resultando

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2x\operatorname{sen} y + 3x^2, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 2x\operatorname{sen} y,$$

pelo que o critério (2.12) verifica-se e a equação diferencial é exata para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*. Determinamos agora* $F(x,y)$ *tal que*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2y, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = x^3 - x^2\operatorname{sen} y - y,$$

sabendo, de antemão, que uma família de soluções da equação diferencial dada é $F(x,y) = c$*. Tem-se*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2y \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2\operatorname{sen} y - y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} F(x,y) = x^2\cos y + x^3y + \gamma(y) \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2\operatorname{sen} y - y \end{array}\right.,$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + \gamma(y) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left[x^2\cos y + x^3 y + \gamma(y)\right] = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + \gamma(y) \\ \dfrac{d\gamma(y)}{dy} = -y \end{cases},$$

pelo que

$$\gamma(y) = -\frac{1}{2}y^2 + k \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 + k.$$

Uma família de soluções da equação diferencial dada é então

$$x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 = c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Da infinidade de curvas integrais definidas por esta última relação pretende-se reter apenas a que passa no ponto de coordenadas $(0, 3/4)$*, ou seja, a que verifica a condição* $y(0) = 3/4$*. Assim,*

$$\begin{cases} x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 = c, \\ y(0) = 3/4 \end{cases} \Rightarrow \quad c = x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2\Big|_{x=0,\ y=3/4} = -\frac{9}{32},$$

obtendo-se a solução

$$x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 = -\frac{9}{32} \quad \Rightarrow \quad x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{32} = 0,$$

pelo que

$$G(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{32}.$$

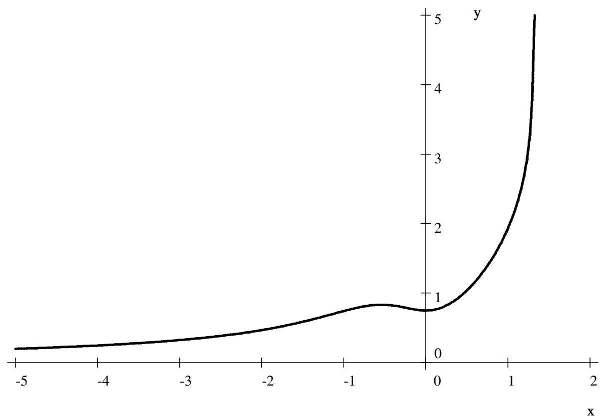
Podia-se ainda ter escrito a solução na forma

$$32x^2\cos y + 32x^3 y - 16y^2 + 9 = 0,$$

tendo-se nesse caso

$$G(x,y) = 32x^2\cos y + 32x^3 y - 16y^2 + 9. \tag{2.15}$$

Portanto, a função $G(x,y)$ *está definida a menos de um fator multiplicativo que pode ser qualquer constante não nula. A figura seguinte ilustra a solução obtida para o PVI (2.13).*



Representação gráfica da solução do PVI (2.13)

De novo, é conveniente averiguar se a expressão obtida verifica formalmente o PVI. Obtém-se, recorrendo, por exemplo, a (2.15)

$$d\left(32x^2\cos y + 32x^3y - 16y^2 + 9\right) = d\,(0)\,,$$

resultando

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(32x^2\cos y + 32x^3y - 16y^2 + 9\right)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(32x^2\cos y + 32x^3y - 16y^2 + 9\right)\,dy = 0$$

ou

$$\left(64x\cos y + 96x^2y\right)\,dx + \left(-64x^2\operatorname{sen} y + 96x^3 - 32y\right)\,dy = 0.$$

Dividindo ambos os membros da equação anterior por 32*, obtém-se a equação diferencial proposta na sua forma diferencial (2.14). Resta verificar se o ponto* $(x,y) = (0,3/4)$ *pertence à curva integral* $32x^2\cos y + 32x^3y - 16y^2 + 9 = 0$*. É fácil mostrar que substituindo* $x = 0$ *e* $y = 3/4$ *na equação precedente resulta uma identidade, conforme requerido.*

Exemplo 2.15 *Um ponto material* P *descreve um movimento no plano* xy *cujas coordenadas polares* (θ,ρ) *verificam a equação diferencial*

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right), \quad -\pi/2 < \theta < 3\pi/2.$$

Sabe-se ainda que a trajetória de P *passa pelo ponto de coordenadas* $(\theta,\rho) = (-\pi/2,1)$*. Determinar a equação polar da respetiva trajetória.*

Solução. *Trata-se de um PVI que tem solução única (pelo menos) numa vizinhança do ponto com coordenadas polares* $(-\pi/2,1)$ *e cuja equação diferencial pode ser escrita na forma diferencial* $M(\theta,\rho)\,d\theta + N(\theta,\rho)\,d\rho = 0$*, tendo-se*

$$4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen} x\right)\,d\theta - d\rho = 0, \quad \rho(-\pi/2) = 1, \tag{2.16}$$

ou seja $M(\theta,\rho) = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right)$ *e* $N(\theta,\rho) = -1$*. É fácil constatar que esta equação diferencial é exata (porquê?). Então, existe uma função* $F(\theta,\rho)$ *tal que* $dF(\theta,\rho) = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right)\,d\theta - d\rho$*, escrevendo-se uma família de soluções da equação diferencial dada* $F(\theta,\rho) = c$*.*

Tem-se,

$$\frac{\partial F(\theta,\rho)}{\partial\theta} = M(\theta,\rho) = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right), \quad \frac{\partial F(\theta,\rho)}{\partial\rho} = N(\theta,\rho) = -1,$$

resultando da segunda equação $F(\theta,\rho) = -\rho + \omega(\theta)$*, pelo que*

$$\frac{\partial\left[-\rho + \omega(\theta)\right]}{\partial\theta} = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{d\theta} = 4\left(\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta\right),$$

isto é

$$\omega(\theta) = 4\theta\cos\theta + k.$$

Assim,

$$F(\theta,\rho) = 4\theta\cos\theta - \rho + k,$$

sendo uma família de soluções da equação diferencial proposta (tomando $k = 0$)

$$4\theta \cos\theta - \rho = c.$$

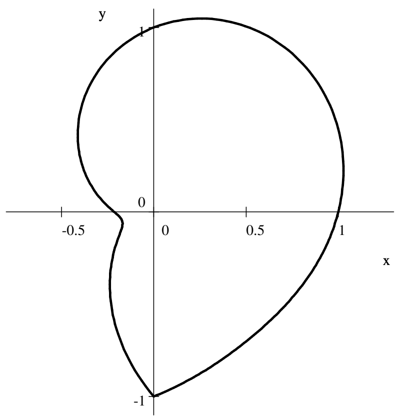
Resta realizar o cálculo da constante c. Tem-se,

$$c = 4\theta \cos\theta - \rho\big|_{\theta=-\pi/2,\ \rho=1} = -1,$$

pelo que a trajetória de P é dada por

$$4\theta \cos\theta - \rho = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{1}{4}\theta\cos\theta + 1, \quad -\pi/2 < \theta < 3\pi/2.$$

Neste caso a solução é explícita, sendo o respetivo gráfico



Representação gráfica da função $\rho = \frac{1}{4}\theta\cos\theta + 1$, solução do PVI (2.16)

Exercícios sobre equações diferencias exatas

Exercício 2.1 *Averiguar quais das seguintes equações diferenciais são exatas e determinar, para as que o forem, uma família de soluções. Mostrar ainda que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $(3x + 2y)\, dx + (2x + y)\, dy = 0$;

(b) $(2xy + 1)\, dx + (x^2 + 4y)\, dy = 0$;

(c) $\left(\theta^2 + 1\right) \cos r\, dr + 2\theta \operatorname{sen} r\, d\theta = 0$;

(d) $\left(\dfrac{2s - 1}{t}\right) ds + \left(\dfrac{s - s^2}{t^2}\right) dt = 0.$

Exercício 2.2 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $(2xy - 3)\, dx + (x^2 + 4y)\, dy = 0, \quad y(1) = 2$;

(b) $\left(ye^x + 2e^x + y^2\right)\,dx + (e^x + 2xy)\,dy = 0, \quad y(0) = 6.$

Exercício 2.3 *Para cada uma das equações diferenciais seguintes determinar o valor da constante A de forma a serem exatas e determinar uma família de soluções das equações diferenciais resultantes. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\left(x^2 + 3xy\right)\,dx + (Ax^2 + 4y)\,dy = 0;$

(b) $\left(\dfrac{Ay}{x^3} + \dfrac{y}{x^2}\right)\,dx + \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)\,dy = 0.$

Exercício 2.4 *Para cada uma das equações diferenciais seguintes determinar a função mais geral $f(x,y)$ de forma a que sejam equações diferenciais exatas.*

(a) $\left(x^3 + xy^2\right)\,dx + f(x,y)\,dy = 0;$

(b) $f(x,y)\,dx + \left(2ye^x + y^2e^{3x}\right)\,dy = 0.$

2.3 Equações diferenciais exatas e fatores integrantes

Conforme vimos anteriormente, a equação diferencial

$$y\,dx + 2x\,dy = 0 \tag{2.17}$$

não é exata. No entanto, se multiplicarmos ambos os membros desta equação por y, a equação diferencial resultante

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$$

é exata, conforme também já vimos. Dizemos então que a função $\mu(x,y) = y$ é um fator integrante da equação diferencial (2.17).

Problema Tomando por base o exemplo acima, indicar um fator integrante para a equação diferencial

$$y^3\,dx + 2xy^2\,dy = 0.$$

Resp.: Qualquer função do tipo $\mu(x,y) = ky^{-1}$ com $k \in R\backslash\{0\}$.

Em geral, tem-se a seguinte definição.

Definição 2.4 *Seja D um domínio retangular de $\mathbb{R}^2$ e M e N duas funções reais de classe $\mathcal{C}^1$ em D. Suponhamos que a equação diferencial*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.18}$$

não é exata em D, mas a equação diferencial

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$$

é exata em D, então $\mu(x,y)$ designa-se ***um fator integrante*** *da equação diferencial (2.18).*

Desta definição decorre que se $\mu(x,y)$ é um fator integrante de determinada equação diferencial, então $k\mu(x,y)$, onde k é uma constante não nula, também é um fator integrante dessa mesma equação diferencial (porquê?).

Exemplo 2.16 *Considere-se a equação diferencial*

$$\left(3y + 4xy^2\right)\, dx + (2x + 3x^2 y)\, dy = 0. \tag{2.19}$$

A equação diferencial é do tipo $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ *com*

$$M(x,y) = 3y + 4xy^2 \quad e \quad N(x,y) = 2x + 3x^2 y,$$

pelo que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3 + 8xy \quad e \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2 + 6xy.$$

Isto quer dizer que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

somente ao longo da curva $2xy + 1 = 0$*, pelo que a equação diferencial (2.19) não é exata em nenhum domínio retangular de* $\mathbb{R}^2$*. No entanto, considerando* $\mu(x,y) = x^2 y$ *como um potencial fator integrante, a correspondente equação diferencial é agora*

$$x^2 y \left(3y + 4xy^2\right)\, dx + x^2 y(2x + 3x^2 y)\, dy = 0,$$

ou seja,

$$\left(3x^2 y^2 + 4x^3 y^3\right)\, dx + (2x^3 y + 3x^4 y^2)\, dy = 0,$$

a qual é exata em qualquer domínio retangular de $\mathbb{R}^2$ *dado que*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 y^2 + 4x^3 y^3\right) = 6x^2 y + 12x^3 y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 y + 3x^4 y^2)$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*. Portanto,* $\mu(x,y) = x^2 y$ *é um fator integrante da equação diferencial (2.19).*

Exemplo 2.17 *Considere-se agora a equação diferencial (2.17). Será que esta equação admite fatores integrantes do tipo* y^n*? E do tipo* x^m*?*

Solução. *Se a equação diferencial (2.17) admtir fatores integrantes do tipo* y^n *então a equação diferencial*

$$y^n y\, dx + 2y^n x\, dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^{n+1}\, dx + 2y^n x\, dy = 0$$

deve ser exata, ou seja, considerando $M(x,y) = y^{n+1}$ *e* $N(x,y) = 2y^n x$*, deve-se ter*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)y^n = 2y^n,$$

donde resulta que $n = 1$ *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, pelo que o único fator integrante do tipo* y^n *é* y *(como de resto já se tinha visto anteriormente).*

Considere-se agora a possibilidade de existirem fatores integrantes do tipo x^m. Nesse caso ter-se-ia a equação diferencial

$$x^m y\, dx + 2x^{m+1}\, dy = 0$$

e, portanto, $M(x, y) = x^m y$ e $N(x, y) = 2x^{m+1}$. A condição a impor é então

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad x^m = 2(m+1)x^m,$$

donde se obtém $m = -1/2$.

Assim, $x^{-1/2}$ é um fator integrante da equação dada no semi-plano $x > 0$ (porquê?), resultando na equação diferencial exata

$$x^{-1/2} y\, dx + 2x^{1/2}\, dy = 0, \quad x > 0.$$

Exemplo 2.18 *Dada a equação diferencial*

$$\left(16x^4y^9 + 6x^6y^{11}\right)\, dx + \left(16x^5y^8 + 6x^7y^{10}\right)\, dy = 0.$$

Será que esta admite fatores integrante do tipo $x^a y^b$, onde a e b são constantes reais?

Solução. *É fácil concluir que a equação dada não é exata. Multipliquemos então ambos os membros da referida equação pelo potencial fator integrante:*

$$\left(16x^{4+a}y^{9+b} + 6x^{6+a}y^{11+b}\right)\, dx + \left(16x^{5+a}y^{8+b} + 6x^{7+a}y^{10+b}\right)\, dy = 0.$$

Impomos então que

$$\frac{\partial\left[16x^{4+a}y^{9+b} + 6x^{6+a}y^{11+b}\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[16x^{5+a}y^{8+b} + 6x^{7+a}y^{10+b}\right]}{\partial x},$$

resultando

$$16\,(9+b)\,x^{4+a}y^{8+b} + 6\,(11+b)\,x^{6+a}y^{10+b} = 16\,(5+a)\,x^{4+a}y^{8+b} + 6\,(7+a)\,x^{6+a}y^{10+b},$$

para todo (x, y) pertencente a algum domínio de $\mathbb{R}^2$. Então, atendendo à natureza da igualdade acima, tem-se (porquê?)

$$\begin{cases} 16\,(9+b) = 16\,(5+a) \\ 6\,(11+b) = 6\,(7+a) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad b = a - 4.$$

Portanto, a equação diferencial dada admite uma infinidade de fatores integrantes do tipo $x^a y^b$, bastando para tal que $b = a - 4$. Assim, a equação diferencial admite fatores integrantes que sejam múltiplos constantes de $x^a y^{a-4}$, pelo que $x^5 y$, x^4, y^{-4} são, entre uma infinidade de outros, fatores integrantes da referida equação.

Problema Seja a equação diferencial

$$-\frac{3e^{2y}}{x^5y^4}\, dx + \frac{e^{2x}\,(y-4)}{x^4y^5}\, dy = 0.$$

Sabendo que esta equação diferencial admite pelo menos um fator integrante do tipo $x^a e^{by}$, determinar esse(s) fator(es) integrante(s).

Resp.: Existe apenas um fator integrante que é xe^{-y}.

Nos exemplos precedentes os fatores integrantes propostos tinham uma determinada forma (dada) e envolviam constantes a determinar. Vejamos agora o caso em que a única condicionante imposta ao (potencial) fator integrante é que este dependa apenas de uma das variáveis que surge na equação diferencial.

Exemplo 2.19 *Considere-se a equação diferencial*

$$2\cos y\,dx - \operatorname{sen} y\,dy = 0. \tag{2.20}$$

Verifica-se facilmente que a equação diferencial não é exata (porquê?). Será que admite fatores integrantes que só dependem da variável x? E apenas da variável y?

Solução. *No primeiro caso tem de se averiguar se existe uma função $f(x)$ tal que*

$$\frac{\partial\,[2f(x)\cos y]}{\partial y} = \frac{\partial\,[-f(x)\operatorname{sen} y]}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad -2f(x)\operatorname{sen} y = -\operatorname{sen} y\frac{df(x)}{dx},$$

resultando para $f(x)$ a equação diferencial

$$\frac{df(x)}{dx} = 2f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f}\,df - 2\,dx = 0, \tag{2.21}$$

a qual, conforme veremos de seguida, é uma equação de variáveis separáveis que admite soluções do tipo

$$f(x) = k_1 e^{2x},$$

onde k_1 é uma constante arbitrária.

Conclui-se assim que a equação diferencial (2.20) admite, por exemplo, a função e^{2x} como fator integrante, pelo que a equação diferencial

$$2e^{2x}\cos y\,dx - e^{2x}\operatorname{sen} y\,dy = 0 \tag{2.22}$$

é exata.

Será que a mesma equação diferencial também admite fatores integrantes que apenas dependem de y? Para tal deverá verificar-se

$$2\frac{\partial\,[g(y)\cos y]}{\partial y} = \frac{\partial\,[-g(y)\operatorname{sen} y]}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dg(y)}{dy}\cos y - g(y)\operatorname{sen} y = 0,$$

obtendo-se novamente uma equação de variáveis separáveis, a saber,

$$\frac{1}{g}\,dg - \operatorname{tg} y\,dy = 0, \tag{2.23}$$

resultando, conforme veremos,

$$g(y) = k_2 \sec y, \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, um fator integrante da equação diferencial (2.20) é, por exemplo, $\sec y$. Assim,

$$2\,dx - \operatorname{tg} y\,dy = 0 \tag{2.24}$$

é uma equação diferencial exata.

Problema Determinar uma família de soluções das equações diferenciais exatas obtidas no exemplo precedente - equações (2.22) e (2.24) - e mostrar que ambas se podem escrever na forma $e^{2x}\cos y = c$, $c \in \mathbb{R}$. Mostrar que esta família de soluções verifica formalmente a equação diferencial (2.20).

A multiplicação de uma equação diferencial não exata por um fator integrante "transforma-a" numa equação diferencial exata. No entanto, a multiplicação da equação original pelo fator integrante gera uma nova equação diferencial, pelo que esta operação pode conduzir a:

(1) perda de (uma ou mais) soluções da equação original, ou seja, há soluções da equação diferencial original que não se obtêm como resultado da resolução da nova equação diferencial;

(2) ganho de "funções" que sendo solução da nova equação diferencial, não são solução da equação diferencial original;

(3) tanto (1) como (2).

Por isso, quando usarmos um fator integrante temos de investigar se existe ganho/perda de soluções. Veremos mais adiante como lidar, na prática, com este aspeto.

Coloca-se agora a questão: como se determina um fator integrante? De momento não responderemos a esta pergunta e passaremos a abordar as equações diferenciais de variáveis separáveis e as equações diferenciais lineares (de primeira ordem). Conforme veremos, as equações diferenciais de variáveis separáveis admitem fatores integrantes de obtenção imediata, enquanto que as equações diferenciais lineares têm fatores integrantes de determinado tipo. O nosso objetivo foi, aqui, o de introduzir o conceito de fator integrante associado à noção/resolução de equações diferenciais exatas.

Exercícios sobre equações diferencial exatas e fatores integrantes

Exercício 2.5 *Considerar a equação diferencial*

$$\left(y^2 + 2xy\right)\,dx - x^2\,dy = 0.$$

(a) Mostrar que a equação diferencial dada não é exata;

(b) Multiplicar ambos os membros da equação diferencial dada por y^n, $n \in \mathbb{Z}$, e determinar o valor de n de forma a que a nova equação diferencial seja exata;

(c) Determinar uma família de soluções da equação diferencial (exata) obtida na alínea (b) e mostrar que esta família de soluções verifica formalmente a equação diferencial não exata;

(d) Mostrar que $y(x) = 0$ é uma solução da equação diferencial não exata, mas não é uma solução da equação diferencial obtida em (b);

(e) Tendo em conta os resultados obtidos nas alíneas (c) e (d), indicar a família de soluções mais geral para a equação diferencial proposta.

Exercício 2.6 *Considerar a equação diferencial*

$$\cos\theta\,d\varphi - \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{tg}\varphi\,d\theta = 0, \quad \varphi \in \left]0, \pi/2\right[.$$

(a) Mostrar que a equação diferencial dada não é exata, mas que admite $\cos\varphi$ *como um fator integrante;*

(b) Determinar uma família de soluções da equação diferencial (exata) que se obtém multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada por $\cos\varphi$ *e mostrar que esta família de soluções verifica formalmente a equação diferencial proposta;*

(c) Mostrar que a equação diferencial dada também admite o fator integrante $\sec\theta\,\operatorname{cotg}\varphi$.

2.4 Equações diferenciais de variáveis separáveis

Definição 2.5 *Uma equação diferencial da forma*

$$f_1(x)g_2(y)\,dx + f_2(x)g_1(y)\,dy = 0 \tag{2.25}$$

designa-se uma ***equação diferencial de variáveis separáveis****.*

Exemplo 2.20 *A equação diferencial*

$$(x-4)\,y^4\,dx - x^3\left(y^2-3\right)\,dy = 0$$

é uma equação diferencial de variáveis separáveis pois é do tipo (2.25), com

$$f_1(x) = x-4, \quad g_2(y) = y^4, \quad f_2(x) = -x^3, \quad g_1(y) = y^2-3.$$

Exemplo 2.21 *As equações diferenciais*

$$-x\,dx + dy = 0, \quad dx - x\,dy = 0 \quad e \quad dx + dy = 0$$

também são equações diferenciais de variáveis separáveis (porquê?).

Problema Averiguar se as equações diferenciais

$$\frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{x+y}{y^2+1}\,dy = 0, \qquad \frac{y}{x^2+1}\,dx + \frac{x+1}{y^2+1}\,dy = 0,$$

são equações diferenciais de variáveis separáveis.
Resp.: Apenas a segunda equação diferencial é de variáveis separáveis.

Em geral, a equação diferencial de variáveis separáveis (2.25) não é exata, mas possui um fator integrante óbvio, a saber

$$\mu(x,y) = \frac{1}{f_2(x)g_2(y)}, \quad g_2(y) \neq 0,\ f_2(x) \neq 0.$$

De facto, multiplicando ambos os membros de (2.25) por $\mu(x,y)$ obtém-se a equação diferencial

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = 0. \tag{2.26}$$

Esta equação diferencial é exata pois

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{g_1(y)}{g_2(y)}\right]$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. A equação diferencial (2.25) pode portanto ser resolvida usando o fator integrante acima e, consequentemente, o procedimento descrito nas secções precedentes relativo às equações diferencias exatas. No entanto, há outra forma de determinar uma solução que é, em geral, bastante mais simples e direta (embora em bom rigor baseada no facto da equação diferencial obtida ser exata). De facto, definindo

$$M(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad \text{e} \quad N(y) = \frac{g_1(y)}{g_2(y)}$$

a equação (2.26) toma a forma (separada)

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0. \tag{2.27}$$

O processo de determinação de uma família de soluções de (2.27) é, na prática, simples, conforme expresso pelo seguinte teorema.

Teorema 2.2 *A equação diferencial exata $M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$, onde M e N são funções de classe $\mathcal{C}^1$, admite uma família de soluções que é dada por*

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c, \tag{2.28}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Demonstração *Sendo (2.27) uma equação diferencial exata, então uma família de soluções dessa equação é da forma $F(x, y) = c$, onde a função $F(x, y)$ existe garantidamente e verifica as condições*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x) \quad e \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(y).$$

Da primeira equação resulta

$$F(x, y) = \int M(x)\,dx + \phi(y),$$

pelo que da segunda equação decorre

$$\frac{\partial\left[\int M(x)\,dx + \phi(y)\right]}{\partial y} = N(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi(y)}{dy} = N(y),$$

donde

$$\phi(y) = \int N(y)\,dy + k$$

e assim

$$F(x, y) = \int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy + k.$$

Tomando $k = 0$ e recordando que uma família de soluções de (2.27) se escreve na forma $F(x, y) = c$, tem-se (2.28) conforme requerido. ■

Portanto, o método de resolução da equação diferencial (2.25) é relativamente direto, uma vez que envolve apenas as primitivações presentes em (2.28), as quais podem ser de menor ou maior complexidade dependendo da forma concreta da equação diferencial em estudo. Há ainda a questão da eventual necessidade do uso de fatores integrantes, a qual será abordada de seguida.

Problema Determinar uma família de soluções da equação diferencial

$$x\,dx - y\,dy = 0.$$

Resp.: $x^2 - y^2 = c$ (ou equação equivalente).

Problema Determinar a solução do PVI

$$x\,dx + y\,dy = 0, \quad y(0) = 5$$

e identificar a curva integral obtida.

Resp.: $x^2 + y^2 - 25 = 0$ (ou equação equivalente); circunferência de raio 5 centrada no ponto de coordenadas $(x, y) = (0, 0)$.

Note-se que uma vez que a equação diferencial exata (2.27) é geralmente obtida a partir da equação diferencial não exata (2.25) usando o fator integrante $1/[f_2(x)g_2(y)]$, pode daí resultar perda ou ganho de soluções. Por outro lado, ao usar este fator integrante supõe-se que $f_2(x)$ e $g_2(y)$ não se anulam. Admitindo que x é a variável independente, resta saber o que se passa quando $g_2(y)$ se anula. Para esse efeito escrevemos a equação diferencial (2.25) na forma

$$f_2(x)g_1(y)\,\frac{dy}{dx} + f_1(x)g_2(y) = 0.$$

Ora, se y_0 é um número real tal que $g_2(y_0) = 0$, isto é, se y_0 é uma raiz da equação $g_2(y) = 0$, então $y(x) = y_0$ é uma solução (constante) da equação diferencial original (2.25) uma vez que

$$f_2(x)g_1(y_0)\,\frac{dy_0}{dx} + f_1(x)g_2(y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

Pode obter-se o mesmo resultado partindo, quer da equação diferencial anterior na forma

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y(x)=y_0} = -\left.\frac{f_1(x)g_2(y)}{f_2(x)g_1(y)}\right|_{y(x)=y_0} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0,$$

quer na forma (2.25), dado que $dy = dy_0 = 0$ e portanto

$$f_1(x)g_2(y_0)\,dx + f_2(x)g_1(y_0)\,dy_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

A solução $g_2(y) = 0$ é sempre uma solução da equação diferencial em estudo, podendo eventualmente ser perdida devido à introdução do fator integrante. Assim sendo, temos de determinar as soluções $y = y_0$ da equação $g_2(y) = 0$ e incluí-las na família de soluções da equação diferencial original. Vejamos como proceder através dos exemplos seguintes.

Exemplo 2.22 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$(x-4)\,y^4\,dx - x^3\left(y^2-3\right)\,dy = 0. \tag{2.29}$$

Solução. *Conforme já vimos no Exemplo 2.20, trata-se de uma equação diferencial de variáveis separáveis, pelo que usando o fator integrante*

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^3y^4}$$

e assumindo que $y^4(x) \neq 0$ e $x^3 \neq 0$ - supomos que x é a variável independente - obtemos a equação diferencial exata

$$\frac{x-4}{x^3}\,dx - \frac{y^2-3}{y^4}\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx - \left(\frac{1}{y^2}-\frac{3}{y^4}\right)dy = 0,$$

a qual pode ser "integrada", obtendo-se

$$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx - \int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3}{y^4}\right)dy = c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Assim

$$-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3} = c \tag{2.30}$$

é uma família de soluções da equação diferencial proposta. De facto, derivando implicitamente ambos os membros da solução encontrada (2.30) em ordem a x, obtém-se

$$-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3} = c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{3}{y^4}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

que é equivalente a ter-se

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx + \left(-\frac{1}{y^2}+\frac{3}{y^4}\right)dy = 0,$$

ou seja, multiplicando por $x^3 \neq 0$ e $y^4(x) \neq 0$,

$$(x-4)\;y^4dx - x^3\left(y^2-3\right)\,dy = 0,$$

que mais não é do que a equação diferencial proposta (2.29).

Coloca-se agora a questão: ao multiplicar a equação original (2.30) pelo fator integrante $x^{-3}y^{-4}$ assumimos que $y^4(x) \neq 0$. Temos agora de considerar as raízes da equação $y^4 = 0$, isto é, $y_0(x) = 0$ (multiplicidade 4). Verifica-se facilmente que esta solução (eixo dos x) não faz parte da família de soluções (2.30), pois não existe nenhum valor da constante c que conduza a $y(x) = 0$ para todo x. No entanto, escrevendo a equação diferencial (2.29) como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-4)y^4}{x^3(y^2-3)}$$

conclui-se imediatamente que $y(x) = 0$ é, tal como esperado, uma solução dessa equação já que

$$y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad e \quad \left.\frac{(x-4)y^4}{x^3(y^2-3)}\right|_{y=0} = 0.$$

Trata-se por isso de uma solução perdida no processo que envolveu o uso de um fator integrante. Portanto, uma família de soluções da equação diferencial (2.29) é

$$-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3}=c \quad e \quad y=0.$$

Exemplo 2.23 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$y\,dx+2x\,dy=0.$$

Solução. *Trata-se de uma equação de variáveis separáveis, pelo que usando o fator integrante*

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xy},$$

e assumindo que $y(x)\neq 0$ *obtemos a equação diferencial exata*

$$\frac{1}{x}\,dx+\frac{2}{y}\,dy=0,$$

resultando

$$\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{2}{y}\,dy=c \quad\Leftrightarrow\quad \ln|x|+2\ln|y|=c,$$

onde c *é uma constante arbitrária. Exponenciando ambos os membros da equação precedente, tem-se*

$$|x|\,y^2=k_1,$$

onde $k_1=e^c$ *é uma (nova) constante arbitrária positiva. É possível escrever a igualdade precedente na forma*

$$xy^2=k_2,$$

onde k_2 *é uma constante arbitrária não nula (porquê?). Note-se que esta família de soluções foi obtida supondo que* $y(x)\neq 0$.

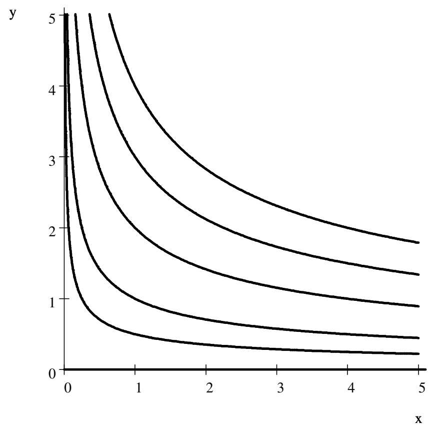
Será que a relação $y(x)=0$ *também é uma solução da equação diferencial proposta? Vimos no caso geral que sim e é fácil de verificá-lo: nesse caso* $y(x)=0\Rightarrow dy=0$, *pelo que a equação* $y\,dx+2x\,dy=0$ *transforma-se na identidade* $0=0$. *Ora, a solução* $y(x)=0$ *não se encontra incluída na família de soluções anteriormente obtida,* $xy^2=k_2$, *já que desta expressão resulta* $y(x)=0$ *para todo* x *real apenas quando* $k_2=0$ *(recorde-se que* $k_2\neq 0$ *por hipótese). Devemos então escrever a família de soluções como*

$$xy^2=k_2,\ k_2\neq 0 \quad e \quad y=0,$$

ou, de forma mais sucinta,

$$xy^2=k, \tag{2.31}$$

onde k *é uma constante real arbitrária.*



Representação gráfica da família de curvas (2.31) no primeiro quadrante

Problema Determinar uma família de soluções da equação diferencial $y\,dx + dy = 0$.
Resp.: $y = ce^{-x}$, onde $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.24 *Determinar a solução do PVI*

$$x \operatorname{sen} y\, dx + \left(x^2+1\right) \cos y\, dy = 0, \quad y(1) = \pi/4. \tag{2.32}$$

Solução. *A equação diferencial é de variáveis separáveis. Multiplicando ambos os membros da mesma pelo fator integrante*

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(x^2+1)\operatorname{sen} y}$$

obtém-se, admitindo que $\operatorname{sen} y(x) \neq 0$,

$$\frac{x}{(x^2+1)}\, dx + \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\, dy = 0.$$

Portanto,

$$\int \frac{x}{(x^2+1)}\, dx + \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\, dy = c_0,$$

onde c_0 *é uma constante arbitrária. Primitivando, tem-se*

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|\operatorname{sen} y| = c_0$$

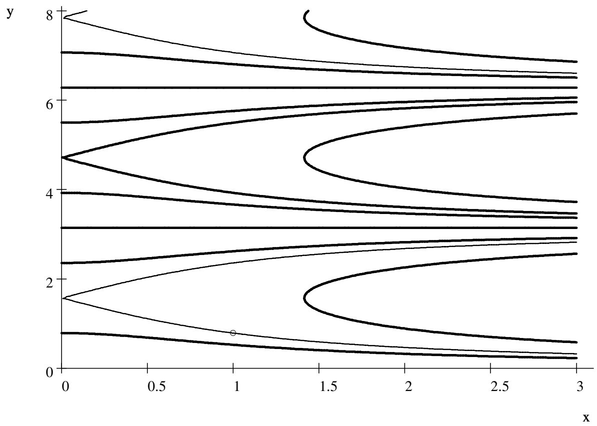
ou, tomando $c_1 = e^{c_0} > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|\operatorname{sen} y| = \ln c_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\sqrt{(x^2+1)} + \ln|\operatorname{sen} y| = \ln c_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\sqrt{(x^2+1)}\,|\operatorname{sen} y|\right) = \ln c_1. \end{aligned}$$

Recorrendo à exponenciação, obtemos a seguinte família de soluções

$$\sqrt{(x^2+1)}\operatorname{sen} y = c, \quad c \neq 0, \tag{2.33}$$

cujo gráfico se apresenta de seguida.



Representação gráfica das famílias de curvas (2.33) e $y = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$*, no primeiro quadrante*

Uma vez que considerámos que $\operatorname{sen} y(x) \neq 0$*, temos agora de averiguar (leia-se "confirmar") se as soluções de* $\operatorname{sen} y(x) = 0$ *também são solução da equação diferencial (2.32). Tem-se,*

$$\operatorname{sen} y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Se escrevermos a equação (2.32) na forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x^2+1}\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y},$$

conclui-se que a solução constante $y(x) = n\pi$ *da equação* $\operatorname{sen} y(x) = 0$ *é também solução da equação diferencial (2.32). Resta saber se esta solução já se encontra incluída na família de soluções (2.33). Verifica-se facilmente que a resposta é negativa, ou seja, não há nenhum valor da constante* $c > 0$ *para o qual a família de curvas integrais (2.33) se resuma ao conjunto de funções* $y(x) = n\pi$ *- ver também figura anterior. Teríamos então a família de soluções*

$$\sqrt{(x^2+1)}\operatorname{sen} y = c,\ c \neq 0 \quad e \quad y = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

É possível condensar este resultado escrevendo-o na forma

$$\sqrt{(x^2+1)}\operatorname{sen} y = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Para determinar a solução do PVI tem de se calcular o valor da constante c de forma a verificar-se a condição $y(1) = \pi/4$*. Tem-se,*

$$c = \left.\sqrt{(x^2+1)}\operatorname{sen} y\right|_{x=1, y=\pi/4} = 1.$$

A solução do PVI proposto é assim (representada a traço fino no gráfico anterior)

$$\sqrt{(x^2+1)}\operatorname{sen} y = 1.$$

Considere-se de novo a forma geral das equações diferenciais de variáveis separáveis,

$$f_1(x)g_2(y)\,dx + f_2(x)g_1(y)\,dy = 0.$$

Outra forma equivalente de representação é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\frac{g_2(y)}{g_1(y)},$$

ou seja, uma **equação diferencial** de primeira ordem é **de variáveis separáveis** se pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \tag{2.34}$$

Exemplo 2.25 *Determinar a solução do PVI*

$$\frac{dy}{dx} = -xy, \quad x > 0,\ y > 0; \quad y(0) = 2. \tag{2.35}$$

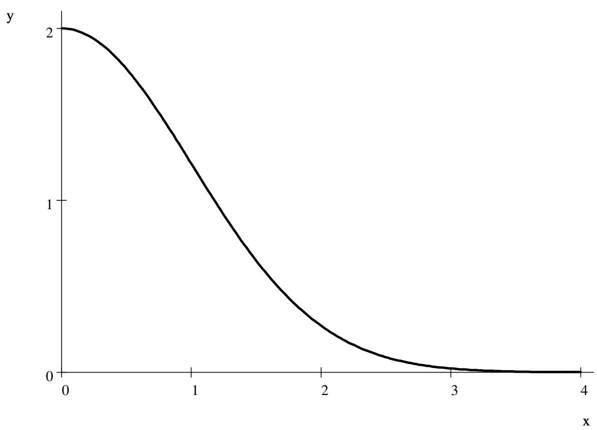
Solução. *A equação diferencial é do tipo (2.34), sendo por isso uma equação diferencial de variáveis separáveis. Tem-se, uma vez que* $y(x) \neq 0$*,*

$$\frac{dy}{dx} = -xy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\,dy = -x\,dx$$

ou seja, primitivando,

$$\ln y = -\frac{x^2}{2} + \ln c \quad \Leftrightarrow \quad y = c\,e^{-x^2/2},$$

onde $c > 0$*. Impondo* $y(0) = 2$ *resulta* $c = 2$*, pelo que a solução do PVI (2.35) é* $y = 2\,e^{-x^2/2}$*.*



Representação gráfica da solução do PVI (2.35)

Exemplo 2.26 *Considere-se um circuito elétrico constituído por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão* E*, uma resistência* R *e uma bobine com indutância* L *ligados em série (circuito RL). Nestas condições a intensidade de corrente* i *em cada instante de tempo* t *obedece à EDO*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E, \quad t > 0.$$

 J. Figueiredo, C. Ribeiro – 2013

Considere-se $E = 20\,V$, $R = 4\,\Omega$, $L = 4\,H$ e ainda que no instante inicial, $t = 0$, se tem $i = 0\,A$. Determinar a intensidade de corrente em cada instante.

Solução. *Trata-se de um PVI em que a equação diferencial envolvida é de variáveis separáveis (porquê?). Escrevendo-a na forma diferencial, resulta*

$$(Ri - E)\,dt + L\,di = 0,$$

ou, assumindo que $i(t) \neq E/R$,

$$\begin{aligned} dt + \frac{L}{Ri - E}\,di = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int dt + \int \frac{L}{Ri - E}\,di = c_1 \\ &\Leftrightarrow \quad t + \frac{L}{R}\ln|Ri - E| = c_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln|Ri - E| = c_1 - \frac{R}{L}t, \end{aligned}$$

onde c_1 é uma constante arbitrária. Exponenciando, resulta

$$Ri - E = c_2 e^{-Rt/L}, \quad c_2 \neq 0,$$

isto é

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(E - c_2 e^{-Rt/L}\right).$$

Recordemos que esta família de soluções foi obtida no pressuposto de que $i(t) \neq E/R$. Ora, mostra-se facilmente que $i(t) = E/R$ é uma solução da equação diferencial dada (porquê?), pelo que uma família de soluções é

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(E + c e^{-Rt/L}\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Impondo a condição $i(0) = 0$, obtém-se

$$i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{R}(E + c) \quad \Rightarrow \quad c = -E,$$

pelo que a solução do PVI proposto é

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right), \quad t \geq 0.$$

Conclui-se desde já que quando $t \to 0$ a intensidade de corrente i tende para E/R (estado estacionário). Tal já era de esperar porque fazendo $di/dt = 0$ na equação diferencial dada, obtém-se $i = E/R$. De notar ainda que da expressão de $i(t)$ decorre que quanto mais elevado for o valor de R/L, mais rapidamente a intensidade atingirá (assintoticamente) o valor estacionário.

Para os valores propostos, $E = 20\,V$, $R = 4\,\Omega$ e $L = 4\,H$, tem-se

$$i(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right), \quad t \geq 0,$$

cujo gráfico se apresenta de seguida.

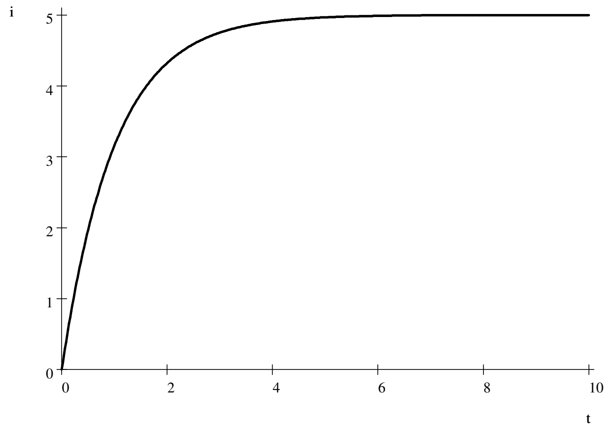


Gráfico da função $i(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right)$, *solução do PVI do Exemplo 2.26*

Problema Considere-se um circuito elétrico constituído por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R e um condensador com capacitância C, ligados em série (circuito RC). Nestas condições a carga instantânea no condensador q é tal que

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E,$$

sendo a intensidade de corrente i em cada instante de tempo t dada por

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Determinar a carga do condensador em cada instante, bem como a intensidade de corrente, sabendo que E, R e C não dependem do tempo e que no instante inicial a carga do condensador era nula. Mostrar que o valor estacionário da carga do condensador é igual a CE e que o valor correspondente da intensidade é zero, conforme seria de esperar se considerarmos $dq/dt = 0$ na equação diferencial dada e atendermos à relação que existe entre i e q.

Resp.: $q = CE(1 - \exp[-t/(CR)])$; $i = E/R \exp[-t/(CR)]$; $\lim q(t)$ quando $t \to \infty$ é igual a CE; $\lim i(t)$ quando $t \to \infty$ é igual a 0.

Consideramos agora equações diferenciais de primeira ordem do tipo

$$\frac{dy}{dx} = h(ax + by + c),$$

onde $b \neq 0$. Em geral estas equações diferenciais não são de variáveis separáveis, mas pode obter-se uma equação diferencial de variáveis separáveis recorrendo a uma mudança de variável apropriada. O seguinte teorema traduz este resultado.

Teorema 2.3 *Seja*

$$\frac{dy}{dx} = h(ax + by + c) \tag{2.36}$$

uma equação diferencial de primeira ordem, onde a, $b \neq 0$ *e* c *são constantes. Então a mudança de variável* $w = ax + by + c$ *transforma a equação diferencial precedente numa equação diferencial de variáveis separáveis nas variáveis* w *e* x.

Demonstração A mudança de variável proposta conduz a

$$w = ax + by + c \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}.$$

Substituindo a expressão de dy/dx dada por (2.36) na equação precedente obtém-se

$$\frac{dw}{dx} = a + bh(w),$$

resultando na equação diferencial de variáveis separáveis

$$\frac{1}{a + bh(w)}\,dw - dx = 0,$$

conforme requerido. ■

Exemplo 2.27 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 3y + 5.$$

Solução. *A mudança de variável adequada é*

$$w = 6x + 3y + 5,$$

resultando, por derivação de ambos os membros desta equação em ordem a x,

$$\frac{dw}{dx} = 6 + 3\frac{dy}{dx}.$$

Ora, atendendo à forma da EDO dada e à mudança de variável proposta, tem-se

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 3y + 5 = w,$$

pelo que a equação diferencial dada escreve-se agora

$$\frac{dw}{dx} = 6 + 3w, \tag{2.37}$$

(note-se que esta EDO é de variáveis separáveis) resultando para $w(x) \neq -2$

$$\frac{1}{2+w}\,dw = 3\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|2+w| = 3x + c_1.$$

Uma vez que $w(x) = -2$ também é solução da equação (2.37), obtém-se a família de soluções

$$w + 2 = ce^{3x}.$$

Atendendo a que $w = 6x + 3y + 5$, obtemos a família de soluções

$$6x + 3y + 7 - ce^{3x} = 0.$$

Para averiguar se esta família de soluções verifica formalmente a equação diferencial dada basta, por exemplo, derivar (implicitamente) a expresão precedente em ordem a x:

$$6+3\frac{dy}{dx}-3ce^{3x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=ce^{3x}-2,$$

ou seja, atendendo a que $ce^{3x}=6x+3y+7$ (porquê?),

$$\frac{dy}{dx}=6x+3y+7-2=6x+3y+5,$$

conforme pretendido.

Nota No exemplo precendente também podíamos ter procedido da seguinte forma. Uma vez que a mudança de variável é $w=6x+3y+5$, então

$$y=\frac{w-6x-5}{3}$$

e, portanto, substituindo esta expressão na equação diferencial dada resulta

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{w-6x-5}{3}\right)=w \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\frac{dw}{dx}-2=w \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dw}{dx}=6+3w.$$

Os restantes passos são iguais aos realizados no exemplo precedente. Qualquer das abordagens apresentadas é correta, pelo que a forma de obter a equação diferencial de variáveis separáveis não é única.

Exemplo 2.28 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}, \quad x>0. \tag{2.38}$$

Solução. Neste caso a mudança de variável adequada é

$$z=x+y,$$

resultando

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}.$$

Mas,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}=\frac{1}{z},$$

tendo-se agora a equação diferencial de variáveis separáveis

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{1}{z}.$$

Admitindo que $z(x)\neq -1$, tem-se

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{1+z}\,dz=dx \quad \Leftrightarrow \quad \left(1-\frac{1}{1+z}\right)dz=dx,$$

que admite a família de soluções

$$
\begin{aligned}
z - \ln|1+z| = x + c_1 \quad &\Leftrightarrow \quad z - x + c_1 = \ln|1+z|\,, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad c_2 e^{z-x} = |1+z|\,, \quad c_2 > 0 \\
&\Rightarrow \quad c_3 e^{z-x} = 1+z, \quad c_3 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Ora, $z(x) = -1$ também é uma solução da equação diferencial (porquê?)

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{z},$$

pelo que uma família de soluções é

$$ce^{z-x} = 1 + z, \quad c \in \mathbb{R}$$

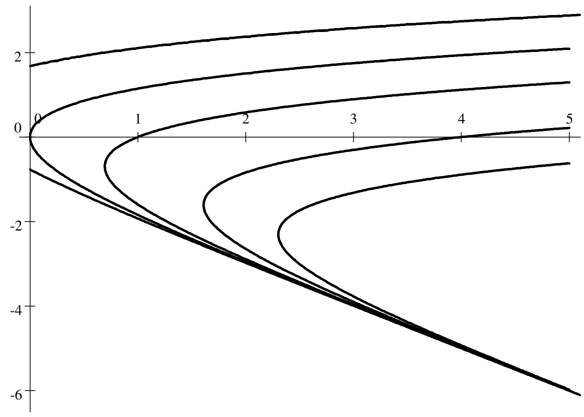
ou

$$ce^{y} = 1 + x + y \quad \Leftrightarrow \quad c = (1 + x + y)\, e^{-y}.$$

Neste caso, dada a forma da família de soluções, decorre da equação precedente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{-y}}{e^{-y} - (1+x+y)\, e^{-y}} = \frac{1}{x+y},$$

ou seja, a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.



Representação gráfica de uma família de soluções de (2.38)

Exemplo 2.29 *Determinar a solução do PVI*

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x-y}, \quad y(0) = 0. \tag{2.39}$$

Solução. *Consideramos a mudança de variável*

$$z = 2x - y,$$

donde

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}.$$

Uma vez que

$$\frac{dz}{dx} = e^{2x-y} = e^z,$$

resulta

$$\frac{dz}{dx} = 2 - e^z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2-e^z} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\int \frac{dz}{e^z - 2} + c_1,$$

onde se supôs que $z(x) \neq \ln 2$ *(porquê?). Ora,*

$$\int \frac{1}{e^z - 2}\, dz = \frac{1}{2} \ln|e^z - 2| - \frac{1}{2} z$$

resultando,

$$x = -\frac{1}{2} \ln|e^z - 2| + \frac{1}{2} z + c_1 \quad \Leftrightarrow \quad z - 2x + 2c_1 = \ln|e^z - 2|$$

e consequentemente

$$c_2 e^{z-2x} = e^z - 2, \quad c_2 \neq 0.$$

Atendendo a que $z(x) = \ln 2$ *é uma solução de* $dz/dx = 2 - e^z$*, a família de soluções pode-se escrever*

$$c e^{z-2x} = e^z - 2, \quad c \in \mathbb{R},$$

ou seja, atendendo a que $z = 2x - y$*,*

$$c e^{-y} = e^{2x-y} - 2.$$

A condição $y(0) = 0$ *implica*

$$c = \left. \frac{e^{2x-y} - 2}{e^{-y}} \right|_{x=0,\, y=0} = -1,$$

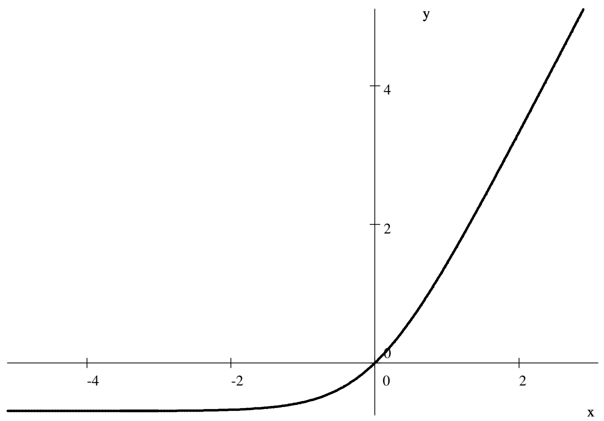
resultando para a solução do PVI

$$e^{2x-y} + e^{-y} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2e^y + 1 = 0.$$

É óbvio que a relação obtida verifica a condição $y(0) = 0$*. Por outro lado, tem-se (porquê?)*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{e^{-y}} = e^{2x-y},$$

como requerido.



Representação gráfica da solução do PVI (2.39)

Problema Determinar uma família de soluções explícitas da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

e mostrar que a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.
Resp.: $y = ce^x - x - 1$.

Exercícios sobre equações diferenciais de variáveis separáveis

Exercício 2.7 *Determinar uma família de soluções de cada uma das seguintes equações diferenciais. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $4xy\,dx + (x^2+1)\,dy = 0$;

(b) $\dfrac{ds}{dr} = -\dfrac{2r\left(s^2+1\right)}{r^4+1}$;

(c) $\operatorname{tg}\theta\,dr + 2r\,d\theta = 0$;

(d) $(x+4)\left(y^2+1\right)\,dx + y\left(x^2+3x+2\right)\,dy = 0$;

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x+y)$.

Exercício 2.8 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $(y+2)\,dx + y\,(x+4)\,dy = 0, \quad y(-3) = -1$;

(b) $8\operatorname{sen}^2 y\,dx + \sec^2 x\,dy = 0, \quad y(\pi/4) = \pi/4$;

(c) $\dfrac{dz}{dx} = xz, \quad z(0) = 0$.

Exercício 2.9 *Determinar uma família de soluções das seguintes equações diferenciais realizando uma mudança de variável adequada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{(x+y)}$;

(b) $\dfrac{dy}{dx} = x - 2y$;

(c) $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$.

2.5 Equações diferenciais homogéneas

Consideramos agora uma classe de equações diferenciais que podem ser transformadas em equações diferenciais de variáveis separáveis através de uma mudança de variável adequada.

Definição 2.6 *A equação diferencial de primeira ordem*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

diz-se uma ***equação diferencial homogénea*** *(de primeira ordem) se quando escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

existir uma função $g(t)$ tal que $f(x,y)$ pode ser expressa como

$$f(x,y) = g(y/x).$$

Assim, uma equação diferencial é homogénea se for da forma,

$$\frac{dy}{dx} = g(y/x). \tag{2.40}$$

Exemplo 2.30 *A equação diferencial*

$$(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea.

Solução. *De facto, podemos escrever a equação dada na forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{x}{y} = \frac{3}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{y/x},$$

pelo que fazendo $t = y/x$, tem-se

$$\frac{dy}{dx} = g(t), \quad com \quad g(t) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{t}.$$

Exemplo 2.31 *A equação diferencial*

$$(x + 2y)\frac{dy}{dx} + (y - 4x) = 0$$

é uma equação diferencial homogénea.

Solução. *Podemos escrever a equação dada como*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - y}{x + 2y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4 - y/x}{1 + 2y/x},$$

resultando

$$\frac{dy}{dx} = g(y/x), \quad com \quad g(t) = \frac{4 - t}{1 + 2t}.$$

Problema Averiguar se as equações diferenciais

$$x\,dx + 2y\,dy = 0; \qquad dx - xy\,dy = 0,$$

são homogéneas.
Resp.: Apenas a primeira equação diferencial é homogénea.

Exemplo 2.32 *A equação diferencial*

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - x\,dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea

Solução. *Tem-se,*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2}} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

A expressão final depende do sinal de x, mas é sempre da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(t), \quad \text{com} \quad g(t) = t \pm \sqrt{1 + t^2},$$

onde $t = y/x$.

Problema Averiguar se as equações diferenciais

$$y^2\,dx - x^3\,dy = 0; \qquad \left(y^2 + x^2\right)\,dx - \left(y^2 - x^2\right)\,dy = 0,$$

são homogéneas.
Resp.: Apenas a segunda equação diferencial é homogénea.

Vejamos agora como averiguar se estamos (ou não) na presença de uma equação diferencial homogénea se esta estiver escrita na forma diferencial. Para esse efeito necessitamos de introduzir o conceito de função homogénea.

Definição 2.7 *Uma função $F(x, y)$, definida num domínio D de $\mathbb{R}^2$, diz-se uma* ***função homogénea de grau n*** *para todo $(x, y) \in D$, se*

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y), \quad \forall t \in I,$$

onde I é um intervalo de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $(tx, ty) \in D$.

Exemplo 2.33 *A função $F(x, y) = x^2 + y^2$ é uma função homogénea de grau 2 pois*

$$F(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2F(x, y), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.34 *A função $F(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ não é homogénea dado que*

$$F(tx, ty) = 1 + (tx)^2 + (ty)^2 = 1 + t^2x^2 + t^2y^2 = 1 + t^2(x^2 + y^2) \neq t^nF(x, y).$$

Exemplo 2.35 *A função $F(x,y) = 1 + x/y$ é uma função homogénea de grau zero, pois*

$$F(tx,ty) = 1 + (tx/ty) = 1 + x/y = t^0 F(x,y), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Problema Averiguar se as funções

$$f(x,y) = 3xy + 5x^2; \qquad g(x,y) = e^{2x/y}; \qquad h(x,y) = x + 1$$

são homogéneas e, em caso afirmativo, indicar o respetivo grau.

Resp.: f é uma função homogénea de grau 2; g é uma função homogénea de grau 0; h não é uma função homogénea.

Podemos agora enunciar um resultado que permite averiguar se uma equação diferencial de primeira ordem escrita na forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é homogénea.

Teorema 2.4 *Considere-se a equação diferencial*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogéneas do mesmo grau, então a equação diferencial é homogénea de primeira ordem.

Demonstração Admitindo que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogéneas de grau n, tem-se

$$\begin{aligned} M(x,y) &= M\left(x, x\frac{y}{x}\right) = x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ N(x,y) &= N\left(x, x\frac{y}{x}\right) = x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

pelo que a equação diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ pode escrever-se na forma

$$x^n \left[M\left(1, \frac{y}{x}\right)\,dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right)\,dy\right] = 0,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}.$$

Ora, o segundo membro desta equação diferencial depende apenas de y/x, pelo que resulta

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

conforme requerido [ver (2.40)]. Note-se que nestas condições $f(x,y)$ é uma função homogénea de grau zero. ■

Exemplo 2.36 *A equação diferencial*

$$\left(x^2 - 3y^2\right)\, dx + 2xy\, dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem.

Solução. *Efetivamente,* $M(x, y) = \left(x^2 - 3y^2\right)$ *e* $N(x, y) = 2xy$ *são ambas funções homogéneas de grau 2. De notar que a equação diferencial dada pode ainda ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

com

$$f(x, y) = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3(y/x)^2 - 1}{2(y/x)},$$

que é uma função homogénea de grau zero.

Exemplo 2.37 *A equação diferencial*

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - x\, dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem.

Solução. *Nesta caso, tanto* $M(x, y) = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ *como* $N(x, y) = -x$ *são funções homogéneas de grau 1:*

$$M(tx, ty) = ty + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = t\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = t\, M(x, y), \quad \forall t \geq 0$$

e

$$N(tx, ty) = -tx = t\, N(x, y), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A equação diferencial dada podia ter sido escrita como

$$\frac{dy}{dx} = h(x, y),$$

onde

$$h(x, y) = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + (y/x)^2},$$

que é uma função homogénea de grau zero.

Problema Averiguar, recorrendo ao resultado expresso no Teorema 2.4, se as seguintes equações diferenciais são homogéneas.

$$(y + 2x)\, dx - x^2\, dy = 0; \qquad x \cos(x/y)\, dx - y\, dy = 0; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y} \cos(x/y).$$

Resp.: Apenas a segunda equação diferencial é homogénea.

Resta agora saber qual a forma de determinar soluções de equações diferenciais homogéneas de primeira ordem. A resolução deste tipo de equações realiza-se recorrendo à seguinte propriedade: toda a equação diferencial homogénea de primeira ordem pode ser transformada numa equação diferencial de variáveis separáveis mediante uma mudança de variável adequada.

Teorema 2.5 *Se $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, então a mudança de variável $y(x)=v(x)\,x$ transforma a equação diferencial dada numa equação diferencial de variáveis separáveis nas variáveis v e x.*

A demonstração deste resultado descreve, com generalidade, o procedimento a adoptar na determinação de famílias de soluções deste tipo de equações diferenciais (e daí o seu interesse).

Demonstração Se $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, então a mudança de variável $y(x)=v(x)\,x$ conduz a

$$M(x,vx)\,dx+N(x,vx)\,d\,(vx)=0.$$

Como as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são, por hipótese, funções homogéneas do mesmo grau - n - tem-se

$$\begin{aligned} M(x,vx)\,dx+N(x,vx)\,d\,(vx)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^n\left[M(1,v)\,dx+N(1,v)\,d\,(vx)\right]=0 \\ &\Leftrightarrow \quad M(1,v)\,dx+N(1,v)\,d\,(vx)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad M(1,v)\,dx+N(1,v)\,\left(v\,dx+x\,dv\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[M(1,v)+vN(1,v)\right]\,dx+xN(1,v)\,dv=0. \end{aligned}$$

A última equação é do tipo (2.25), tratando-se por isso de uma equação diferencial de variáveis separáveis. Usando o fator integrante

$$\mu(x,v)=\frac{1}{x\left[M(1,v)+vN(1,v)\right]}$$

podemos escrever a equação diferencial precedente como

$$\frac{1}{x}\,dx+\frac{N(1,v)}{\left[M(1,v)+vN(1,v)\right]}\,dv=0,$$

obtendo-se a família de soluções

$$\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{N(1,v)}{\left[M(1,v)+vN(1,v)\right]}\,dv=c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Atendendo a que $v=y/x$, resulta a seguinte famíla de soluções da equação diferencial dada

$$\ln|x|+g(v)=c \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x|+g(y/x)=c,$$

onde

$$g(v)=\int\frac{N(1,v)}{\left[M(1,v)+vN(1,v)\right]}\,dv$$

é determinada a partir das funções M e N dadas.

Alternativamente, podemos partir da hipótese (equivalente) de que uma equação diferencial homogénea se pode escrever na forma

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

onde

$$f(x,y)=g(y/x),$$

ou seja, $f(x, y)$ é uma função homogénea de grau zero. Assim, substituindo $y(x) = x\,v(x)$ na equação diferencial, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x\,v) = g(v) \quad &\Leftrightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = g(v) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{g(v) - v}{x} \end{aligned}$$

que é uma equação de variáveis separáveis (porquê?), tal como pretendido. ∎

Nota A mudança de variável $y(x) = v(x)\,x$ mantém x como variável independente da equação diferencial. Resultado idêntico seria obtido usando a mudança de variável $x(y) = v(y)\,y$, mas neste caso y passaria a assumir o papel de variável independente. Há casos em que a mudança de variável $x(y) = v(y)\,y$ é mais vantajosa pelo facto da equação de variáveis separáveis que se obtém ser de mais simples resolução, mas tal só pode ser aferido realizando o cálculo recorrendo a cada uma destas mudanças de variável.

Outra situação que aconselha o uso de uma das mudanças de variável em deterimento da outra surge no âmbito da resolução de PVIs. Por exemplo, num PVI em que a condição seja $y(0) = 1$ a mudança de variável $v = y/x$ pode não ser adequada uma vez que a condição inicial envolve $x = 0$, sendo geralmente preferível usar $v = x/y$. De igual modo, se a condição for $y(1) = 0$, então pode ser preferível usar $v = y/x$ em vez de $v = x/y$, já que a condição inicial envolve $y = 0$.

Exemplo 2.38 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\left(x^2 - 3y^2\right) dx + 2xy\,dy = 0, \quad x > 0. \tag{2.41}$$

Solução. *Conforme vimos no Exemplo 2.36, trata-se de uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, pelo que usamos a mudança de variável $y(x) = v(x)\,x$, resultando*

$$\left(x^2 - 3v^2x^2\right) dx + 2x^2v\,(v\,dx + x\,dv) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - 3v^2\right) dx + 2v\,(v\,dx + x\,dv) = 0.$$

Agrupando os termos em dx e dv, obtém-se

$$\left(1 - 3v^2 + 2v^2\right) dx + 2vx\,dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - v^2\right) dx + 2vx\,dv = 0. \tag{2.42}$$

Trata-se agora de uma equação diferencial de variáveis separáveis, pelo que usando o fator integrante

$$\mu(x, v) = \frac{1}{(1 - v^2)\,x},$$

obtém-se ($x \neq 0$, $v(x) \neq \pm 1$)

$$\frac{1}{x}\,dx + 2\frac{v}{1 - v^2}\,dv = 0, \quad 1 - v\,(x)^2 \neq 0,$$

ou seja

$$\ln|x| - \ln\left|1 - v^2\right| = c_0 = \ln c_1,$$

onde c_0 e $c_1 > 0$ são constantes arbitrárias. Exponenciando ambos os membros da equação anterior resulta

$$|x| = c_1\left|1 - v^2\right|$$

ou

$$c_2\,|x| = \left|1 - v^2\right|,$$

onde $c_2 = c_1^{-1} > 0$ *é uma constante arbitrária. Pode-se ainda escrever,*

$$cx = 1 - v^2, \quad c \neq 0. \tag{2.43}$$

Falta agora averiguar se devido à aplicação do fator integrante

$$\mu(x, v) = \frac{1}{(1 - v^2)\,x},$$

ou seja, por se ter suposto que

$$1 - v\,(x)^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v\,(x) \neq \pm 1$$

houve perda de soluções. É fácil verificar que $v(x) = \pm 1$ *são soluções de (2.42) e que estas soluções não estão incluídas na família de curvas (2.43) a menos que* c *pudesse tomar o valor* 0*. Assim, uma família de soluções de (2.42) é*

$$cx = 1 - v^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Atendendo a que $y = vx$ *e* $x > 0$*, tem-se a família de soluções de (2.41)*

$$cx^3 = x^2 - y. \tag{2.44}$$

Nota: alternativamente, podíamos ter escrito a equação diferencial (2.41) como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \quad x > 0,\ y(x) \neq 0,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3(y/x)^2}{2(y/x)}, \quad x > 0,\ y(x) \neq 0.$$

Realizando a mudança de variável $y = vx$*, e supondo agora que* $v(x) \neq 0$*, teríamos*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,(v\,x) = \frac{3v^2 - 1}{2v} \qquad &\Leftrightarrow \qquad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} \\
&\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x}\,dx = 2\frac{v}{v^2 - 1}\,dv \\
&\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x}\,dx + 2\frac{v}{1 - v^2}\,dv = 0,
\end{aligned}$$

impondo-se que $v\,(x) \neq \pm 1$*. O resto da resolução é igual ao já realizado no início deste exemplo, à excepção da condição* $v(x) \neq 0$*. No entanto, esta condição nada traz de novo, pois a função* $y(x) = 0$ *não é solução da equação diferencial proposta (porquê?).*

Problema Determinar um família de soluções (na forma explícita) da equação diferencial

$$y\,dx + x\,dy = 0, \quad x > 0.$$

(que é simultaneamente homogénea, exata e de variáveis separáveis) realizando para esse efeito a mudança de variável (i) $y = vx$ e (ii) $x = vy$. Mostrar ainda que a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.
Resp.: $y = cx^{-1}$, onde $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.39 *Determinar a solução do PVI*

$$dx + dy = 0, \quad x > 0; \quad y(0) = 1.$$

usando uma mudança de variável adequada.

Solução. *Tratando-se de uma equação diferencial homogénea de primeira ordem (porquê?), atendendo à condição $y(0) = 1$, escolhemos realizar a mudança de variável $x = vy$, pelo que*

$$d\,(vy) + dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y\,dv + (v+1)\,dy = 0, \tag{2.45}$$

ou seja, assumindo $y \neq 0$ e $v(y) \neq -1$,

$$\frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{1+v}\,dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| + \ln|1+v| = c_1,$$

pelo que

$$y(1+v) = c_2, \quad c_2 > 0.$$

Atendendo a que $v(y) = -1$ é uma solução de (2.45), então uma família de soluções desta equação diferencial escreve-se

$$y(1+v) = c,$$

onde c é uma constante arbitrária. O valor da constante arbitrária c podia-se determinar aplicando a condição $y(v = 0) = 1$, uma vez que é esta a condição que resulta de $y(x = 0) = 1$ atendendo a que $x = vy$. Tal conduziria a $c = 1$. Alternativamente, podemos obter primeiro a família de soluções que decorre de $y(1+v) = c$ e $x = vy$:

$$y\left(1 + \frac{x}{y}\right) = c \quad \Leftrightarrow \quad y + x = c.$$

Aplicando agora a condição $y(0) = 1$, resulta $c = 1$ (como esperado) e portanto

$$y + x = 1.$$

Exemplo 2.40 *Determinar a solução do PVI*

$$(y + \sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0, \quad x > 0; \quad y(3/2) = 0. \tag{2.46}$$

Solução. *Vimos no Exemplo 2.37 que a equação diferencial acima é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, pelo que fazemos a mudança de variável $y = vx$. Resulta assim,*

$$(vx + \sqrt{x^2 + (vx)^2})\,dx - x\,d\,(vx) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v + \sqrt{1+v^2})\,dx - d\,(vx) = 0,$$

isto é

$$(v + \sqrt{1+v^2})\,dx - v\,dx - xdv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1+v^2}\,dx - x\,dv = 0.$$

Obtemos, conforme esperado, uma equação diferencial de variáveis separáveis. Usando o fator integrante

$$\mu(x, v) = \frac{1}{x\sqrt{1+v^2}},$$

tem-se (note-se que $\sqrt{1+v^2} \neq 0$ *é uma condição universal)*

$$\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,dv \quad \Rightarrow \quad \ln x + \ln c = \ln\left|v + \sqrt{1+v^2}\right|, \quad c > 0.$$

Exponenciando, resulta

$$cx = v + \sqrt{1+v^2}, \quad c > 0.$$

Dado que $v = y/x$*, obtém-se a família de soluções*

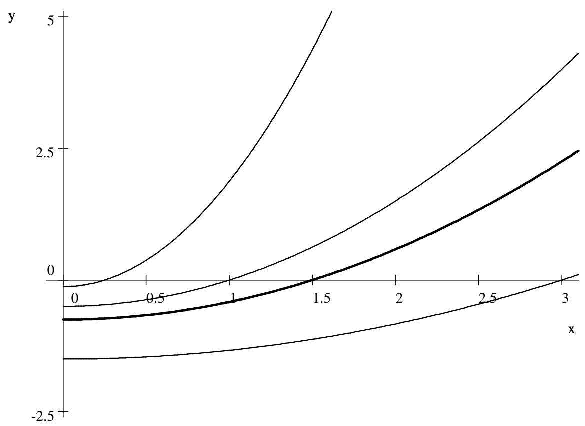
$$cx^2 = y + \sqrt{x^2+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2c}\left(c^2x^2 - 1\right), \quad c > 0, \tag{2.47}$$

não sendo necessário verificar se houve soluções da equação diferencial proposta que se perderam por aplicação do fator integrante (porquê?). A condição inicial $y = 0$ *quando* $x = 3/2$ *conduz a*

$$cx^2\Big|_{x=3/2,\ y=0} = y + \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=3/2,\ y=0} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2}{3},$$

pelo que se tem a seguinte solução (explícita) do PVI (2.46)

$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{4}, \quad x > 0. \tag{2.48}$$



Representação gráfica da família de curvas (2.47). A cheio apresenta-se a solução do PVI (2.46)

Mostramos agora que (2.48) é efetivamente a solução do PVI (2.46). Tem-se, partindo de (2.48),

$$y(3/2) = 0,$$

conforme requerido. Por outro lado, de (2.48) resulta

$$dy = \frac{2}{3}x\,dx,$$

pelo que substituindo as expressões obtidas para y *e* dy *na equação diferencial (2.46), obtém-se*

$$\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{144}\left(4x^2+9\right)^2}\right)dx - \frac{2}{3}x^2\,dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0,$$

J. Figueiredo, C. Ribeiro – 2013

conforme requerido. Portanto, a solução obtida para o PVI (2.46) verifica-o formalmente. Por outro lado, tem-se que o domínio da função definida por (2.48), bem como da sua primeira derivada, é $\mathbb{R}^+$ *e que o domínio associado à forma da equação diferencial dada*

$$(y + \sqrt{x^2+y^2})\, dx - x\, dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}, \quad x > 0,$$

é também $\mathbb{R}^+$*, pelo que concluímos que (2.48) não só verifica formalmente o PVI (2.46) como é a sua solução.*

Problema Determinar a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{2y}, \quad y(1) = 0,$$

e mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI.
Resp.: $x = e^{(y/x)^2}$.

Exercícios sobre equações diferenciais homogéneas de primeira ordem

Exercício 2.10 *Determinar uma família de soluções de cada uma das equações diferenciais seguintes. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $(x + y)\, dx - x\, dy = 0, \quad x < 0;$

(b) $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{v^3}{uv^2 - u^3};$

(c) $\left(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2}\right) dx - xy\sqrt{x^2+y^2}\, dy = 0, \quad x > 0.$

Exercício 2.11 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $\left(x^2 + 3y^2\right) dx - 2xy\, dy = 0, \quad y(2) = 6;$

(b) $(2x - 5y)\, dx + (4x - y)\, dy = 0, \quad y(0) = 4.$

Exercício 2.12 *Determinar uma família de soluções das equações diferenciais seguintes usando dois métodos distintos. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 2y}{y - 2x};$

(b) $\left(x^2 + 2y^2\right) dx + \left(4xy - y^2\right) dy = 0.$

Exercício 2.13 *Averiguar em que condições é que a equação diferencial*

$$\left(Ax^2 + Bxy + Cy^2\right) dx + \left(Dx^2 + Exy + Fy^2\right) dy = 0,$$

onde A, B, C, D, E *e* F *são constantes não nulas,* *(a) é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem;*

(b) é uma equação diferencial exata.

Exercício 2.14 *Seja $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ uma equação diferencial homogénea de primeira ordem. Mostrar que a transformação $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ transforma esta equação diferencial numa equação diferencial de variáveis separáveis nas variáveis r e θ.*

2.6 Equações diferenciais lineares

Definição 2.8 *Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, na variável dependente y e na variável independente x, que esteja ou possa ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.49}$$

*designa-se uma **equação diferencial linear** (de primeira ordem).*

Nota *A equação diferencial (2.49) resulta, na realidade, de escrever (1.6) - ver página 4 - de forma a que o termo que multiplica dy/dx seja igual a 1. Note-se ainda que da definição precedente decorre que uma equação diferencial de primeira ordem é linear se quando representada na forma normal assume a forma*

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{P}(x)y + Q(x).$$

De igual modo, se se encontrar escrita na forma diferencial, então será do tipo

$$\left[P(x)y + \tilde{Q}(x)\right] dx + dy = 0$$

ou equivalente (pois a forma diferencial associada a (2.49) não é, como já vimos, única).

Exemplo 2.41 *A equação diferencial*

$$-\frac{dy}{dx} + y - e^{-x} = 0$$

é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem já que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} - y = -e^{-x}.$$

É, portanto, da forma (2.49) com

$$P(x) = -1, \quad Q(x) = -e^{-x}.$$

Exemplo 2.42 *A equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} + (1 + x)\,y = x^3$$

é uma equação diferencial linear dado que é da forma (1.6). Assim sendo, pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} + \left(x^{-1} + 1\right) y = x^2,$$

tendo-se

$$P(x) = x^{-1} + 1, \quad Q(x) = x^2.$$

Exemplo 2.43 *São também equações diferenciais lineares de primeira ordem (considerando y a variável dependente):*

$$\frac{dy}{dx} = e^x(x+1)y - 2x; \qquad \tilde{P}(x) = e^x(x+1), \qquad Q(x) = -2x,$$

$$-3x\,(y+x)\;dx + dy = 0; \qquad P(x) = -3x, \qquad Q(x) = -3x^2.$$

Problema Mostrar que relativamente às equações diferenciais seguintes

$$2\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} - e^x; \qquad 2x\,dy - 5y\,dx = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - 3\frac{x^2}{y} = 2e^y; \qquad x\,dy + 2y^2\,dx = 0,$$

se tem quatro situações distintas: linearidade somente se a variável dependente for y, linearidade somente se a variável dependente for x, linearidade qualquer que seja a variável dependente e, finalmente, não linearidade qualquer que seja a variável dependente escolhida.

Escrevamos agora a equação (2.49) na forma

$$[P(x)y - Q(x)]\;dx + dy = 0. \tag{2.50}$$

Esta equação diferencial é da forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

com

$$M(x,y) = P(x)y - Q(x), \quad N(x,y) = 1.$$

Dado que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = P(x), \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial y} = 0,$$

concluímos que a equação diferencial (2.50) não é exata, a menos que $P(x) = 0$, caso em que teríamos uma equação diferencial de variáveis separáveis. No entanto, a equação diferencial (2.50) possui um fator integrante que só depende da variável independente x, $\mu(x)$, que passamos a determinar.

Comecemos por multiplicar ambos os membros da equação diferencial (2.50) por $\mu(x)$. Resulta,

$$\mu(x)\,[P(x)y - Q(x)]\;dx + \mu(x)\,dy = 0.$$

Por definição, $\mu(x)$ é um fator integrante da equação diferencial precedente se e só se esta for exata, isto é, se e só se

$$\frac{\partial}{\partial y}\,[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)] = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x)P(x) = \frac{d\mu(x)}{dx},$$

ou seja, sempre que

$$\frac{1}{\mu(x)}\,d\mu(x) = P(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|\mu(x)| = \int P(x)\,dx.$$

Se assumirmos que $\mu(x) > 0$, tem-se

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \tag{2.51}$$

Portanto, a equação diferencial (2.50) possui um fator integrante da forma (2.51), pelo que podemos determinar uma família de soluções usando essa propriedade. Dado que o fator integrante não depende da incógnita, não precisamos de nos preocupar com a possibilidade de haver perda de soluções (porquê?).

Exemplo 2.44 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial linear de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} + 2x^{-1}y = x^3, \quad x > 0, \tag{2.52}$$

usando um fator integrante adequado.

Solução. *Começamos por escrever a equação dada na forma diferencial, isto é,*

$$(2x^{-1}y - x^3)\,dx + dy = 0. \tag{2.53}$$

Neste caso tem-se $P(x) = 2x^{-1}$ *e* $Q(x) = x^3$, *pelo que de (2.51) decorre que um fator integrante da equação precedente é*

$$\mu(x) = e^{2\int x^{-1}\,dx} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Multiplicando ambos os membros de (2.53) por $\mu(x) = x^2$ *obtém-se a equação diferencial exata*

$$(2xy - x^5)\,dx + x^2\,dy = 0.$$

Ora, uma família de soluções desta equação escreve-se, conforme já vimos,

$$F(x, y) = c,$$

onde a função F *existe e é solução do seguinte sistema de equações*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = (2xy - x^5), \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2.$$

Após alguns cálculos simples, obtém-se

$$F(x, y) = x^2y - \frac{x^6}{6} + k,$$

pelo que uma família de soluções de (2.53) é (tomando $k = 0$*)*

$$x^2y - \frac{x^6}{6} = c. \tag{2.54}$$

Mostramos agora que (2.54) verifica formalmente a equação diferencial (2.52). De (2.54) resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy - x^5}{x^2} = x^3 - 2x^{-1}y,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} + 2x^{-1}y = x^3,$$

que mais não é do que (2.52), conforme requerido.

Portanto, uma equação diferencial linear de primeira ordem pode ser transformada numa equação diferencial exata, usando o fator integrante dado por (2.51), e resolvida enquato tal. No entanto, o fator integrante dado por (2.51) tem propriedades que permitem determinar uma família de soluções da equação linear de primeira ordem (2.49) sem obrigar à resolução de uma equação diferencial exata. Descrevemos agora esse procedimento.

Vejamos, multiplicando a equação (2.49) pelo fator integrante (2.51), tem-se

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)\,dx}P(x)y=e^{\int P(x)\,dx}Q(x) \tag{2.55}$$

ou (este é o passo chave da resolução!)

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)\,dx}y]=e^{\int P(x)\,dx}Q(x) \tag{2.56}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)\,dx}y] &= e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)\,dx}]\,y\\ &= e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)\,dx}\frac{d}{dx}\left[\int P(x)\,dx\right]y\\ &= e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)\,dx}P(x)\,y.\end{aligned}$$

Primitivando ambos os membros de (2.56) obtém-se a família de soluções de (2.49)

$$e^{\int P(x)\,dx}y=\int e^{\int P(x)\,dx}Q(x)\,dx+c,$$

onde c é uma constante arbitrária, ou seja,

$$\mu(x)\,y=\int \mu(x)Q(x)\,dx+c.$$

Tem-se então o seguinte resultado.

Teorema 2.6 *A equação diferencial linear*

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{2.57}$$

tem um fator integrante, $\mu(x)$, da forma

$$\mu(x)=e^{\int P(x)\,dx}. \tag{2.58}$$

Uma família de soluções desta equação diferencial é

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)Q(x)\,dx+c\right].$$

É possível mostrar que esta família de soluções inclui todas as soluções da equação diferencial (2.49). Mais adiante voltaremos a abordar esta questão no âmbito da resolução analítica das equações lineares de ordem n.

Nota O resultado (2.55) $\Rightarrow$ (2.56), essencial na demonstração do teorema precedente, não é natural, pelo que tivemos de recorrer ao resultado inverso para justificar de forma mais evidente a equivalência entre (2.55) e (2.56). Curiosamente, há outra obordagem que permite obter o mesmo resultado sem recorrer a esta equivalência.

O ponto de partida é novamente a equação diferencial (2.57) e em particular o termo

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y.$$

Coloca-se a questão: será que existe uma função φ, apenas dependente da variável independente x, que tenha a seguinte propriedade?

$$\varphi(x)\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right) = \frac{d}{dx}\left(\varphi(x)y\right). \tag{2.59}$$

Se assim for, ter-se-á, desenvolvendo (2.59), a igualdade

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x)P(x)y = \frac{d\varphi(x)}{dx}y + \varphi(x)\frac{dy}{dx}$$

ou seja,

$$\varphi(x)P(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

que mais não é do que a equação diferencial obtida anteriormente para o fator integrante, a saber,

$$\mu(x)P(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}.$$

Concluindo, o fator integrante (2.51) tem a propriedade (2.59), ou seja,

$$\mu(x)\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right) = \frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right),$$

pelo que (2.55) $\Leftrightarrow$ (2.56). Portanto, multiplicando ambos os membros da equação diferencial (2.57) pelo fator integrante $\mu(x)$, obtém-se

$$\mu(x)\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right) = \mu(x)Q(x).$$

O que acabámos de ver, por dois processos distintos, é que o primeiro membro da equação precedente se transforma em

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right),$$

conduzindo a

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right) = \mu(x)Q(x).$$

Depois basta primitivar ambos os membros desta equação em ordem a x e obtém-se uma família de soluções (na forma explícita) da equação diferencial (2.57).

Tal como em ocasiões anteriores, o procedimento geral pode sugerir complexidade no método de resolução, mas este é relativamente simples, conforme se mostra nos exemplos seguintes.

Exemplo 2.45 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial linear de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} + \left(2 + x^{-1}\right) y = e^{-2x}. \tag{2.60}$$

Solução. *A equação diferencial já se encontra escrita na forma (2.49), tendo-se*

$$P(x) = 2 + x^{-1}, \quad Q(x) = e^{-2x},$$

pelo que o fator integrante a usar é

$$\mu(x) = \exp \int \left(2 + x^{-1}\right)\, dx = \exp\left(2x + \ln|x|\right) = e^{2x}\,|x|\,,$$

cuja forma final depende do sinal de x. Dado tratar-se de um fator integrante podemos usar, por exemplo,

$$\mu(x) = xe^{2x}.$$

Multiplicando ambos os membros de (2.60) por $\mu(x)$ resulta,

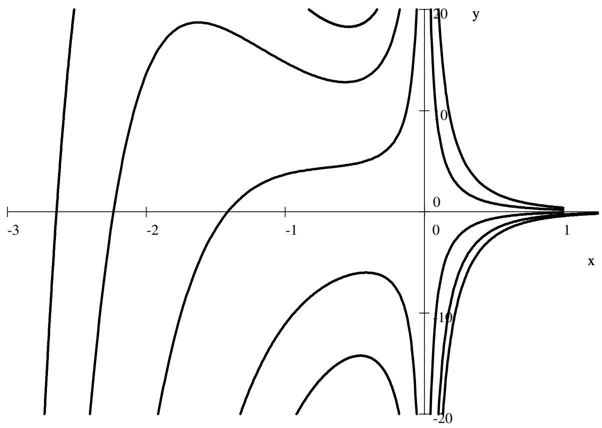
$$xe^{2x}\frac{dy}{dx} + e^{2x}\left(2x+1\right) y = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(xe^{2x}y\right) = x$$

ou, equivalentemente,

$$xe^{2x}y = \frac{x^2}{2} + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Tem-se então a família de soluções

$$y = \left(\frac{1}{2}x + cx^{-1}\right) e^{-2x}.$$



Representação gráfica da família de curvas $y = (\frac{1}{2}x + cx^{-1})e^{-2x}$

Nota: Aconselha-se fazer sempre a verificação da igualdade

$$xe^{2x}\frac{dy}{dx} + e^{2x}\left(2x+1\right) y = \frac{d}{dx}\left(xe^{2x}y\right), \tag{2.61}$$

pois assim garante-se que o fator integrante está bem calculado. Para tal basta derivar o produto do fator integrante pela variável dependente, neste caso $xe^{2x}y$, e verificar se se obtém a identidade (2.61). No caso concreto deste exemplo tem-se

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{2x}y\right) = xe^{2x}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}\left(xe^{2x}\right) = xe^{2x}\frac{dy}{dx} + e^{2x}\left(1+2x\right)y,$$

o que mostra que a identidade (2.61) é válida e portanto confirma-se que o fator integrante está bem calculado.

Problema Escrever a equação diferencial de primeira ordem

$$-\frac{dy}{dx} - y = x + 1$$

na forma (2.57) e determinar uma família de soluções na forma explícita. Mostrar ainda que a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.

Resp.: $y = ce^{-x} - x$.

Exemplo 2.46 *Determinar a solução do PVI*

$$2\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx} + 8xy = 2x, \quad y(2) = 1. \tag{2.62}$$

Solução. *A equação diferencial dada pode ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1}.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear com

$$P(x) = \frac{4x}{x^2+1}, \quad Q(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Um fator integrante a usar é então

$$\mu(x) = \exp\left(\int P(x)\,dx\right) = \exp\left(\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx\right) = \exp\left[2\ln\left(x^2+1\right)\right] = \left(x^2+1\right)^2.$$

Tem-se assim,

$$\left(x^2+1\right)^2\frac{dy}{dx} + 4x\left(x^2+1\right)y = x\left(x^2+1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)^2 y\right] = x\left(x^2+1\right),$$

pelo que primitivando ambos os membros da equação precedente resulta

$$\left(x^2+1\right)^2 y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c \tag{2.63}$$

ou

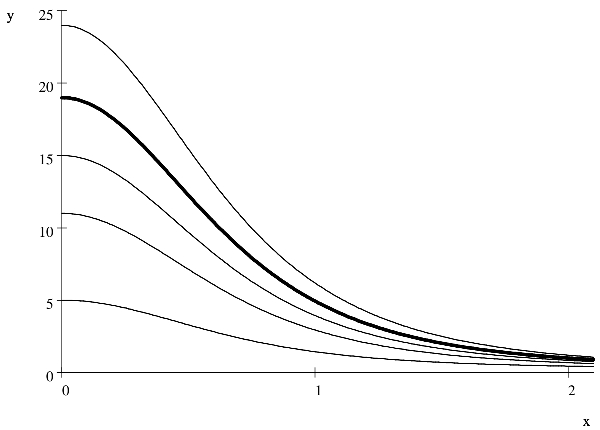
$$\left(x^2+1\right)^2 y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = c \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c\right),$$

onde c é uma constante arbitrária. Esta família de soluções é representada na figura seguinte. Para que se verifique a condição inicial $y(2) = 1$*, tem-se*

$$\left.\left(x^2+1\right)^2 y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right|_{x=2,\ y=1} = c \quad \Rightarrow \quad c = 19.$$

Desta forma, a solução do PVI (2.62) é

$$\left(x^2+1\right)^2 y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = 19 \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 19\right)\left(x^2+1\right)^{-2}.$$



Representação gráfica da família de soluções (2.63). Nos restantes quadrantes a representação é simétrica devido à forma da família de soluções. A cheio representa-se a solução do PVI (2.62)

De novo, podemos verificar se a solução encontrada para o PVI está correta. Consideremos, por exemplo, a solução na forma (2.63). Tem-se, para $c = 19$*, a identidade*

$$\left.\left(x^2+1\right)^2 y\right|_{x=2,\ y=1} = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right|_{x=2,\ y=1} + 19 \quad \Rightarrow \quad 25 = 25.$$

Por outro lado, de

$$\left(x^2+1\right)^2 y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = c$$

resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x\left(x^2+1\right)y - x^3 - x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x - 4xy}{x^2+1}$$

isto é,

$$\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx} + 4xy = x,$$

que é equivalente a (2.63), conforme requerido.

Exemplo 2.47 *Pretende-se determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$y^2\,dx + (3xy-1)\,dy = 0.$$

Solução. *Tem-se*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{1-3xy} = 0,$$

pelo que a equação diferencial dada não é linear em $y(x)$. No entanto, se considerarmos que x é a variável dependente e y a variável independente, podemos escrever

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1-3xy}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{3}{y}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = \frac{1}{y^2},$$

que é uma equação linear (em x) - ver (2.49). Podemos por isso determinar um fator integrante para esta equação, a saber,

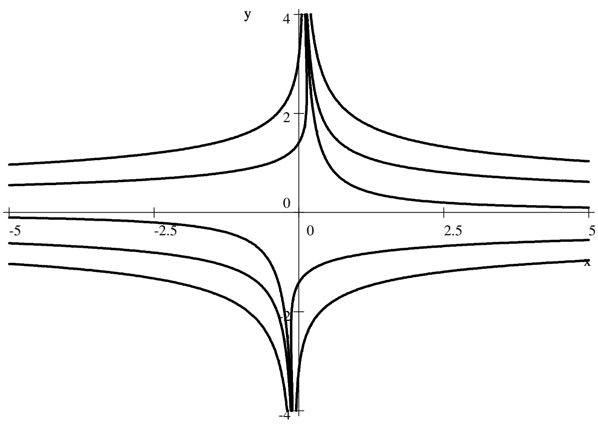
$$\mu(y) = \exp\left(\int 3y^{-1}\,dy\right) = \exp\left(\ln|y|^3\right) = |y|^3.$$

Assim, adoptando $\mu(y) = y^3$, resulta

$$y^3\frac{dx}{dy} + 3y^2x = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dy}\left(y^3x\right) = y \quad \Rightarrow \quad y^3x = \frac{1}{2}y^2 + c,$$

onde c é uma constante arbitrária, pelo que se obtém a família de soluções

$$x = \frac{1}{2y} + \frac{c}{y^3}.$$



Representação gráfica da família de curvas $y^3x = \dfrac{1}{2}y^2 + c$

Exemplo 2.48 *Considere-se um circuito elétrico constituído por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R e uma bobine com indutância L ligados em série (circuito RL), tal como fizemos no Exemplo 2.26 (ver página 56). Vamos considerar que a intensidade de corrente i em cada instante de tempo t obedece ao PVI*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E, \quad t > 0; \quad i(0) = 0. \tag{2.64}$$

Vimos que se trata de uma equação diferencial de variáveis separáveis quando se assume que E não depende de t. Assumiremos agora que $E = E(t)$ e $R = 4\,\Omega$, $L = 4\,H$. O objetivo é, tal como anteriormente, determinar a intensidade de corrente em cada instante de tempo $i(t)$.

Solução. *Trata-se de um PVI em que a equação diferencial envolvida é linear tal como, de facto, acontecia no Exemplo 2.26 (porquê?). Tem-se,*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L},$$

pelo que

$$P(t) = \frac{R}{L}$$

e, portanto, tem-se um fator integrante que é

$$\mu(t) = \exp\left(\textstyle\int \frac{R}{L}\,dt\right) = e^{Rt/L}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{Rt/L}\frac{di}{dt} + e^{Rt/L}\frac{R}{L}i = e^{Rt/L}\frac{E}{L} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{Rt/L}i\right) = e^{Rt/L}\frac{E}{L} \qquad \textit{(confirmar!)} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{Rt/L}i = \frac{1}{L}\int Ee^{Rt/L}\,dt + c,\end{aligned}$$

resultando na família de soluções (para $R = L = 4$)

$$i = e^{-t}\left(\frac{1}{4}\int Ee^{t}\,dt + c\right), \tag{2.65}$$

cuja expressão final depende de $E(t)$:

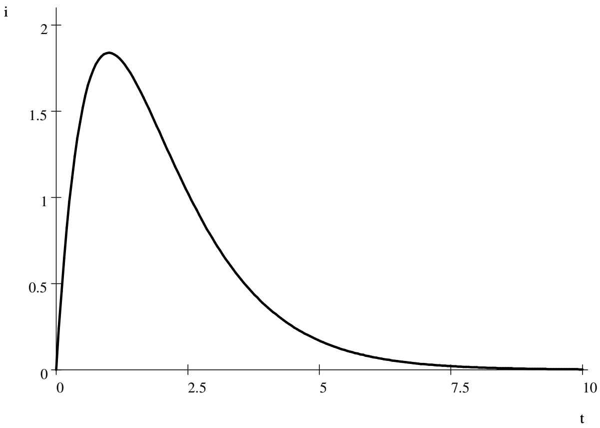
(i) Se E não depender de t, reencontramos o resultado obtido no Exemplo 2.26 (porquê?);

(ii) Se tomarmos $E = 20e^{-t}$, então de (2.65) obtém-se

$$i = e^{-t}\left(\frac{1}{4}\int 20\,dt + c\right) = e^{-t}\left(5t + c\right),$$

resultando da condição $i(0) = 0$,

$$i = 5te^{-t};$$



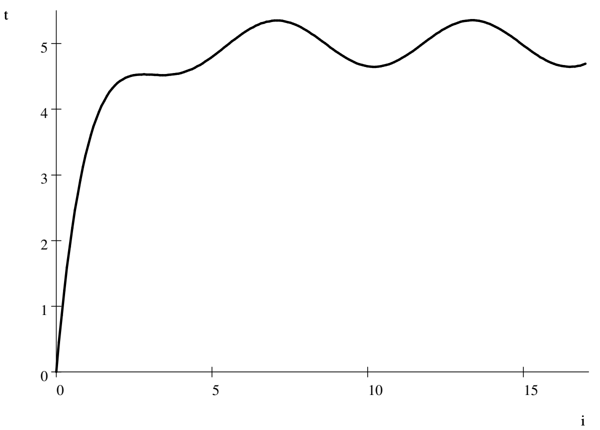
Representação gráfica da solução do PVI (2.64) quando $E = 20e^{-t}$

(iii) Já se considerarmos $E = 20 + 2\cos t$, *tem-se*

$$i = e^{-t}\left(\frac{1}{4}\int (20 + 2\cos t)\, e^{t}\, dt + c\right) = \frac{1}{4}(\cos t + \operatorname{sen} t) + ce^{-t} + 5,$$

obtendo-se, da condição inicial,

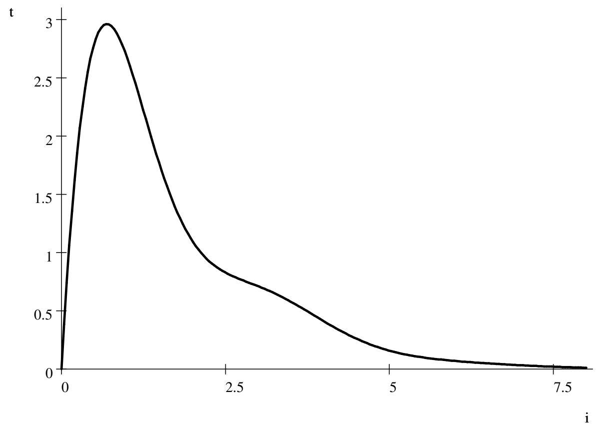
$$i = \frac{1}{4}(\cos t + \operatorname{sen} t) - \frac{21}{4}e^{-t} + 5;$$



Representação gráfica da solução do PVI (2.64) quando $E = 20 + 2\cos t$

(iv) Finalmente, considerando $E = 20(1 + \cos 2t)e^{-t}$, *tem-se a partir de (2.65) e de* $i(0) = 0$,

$$i = e^{-t}\left(5t + \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2t\right).$$



Representação gráfica da solução do PVI (2.64) quando $20(1+\cos 2t)e^{-t}$

Exemplo 2.49 *Resolver o PVI*

$$\frac{dy}{dx} - xy = g(x), \quad x > 1; \quad y(1) = 2, \tag{2.66}$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 1 \leq x < 4 \\ x, & x \geq 4 \end{cases}.$$

Solução *Neste caso o segundo membro da equação está definido por (dois) ramos, pelo que temos de considerar duas equações diferenciais lineares, a saber,*

$$\frac{dy_1}{dx} - xy_1 = 0, \quad 1 < x < 4, \tag{2.67}$$

e

$$\frac{dy_2}{dx} - xy_2 = x, \quad x > 4. \tag{2.68}$$

Para a primeira equação diferencial temos a condição inicial $y_1(1) = 2$*. No caso da segunda equação, vamos impor condições que assegurem que a solução do problema é contínua (continuidade da solução e das suas derivadas até à ordem* $n-1$*, em que neste caso* $n = 1$*). Assim, imporemos*

$$\lim_{x \to 4^-} y_1(x) = \lim_{x \to 4^+} y_2(x). \tag{2.69}$$

A solução do PVI proposto é então

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & 1 \leq x < 4 \\ y_2(x), & x \geq 4 \end{cases}.$$

Comecemos pela equação diferencial linear de primeira ordem (2.67), a qual é equivalente a

$$\frac{1}{y_1}\, dy_1 = \frac{1}{x}\, dx, \quad 1 < x < 4.$$

Trata-se, portanto, de uma equação diferencial que também é de variáveis separáveis, concluindo-se facilmente que uma família de soluções de (2.67) é (verificar)

$$y_1 = c_1 x, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Uma vez que se deverá ter $y_1(1) = 2$*, resulta* $c_1 = 2$*, ou seja, tem-se a solução explícita:*

$$y_1(x) = 2x, \quad 1 \leq x < 4. \tag{2.70}$$

Passemos agora à equação diferencial linear (2.68). Um fator integrante associado a esta equação diferencial linear é (porquê?)

$$\mu(x) = \exp\left(\int -x\,dx\right) = e^{-x^2/2},$$

tendo-se, por aplicação deste fator integrante,

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2}\left(\frac{dy_2}{dx} - xy_2\right) = xe^{-x^2/2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\,y_2\right) = xe^{-x^2/2} \qquad \textit{(confirmar!)} \\ &\Leftrightarrow \quad y_2 = c_2\,e^{x^2/2} - 1. \end{aligned}$$

Resta determinar o valor da constante c_2*. Atendendo à condição (2.69),* c_2 *obedece a*

$$\lim_{x\to 4^-} y_1(x) = \lim_{x\to 4^+} y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad 8 = c_2\,e^8 - 1,$$

pelo que

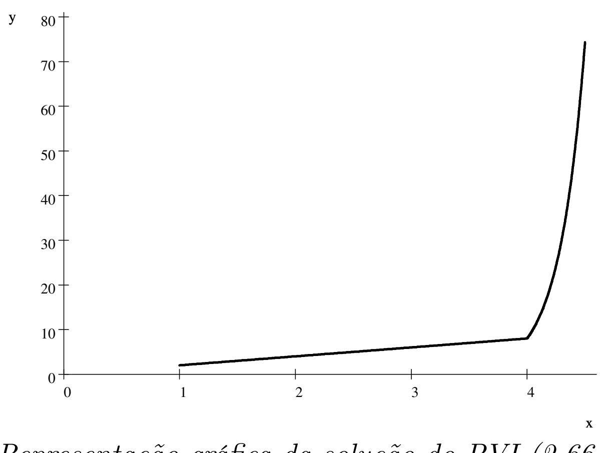
$$c_2 = 9\,e^{-8},$$

resultando

$$y_2(x) = 9\,e^{(x^2-16)/2} - 1, \quad x \geq 4. \tag{2.71}$$

Assim sendo, combinando (2.70) e (2.71), a solução do PVI (2.66) é

$$y = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 4 \\ 9\,e^{(x^2-16)/2} - 1, & x \geq 4 \end{cases}.$$



Representação gráfica da solução do PVI (2.66)

Problema Determinar uma solução explícita do PVI

$$\frac{dy}{dx} + y = h(x), \quad x > 0; \quad y(0) = 0,$$

com

$$h(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases},$$

e mostrar que a solução obtida é contínua, o mesmo não acontecendo com a sua primeira derivada.

Resp.: $y = \begin{cases} e^{-x} - e^{-2x}, & 0 \leq x < 2 \\ (1 - e^{-2})e^{-x}, & x \geq 2 \end{cases}$.

Exercícios sobre equações diferenciais lineares de primeira ordem

Exercício 2.15 *Determinar uma família de soluções de cada uma das equações diferenciais seguintes. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 3\dfrac{y}{x} = 6x^2$;

(b) $x^4 \dfrac{dy}{dx} + 2x^3 y = 1$;

(c) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{t^2} = \dfrac{1}{t^2}$;

(d) $\dfrac{dr}{d\theta} + \operatorname{tg}\theta = \cos\theta$.

Exercício 2.16 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2, \quad y(0) = 2$;

(b) $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x), \quad y(0) = 0$, *com* $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$.

Nota: a solução deste PVI deverá obedecer à condição $\lim_{x\to 1^-} y(x) = \lim_{x \to 1^+} y(x)$.

2.7 Equações diferenciais de Bernoulli

Consideramos agora um caso especial em que a equação diferencial pode ser reduzida a uma equação diferencial linear de primeira ordem através de uma mudança de variável adequada.

Definição 2.9 *Uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{2.72}$$

onde $n \in \mathbb{Q}$, designa-se uma ***equação diferencial de Bernoulli****.*

Observe-se que para $n = 0$ ou $n = 1$ a equação de Bernoulli (2.72) reduz-se a uma equação linear (porquê?). Nos restantes casos, a equação tem de ser abordada de outra forma.

Suponhamos então que $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Comparando (2.72) com a equação linear

$$\frac{dz}{dx} + \overline{P}(x)z = \overline{Q}(x),$$

conclui-se que o termo que origina a não linearidade em (2.72) é y^n. Assim sendo, comecemos por dividir ambos os membros de (2.72) por y^n, obtendo-se

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \tag{2.73}$$

A equação obtida é claramente não linear, nomeadamente devido ao termo $P(x)y^{1-n}$. Tal facto sugere a seguinte mudança de variável

$$z = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}. \tag{2.74}$$

Tendo (2.74) em mente, a equação (2.73) transforma-se na equação diferencial linear

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} + (1-n)\,P(x)z = (1-n)\,Q(x).$$

Assim, no caso em que $n \neq 0$ e $n \neq 1$, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 2.7 *Suponhamos que $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Então a mudança de variável definida por*

$$z = y^{1-n}$$

transforma a equação de Bernoulli (2.72) na equação diferencial linear (na variável z):

$$\frac{dz}{dx} + \overline{P}(x)z = \overline{Q}(x),$$

onde $\overline{P}(x) = (1-n)\,P(x)$ e $\overline{Q}(x) = (1-n)\,Q(x)$.

Exemplo 2.50 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3. \tag{2.75}$$

Solução. *Trata-se de uma equação diferencial de Bernoulli com $n = 3$. Multiplicando esta equação por y^{-3}, tem-se*

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x,$$

pelo que tomando

$$v = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx},$$

resultando

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dx} - 2v = -2x.$$

Esta equação diferencial linear admite o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}.$$

Tem-se, por aplicação deste fator integrante,

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} - 2e^{-2x}v = -2xe^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}v\right) = -2xe^{-2x}.$$

Primitivando por partes resulta

$$e^{-2x}v = e^{-2x}\left(x + \frac{1}{2}\right) + c \quad \Leftrightarrow \quad v = x + \frac{1}{2} + ce^{2x},$$

onde c é uma constante arbitrária. Atendendo à mudança de variável $v = y^{-2}$, tem-se a família de soluções

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}. \tag{2.76}$$

Podemos mostrar que a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial (2.75). Para esse efeito derivamos implicitamente ambos os membros da equação (2.76) em ordem a x, vindo

$$-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = 1 + 2ce^{2x}.$$

Eliminando a constante arbitrária c usando a equação (2.76), resulta

$$-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = 1 + 2\left(\frac{1}{y^2} - x - \frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y^2} - 2x.$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial precedente por $-y^3/2$, obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = -y + xy^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} + y = xy^3,$$

conforme requerido.

Problema Transformar a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + xy = xy^2$$

numa equação diferencial linear realizando uma mudança de variável adequada.
Resp.: $dz/dx - xz = -x$, com $z = y^{-1}$.

Exemplo 2.51 *Determinar a solução do PVI*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = f(x)y^4, \quad y(1) = 1, \tag{2.77}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Solução. *Neste caso temos de considerar dois problemas,*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = (x-1)\,y^4, \quad 1 < x \leq 2; \quad y(1) = 1$$

e

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = y^4, \quad x > 2,$$

sujeitos à condição

$$\lim_{x\to 2^-} y(x) = \lim_{x\to 2^+} y(x).$$

Para a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = (x-1)\,y^4$$

tem-se, divindo por $y^4 \neq 0$,

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y^{-3} = x - 1.$$

Realizando a mudança de variável $z = y^{-3}$ *resulta*

$$z = y^{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx},$$

pelo que a equação diferencial passa a escrever-se

$$-\frac{1}{3}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{3x}z = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = -3x + 3.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear, sendo o fator integrante a usar

$$\mu(x) = e^{\int x^{-1}\,dx} = e^{\ln x} = x.$$

Tem-se assim,

$$x\frac{dz}{dx} + z = -3x^2 + 3x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(xz) = -3x^2 + 3x,$$

ou seja

$$xz = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c_1 \quad \Leftrightarrow \quad z = -x^2 + \frac{3}{2}x + c_1x^{-1}.$$

Retomando a variável dependente y, *vem*

$$y^{-3} = -x^2 + \frac{3}{2}x + c_1x^{-1}.$$

A constante c_1 *é tal que* $y(1) = 1$, *resultando*

$$c_1 = \frac{1}{2},$$

pelo que a solução do problema

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = (x-1)\,y^4, \quad 1 < x \leq 2; \quad y(1) = 1$$

é

$$y^{-3} = -x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}, \quad 1 \leq x \leq 2. \tag{2.78}$$

Note-se que $y(x) = 0$ é solução da equação diferencial dada, mas não é a solução do problema proposto pois não verifica a condição $y(1) = 1$.

Consideremos agora a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = y^4, \quad x > 2.$$

O procedimento que conduz à sua resolução é em tudo idêntico ao anteriormente exposto, obtendo-se

$$y^{-3} = -\frac{3}{2}x + c_2 x^{-1}, \quad x > 2. \tag{2.79}$$

Resta determinar o valor da constante c_2 de forma a ter-se

$$\lim_{x \to 2^-} y(x) = \lim_{x \to 2^+} y(x).$$

Recorrendo à solução (2.78) tem-se

$$\lim_{x \to 2^-} y(x) = y(2) = \left[-x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}\right]_{x=2} = -\frac{3}{4}.$$

Por outro lado, da solução (2.79) resulta

$$\lim_{x \to 2^+} y(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(-\frac{3}{2}x + c_2 x^{-1}\right) = -3 + \frac{1}{2}c_2.$$

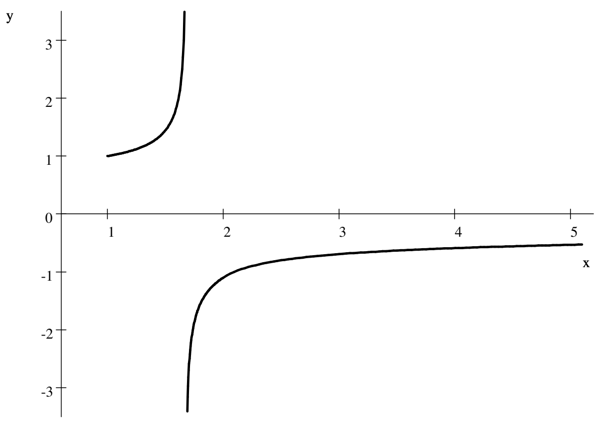
Assim, c_2 é tal que

$$-\frac{3}{4} = -3 + \frac{1}{2}c_2,$$

resultando $c_2 = 9/2$. Portanto, a solução do PVI proposto é

$$\begin{cases} y^{-3} = -x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}, & 1 \leq x \leq 2 \\ y^{-3} = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}x^{-1}, & x > 2 \end{cases},$$

a qual tem uma assintota em $x \simeq 1.68$, correspondendo à raiz real do polinómio $-2x^3 + 3x^2 + 1$, conforme se pode constatar no gráfico seguinte.



Representação gráfica da solução do PVI (2.77)

Problema Determinar a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3}y = e^x y^{-2}, \quad y(0) = 1.$$

Resp.: $y^3 = (1 + 3x)e^x$.

Exercícios sobre equações diferenciais de Bernoulli

Exercício 2.17 *Determinar uma família de soluções das equações diferenciais seguintes. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$;

(b) $x\dfrac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$;

(c) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{t+1}{2t}x = \dfrac{t+1}{tx}$;

(d) $dy + \left(4y - 8y^{-3}\right) x\, dx = 0$.

Exercício 2.18 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{y^3}, \quad y(1) = 2$;

(b) $-x\dfrac{dy}{dx} - y = (xy)^{3/2}, \quad y(1) = 4$.

2.8 Aplicação à determinação de trajetórias ortogonais

Definição 2.10 *Seja*

$$F(x, y, c) = 0 \tag{2.80}$$

*uma família de curvas definida no plano xy. Uma curva que intersete a família de curvas (2.80) segundo ângulos retos designa-se uma **trajetória ortogonal** da família de curvas dada.*

Exemplo 2.52 *Considere-se a família de circunferências*

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{2.81}$$

com centro no ponto de coordenadas $(x, y) = (0, 0)$ *e raio* $c > 0$. *Cada uma das retas que passa pela origem*

$$y = kx, \tag{2.82}$$

onde k é uma constante arbitrária, é uma trajetória ortogonal da família de circunferências (2.81). Reciprocamente, cada uma das circunferências da família (2.81) é uma trajetória ortogonal da família de retas (2.82).

O próximo passo consiste em determinar as trajetórias ortogonais correspondentes a uma família de curvas genérica dada, $F(x,y,c)=0$. O procedimento baseia-se no facto de que se duas famílias de curvas, γ_1 e γ_2, se intersetam ortogonalmente no plano xy, então os respetivos declives das retas tangentes nos pontos de interseção devem verificar a igualdade

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_1} = -\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2}\right)^{-1}.$$

Assim, começamos por obter uma equação diferencial de primeira ordem que expresse o declive da reta tangente em cada um dos pontos da família de curvas dada (2.80) fazendo:

(1) derivação implícita ou explícita da relação (2.80) em ordem a x;

(2) (eventual) eliminação da constante arbitrária c usando a relação (2.80) e a equação diferencial que se obteve em (1).

Assumiremos que a equação diferencial resultante, que representa a família de curvas (2.80), pode ser expressa na forma

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_1} = f(x,y),$$

onde $f(x,y)$ é uma função dada. Portanto, uma curva C da família de curvas γ_1 que passa pelo ponto de coordenadas (x,y) tem nesse ponto a propriedade $dy/dx = f(x,y)$. Assim sendo, deveremos ter

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_1} = -\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2}\right)^{-1}$$

ou, equivalentemente,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2} = -\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma 1}\right)^{-1},$$

pelo que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2} = -\frac{1}{f(x,y)}. \tag{2.83}$$

Esta equação diferencial de primeira ordem define a família de curvas γ_2. Uma família de curvas

$$G(x,y,c)=0$$

que seja solução da equação diferencial (2.83) representa a família de trajetórias ortogonais da família dada (2.80), excepto possivelmente para algumas trajetórias ortogonais que são retas verticais.

Resumo do procedimento

(1) A partir da equação

$$F(x,y,c)=0,$$

que define a família de curvas dada, determinamos a correspondente equação diferencial de primeira ordem derivando implicitamente a equção precedente em ordem a x

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad \text{com } f(x,y) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y};$$

 J. Figueiredo, C. Ribeiro – 2013

(2) A equação diferencial correspondente às trajetórias ortogonais é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}; \tag{2.84}$$

(3) Determinamos a família de soluções

$$G(x,y,c) = 0$$

associada à equação diferencial (2.84), obtendo assim a desejada família de trajetórias ortogonais (exceptuando, possivelmente, certas trajetórias que são retas verticais, as quais têm que ser determinadas separadamente).

Exemplo 2.53 *Determinar as trajetórias ortogonais à família de curvas*

$$x^2 + y^2 = c^2, \tag{2.85}$$

onde c é uma constante arbitrária não nula.

Solução. *Derivando ambos os membros da equação precedente em ordem a x, tem-se*

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

De acordo com (2.84), a equação diferencial correspondente à família de trajetórias ortogonais é então

$$\frac{dy}{dx} = -\left(-\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}.$$

Determinamos agora uma família de soluções desta equação diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \underset{y(x)\neq 0}{\Rightarrow} \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|k_1| \quad \Rightarrow \quad y = k_1 x,$$

onde k_1 é uma constante arbitrária não nula. Temos ainda de considerar a solução $y(x) = 0$ (porquê?), pelo que a família de soluções é dada por

$$y = kx,$$

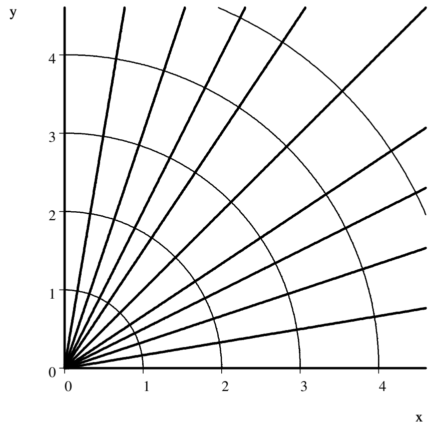
onde k é uma constante arbitrária.

Obtivemos assim uma família de trajetórias ortogonais à família de circunferências (2.85). Resta averiguar se há retas verticais que sejam ortogonais à família de circunferências dada. Para este efeito, note-se que na família de circunferências todos os pontos da forma $(0, y)$ têm dy/dx nulo, já que nessas condições

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = 0.$$

Portanto, a reta $x = 0$ também faz parte do conjunto de trajetórias ortogonais. Uma vez que a família de trajetórias ortogonais determinada anteriormente, $y = kx$, não inclui esta reta (porquê?), então a solução do problema proposto é

$$y = kx \quad e \quad x = 0.$$



Representação gráfica da família de circunferências $x^2 + y^2 = c^2$ e respetivas trajetórias ortogonais em $[0,4] \times [0,4]$. Nos restantes quadrantes a representação é simétrica

Exemplo 2.54 *Determinar as trajetórias ortogonais à família de parábolas*

$$y = c(x-1)^2, \tag{2.86}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Solução. *Começamos por obter a equação diferencial de primeira ordem que nos dá o declive, em cada ponto da família de parábolas, da respetiva reta tangente. Uma vez que a família de curvas se apresenta escrita na forma explícita ($y = f(x,c)$), basta derivar ambos os membros da equação dada em ordem a x, resultando*

$$\frac{dy}{dx} = 2c\,(x-1)\,.$$

Dado que todos os pontos da forma $(1, y)$ têm derivada nula, então conclui-se, desde já, que a reta $x = 1$ é ortogonal à família de curvas dada. Eliminando c na equação precedente usando (2.86), resulta

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x-1},$$

pelo que dy/dx em cada ponto das trajetórias ortogonais é dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{2y}.$$

Resta portanto determinar uma família de soluções da equação diferencial

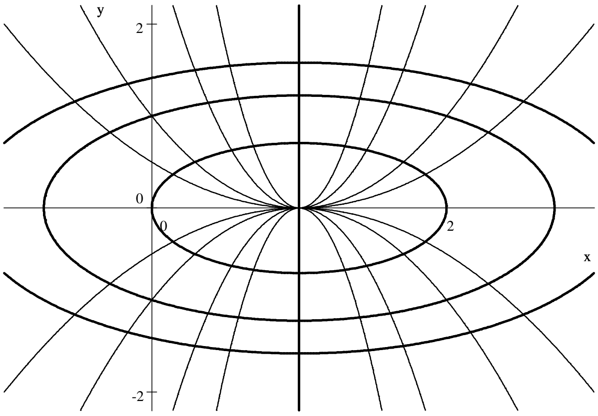
$$2y\,dy + (x-1)\;dx = 0,$$

resultando

$$2y^2 + (x-1)^2 = k^2,$$

onde k é uma constante arbitrária. Obtêm-se assim as trajetórias ortogonais

$$2y^2 + (x-1)^2 = k^2 \quad e \quad x = 1.$$

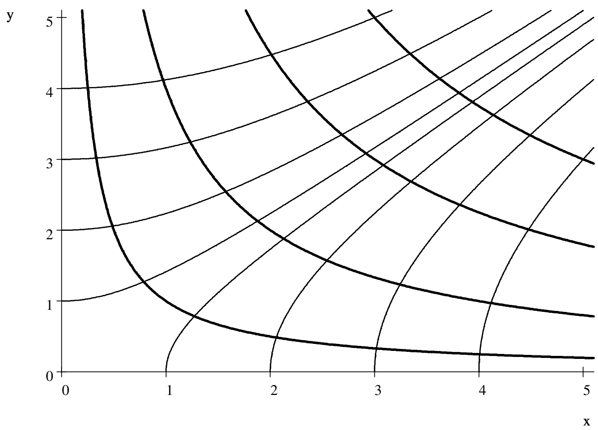


Representação gráfica da família de parábolas $y = c(x-1)^2$ e respetivas trajetórias ortogonais em $[-1,3] \times [-2,2]$

Problema Determinar as trajetórias ortogonais à família de curvas

$$y^2 - x^2 = k, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

onde k é uma constante arbitrária não nula.
Resp.: $yx = c$, onde c é uma constante arbitrária positiva.



Representação gráfica da família de hipérboles $y^2 - x^2 = k$, $k \neq 0$, e respetivas trajetórias ortogonais em $[0,5] \times [0,5]$

Nota O conceito de trajetórias ortogonais surge, por exemplo, no contexto dos campos elétricos. De facto, as linhas equipotenciais, que se definem como sendo o lugar geométrico dos pontos que têm o mesmo potencial elétrico, são ortogonais às linhas de campo elétrico e, por isso, são ortogonais ao vetor campo elétrico em cada ponto (recorde-se que as linhas de campo são tangentes, em cada ponto, ao vetor campo elétrico). Assim, nos exemplos precedentes, se a família de curvas dada corresponder a linhas equipotenciais de um campo elétrico (no plano), então a família de curvas obtida corresponde às linhas de força desse mesmo campo elétrico. De igual modo, pode obter-se as linhas equipotenciais a partir do conhecimento das linhas de campo.

Exercícios sobre determinação de trajetórias ortogonais

Exercício 2.19 *Determinar as trajetórias ortogonais a cada uma das seguintes famílias de curvas.*

(a) $y = cx^3$;

(b) $cx^2 + y^2 = 1$;

(c) $y = e^{cx}$;

(d) $y = x - 1 + ce^{-x}$.

2.9 Exercícios de revisão do Capítulo 2

Exercício 2.20 *Determinar uma família de soluções das seguintes equações diferenciais usando dois métodos de resolução distintos.*

(a) $6x^2y\,dx - (x^3+1)\,dy = 0$;

(b) $e^{2x}y^2\,dx + (e^{2x}y - 2y)\,dy = 0$;

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 1$.

Exercício 2.21 *Determinar uma família de soluções de cada uma das equações diferenciais seguintes.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-7y}{3y-8x}$;

(b) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + xy = e^{-x}$;

(c) $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = xy^3$;

(d) $\dfrac{dy}{dx} = (y+x)^2$
sugestão: fazer $w = y + x$ *e resolver a equação diferencial resultante em ordem a* $w(x)$;

(e) $\dfrac{dy}{dx} = 4y - 16x + 4$
sugestão: fazer $w = 4y - 16x + 4$ *e resolver a equação diferencial resultante em ordem a* $w(x)$.

Exercício 2.22 *Determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(a) $\left(x^2+y^2\right)\,dx - 2xy\,dy = 0, \quad y(1) = 2$;

(b) $(e^{2x}y^2 - 2x)\,dx + e^{2x}y\,dy = 0, \quad y(0) = 2$;

(c) $4xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1, \quad y(2) = 1$;

(d) $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad$ *com* $\quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 2 \\ x/2, & x > 2 \end{cases}$;

(e) $x^2 \dfrac{dy}{dx} - xy = \dfrac{y^3}{x}, \quad y(1) = 1.$

Exercício 2.23 *Determinar o valor de k de forma a que as parábolas $y = c_1x^2 + k$ sejam as trajetórias ortogonais da família de elípses $x^2 + 2y^2 - y = c_2$.*

Exercício 2.24 *A equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \tag{2.87}$$

designa-se uma equação diferencial de Riccati.

(a) Mostrar que se $A(x) \equiv 0$, então a equação diferencial (2.87) é linear, enquanto que para $C(x) \equiv 0$ é uma equação diferencial de Bernoulli;

(b) Mostrar que se $f(x)$ é uma solução (conhecida) da equação diferencial (2.87), então a transformação

$$y = f + \frac{1}{v}$$

permite obter, a partir da equação diferencial (2.87), uma equação diferencial linear em v;

(c) Usando o resultado obtido na alínea (b) determinar uma família de soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + \left(1 - 2x^2\right) y + x^3 - x + 1,$$

sabendo que $f(x) = x$ é uma solução desta equação diferencial.

Exercício 2.25 *Considerar um objeto pontual P que se desloca ao longo do eixo OX. Seja x a abcissa de P em cada instante de tempo t.*

(a) Suponha-se que a velocidade de P em cada instante, dx/dt, se relaciona com a sua abcissa através da lei

$$\frac{dx}{dt} = x$$

e que a posição de P no instante inicial, $t = 0$, é $x(0) = 5$. Qual será a abcissa de P para $t = 5$?

(b) Suponha-se agora que a lei que relaciona a velocidade, a abcissa e o tempo é

$$\frac{dx}{dt} = x + t$$

e que $x(0) = 1$. Determinar $x(t)$ usando dois métodos distintos: i) recorrendo a um fator integrante adequado; ii) realizando a mudança de variável $w = x + t$ e resolvendo a equação diferencial resultante em $w(t)$.

Exercício 2.26 *Um objeto pontual M de massa unitária, $m = 1$, desloca-se ao longo do eixo dos xx com velocidade $v(t)$ em cada instante de tempo t. O ponto M está sujeito a uma força de atrito $F_a = -2v$ e a uma força $F_e = t$, de tal forma que a sua velocidade em cada instante t é dada pela segunda lei de Newton*

$$m\frac{dv}{dt} = F_a + F_e = -2v + t,$$

ou seja, atendendo a que $m = 1$,

$$\frac{dv}{dt} = -2v + t.$$

(a) Determinar a velocidade de M em cada instante de tempo sabendo que $v(0) = 0$;

(b) Supondo que no instante inicial, $t = 0$, M se encontra na origem das abcissas, determinar a sua posição em cada instante de tempo, $x(t)$, sabendo que $v = dx/dt$;

(c) Determinar $v(t)$ no caso de $F_a = -v^2$, $F_e = 1$ e $v(0) = 2$.

Exercício 2.27 *Um objeto pontual Q de massa m desloca-se com movimento retilíneo ao longo do eixo dos xx, estando sujeito a uma força $-kx$ que o atrai para o ponto de coordenadas $x = 0$, onde $k > 0$ é uma constante de proporcionalidade e x a abcissa correspondente à posição de Q. Nestas condições a lei que rege o movimento de Q é*

$$v\frac{dv}{dx} = -\alpha x,$$

onde $\alpha = k/m$. Sabendo que a velocidade inicial de Q é $v(0) = v_0 > 0$ e a sua posição inicial $x(0) = x_0$, mostrar que:

(a) $v^2 = v_0^2 + \alpha(x_0^2 - x^2)$;

(b) $x = \dfrac{v_0}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}t) + x_0\cos(\sqrt{\alpha}t)$.

sugestão: atender aos seguintes resultados,

$$v = \frac{dx}{dt}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{b}, \qquad \operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\theta.$$

Exercício 2.28 *Um circuito elétrico é composto por uma fonte eletromotriz que em cada instante t fornece uma tensão E, um elemento com resistência R e outro elemento com indutância, ligados em série. Nestas condições a intensidade de corrente em cada instante $i(t)$ obedece a*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Determinar i quando:

(a) $E = 200$, $R = 100$, $L = 100$, $i(0) = 0$;

(b) $E = 200\cos t$, $R = 100$, $L = 100$, $i(0) = 0$.

Exercício 2.29 *Para uma dada população, seja n o número de indivíduos que dela fazem parte no instante t. Suponhamos que a lei que rege a evolução temporal de n é*

$$\frac{dn}{dt} = kn,$$

onde k é uma constante positiva. Neste contexto, considere-se uma população relativamente à qual se sabe que o número de indivíduos no ano 2000 *era de* 10000*, sendo de* 5000 *no ano* 1900*.*

(a) *Com base nestes dados, determinar qual deverá ser o número de membros da população no ano* 2100;

(b) *Supondo agora que para outra população a lei a considerar é*

$$\frac{dn}{dt} = 10^{-2}n - 10^{-8}n^2, \quad n < 10^6.$$

Sabendo que no ano 2000 *a população tinha* 100000 *membros, determinar:*

(i) *o número de membros no ano* 2100;

(ii) *o número de membros quando $t \to +\infty$.*

Exercício 2.30 *A lei de arrefecimento de Newton postula que a velocidade de arrefecimento de um corpo é proporcional, em cada instante t, à diferença entre a temperatura do corpo T e a temperatura do meio circundante T_m, ou seja,*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

onde k é uma constante positiva e $T > T_m$. Considerando que a temperatura de determinado corpo é de $30\,^oC$ no instante $t = 0$, passando a ser de $17.5\,^oC$ para $t = 1$ hora e de $11.25\,^oC$ para $t = 2$ horas, determinar:

(a) *a temperatura do meio circundante (suposta constante durante o processo de arrefecimento);*

(b) *a temperatura do objeto para $t = 3$ horas;*

(c) *a temperatura do objeto quando $t \to +\infty$.*

2.10 Soluções dos exercícios do Capítulo 2

2.1. (a) $y^2 + 3x^2 + 4xy = c$; (b) $x^2y + x + 2y^2 = c$; (c) $\left(\theta^2 + 1\right)\operatorname{sen} r = c$; (d) $\left(s - s^2\right)/t = c$.

2.2. (a) $x^2y - 3x + 2y^2 = 7$; (b) $e^x\,(y + 2) + y^2x = 8$.

2.3. (a) $A = 3/2$, $2x^3 + 9x^2y + 12y^2 = c$; (b) $A = -2$, $y/x^2 - y/x = c$.

2.4. (a) $f(x, y) = x^2y + \phi(y)$; (b) $f(x, y) = y^2e^x + y^3e^{3x} + \phi(x)$.

2.5. (b) $n = -2$; (c) $x + x^2/y = c$; (d).$x + x^2/y = c$ e $y = 0$.

2.6. (b) $\cos\theta \operatorname{sen}\varphi = c$.

2.7. (a) $y\left(x^2+1\right)^2 = c$; (b) $\operatorname{arctg} r^2 + \operatorname{arctg} s = c$; (c) $r \operatorname{sen}^2\theta = c$;
(d) $(x+1)^6 (x+2)^{-4} (y^2+1) = c$, $c \geq 0$; (e) $x - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = c$.

2.8. (a) $(x+4)(y+2)^{-2} e^y = e^{-1}$; (b) $2\operatorname{sen} 2x + 4x - \operatorname{cotg} y = \pi + 1$; (c) $z(x) = 0$.

2.9. (a) $y = -\ln(c - e^x)$; (b) $y = \frac{1}{2}x + e^{2(c-x)} - \frac{1}{4}$; (c) $y = \operatorname{tg}(x-c) - x$.

2.10. (a) $y = x\ln(-x) + cx$; (b) $(v/u)^2 - \ln v^2 = c$ e $v(u) = 0$; (c) $\ln x^3 - \left(1 + y^2/x^2\right)^{3/2} = c$.

2.11. (a) $x^2 + y^2 - 5x^3 = 0$; (b) $y = 2\sqrt{1-3x} - 2x + 2$.

2.12. (a) $x^2 + 4xy - y^2 = c$; (b) $x^3 + 6xy^2 - y^3 = c$.

2.13. (a) Sempre; (b) Se e só se $B = 2D$ e $E = 2C$.

2.15. (a) $y = x^3 + cx^{-3}$; (b) $y = cx^{-2} - x^{-3}$; (c) $x = 1 + ce^{1/t}$; (d) $r = \ln(\cos\theta) + \operatorname{sen}\theta + c$.

2.16. (a) $y = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}e^{-x^3}$; (b) $y = x - 1 + e^{-x}$ para $0 \leq x \leq 1$ e $y = 1 + e^{-x}(1-e)$ para $x > 1$.

2.17. (a) $y = x(x+c)^{-1}$; (b) $y^{-3} = 2x^6 + cx^3$; (c) $\left(x^2-2\right)te^t = c$, $c > 0$; (d) $y^4 = 2 + ce^{-8x^2}$.

2.18. (a) $y^4 = x^2 + 15x^{-2}$; (b) $y = 4x^{-3}$.

2.19. (a) $3y^2 + x^2 = k^2$ e $x = 0$; (b) $x^2 + y^2 - \ln y^2 = k$ e $x = 0$; (c) $(\ln y^2 - 1)y^2 + 2x^2 = k$;
(d) $2y + \ln(y - x - 1)^2 = k$.

2.20. (a) $y = c\left(x^6 + 2x^3 + 1\right)$; (b) $y = c\left(e^{2x} - 2\right)^{1/2}$; (c) $y = x\ln x + cx$.

2.21. (a) $(3y+2x)^2 = c(y-x)$, $c > 0$; (b) $y = (cx + c - 1)e^{-x}$; (c) $y^{-2} = 1 + cx^2$ e $y = 0$;
(d) $y = \operatorname{tg}(x-c) - x$; (e) $y = 4x + e^{4(x-c)}$.

2.22. (a) $y = \left(x^2 + 3x\right)^{1/2}$; (b) $e^{2x}y^2 - 2x^2 = 4$; (c) $y = (\sqrt{2x}/2 - 1)^{1/2}$;
(d) $y = 1 - e^{-x}$ se $x \leq 2$ e $2y = x - 1 - \left(2 - e^2\right)e^{-x}$ se $x > 2$; (e) $e^{1-x^2/y^2} = x^2$.

2.23. $k = 1/4$.

2.24. (b) $dv/dx + [2A(x)f(x) + B(x)]\, v = -A(x)$; (c) $y = x + (1 - x + ce^{-x})^{-1}$.

2.25. (a) $x = 5\,e^t$, $x(5) = 5\,e^5$; (b) $x = 2\,e^t - t - 1$.

2.26. (a) $v = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\, e^{-2t}$; (b) $x = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2t}$; (c) $v = (3\, e^{2t} + 1)/(3\, e^{2t} - 1)$.

2.28. (a) $i = 2(1 - e^{-t})$; (b) $i = (\cos t + \operatorname{sen} t - e^{-t})/2$.

2.29. (a) $n = 9.54 \times 10^{-3} 2^{t/100}$, 20000; (b) $n = (10^{-6} + 4370 e^{-t/100})^{-1}$, (i) 232010, (ii) 10^6.

2.30. $T = 25\, 2^{-t} + 5$; (a) $5\,^oC$; (b) $8.125\,^oC$; (c) $5\,^oC$.

Capítulo 3

Resolução analítica de equações diferenciais lineares de ordem n

3.1 Introdução às equações diferenciais lineares de ordem n

Definição 3.1 *Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n, na variável dependente y e na variável independente x, é uma equação diferencial que se encontra, ou pode ser expressa, na forma*

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x), \tag{3.1}$$

onde as funções reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e F são funções contínuas (e conhecidas) no intervalo real $I = [a, b]$ e $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. O termo do lado direito (segundo membro) da equação diferencial precedente, $F(x)$, designa-se ***termo não homogéneo*** *da equação diferencial. Se a função F for identicamente nula, a equação diferencial diz-se uma* ***equação diferencial linear homogénea****. As funções $a_0, a_1, \ldots, a_n$ designam-se (funções) coeficientes da equação diferencial. No caso destas funções serem constantes, (3.1) designa-se equação diferencial linear de ordem n de coeficientes constantes.*

Para $n = 2$, a equação diferencial (3.1) reduz-se a

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x),$$

sendo a correspondente equação diferencial de segunda ordem homogénea (ou incompleta)

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0.$$

De novo, supomos que a_0, a_1, a_2 e F são funções reais contínuas em $I = [a, b]$ e que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Exemplo 3.1 *As equações diferenciais*

$$(a) \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + \cos x\frac{dy}{dx} + x^3\, y = e^x; \qquad (b) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

são equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem, sendo (a) não homogénea e (b) homogénea.

3.2 Propriedades das equações diferenciais lineares homogéneas

Consideramos agora alguns resultados relativos à equação diferencial linear homogénea

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{3.2}$$

Teorema 3.1 *Sejam f_1, f_2, ..., f_m, m soluções da equação diferencial (3.2). Então*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m,$$

onde c_1, c_2, ..., c_m, são constantes arbitrárias, é ainda uma solução da equação diferencial (3.2).

Demonstração Tem-se, por hipótese,

$$\begin{aligned}
a_0(x)\frac{d^n f_1}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} f_1}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{df_1}{dx} + a_n(x)f_1 &= 0\\
a_0(x)\frac{d^n f_2}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} f_2}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{df_2}{dx} + a_n(x)f_2 &= 0\\
&\vdots\\
a_0(x)\frac{d^n f_m}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} f_m}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{df_m}{dx} + a_n(x)f_m &= 0,
\end{aligned}$$

pelo que, atendendo à linearidade da equação diferencial dada, resulta

$$\begin{aligned}
a_0(x)\frac{d^n c_1 f_1}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} c_1 f_1}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dc_1 f_1}{dx} + a_n(x)c_1 f_1 &= 0\\
a_0(x)\frac{d^n c_2 f_2}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} c_2 f_2}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dc_2 f_2}{dx} + a_n(x)c_2 f_2 &= 0\\
&\vdots\\
a_0(x)\frac{d^n c_m f_m}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} c_m f_m}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dc_m f_m}{dx} + a_n(x)c_m f_m &= 0.
\end{aligned}$$

Adicionando cada um dos membros das m equações diferenciais precedentes e agrupando as várias derivadas, tem-se

$$\begin{aligned}
&a_0(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) + \cdots\\
&\qquad \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) + a_n(x)\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) = 0,
\end{aligned}$$

ficando assim demonstrado o resultado pretendido. ■

Definição 3.2 *Se f_1, f_2, ..., f_m, são m funções dadas e c_1, c_2, ..., c_m, são m constantes, então a expressão*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$$

*designa-se uma **combinação linear** das funções f_1, f_2, ..., f_m.*

Desta definição e do teorema precedente decorre o seguinte resultado.

Corolário 3.2 *Qualquer combinação linear de soluções da equação diferencial linear homogénea (3.2) é ainda uma solução dessa equação diferencial.*

Exemplo 3.2 *Pode-se verificar facilmente que as funções* $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos x$ *são soluções da equações diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \tag{3.3}$$

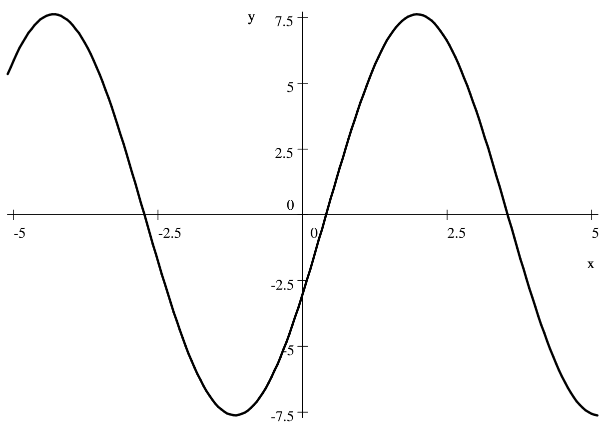
Então a combinação linear

$$c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

é também uma solução da equação diferencial dada, quaisquer que sejam as constantes c_1 *e* c_2*. Por exemplo,*

$$7 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$$

é uma solução da equação diferencial dada.



Representação gráfica da função $7 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$*, solução de (3.3)*

Exemplo 3.3 *Sabendo que* e^x*,* e^{-x} *e* e^{2x} *são soluções da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0, \tag{3.4}$$

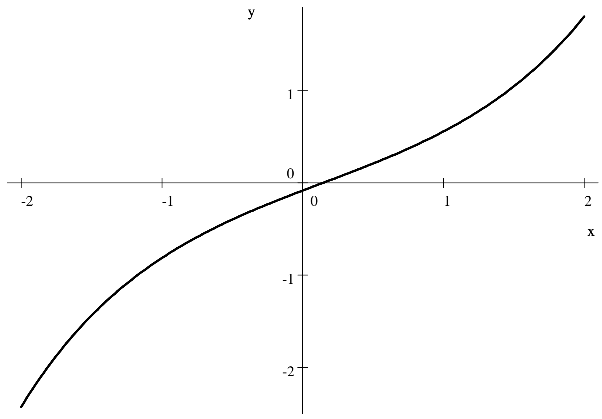
conclui-se que

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

é uma solução da equação diferencial dada, quaisquer que sejam as constantes c_1*,* c_2 *e* c_3*. Assim,*

$$\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{-x}$$

é uma solução da equação diferencial dada.



Representação gráfica da função $\frac{1}{4}e^{x} - \frac{1}{3}e^{-x}$, *solução de (3.4)*

Problema Sabendo que e^{5x}, e^{-2x} e e^{3x} são soluções da equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 30y = 0,$$

determinar uma família de soluções desta equação que envolva 3 constantes arbitrárias.
Resp.: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} + c_3e^{5x}$.

Passamos agora a lidar com o que designaremos por solução geral da equação diferencial (3.2). Para esse efeito começaremos por introduzir (ou recordar) os conceitos de dependência linear e independência linear de funções.

Definição 3.3 *As k funções f_1, f_2, ..., f_k, dizem-se **funções linearmente dependentes** no intervalo $I = [a, b]$ se existem constantes c_1, c_2, ..., c_k, não todas nulas, tais que*

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_kf_k(x) = 0$$

para todo $x \in I$.

Exemplo 3.4 *As funções x e $2x$ são linearmente dependentes no intervalo $[0, 1]$ já que existem constantes c_1 e c_2, não todas nulas, tais que*

$$c_1(x) + c_2(2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (c_1 + 2c_2)x = 0$$

para todo $x \in [0, 1]$. Considere-se, por exemplo, $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$.

Exemplo 3.5 *As funções $\operatorname{sen} x$, $3\operatorname{sen} x$ e $-\operatorname{sen} x$ são linearmente dependentes no intervalo $[-1, 2]$ pois existem constantes c_1, c_2 e c_3, não todas nulas, tais que*

$$c_1(\operatorname{sen} x) + c_2(3\operatorname{sen} x) + c_3(-\operatorname{sen} x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (c_1 + 3c_2 - c_3)\operatorname{sen} x = 0,$$

para todo $x \in [-1, 2]$. Tome-se, por exemplo, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ e $c_3 = 4$.

Definição 3.4 *As m funções f_1, f_2, $\ldots$, f_m, dizem-se* ***funções linearmente independentes*** *no intervalo $I = [a, b]$ se não são linearmente dependentes nesse intervalo. Ou seja, as funções f_1, f_2, $\ldots$, f_m, são linearmente independentes no intervalo I se a relação*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_m f_m(x) = 0, \qquad \forall x \in I$$

implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0.$$

Por outras palavras, a única combinação linear das funções f_1, f_2, $\ldots$, f_m, que é identicamente nula em I é a combinação trivial

$$0 \times f_1(x) + 0 \times f_2(x) + \cdots + 0 \times f_m(x) = 0.$$

Exemplo 3.6 *As funções x e x^2 são linearmente independentes no intervalo $[0, 1]$ pois*

$$c_1 x + c_2 x^2 = 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

verifica-se somente quando $c_1 = c_2 = 0$ (porquê?). O mesmo se passa, por exemplo, com as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\cos 2x$, e^x e e^{-x}, $\cosh 3x$ e $\operatorname{senh} 3x$ ... conforme veremos mais à frente recorrendo ao conceito de Wronskiano de um conjunto de funções.

O próximo teorema diz respeito à existência de conjuntos de soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n, bem como à relevância de tais conjuntos na determinação de soluções deste tipo de equações diferenciais.

Teorema 3.3 *A equação diferencial linear homogénea de ordem n (3.2) possui sempre n soluções linearmente independentes. Mais ainda, se f_1, f_2, ..., f_n, são n soluções linearmente independentes da equação diferencial (3.2) num intervalo aberto I, então toda a solução da equação diferencial (3.2) pode ser expressa como uma combinação linear*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x), \quad \forall x \in I,$$

destas n funções linearmente independentes, escolhendo adequadamente as constantes c_1, c_2, $\ldots$, c_n.

Este teorema diz-nos que dada uma equação diferencial linear homogénea de ordem n, existe um conjunto de n soluções linearmente independentes. Uma vez assegurada a existência desse conjunto, o teorema estabelece que qualquer solução da equação diferencial (3.2) pode ser escrita como uma combinação linear de quaisquer n soluções linearmente independentes, escolhendo adequadamente as constantes que intervêm na combinação linear.

Exemplo 3.7 *Vimos anteriormente que as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são soluções da equação diferencial linear homogénea*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

em $\mathbb{R}$. Pode-se mostrar que estas duas soluções são linearmente independentes (ver Exemplo 3.13). Suponhamos agora que f é uma solução qualquer desta equação diferencial. O Teorema 3.3 garante que f pode ser expressa como uma combinação linear $c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ das funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, escolhendo *adequadamente as constantes* c_1 *e* c_2*. Ou seja, existem duas constantes* c_1 *e* c_2 *(que são únicas) tais que*

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo, $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/6)$ *é uma solução da equação diferencial dada conforme se verifica facilmente. Como*

$$\operatorname{sen}(x + \pi/6) = \operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x,$$

vemos que a solução $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/6)$ *pode ser expressa como uma combinação linear*

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x$$

das duas soluções linearmente independentes $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$*. Considerou-se, portanto,* $c_1 = \sqrt{3}/2$ *e* $c_2 = 1/2$*.*

Seja agora f_1, f_2, ..., f_n, um conjunto de n soluções linearmente independentes da equação diferencial linear homogénea de ordem n (3.2). Então o Teorema 3.2 garante que a combinação linear

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x), \tag{3.5}$$

onde c_1, c_2, ..., c_n, são constantes arbitrárias, é também uma solução da equação diferencial (3.2). Por outro lado, pelo Corolário 3.3 sabemos que se f é uma solução da equação diferencial (3.2), então f pode ser expressa como uma combinação linear (3.5) das n soluções linearmente independentes f_1, f_2, ..., f_n, escolhendo adequadamente as constantes c_1, c_2, ..., c_n. Portanto, a combinação linear (3.5) das n soluções linearmente independentes f_1, f_2, ..., f_n, na qual c_1, c_2, ..., c_n, são constantes arbitrárias, deve incluir todas as soluções da equação diferencial (3.2). Por esta razão, referimos-nos a um conjunto de n soluções da equação diferencial homogénea (3.2) como "um conjunto fundamental de soluções" dessa equação diferencial e designamos uma combinação linear "geral" de n soluções linearmente independentes por "solução geral" da equação diferencial (3.2).

Definição 3.5 *Se* f_1*,* f_2*, ...,* f_n*, são* n *soluções linearmente independentes da equação diferencial linear homogénea de ordem* n

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \tag{3.6}$$

em $I = [a, b]$*, então o conjunto* f_1*,* f_2*, ...,* f_n*, designa-se* ***um conjunto fundamental de soluções*** *desta equação diferencial. Por outro lado, a função* f *definida por*

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x), \qquad x \in I,$$

onde c_1*,* c_2*, ...,* c_n*, são constantes arbitrárias, designa-se* ***solução geral da equação diferencial*** *(3.6) em* I*. Conforme veremos, para uma dada equação diferencial do tipo (3.6), existe uma infinidade de conjuntos fundamentais de soluções e consequentemente de formas distintas, embora equivalentes, de escrever a respetiva solução geral.*

Exemplo 3.8 *Sabendo que as funções* $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

para todo x *real, então* $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *constituem um conjunto fundamental de soluções desta equação diferencial, sendo a sua solução geral dada por*

$$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x,$$

onde c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias. Podemos então escrever a respetiva solução geral como*

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Exemplo 3.9 *Pode-se mostrar que as soluções* e^x, e^{-x} *e* e^{2x} *da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

são linearmente independentes para todo x *real (ver Exemplo 3.15). Então* e^x, e^{-x} *e* e^{2x} *constituem um conjunto fundamental de soluções desta equação diferencial, sendo a sua solução geral dada por*

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x},$$

onde c_1, c_2 *e* c_3 *são constantes arbitrárias.*

Exemplo 3.10 *Pode-se mostrar que as funções* e^x *e* e^{-x} *constituem um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial (porquê?)*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0. \tag{3.7}$$

Assim, a sua solução geral pode ser escrita como

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x}. \tag{3.8}$$

Se atribuirmos valores às constantes c_1 *e* c_2 *obteremos soluções da equação diferencial (3.7). Por exemplo, tomando* $c_1 = 1/2$ *e* $c_2 = 1/2$*, concluímos que a função* $\cosh x$ *é uma solução de (3.7). De igual modo, escolhendo* $c_1 = 1/2$ *e* $c_2 = -1/2$*, concluímos que o mesmo se passa com a função* $\operatorname{senh} x$*. Ora, o par de funções* $\cosh x$ *e* $\operatorname{senh} x$ *constitui um conjunto fundamental de soluções de (3.7), pois são linearmente independentes, pelo que a respetiva solução geral também pode ser expressa como*

$$y = k_1 \cosh x + k_2 \operatorname{senh} x.$$

Esta forma de representar a solução geral, embora menos óbvia do que (3.8), pode ser mais útil em determinados contextos conforme veremos adiante.

Problema Determinar a solução geral da equação diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y = 0, \quad x > 0,$$

sabendo que esta admite duas soluções do tipo x^n, $n \in \mathbb{Z}$.
Resp.: $y = c_1x^2 + c_2x^3$

O próximo teorema fornece-nos um critério simples para determinar se n soluções de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n são ou não linearmente independentes. Antes, porém, introduzimos um novo conceito.

Definição 3.6 *Sejam f_1, f_2, ..., f_k, k funções reais, cada uma possuindo derivadas até à ordem $k-1$ em $I = [a, b]$. O determinante*

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_k) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_k \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_k' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(k-1)} & f_2^{(k-1)} & \cdots & f_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

*designa-se o **Wronskiano** destas k funções. Note-se que $W(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ é, tal como f_1, f_2, ..., f_k, uma função real definida em I.*

Teorema 3.4 *As k funções f_1, f_2, ..., f_k, são linearmente independentes em $I = [a, b]$ se e só se o Wronskiano de f_1, f_2, ..., f_k, é diferente de zero para algum valor de x em I.*

Exemplo 3.11 *As funções x, x^2 e x^3, são linearmente independentes em qualquer intervalo real do tipo $[a, b]$.*

Solução. *Tem-se*

$$W\left(x, x^2, x^3\right) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3,$$

pelo que o Wronskiano só se anula para $x = 0$, verificando-se portanto as condições do Teorema 3.4.

Exemplo 3.12 *As funções x^m e x^n, são linearmente independentes no intervalo $[1, 2]$ se e só se $m \neq n$.*

Solução. *De facto, tem-se*

$$W(x^m, x^n) = \begin{vmatrix} x^m & x^n \\ mx^{m-1} & nx^{n-1} \end{vmatrix} = (n-m)\, x^{m+n-1},$$

o qual não se anula no intervalo $[1, 2]$ se e só se $m \neq n$. Note-se que se impusermos adicionalmente que $m + n > 1$, então o mesmo resultado é válido para qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ uma vez que nessas condições o Wronkiano apenas se anula para $x = 0$, existindo portanto uma infinidade de valores de x para os quais $W(x^m, x^n) \neq 0$.

Problema Averiguar em que condições é que os seguintes pares de funções são linearmente independentes: $\left(e^{ax},\, e^{bx}\right)$, $(\cos ax,\, \cos bx)$, $\left(e^{ax}\cos cx,\, e^{bx}\operatorname{sen} cx\right)$, $(e^{cx}\cos ax,\, e^{cx}\operatorname{sen} bx)$.
Resp.: $a \neq b$, $|a| \neq |b|$, $a \neq b$, $|a| \neq |b|$, respetivamente.

Caso as funções em análise sejam soluções de determinada equação diferencial linear homogénea de ordem n, tem-se o seguinte resultado (mais forte do que o expresso pelo Teorema 3.4).

Teorema 3.5 ***(Teorema de Abel)*** *O Wronskiano de n soluções de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n ou é identicamente nulo em I ou nunca se anula nesse intervalo.*

Portanto, se conhecermos n soluções de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n, podemos usar o teorema precedente para determinar, de forma simples, se são ou não linearmente independentes. Se forem linearmente independentes, então formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial em causa, escrevendo-se a respetiva solução geral como uma combinação linear destas n funções com coeficientes arbitrários.

Exemplo 3.13 *Podemos aplicar o Teorema 3.5 para mostrar que as soluções* $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

são linearmente independentes. De facto,

$$W(\cos x, \operatorname{sen} x) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

para todo x real. Portanto, $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *são soluções linearmente independentes da equação diferencial dada, constituindo portanto um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial.*

Exemplo 3.14 *As soluções e^x e e^{-x} da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

são linearmente independentes uma vez que $W(e^x, e^{-x}) = -2 \neq 0$, para todo x real.

Exemplo 3.15 *As soluções e^x, e^{-x} e e^{2x} da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

são linearmente independentes em qualquer intervalo real pois

$$W\left(e^x, e^{-x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0,$$

para todo x real.

Exemplo 3.16 *As soluções x e $2x$ da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

são linearmente dependentes em qualquer intervalo real pois

$$W(x, 2x) = \begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

para todo x real.

Problema Mostrar que o Wronskiano das funções 1, x e x^2, soluções da equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

nunca se anula.

Problema As funções x e x^2 são linearmente independentes. No entanto, o seu Wronskiano pode anular-se. Podem estas funções constituir um conjunto fundamental de soluções de uma equação diferencial linear homogénea de segunda ordem? Porquê?

Resp.: Não podem, por que tal violaria o Teorema de Abel.

A redução de ordem

Vamos agora abordar uma técnica que nos permite, em determinadas condições, reduzir a ordem de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n para ordem $n-1$, recorrendo a uma mudança de variável adequada. Conforme veremos, esta técnica pode revelar-se muito útil quando a equação diferencial original é de segunda ordem.

Teorema 3.6 *Seja $f(x)$ uma solução não trivial (isto é, não identicamente nula) da equação diferencial linear homogénea de ordem n*

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{3.9}$$

Então a transformação $y = f(x)v$ reduz a equação diferencial (3.9) a uma equação diferencial linear homogénea de ordem $n-1$ na variável $w = dv/dx$.

Demonstração Este teorema será particularmente útil na obtenção de soluções de equações diferenciais lineares homogéneas de ordem 2. Vejamos o que acontece nessa situação. Considere-se, para o efeito, a equação diferencial (3.9) no caso em que $n = 2$, ou seja,

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0. \tag{3.10}$$

Seja a transformação

$$y = f(x)v, \tag{3.11}$$

onde $f(x)$ é uma solução (conhecida) da equação diferencial (3.10). De (3.11) resulta

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\frac{dv}{dx} + \frac{df(x)}{dx}v \tag{3.12}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{df(x)}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2f(x)}{dx^2}v. \tag{3.13}$$

Substituindo (3.11), (3.12) e (3.13) em (3.10) obtém-se

$$a_0(x)f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + \left[2a_0(x)\frac{df(x)}{dx} + a_1(x)f(x)\right]\frac{dv}{dx} + \left[a_0(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + a_2(x)f(x)\right]v = 0,$$

a qual ainda é uma equação de segunda ordem. No entanto, como f é uma solução da equação diferencial (3.10), o coeficiente que multiplica v na equação diferencial agora obtida é nulo, resultando

$$a_0(x)f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + \left[2a_0(x)\frac{df(x)}{dx} + a_1(x)f(x)\right]\frac{dv}{dx} = 0.$$

A não existência de termo em v na equação diferencial precedente permite realizar a mudança de variável $w = dv/dx$, vindo

$$a_0(x)f(x)\frac{dw}{dx} + \left[2a_0(x)\frac{df(x)}{dx} + a_1(x)f(x)\right]w = 0,$$

que é uma equação diferencial linear homogénea de primeira ordem na variável dependente w (e simultaneamente de variáveis separáveis). Portanto, supondo que $f(x) \neq 0$ e $a_0(x) \neq 0$, tem-se

$$\frac{dw}{w} = -\left[2\frac{df(x)}{dx}\frac{1}{f(x)} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right]dx,$$

resultando por primitivação e subsequente exponenciação

$$w = c\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]\frac{1}{[f(x)]^2}.$$

Tomando $c = 1$ e tendo em conta que $w = dv/dx$, obtém-se

$$v = \int \frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]}{[f(x)]^2}\,dx,$$

resultando, atendendo a que $y = vf(x)$,

$$y = f(x)\int \frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]}{[f(x)]^2}\,dx.$$

Esta última solução, que designamos por $g(x)$, é também uma solução da equação diferencial (3.10). Além disso, $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente independentes já que

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x) & f(x)v \\ f'(x) & f(x)v' + f'(x)v \end{vmatrix} = [f(x)]^2\,v' = \exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right] \neq 0.$$

Portanto, f e g formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial (3.10), pelo que a combinação linear

$$c_1 f + c_2 g$$

é a solução geral da equação diferencial (3.10). ■

Vejamos então alguns exemplos de aplicação da redução de ordem a equações diferenciais lineares de segunda ordem, sabendo de antemão que a técnica conduz à resolução de uma equação diferencial linear de primeira ordem homogénea (que também é de variáveis separáveis).

Exemplo 3.17 *Sabendo que $y = x$ é uma solução da equação diferencial*

$$\left(x^2+1\right)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0,$$

determinar uma solução linearmente independente usando a propriedade da redução de ordem.

Solução. *Fazendo a mudança de variável $y = vx$, tem-se*

$$y = vx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx},$$

pelo que substituindo estas expressões na equação diferencial dada, resulta

$$\left(x^2+1\right)\left(x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\right) - 2x\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) + 2vx = 0,$$

ou seja

$$x\left(x^2+1\right)\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx} = 0, \tag{3.14}$$

onde não figura (como esperado) nenhum termo em v. Fazendo a mudança de variável $w = dv/dx$, obtém-se

$$w = \frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dw}{dx},$$

vindo para a equação diferencial (3.14)

$$x\left(x^2+1\right)\frac{dw}{dx} + 2w = 0,$$

que, conforme esperado, é uma equação diferencial de primeira ordem. Tem-se, supondo que $w(x) \neq 0$,

$$\frac{dw}{w} = -\frac{2}{x\left(x^2+1\right)}dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dw}{w} = \left(-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx,$$

resultando por primitivação e posterior exponenciação

$$\ln|w| = -2\ln|x| + \ln\left(x^2+1\right) + \ln|c| \quad \Rightarrow \quad w = c\frac{x^2+1}{x^2} = c\left(1 + \frac{1}{x^2}\right),$$

onde c é uma constante arbitrária não nula (porquê?). Tomando $c = 1$ e atendendo a que $w = dv/dx$, vem

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad v = x - \frac{1}{x} + k,$$

onde k é uma constante arbitrária. Tomando $k = 0$ resulta

$$y = vx = x^2 - 1,$$

isto é,

$$g(x) = f(x)v(x) = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1.$$

O Teorema 3.6 garante que esta é a solução linearmente independente que procurávamos. As funções x e $x^2 - 1$ constituem um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial dada, pelo que a sua solução geral pode ser escrita como

$$y = c_1 x + c_2\left(x^2 - 1\right).$$

Note-se que o caso $w(x) = 0$ não é interessante neste contexto já que conduz a $v(x) =$ constante e, portanto, não permite obter um conjunto fundamental de soluções (porquê?).

Exemplo 3.18 *Sabendo que e^{-x} é uma solução da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

pretende-se determinar a solução geral desta equação diferencial.

Solução. *Fazendo a mudança de variável $y = ve^{-x}$, tem-se*

$$y = ve^{-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{-x}\frac{dv}{dx} - ve^{-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}\frac{d^2v}{dx^2} - 2e^{-x}\frac{dv}{dx} + ve^{-x},$$

pelo que substituindo estas expressões na equação diferencial dada, obtém-se

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2} - 2\frac{dv}{dx} + v\right) + 2\left(\frac{dv}{dx} - v\right) + v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 0,$$

cuja solução geral é (dada a simplicidade da equação diferencial em v, não se justifica realizar a mudança de variável $z = dv/dx$)

$$v = Ax + B.$$

Portanto, escolhendo $A = 1$ e $B = 0$, temos que xe^{-x} é uma solução da equação diferencial dada, formando conjuntamente com e^{-x} um conjunto fundamental de soluções (porquê?). Assim, a solução geral da equação diferencial proposta pode ser escrita como

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x}.$$

Problema Sabendo que x^2 é uma solução da equação diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad x > 0,$$

determinar a respetiva solução geral.

Resp.: $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$.

Exercícios sobre propriedades das equações diferenciais lineares homogéneas

Exercício 3.1 *Mostrar que se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são duas soluções da equação diferencial*

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

então $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ também é uma solução desta equação diferencial, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Exercício 3.2 *Considerar a equação diferencial*

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

(a) Mostrar que e^x e xe^x são soluções linearmente independentes desta equação diferencial para todo x real;

(b) Escrever a solução geral da equação diferencial dada;

(c) Determinar a solução que satisfaz a condição $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

Exercício 3.3 *Considerar a equação diferencial*

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x \in \left]1, 2\right[.$$

(a) Mostrar que x e x^2 são soluções linearmente independentes desta equação diferencial para todo $x \in \left]1, 2\right[$;

(b) Escrever a solução geral da equação diferencial dada.

Exercício 3.4 *Considerar a equação diferencial*

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

(a) Mostrar que as funções e^x, e^{4x} e $2e^x - 3e^{4x}$ são soluções desta equação diferencial em $\mathbb{R}$;

(b) Mostrar que as soluções e^x e e^{4x} são linearmente independentes para todo x real;

(c) Mostrar que as soluções e^x e $2e^x - 3e^{4x}$ também são linearmente independentes para todo x real;

(d) Escrever a solução geral da equação diferencial dada.

Exercício 3.5 *Sabendo que $f(x) = x$ é uma solução da equação diferencial*

$$x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$$

em $\left]1, 2\right[$, determinar uma solução linearmente independente, $g(x)$, usando a propriedade da redução de ordem e escrever a solução geral da equação diferencial dada.

Exercício 3.6 *Sabendo que $w(x) = e^{2x}$ é uma solução da equação diferencial*

$$(2x + 1)\, y'' - 4\,(x + 1)\, y' + 4y = 0,$$

em $\left]0, 1\right[$, determinar uma solução linearmente independente, $q(x)$, usando a propriedade da redução de ordem e escrever a solução geral da equação diferencial dada.

3.3 Propriedades das equações diferenciais lineares não homogéneas

Consideramos agora alguns resultados relativos à equação diferencial não homogénea (ou completa)

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x). \tag{3.15}$$

Um teorema fundamental relativo a esta equação diferencial é o seguinte.

Teorema 3.7 *Seja v uma solução qualquer da equação diferencial linear não homogénea de ordem n (3.15). Seja u uma solução qualquer da equação diferencial homogénea associada. Nestas condições $u+v$ é uma solução da equação diferencial não homogénea (3.15).*

Demonstração A demonstração deste teorema recorre ao facto da equação diferencial ser linear. De facto, tem-se por hipótese,

$$a_0(x)\frac{d^n v}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dv}{dx} + a_n(x)v = F(x)$$

e

$$a_0(x)\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + a_n(x)u = 0.$$

Adicionando as duas equações precedentes membro a membro, obtém-se

$$a_0(x)\frac{d^n (u+v)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} (u+v)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d (u+v)}{dx} + a_n(x)(u+v) = F(x),$$

mostrando-se assim que $u+v$ é também uma solução de (3.15). ∎

Exemplo 3.19 *Sabendo que $f(x) = x$ é uma solução da equação diferencial não homogénea*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = x$$

e que $g(x) = \operatorname{sen} x$ é uma solução da equação diferencial homogénea

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0,$$

conclui-se que $h(x) = x + \operatorname{sen} x$ é também uma solução da equação diferencial não homogénea dada.

Problema Mostrar que $y = x + k\cos x$ também é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = x$$

qualquer que seja o valor da constante real k.

Apliquemos agora o Teorema 3.7 ao caso em que v é uma solução dada y_p da equação diferencial não homogénea (3.15), não envolvendo qualquer constante arbitrária, e que u é a solução geral

$$y_c = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$$

da equação diferencial homogénea associada. Então

$$y_c + y_p$$

é uma solução da equação diferencial não homogénea (3.15), envolvendo n constantes arbitrárias. Tem-se ainda o seguinte resultado importante.

Teorema 3.8 *Seja y_p uma solução dada da equação diferencial linear não homogénea de ordem n (3.15) não envolvendo qualquer constante arbitrária. Seja*

$$y_c = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$$

a solução geral da equação diferencial homogénea (ou incompleta) associada. Então toda a solução da equação diferencial (3.15) pode ser expressa na forma

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n + y_p,$$

escolhendo adequadamente as constantes c_1, c_2, ..., c_n.

Neste contexto, tem-se a seguinte definição.

Definição 3.7 *Considere-se a equação diferencial linear não homogénea de ordem n*

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x) \tag{3.16}$$

e a equação diferencial homogénea associada

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{3.17}$$

Tem-se os seguintes resultados:

1. *A solução geral da equação diferencial (3.17) designa-se **função complementar** da equação diferencial (3.16), denotando-se por y_c;*

2. *Qualquer solução particular da equação diferencial (3.16) que não envolva constantes arbitrárias designa-se um **integral particular** ou **solução particular** da equação diferencial (3.16), y_p;*

3. *A solução $y_c + y_p$ da equação diferencial (3.16), onde y_c é a função complementar e y_p é um integral particular da equação diferencial (3.16), designa-se **solução geral** da equação diferencial (3.16).*

Exemplo 3.20 *Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x.$$

A função complementar associada é a solução geral da equação diferencial homogénea associada

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

pelo que (ver Exemplo 3.2)

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Por outro lado, um integral particular da equação diferencial não homogénea é (ver Exemplo 3.19)

$$y_p = x,$$

pelo que a solução geral da equação diferencial não homogénea pode ser escrita na forma

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x.$$

Problema Determinar a solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 16x,$$

sabendo que as funções $\cosh 2x$ e $\operatorname{senh} 2x$ são soluções da equação homogénea associada.
Resp.: $y = c_1 \cosh 2x + c_2 \operatorname{senh} 2x - 4x$.

Abordaremos de seguida alguns métodos para obtenção destas duas componentes da solução geral (y_c e y_p). Para esse efeito comecemos por notar que se o membro não homogéneo da equação diferencial (3.16) for expresso como uma combinação linear de duas ou mais funções, então podemos usar o seguinte resultado para obter uma solução particular daquela equação.

Teorema 3.9 ***(Princípio da Sobreposição)*** *Sejam f_1, f_2, ..., f_m, integrais/soluções particulares das equações diferenciais*

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F_1(x), \tag{3.18}$$

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F_2(x), \tag{3.19}$$

$$\vdots$$

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F_m(x), \tag{3.20}$$

respetivamente. Então

$$y = k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_m f_m$$

é um integral/solução particular da equação diferencial

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = k_1F_1(x) + k_2F_2(x) + \cdots + k_mF_m(x),$$

onde k_1, k_2, ..., k_m, são constantes. A demonstração deste teorema é imediata devido à linearidade das equações diferenciais envolvidas.

Exemplo 3.21 *Considere-se a equação diferencial*

$$y'' - y = -5 + 2x + 8e^{-x}.$$

O segundo membro desta equação diferencial é uma combinação linear das funções $F_1(x) = 1$, $F_2(x) = x$ *e* $F_3(x) = e^{-x}$, *sendo os coeficientes dessa combinação linear* $k_1 = -5$, $k_2 = 2$, $k_3 = 8$ *(note-se que a escolha dos pares* (F_i, k_i) *não é única). Assim, consideremos as equações diferenciais e as respetivas soluções particulares*

$$\begin{aligned} y'' - y = 1 \quad &\rightarrow \quad y_{p1} = -1, \\ y'' - y = x \quad &\rightarrow \quad y_{p2} = -x, \\ y'' - y = e^{-x} \quad &\rightarrow \quad y_{p3} = -\frac{1}{2}xe^{-x}. \end{aligned}$$

Assim, por aplicação do Princípio da Sobreposição podemos concluir que uma solução particular da equação diferencial dada é

$$y_p = k_1 y_{p1} + k_2 y_{p2} + k_3 y_{p3} = 5 - 2x - 4xe^{-x}.$$

Exemplo 3.22 *Suponhamos que queremos determinar um integral particular da equação diferencial*

$$y'' + y = 3x + 5\operatorname{tg} x, \quad x \in \left]0, \pi/2\right[.$$

Solução. *Podemos considerar duas equações diferenciais, a saber,*

$$y'' + y = x \quad e \quad y'' + y = \operatorname{tg} x,$$

as quais têm integrais particulares x *e* $-(\cos x)\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$, *respetivamente. Portanto, aplicando o Princípio da Sobreposição, podemos concluir que um integral particular da equação diferencial dada é*

$$y_p = 3x - 5(\cos x)\ln(\sec x + \operatorname{tg} x).$$

Problema Determinar uma solução particular da equação diferencial

$$y'' - y' = 7 - 3e^x + 4e^{2x},$$

sabendo que as funções x, xe^x e e^{2x} são, respetivamente, solução das seguintes equações diferenciais

$$y'' - y' = -1, \quad y'' - y' = e^x \quad \text{e} \quad y'' - y' = 2e^{2x}.$$

Resp.: $y_p = -7x - 3xe^x + 2e^{2x}$.

O interesse da aplicação desta propriedade está portanto na possibilidade de decompor o problema inicial em problemas mais simples, (no máximo) tantos quanto o número de parcelas existentes no termo não homogéneo da equação diferencial para a qual se pretende determinar uma solução particular. Assim, conforme veremos, pode-se inclusivamente usar métodos distintos para o cálculo de soluções particulares consoante a natureza das funções que surjam no segundo membro de cada uma das m equações diferenciais referidas no teorema precedente.

Exercícios sobre propriedades das equações diferenciais lineares não homogéneas

Exercício 3.7 *Considerar a equação diferencial linear não homogénea*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2.$$

(a) *Mostrar que* e^x *e* e^{2x} *são soluções linearmente independentes da equação diferencial homogénea associada;*

(b) *Qual a função complementar da equação diferencial dada?*

(c) *Mostrar que* $2x^2 + 6x + 7$ *é um integral particular da equação diferencial dada;*

(d) *Qual a solução geral da equação diferencial dada?*

Exercício 3.8 *Sabendo que um integral particular da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 1$$

é $y = 1/6$*; que um integral particular da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x$$

é $y = x/6 + 5/36$*; e que um integral particular da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x$$

é $y = e^x/2$*, determinar um integral particular da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = -6 + 12x - 3e^x.$$

3.4 A equação linear homogénea com coeficientes constantes

Consideramos agora a **equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes**

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = 0, \tag{3.21}$$

onde a_0, a_1, ..., a_n, são constantes reais. Mostraremos que a solução geral desta equação diferencial pode ser obtida de forma explícita.

Devido à forma da equação diferencial (3.21), é de esperar que qualquer função $f(x)$ que seja uma solução dessa equação tenha a seguinte propriedade:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[f(x)\right] = c_kf(x). \tag{3.22}$$

 J. Figueiredo, C. Ribeiro – 2013

Ou seja, as derivadas de f devem ser múltiplos da própria função. A questão está em saber se existe alguma função com tal propriedade. A resposta é afirmativa, pois a função

$$f(x) = e^{mx},$$

onde m é uma constante (em geral complexa), verifica a propriedade (3.22) uma vez que

$$\frac{d^k}{dx^k}[f(x)] = \frac{d^k}{dx^k}[e^{mx}] = m^k e^{mx} = m^k f(x) = c_k f(x),$$

com $c_k = m^k$. Assim sendo, procuramos soluções da equação diferencial (3.21) da forma

$$y = e^{mx}$$

onde $m \in \mathbb{C}$.

Supondo então que $y = e^{mx}$ é uma solução da equação diferencial (3.22) para um determinado valor de m, tem-se

$$y = e^{mx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = me^{mx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx} \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = m^n e^{mx}.$$

Substituindo estes resultados na equação diferencial (3.21), obtém-se

$$a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \cdots + a_{n-1} m e^{mx} + a_n e^{mx} = 0$$

ou, dado que $e^{mx} \neq 0$ para todo x real,

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0. \tag{3.23}$$

Esta equação polinomial de grau n denomina-se **equação caraterística** associada à equação diferencial (3.21).

Para $y = e^{mx}$ ser uma solução da equação diferencial (3.21), então a constante complexa m deve satisfazer a equação caraterística (3.23). Portanto, para determinar soluções da equação diferencial (3.21) escrevemos a equação caraterística associada (3.23) e determinamos as n soluções desta equação polinomial. Teremos várias situações consoante a natureza das raízes da equação caraterística: raízes reais distintas, raízes reais repetidas, raízes complexas conjugadas distintas, raízes complexas conjugadas repetidas, podendo ter-se inclusivamente combinações envolvendo vários destes "casos base". Vejamos o que acontece para cada um destes casos.

Raízes reais distintas

Suponhamos que as raízes da equação (3.23) são n números reais distintos,

$$m_1, \ m_2, \ \ldots \ , \ m_n.$$

Então,

$$e^{m_1 x}, \ e^{m_2 x}, \ \ldots \ , \ e^{m_n x}$$

são n soluções distintas da equação diferencial (3.21). Mais ainda, recorrendo ao Wronskiano pode-se mostrar que estas soluções são linearmente independentes, constituindo portanto um conjunto fundamental de soluções de (3.21). Tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.10 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes (3.21). Se a equação caraterística associada (3.23) tiver n raízes reais distintas, $m_1, m_2, \ldots, m_n$, então a solução geral da equação diferencial (3.21) é*

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x},$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$, são constantes arbitrárias.

Exemplo 3.23 *Considere-se o PVI*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \quad x > 0; \quad y(0) = -1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0. \tag{3.24}$$

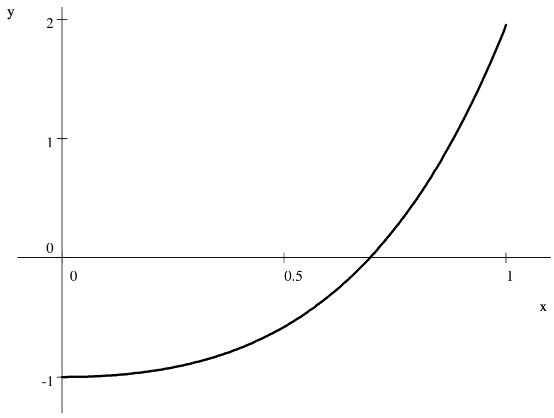
A equação caraterística associada à equação diferencial é (porquê?)

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-1)(m-2) = 0,$$

sendo as suas raízes $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Tratando-se de duas raízes reais distintas, concluímos que e^x e e^{2x} são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de segunda ordem dada, pelo que constituem um conjunto fundamental de soluções dessa equação diferencial. Assim, a sua solução geral é

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Calculando o valor de c_1 e c_2 de forma a ter-se $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, obtém-se $y = e^{2x} - 2e^x$.



Representação gráfica da função $e^{2x} - 2e^x$, solução do PVI (3.24)

Exemplo 3.24 *Determinar a solução do PVI*

$$y''' - 4y'' + y' + 6y = 0, \quad x > 0; \quad y(0) = 14, \quad y'(0) = 12, \quad y''(0) = 36, \tag{3.25}$$

sabendo que e^{-x} é uma solução da equação diferencial.
Solução. *A equação caraterística associada à equação diferencial é*

$$m^3 - 4m^2 + m + 6 = 0.$$

Sabendo que $m_1 = -1$ *é uma raiz desta equação (porquê?), podemos aplicar a regra de Ruffini para determinar as restantes raízes, obtendo-se a fatorização*

$$m^3 - 4m^2 + m + 6 = (m+1)(m^2 - 5m + 6) = (m+1)(m-2)(m-3).$$

As raízes obtidas são números reais distintos,

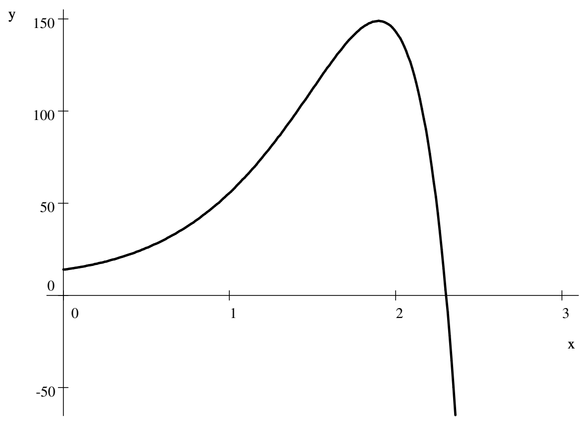
$$m_1 = -1, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 3,$$

pelo que as funções e^{-x}, e^{2x} *e* e^{3x} *formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial dada e assim a respetiva a solução geral é*

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}.$$

Calculando o valor de c_1, c_2, *e* c_3 *de forma a ter-se* $y(0) = 14$, $y'(0) = 12$, $y''(0) = 36$, *obtém-se*

$$y = 5e^{-x} + 10e^{2x} - e^{3x}.$$



Representação gráfica da função $5e^{-x} + 10e^{2x} - e^{3x}$*, solução do PVI (3.25)*

Problema Determinar a solução do PVF

$$y'' - y' = 0, \quad 0 < x < 1; \quad y(0) = 2, \quad y'(1) = e.$$

Resp.: $y = e^x + 1$.

Raízes reais repetidas

Exemplo 3.25 *Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$$

A equação caraterística associada,

$$m^2 - 6m + 9 = 0,$$

tem duas raízes reais, mas que não são distintas, $m_1 = 3$ *e* $m_2 = 3$*. Correspondendo à raiz* $m_1 = 3$ *teríamos a solução* e^{3x}*, o mesmo acontecendo para a raiz* $m_2 = 3$*. Desta forma, as raízes da equação caraterística não conduzem a um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.*

Sabemos, portanto, que e^{3x} *é uma solução da equação diferencial proposta, faltando agora determinar outra solução que seja linearmente independente. Podemos determinar essa solução usando a propriedade (método) da redução de ordem (porquê?). Ou seja, a segunda solução deve ser da forma*

$$y = e^{3x}\, v(x),$$

com $v(x)$ *não constante. Assim, fazemos*

$$y = e^{3x}\, v \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3e^{3x}\, v + e^{3x}\,\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{3x}\, v + e^{3x}\,\frac{d^2v}{dx^2} + 6e^{3x}\,\frac{dv}{dx}.$$

Substituindo estes resultados na equação diferencial dada, vem

$$\left(9v + \frac{d^2v}{dx^2} + 6\,\frac{dv}{dx}\right) - 6\left(3v + \frac{dv}{dx}\right) + 9\,v = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0.$$

Obtém-se assim

$$v = c_1 x + c_2.$$

Escolhendo $c_1 = 1$ *e* $c_2 = 0$ *tem-se* $v(x) = x$*, obtendo-se a solução*

$$y = e^{3x}\, v(x) = x\, e^{3x}.$$

Dispomos assim de duas funções, e^{3x} *e* $x\, e^{3x}$*, que constituem um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial dada (porquê?). Portanto, a respetiva solução geral é*

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} = (c_1 + c_2 x)\, e^{3x}.$$

Nota A equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

pode ser abordada de uma forma distinta para efeitos da determinação da sua solução geral. O "método" é baseado na fatorização do polinómio que surge na equação caraterística que lhe está associada, ou seja,

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-3)(m-3) = 0.$$

Tal permite escrever a equação diferencial dada como

$$\left(\frac{d}{dx} - 3\right)\left(\frac{d}{dx} - 3\right) y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{d}{dx} - 3\right)\underbrace{\left(\frac{dy}{dx} - 3y\right)}_{u} = 0. \tag{3.26}$$

Ora, realizando a mudança de variável

$$u = \frac{dy}{dx} - 3y, \tag{3.27}$$

tem-se que a equação diferencial (3.26) corresponde a

$$\left(\frac{d}{dx} - 3\right) u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} - 3u = 0.$$

A equação caraterística associada é $m - 3 = 0$, pelo que uma família de soluções é (porquê?)

$$u = k_1 e^{3x}.$$

Uma vez determinada a função $u(x)$, podemos determinar $y(x)$ recorrendo à equação diferencial (3.27), ou seja,

$$u = \frac{dy}{dx} - 3y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} - 3y = k_1 e^{3x}.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear de primeira ordem que admite o fator integrante e^{-3x}, pelo que se obtém

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = k_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y\right) = k_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(k_1 x + k_2\right) e^{3x},$$

que mais não é do que o resultado obtido recorrendo à propriedade de redução da ordem. Esta forma de abordar as equações lineares com coeficientes constantes pode ser interessante quando abordarmos a determinação de soluções particulares de equações lineares não homogéneas (o que não é o caso deste exemplo), pelo que voltaremos posteriormente a este assunto.

Tendo o exemplo precendente como guia, voltemos à equação diferencial de ordem n (3.21). Se a equação caraterística associada (3.23) tem uma raiz real m de multiplicidade dois, então é de esperar que e^{mx} e xe^{mx} sejam as duas soluções linearmente independentes correspondentes.

Suponhamos agora que a equação caraterística associada (3.23) tem uma raiz real m de multiplicidade dois e $n-2$ raízes reais distintas

$$m_1,\ m_2,\ \ldots\ ,\ m_{n-2}.$$

Nestas condições, as n soluções linearmente independentes da equação diferencial (3.21) são

$$e^{mx},\ xe^{mx},\ e^{m_1 x},\ e^{m_2 x},\ \ldots\ ,\ e^{m_{n-2} x},$$

pelo que a solução geral é

$$y = \left(c_1 + c_2 x\right) e^{mx} + c_3 e^{m_1 x} + \cdots + c_n e^{m_{n-2} x}.$$

De forma análoga, se a equação caraterística (3.23) tiver 3 raízes reais repetidas, m, pode-se mostrar que as 3 soluções linearmente independentes que lhes correspondem são

$$e^{mx}, \quad xe^{mx}, \quad x^2 e^{mx},$$

sendo a solução geral da equação diferencial dada por

$$y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^{mx}.$$

Tem-se então o seguinte resultado geral.

Teorema 3.11 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem* n *com coeficientes constantes (3.21). Se a equação caraterística associada (3.23) tiver uma raiz real* m *de multiplicidade* k*, então a parte da solução geral da equação diferencial (3.21) correspondente a estas raízes é*

$$\left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1}\right)e^{mx}$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$*, são constantes arbitrárias. Se, além disso, as restantes raízes da equação diferencial (3.21) são números reais distintos* $m_{k+1}, \ldots, m_n$*, então a solução geral de (3.21) escreve-se*

$$y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1}\right)e^{mx} + c_{k+1}e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_ne^{m_nx}.$$

Exemplo 3.26 *Considere-se o PVF*

$$3\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 3y = 0, \quad 0 < x < 3; \quad y(0) = -\frac{5}{4},\ y(3) = \frac{55}{4}e^{-3}. \tag{3.28}$$

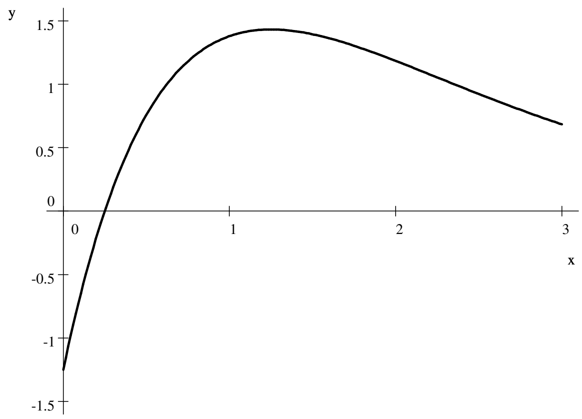
A equação caraterística associada à equação diferencial,

$$3m^2 + 6m + 3 = 0,$$

tem raízes -1 *e* -1*, pelo que a solução geral da equação diferencial é*

$$y = (c_1 + c_2x)\,e^{-x}.$$

Atendendo às condições de fronteira impostas, resulta $y = 5(x - 1/4)e^{-x}$.



Representação gráfica da função $5(x-1/4)e^{-x}$*, solução do PVF (3.28)*

Exemplo 3.27 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 18y = 0,$$

sabendo que e^{-2x} *é uma solução.*

Solução. *Uma vez que e^{-2x} é uma solução da equação diferencial, então concluímos que uma raiz da equação caraterística associada,*

$$m^3 - 4m^2 - 3m + 18 = 0,$$

é -2. As restantes raízes podem ser calculadas usando a regra de Ruffini, obtendo-se que a equação caraterística tem duas raízes reais de multiplicidade 2 e uma raiz real que não se repete: 3, 3 e -2. Assim, um conjunto fundamental de soluções é e^{3x}, xe^{3x} e e^{-2x}, pelo que a solução geral da equação diferencial é

$$y = (c_1 + c_2x)\, e^{3x} + c_3e^{-2x}.$$

Exemplo 3.28 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 8y = 0,$$

sabendo que e^{-x} e e^{2x} são soluções desta equação.

Solução. *Procedendo de forma análoga ao exemplo precedente (aplicação da regra de Ruffini duas vezes), conclui-se que a equação caraterística associada,*

$$m^4 - 5m^3 + 6m^2 + 4m - 8 = 0,$$

tem raízes 2, 2, 2 e -1, pelo que a solução geral da equação diferencial é

$$y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right) e^{2x} + c_4e^{-x}.$$

Problema Determinar a solução do PVF

$$y'' - 10y' + 25y = 0, \quad 0 < x < 1; \quad y'(0) = 25,\ y'(1) = 0.$$

Resp.: $y = 6e^{5x} - 5xe^{5x}$.

Raízes complexas conjugadas distintas

Suponhamos agora que a equação caraterística (3.23) tem a raiz $a + bi$, onde a e b são números reais ($b \neq 0$), e que esta não se repete. Então, uma vez que os coeficientes da equação caraterística são números reais, $a - bi$ também é uma raiz da equação caraterística que não se repete (porquê?). A parte da solução geral da equação diferencial (3.21) que corresponde a estas duas raízes complexas conjugadas é

$$k_1e^{(a+bi)x} + k_2e^{(a-bi)x}$$

ou, equivalentemente,

$$e^{ax}\left(k_1e^{ibx} + k_2e^{-ibx}\right),$$

onde k_1e k_2 são constantes complexas. Neste caso, as constantes k_1 e k_2 não podem ser arbitrárias, pois a expressão precedente deve ter parte imaginária nula (porquê?). Assim, temos de averiguar qual a parte real e qual a parte imaginária daquela expressão. Para esse efeito comecemos por notar que

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

pelo que,

$$\begin{aligned} e^{ax}\left(k_1 e^{ibx} + k_2 e^{-ibx}\right) &= e^{ax}\left[k_1\left(\cos bx + i \operatorname{sen} bx\right) + k_2\left(\cos bx - i \operatorname{sen} bx\right)\right] \\ &= e^{ax}\left[(k_1 + k_2)\cos bx + i(k_1 - k_2)\operatorname{sen} bx\right]. \end{aligned}$$

Assim, tomando $k_1 = k_2 = 1/2$, concluímos que

$$e^{ax}\cos bx$$

é uma solução da equação diferencial. Analogamente, escolhendo $k_2 = -k_1 = i/2$ concluímos que

$$e^{ax}\operatorname{sen} bx$$

também é uma solução da equação diferencial. Sendo $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\operatorname{sen} bx$ funções linearmente independentes, então a parte da solução geral correspondente às raízes complexas conjugadas (não repetidas) $a + bi$ e $a - bi$ é

$$e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx\right).$$

Teorema 3.12 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes (3.21). Se a equação caraterística associada (3.23) tem raízes complexas conjugadas não repetidas $a + bi$ e $a - bi$, onde a e b são números reais, então a parte correspondente na solução geral da equação diferencial (3.21) é*

$$e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx\right).$$

É usual assumir-se, sem perda de generalidade, que $b > 0$.

Exemplo 3.29 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' + y = 0, \quad x > 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2. \tag{3.29}$$

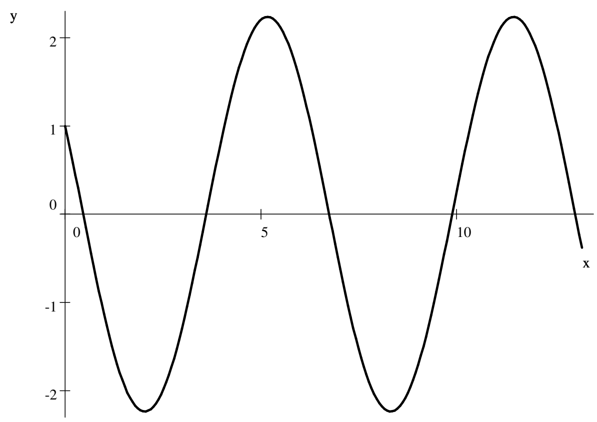
Solução. *A equação caraterística associada à equação diferencial é*

$$m^2 + 1 = 0,$$

cujas raízes são $0 \pm i$. Assim, $a = 0$ e $b = 1$ (pois assume-se que $b > 0$), pelo que o respetivo conjunto fundamental de soluções é, por exemplo, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$. A solução geral da equação diferencial é então

$$y = e^{0x}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

É fácil mostrar que a solução do PVI proposto é $y = \cos x - 2 \operatorname{sen} x$.



Representação gráfica da função $\cos x - 2 \operatorname{sen} x$, solução do PVI (3.29)

Note-se que a expressão $\cos x - 2\,\mathrm{sen}\, x$ *pode ser representada na forma* $A\cos(x+\varphi)$*. De facto, tem-se*

$$A\cos(x+\varphi) = A\cos x\cos\varphi - A\,\mathrm{sen}\, x\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

pelo que bastará escolher A *e* φ *tal que*

$$A\cos\varphi = 1, \quad -A\,\mathrm{sen}\,\varphi = -2,$$

resultando

$$A = \sqrt{5}, \quad \varphi = \cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{5} \approx 1.107.$$

Assim sendo, outra forma (aproximada) de representar a solução do PVI seria

$$y = \sqrt{5}\cos(x+1.107).$$

Exemplo 3.30 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' + \frac{1}{3}y' + \frac{37}{36}y = 0, \quad x>0; \quad y(0)=1, \quad y'(0) = -\frac{13}{6}. \tag{3.30}$$

Solução. *A equação caraterística associada à equação diferencial é*

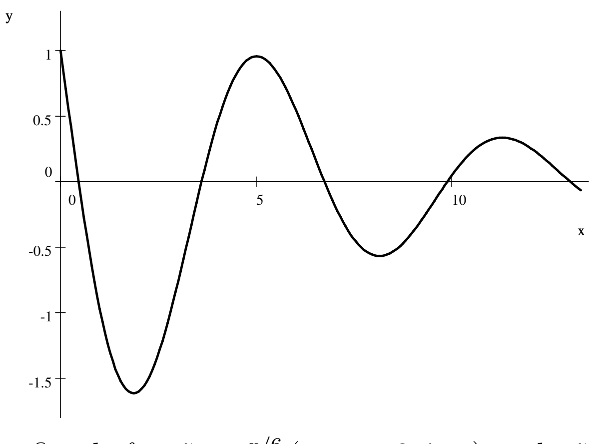
$$m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{37}{36} = 0,$$

cujas raízes são $-1/6 \pm i$*. Assim, constituem um conjunto fundamental de soluções as funções* $e^{-x/6}\cos x$ *e* $e^{-x/6}\,\mathrm{sen}\, x$*, sendo a respetiva solução geral*

$$y = e^{-x/6}\left(c_1\cos x + c_2\,\mathrm{sen}\, x\right).$$

As condições iniciais impostas conduzem à solução

$$y = e^{-x/6}\left(\cos x - 2\,\mathrm{sen}\, x\right).$$



Representação gráfica da função $e^{-x/6}\left(\cos x - 2\sin x\right)$*, solução do PVI (3.30)*

Exemplo 3.31 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 25\frac{dy}{dx} = 0.$$

Solução. *A equação caraterística associada é*

$$m\left(m^2 - 6m + 25\right) = 0,$$

cujas raízes são 0 *e* $3 \pm 4i$*. Um conjunto fundamental de soluções é formado pelas funções* $e^{3x}\cos 4x$*,* $e^{3x}\operatorname{sen} 4x$ *e* 1*, sendo a respetiva solução geral*

$$y = e^{3x}\left(c_1\cos 4x + c_2\operatorname{sen} 4x\right) + c_3.$$

Problema Determinar a solução do PVF

$$y'' + 10y' + 26y = 0, \quad 0 < x < \pi; \quad y(0) = 1,\ y'(\pi) = 0.$$

Resp.: $y = (\cos x + 5\operatorname{sen} x)\, e^{-5x}$.

Raízes complexas conjugadas repetidas

Teorema 3.13 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem* n *com coeficientes constantes (3.21). Se a equação caraterística associada (3.23) tem raízes complexas conjugadas* $a + bi$ *e* $a - bi$ *de multiplicidade* k*, então a parte correspondente na solução geral da equação diferencial (3.21) é*

$$e^{ax}\left[\left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_kx^{k-1}\right)\cos bx + \left(c_{k+1} + c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \ldots + c_{2k}x^{k-1}\right)\operatorname{sen} bx\right].$$

Exemplo 3.32 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 14\frac{d^2y}{dx^2} - 20\frac{dy}{dx} + 25y = 0,$$

sabendo que $1 + 2i$ *é uma raiz da equação caraterística associada.*

Solução. *Se* $1 + 2i$ *é uma raiz da equação caraterística associada,*

$$m^4 - 4m^3 + 14m^2 - 20m + 25 = 0,$$

então $1 - 2i$ *também o é (porquê?). Aplicando a regra de Ruffini (divisão de polinómios) às raízes* $1 + 2i$ *e* $1 - 2i$ *(a ordem é arbitrária), obtém-se a fatorização*

$$[m - (1 + 2i)]\,[m - (1 - 2i)]\left(m^2 - 2m + 5\right) = \left[(m-1)^2 + 4\right]\left(m^2 - 2m + 5\right) = \left[(m-1)^2 + 4\right]^2 = 0.$$

Assim, as raízes da equação caraterística são $1 \pm 2i$ *de multiplicidade* 2*. Consequentemente, a respetiva solução geral é*

$$y = e^{x}\left[(c_1 + c_2x)\cos 2x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} 2x\right].$$

Exemplo 3.33 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 12\frac{d^3y}{dx^3} + 56\frac{d^2y}{dx^2} - 120\frac{dy}{dx} + 100y = 0,$$

sabendo que $e^{3x}\cos x$ *é uma solução desta equação.*

Solução. *Se a função* $e^{3x}\cos x$ *é uma solução da equação diferencial, então* $e^{3x}\operatorname{sen} x$ *também é solução dessa equação. Além disso, a equação caraterística associada admite as raízes* $3 \pm i$. *Assim, usando um procedimento análogo ao do exemplo precedente, conclui-se que* $3 \pm i$ *é uma raiz de multiplicidade* 2 *da equação caraterística*

$$m^4 - 12m^3 + 56m^2 - 120m + 100 = 0$$

e, portanto, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = e^{3x}\left[(c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} x\right].$$

Problema Determinar a solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Resp.: $y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} x$

Exercícios sobre a equação linear homogénea com coeficientes constantes

Exercício 3.9 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0;$

(b) $y'' - 2y' - 3y = 0;$

(c) $y'' + 9y = 0;$

(d) $y'' - 8y' + 16y = 0;$

(e) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0;$

(f) $y''' - 6y'' + 5y' + 12y = 0,$ (e^{-x} *é uma sol.*);

(g) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0,$ (x^2e^{2x} *é uma sol.*);

(h) $y^{(iv)} - 3y''' - 2y'' + 2y' + 12y = 0,$ *(*e^{2x}, e^{3x} *são sols.);*

(i) $y^{(v)} = 0.$

Exercício 3.10 *Determinar a solução dos seguintes PVIs. Mostrar que a solução obtida verifica formalmente o PVI dado.*

(a) $y'' - y' - 12y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5;$

(b) $y'' + 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2;$

(c) $y''' - 5y'' + 9y' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1,$ *(*e^{2x} *é uma sol. da EDO).*

Exercício 3.11 *As raízes da equação caraterística correspondente a determinada equação diferencial linear homogénea de ordem 8 são:* $3,\ 3,\ 3,\ -1,\ 2 \pm 3i,\ 2 \pm 3i$. *Escrever a respetiva solução geral.*

Exercício 3.12 *Sabendo que a função* $e^x \cos 2x$ *é uma solução da equação diferencial*

$$y^{(iv)} + 3y''' + y'' + 13y' + 30y = 0,$$

determinar a respetiva solução geral. Pista: A regra de Ruffini aplica-se mesmo quando as raízes são complexas (conjugadas neste caso).

3.5 O método dos coeficientes indeterminados

Consideremos novamente a equação diferencial linear não homogénea de ordem n com coeficientes constantes

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x). \tag{3.31}$$

Recorde-se que a solução geral desta equação diferencial se escreve na forma

$$y_c + y_p,$$

onde y_c é a solução geral da equação diferencial homogénea associada e y_p uma solução particular da equação diferencial (3.31).

O **método dos coeficientes indeterminados** tem como finalidade a determinação de y_p. Do ponto de vista matemático, a classe de funções F à qual podemos aplicar o método dos coeficientes indeterminados é algo limitada, conforme veremos de seguida. No entanto, essa classe contém funções que surgem frequentemente nos segundos membros das equações diferencias lineares não homogéneas associadas a problemas de índole muito variada. Portanto, do ponto de vista prático, a classe de funções em causa não é tão restritiva quanto possa parecer à primeira vista. Acresce-se que o método dos coeficientes indeterminados tem a vantagem de, no caso de poder ser aplicado, ser relativamente simples.

Antes de procedermos à descrição detalhada do método propriamente dito, é necessário introduzir alguns conceitos adicionais que se prendem com a classe de funções admissíveis F.

Definição 3.8 *Diz-se que uma função f é uma* ***função de coeficientes indeterminados*** *(função CI) se obedece a uma das seguintes condições:*

(i) $f(x) = x^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}_0$;

(ii) $f(x) = e^{ax}$, *onde* $a \neq 0$;

(iii) $f(x) = \operatorname{sen}(bx + c)$, *onde* $b \neq 0$;

(iv) $f(x) = \cos(dx + e)$, *onde* $d \neq 0$,

ou ainda se a função f for um produto finito de duas ou mais funções destes quatro tipos.

Exemplo 3.34 *As seguintes funções são exemplos de funções CI dos "tipos base" (i) – (iv).*

$$x^3, \quad e^{-2x}, \quad \operatorname{sen}(2x), \quad \cos(3x - 1).$$

Exemplo 3.35 *As seguintes funções são exemplos de produtos finitos de duas ou mais funções dos "tipos base" (i) – (iv).*

$$x^3e^{-2x}, \quad x\,\mathrm{sen}(2x), \quad e^x\cos(3x-1), \quad x^2e^{-x}\,\mathrm{sen}(x)\cos(x).$$

Problema As seguintes funções não são funções CI (porquê?).

$$x+1, \quad e^x - x, \quad \sec x, \quad \mathrm{tg}\, x, \quad \ln x, \quad x^{3/2}, \quad \cos^2(x), \quad x^{-1}.$$

O método dos coeficientes indeterminados pode ser aplicado apenas quando a função F presente no segundo membro da equação diferencial com coeficientes constantes (3.31) for uma combinação linear finita de funções CI.

Definição 3.9 *Seja f uma função CI. O conjunto de funções que consiste na própria função f e em todas as funções CI linearmente independentes das quais as sucessivas derivadas de f são múltiplos constantes ou combinações lineares designa-se* ***conjunto CI da função*** *f.*

A definição precedente é, na prática, bem mais simples do que pode parecer à primeira vista. Ilustremos o conceito com alguns exemplos.

Exemplo 3.36 *Seja $f(x) = x^3$. Trata-se de uma função CI, tendo-se,*

$$\frac{df}{dx} = 3x^2, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = 6x, \quad \frac{d^3f}{dx^3} = 6, \quad \frac{d^kf}{dx^k} = 0 \text{ para } k > 3.$$

Assim, as funções CI linearmente independentes das quais as sucessivas derivadas da função f são múltiplos constantes ou combinações lineares são

$$x^2, \quad x, \quad 1,$$

pelo que o conjunto CI associado à função $f(x) = x^3$ é

$$S_f = \left\{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\right\}.$$

Exemplo 3.37 *Considere-se a função CI $g(x) = \cos 2x$. Tem-se,*

$$\frac{dg}{dx} = -2\,\mathrm{sen}\,2x, \quad \frac{d^2g}{dx^2} = -4\cos 2x, \quad \frac{d^3g}{dx^3} = 8\,\mathrm{sen}\,2x, \quad \ldots,$$

pelo que o conjunto CI associado à função $g(x)$ é

$$S_g = \{\cos 2x, \ \mathrm{sen}\,2x\}.$$

Problema Determinar o conjunto CI associado à função CI $r(x) = e^{-x}$.
Resp.: $S_r = \{e^{-x}\}$.

Exemplo 3.38 *A função $h(x) = x^2 \cos x$ é um produto de duas funções CI: x^2 e $\cos x$. Portanto, $h(x)$ é também uma função CI, tendo-se*

$$\frac{dh}{dx} = 2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x, \qquad \frac{d^2h}{dx^2} = 2\cos x - 4x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x,$$

$$\frac{d^3h}{dx^3} = -6\operatorname{sen} x - 6x\cos x + x^2 \operatorname{sen} x, \qquad \frac{d^4h}{dx^4} = \cdots .$$

Ainda que prossigamos a derivação, obteremos sempre combinações lineares das funções $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $x \operatorname{sen} x$, $x\cos x$, $x^2 \operatorname{sen} x$ e $x^2 \cos x$, pelo que o conjunto CI associado a $h(x)$ é

$$S_h = \left\{\operatorname{sen} x,\ \cos x,\ x\operatorname{sen} x,\ x\cos x,\ x^2\operatorname{sen} x,\ x^2\cos x\right\}.$$

Este conjunto CI pode ser determinado, de forma mais simples, recorrendo aos conjuntos CI associados às funções x^2 e $\cos x$. De facto,

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad S_f = \left\{x^2, x, 1\right\}$$

e

$$g(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad Sg = \{\cos x, \operatorname{sen} x\},$$

sendo o conjunto CI associado à função $x^2\cos x$ dado pelo produto cartesiano dos conjuntos S_f e S_g, isto é

$$S_h = S_t \times S_g = \left\{x^2,\ x,\ 1\right\} \times \{\cos x,\ \operatorname{sen} x\} = \left\{\operatorname{sen} x,\ \cos x,\ x\operatorname{sen} x,\ x\cos x,\ x^2\operatorname{sen} x,\ x^2\cos x\right\}.$$

Este procedimento é generalizável ao produto finito de funções CI, podendo ser muito mais simples do que o método direto.

Exemplo 3.39 *Seja $p(x) = x^2 e^x \cos x$. Tem-se,*

$$p(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x),$$

onde

$$p_1(x) = x^2, \quad p_2(x) = e^x, \quad p_3(x) = \cos x,$$

são funções CI, correspondendo-lhes os seguintes conjuntos CI,

$$S_{p_1} = \left\{x^2, x, 1\right\}, \quad S_{p_2} = \{e^x\}, \quad S_{f_{p3}} = \{\cos x,\ \operatorname{sen} x\}.$$

Então,

$$Sp = S_{p_1} \times S_{p_2} \times S_{p_3},$$

resultando,

$$S_p = \left\{x^2e^x\cos x,\ x^2e^x\operatorname{sen} x,\ xe^x\cos x,\ xe^x\operatorname{sen} x,\ e^x\cos x,\ e^x\operatorname{sen} x\right\}.$$

Problema Determinar o conjunto CI associado à função $q(x) = x^3e^{-x}$.
Resp.: $S_q = \left\{x^3e^{-x},\ x^2e^{-x},\ xe^{-x},\ e^{-x}\right\}$.

Vejamos agora em que consiste o método dos coeficientes indeterminados, o qual nos permitirá, recorde-se, determinar soluções particulares da equação diferencial linear não homogénea com coeficientes constantes

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=F(x), \tag{3.32}$$

onde $F(x)$ é uma combinação linear finita $F(x)=A_1u_1(x)+A_2u_2(x)+\cdots+A_mu_m(x)$ de funções CI, u_1, u_2, ..., u_m, sendo A_1, A_2, ..., A_m constantes conhecidas.

Assumindo que a função complementar y_c foi previamente determinada recorrendo, por exemplo, à equação caraterística associada à correspondente equação diferencial homogénea, fazemos:

1. Para cada uma das m funções CI
$$u_1,\ u_2, \ldots,\ u_m,$$
determinamos o conjunto CI correspondente, obtendo assim os m conjuntos CI
$$S_1,\ S_2, \ldots,\ S_m,$$
que lhes estão associados.

2. Suponhamos que um destes conjuntos CI, por exemplo S_j, é um subconjunto de outro conjunto CI, S_k, ou seja $S_j \subset S_k$. Nesse caso, omitimos o conjunto S_j de qualquer consideração futura, preservando somente o conjunto S_k. Este tipo de análise aplica-se a cada um dos conjuntos CI obtidos no passo 1.

3. Consideramos agora cada um dos conjuntos CI restantes (após o passo 2). Suponhamos que um destes conjuntos CI, por exemplo S_t, inclui um ou mais elementos (necessariamente funções CI linearmente independentes) que são solução da equação diferencial homogénea associada. Nesse caso, multiplicamos cada um dos elementos de S_t pela menor potência inteira de x, de forma a que o conjunto resultante não contenha nenhum elemento que seja solução da equação diferencial homogénea associada. Como resultado deste processo o conjunto S_t é substituido pelo conjunto CI "revisto" S'_t. Novamente, este tipo de análise aplica-se, separadamente, a cada um dos conjuntos CI obtidos após o passo 2.

4. Em geral, teremos neste momento

   (i) Alguns dos conjuntos CI originais, os quais não foram nem omitidos no passo 2, nem "revistos" no passo 3;

   (ii) Alguns conjuntos CI "revistos" no passo 3.

   Formamos então uma combinação linear dos elementos dos vários conjuntos com coeficientes desconhecidos (mas constantes) – os **coeficientes indeterminados**.

5. Determinamos o valor de cada um dos coeficientes indeterminados substituindo a combinação linear obtida no passo precedente na equação diferencial não homogénea (3.32), obrigando a que se verifique uma identidade. Obtém-se desta forma uma solução particular da equação diferencial não homogénea (3.32).

Nota Se o passo 2. for omitido, o resultado final será o mesmo, mas os cálculos serão, desnecessariamente, mais extensos. Já no que se refere à omissão do passo 3., esta conduz inevitavelmemte a que o sistema de equações resultante do passo 5. não tenha solução, tornando impossível a obtenção de uma solução particular.

Exemplo 3.40 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' - 2y' - 3y = 2e^x - 10\operatorname{sen} x, \quad x > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{3.33}$$

Solução. *A equação diferencial homogénea associada é*

$$y'' - 2y' - 3y = 0,$$

sendo a equação caraterística correspondente $m^2 - 2m - 3 = 0$*, cujas raízes são reais e distintas:* 3 *e* -1*. Assim, as funções* e^{3x} *e* e^{-x} *formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial precedente, pelo que a função complementar é*

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x},$$

onde c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias. O segundo membro da equação diferencial dada, a saber,* $f(x) = 2e^x - 10\operatorname{sen} x$*, é uma combinação linear finita de (duas) funções CI,*

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = \operatorname{sen} x.$$

Assim, os conjuntos CI a considerar neste caso são

$$S_{f_1} = \{e^x\}, \quad S_{f_2} = \{\operatorname{sen} x, \ \cos x\}.$$

É obvio que $S_{f_1} \not\subset S_{f_2}$ *e* $S_{f_2} \not\subset S_{f_1}$*. Por outro lado, nenhum dos elementos destes conjuntos são solução da equação diferencial homogénea associada (basta analisar o conjunto fundamental de soluções ou a expressão da função complementar para concluir imediatamente que assim é), pelo que os passos 2 e 3 descritos anteriormente não se aplicam. Desta maneira, uma solução particular da equação diferencial dada é da forma*

$$y_p = Ae^x + B\operatorname{sen} x + C\cos x,$$

onde A, B *e* C *são coeficientes constantes a determinar de forma a que a expressão precedente seja uma solução particular da equação diferencial proposta. Tem-se*

$$y_p' = Ae^x + B\cos x - C\operatorname{sen} x, \quad y_p'' = Ae^x - B\operatorname{sen} x - C\cos x.$$

Atendendo a que deverá ter-se

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = 2e^x - 10\operatorname{sen} x,$$

a substituição das expressões encontradas para y_p *e para as suas derivadas em ordem a* x *na equação diferencial precedente conduz a*

$$(-4A - 2)\, e^x + (2C - 4B + 10)\operatorname{sen} x + (-4C - 2B)\cos x = 0,$$

que deverá verificar-se para todo x *real. Assim, sendo as funções* e^x, $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *linearmente independentes em* $\mathbb{R}$*, a combinação linear precedente é nula para todo* x *real se e só se*

$$\begin{cases} -4A - 2 = 0 \\ 2C - 4B + 10 = 0 \\ -4C - 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 2 \\ C = -1 \end{cases}.$$

Portanto, a aplicação do método dos coeficientes indeterminados permite obter a seguinte solução particular para a equação diferencial dada,

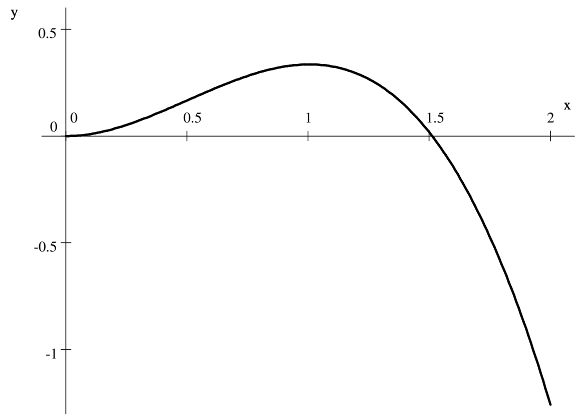
$$y_p = -\frac{1}{2}e^x + 2\operatorname{sen} x - \cos x,$$

obtendo-se para a solução geral

$$y = y_c + y_p = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2\operatorname{sen} x - \cos x.$$

O cálculo das constantes c_1 e c_2 é feito impondo as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ na solução geral obtida, resultando

$$y = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2\operatorname{sen} x - \cos x.$$



Representação gráfica da função $\frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2\operatorname{sen} x - \cos x$, solução do PVI (3.33)

Problema Mostrar, usando o método dos coeficientes indeterminados, que a solução geral da equação diferencial

$$y'' - 2y' - 3y = 30 - 12xe^x$$

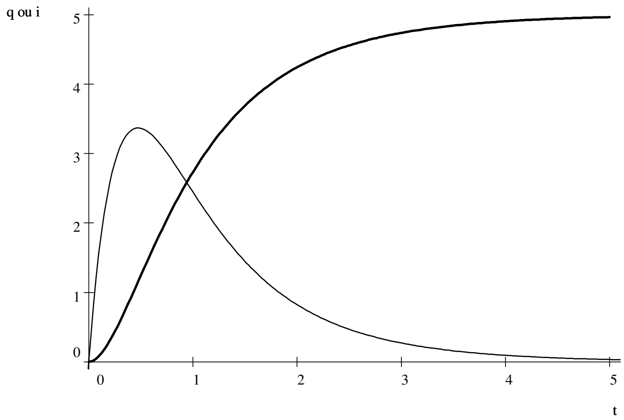
é $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + 3xe^x - 10$.

Problema Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série (circuito RLC). Nestas condições a carga instantânea no condensador q em cada instante de tempo t é tal que

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E,$$

sendo a intensidade de corrente i em cada instante dada por $i = q'$. Supondo que $E = 20(e^{-3t} + 1)$ (Volt), $R = 6$ (Ohm), $L = 2$ (Henry) e $C = 1/4$ (Farad), e ainda que $q(0) = i(0) = 0$, determinar a carga do condensador, bem como a intensidade de corrente, em cada instante de tempo.

Resp.: $q = 5\left(1 + e^{-3t} - e^{-2t} - e^{-t}\right)$; $i = 5\left(e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t}\right)$.



Representação gráfica de $q(t)$ (a cheio) e $i(t)$

Exemplo 3.41 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' - y' = 2e^{-x} - 7, \quad x > 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \tag{3.34}$$

Solução. *A equação diferencial homogénea associada é*

$$y'' - y' = 0,$$

tendo-se a equação caraterística $m^2 - m = 0$*, cujas raízes são reais e distintas:* 0 *e* 1*. Assim, as funções* 1 *e* e^x *formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial dada, pelo que a função complementar é*

$$y_c = c_1 + c_2 e^x,$$

onde c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias. Atendendo a que o segundo membro da equação diferencial dada é uma combinação linear das funções CI*

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = e^{-x},$$

os conjuntos CI envolvidos são

$$S_{f_1} = \{1\}, \quad S_{f_2} = \left\{e^{-x}\right\}.$$

Ora, 1 *é uma solução da equação homogénea associada (porquê?) e por isso tem-se*

$$S_{f_1} = \{1\} \quad \rightarrow \quad S'_{f_1} = \{x\}.$$

O conjunto S_{f_2} *não é alterado já que nenhum dos seus membros é solução da equação homogénea associada. Assim,*

$$y_p = Ax + Be^{-x},$$

donde

$$y'_p = A - Be^{-x} \quad \Rightarrow \quad y''_p = Be^{-x}.$$

Portanto, a condição

$$y''_p - y'_p = 2e^{-x} - 7$$

implica

$$Be^{-x} - \left(A - Be^{-x}\right) = 2e^{-x} - 7 \quad \Rightarrow \quad (2B-2)\, e^{-x} - A + 7 = 0,$$

para todo o x *real, pelo que* $B = 1$ *e* $A = 7$*, vindo*

$$y_p = 7x + e^{-x}$$

e, consequentemente, a solução geral da equação diferencial proposta é

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 e^x + 7x + e^{-x}.$$

Impondo $y(0) = 1$*,* $y'(0) = -1$*, resulta*

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 1 \\ c_2 + 7 - 1 = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 7 \\ c_2 = -7 \end{cases},$$

ou seja, a solução do PVI é

$$y = 7 - 7e^x + 7x + e^{-x}.$$

Podemos fazer a respetiva verificação formal. Tem-se,

$$y = 7 - 7e^x + 7x + e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y(0) = 1,$$

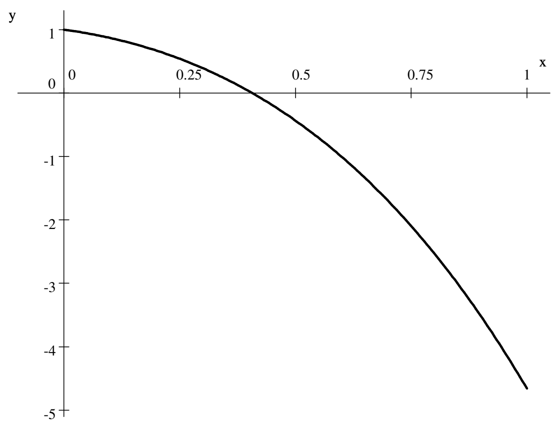
$$y' = -7e^x + 7 - e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = -1,$$

conforme requerido. Além disso,

$$y'' = -7e^x + e^{-x},$$

pelo que

$$y'' - y' = 2e^{-x} - 7 \quad \Leftrightarrow \quad -7e^x + e^{-x} - \left(-7e^x + 7 - e^{-x}\right) = 2e^{-x} - 7 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0.$$



Representação gráfica da função $7 - 7e^x + 7x + e^{-x}$*, solução do PVI (3.34)*

Problema Determinar a solução geral da equação diferencial

$$y'' - y = -6e^{-x} + 8x^2.$$

Resp.: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 3xe^{-x} - 8x^2 - 16.$

Exemplo 3.42 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$y^{(iv)} + y'' = 3x^2 + 4\operatorname{sen} x - 2\cos x.$$

Solução. *A equação diferencial homogénea associada é*

$$y^{(iv)} + y'' = 0,$$

cuja equação caraterística, $m^4 + m^2 = 0$*, tem raízes* 0*,* 0*,* i *e* $-i$*. A função complementar é, portanto,*

$$y_c = c_1 + c_2 x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x.$$

Por outro lado, o termo não homogéneo da equação diferencial dada,

$$3x^2 + 4\operatorname{sen} x - 2\cos x,$$

é uma combinação linear das funções CI

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad h(x) = \cos x.$$

Os respetivos conjuntos CI são

$$S_f = \left\{x^2, x, 1\right\}, \quad S_g = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}, \quad S_h = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}.$$

Dado que S_g *e* S_h *são idênticos, retemos apenas os conjuntos* S_f *e* S_g*. Relativamente a* S_f*, note-se que este conjunto contém dois elementos,* 1 *e* x*, que são solução da equação diferencial homogénea associada (porquê?). Então, multiplicamos todos os elementos de* S_f *(e apenas de* S_f *!) por* x^2*, resultando*

$$S_f^{'} = \left\{x^4, x^3, x^2\right\}.$$

No que respeita ao conjunto S_g*, os seus dois elementos são solução da equação diferencial homogénea associada (porquê), pelo que multiplicamos todos os elementos deste conjunto por* x*, de forma a que no conjunto resultante não existam soluções da equação diferencial homogénea associada. Obtém-se assim*

$$S_g^{'} = \{x\operatorname{sen} x, x\cos x\}.$$

Neste caso a solução particular é da forma

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx\operatorname{sen} x + Ex\cos x,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
y_p' &= 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D\operatorname{sen} x + Dx\cos x + E\cos x - Ex\operatorname{sen} x,\\
y_p'' &= 12Ax^2 + 6Bx + 2C + 2D\cos x - Dx\operatorname{sen} x - Ex\cos x - 2E\operatorname{sen} x,\\
y_p''' &= 24Ax + 6B - Dx\cos x - 3D\operatorname{sen} x + Ex\operatorname{sen} x - 3E\cos x,\\
y_p^{(iv)} &= 24A + Dx\operatorname{sen} x - 4D\cos x + Ex\cos x + 4E\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Dado que y_p *deve verificar*

$$y_p^{(iv)} + y_p'' = 3x^2 + 4\operatorname{sen} x - 2\cos x$$

para todo x real, tem-se

$$(12A-3)x^2+6Bx+(24A+2C)\,x^0+(2D-2)\cos x+(2E-4)\operatorname{sen} x=0, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Dado que as funções x^2, x, 1, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}$, resulta

$$\begin{cases} 12A-3=0 \\ 6B=0 \\ 24A+2C=0 \\ 2D-2=0 \\ 2E-4=0 \end{cases}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=1/4 \\ B=0 \\ C=-3 \\ D=1 \\ E=2 \end{cases},$$

pelo que um integral particular da equação diferencial dada é

$$y_p=\frac{1}{4}x^4-3x^2+x\operatorname{sen} x+2x\cos x,$$

sendo a sua solução geral,

$$y=y_c+y_p=c_1+c_2x+c_3\operatorname{sen} x+c_4\cos x+\frac{1}{4}x^4-3x^2+x\operatorname{sen} x+2x\cos x.$$

Problema Determinar a solução do PVI

$$y''-3y'+2y=6e^x-2xe^{2x}+2, \quad x>0; \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$$

Resp.: $y=1-6\,(1+x)\,e^x+\left(5+2x-x^2\right)e^{2x}$.

Exemplo 3.43 *Vejamos finalmente o que acontece caso se omita o passo 3, ou seja, se permanecer num conjunto CI alguma função que seja solução da equação homogénea associada. Para esse efeito considere-se a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=2-e^x. \tag{3.35}$$

Tem-se $y_c=c_1+c_2e^{-x}$. As funções CI a considerar são $f_1(x)=1$ e $f_2(x)=e^x$, sendo os respetivos conjuntos CI: $S_1=\{1\}$ e $S_2=\{e^x\}$. Uma vez que a função 1 é uma solução da equação diferencial homogénea associada, deveríamos fazer $S_1=\{1\}\to S_1'=\{x\}$. Se omitirmos este passo, tem-se

$$y_p=A+Be^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_p}{dx}=Be^x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y_p}{dx^2}=Be^x.$$

Substituindo estas expressões em (3.35) resulta

$$2Be^x=2-e^x \quad \Leftrightarrow \quad (2B+1)\,e^x-2=0,$$

para todo $x\in\mathbb{R}$. Ora, dado e^x e x^0 serem linearmente independentes, decorre da equação precedente o sistema (porquê?)

$$\begin{cases} 2B+1=0 \\ -24=0 \end{cases},$$

o qual não tem solução. Portanto, não existe nenhuma função da forma $A+Be^x$ que seja solução particular de (3.35) - a forma correta seria $y_p=Ax+Be^x$.

Exercícios sobre o método dos coeficientes indeterminados

Exercício 3.13 *Relativamente às equações diferenciais seguintes indicar, justificando, se podem ser resolvidas usando o método dos coeficientes indeterminados.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4x^2;$ (d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 1 + 3\cosh x;$

(b) $y\dfrac{dy}{dx} + y = \cos x;$ (e) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2xy = \dfrac{1}{\cos x};$

(c) $\dfrac{dy}{dx} + xy = \cos x;$ (f) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^7 = 0.$

Exercício 3.14 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x^2;$ (d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 5xe^{-2x};$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 8y = 4e^{2x} - 21e^{-3x};$ (e) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - y = \operatorname{sen} 2x + 2x^2 + 1;$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 6\operatorname{sen} 2x + 7\cos 2x;$ (f) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 12x^2 - 16x\cos 2x.$

Nota: no caso das equações diferenciais com segundos membros que são combinações lineares de duas funções CI, $k_1f_1 + k_2f_2$, determinar também a respetiva solução geral, recorrendo à resolução de duas equações diferenciais com segundos membros f_1 e f_2 (Princípio da Sobreposição).

Exercício 3.15 *Determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(a) $y'' + 4y = 8\operatorname{sen} 2x, \quad x > 0; \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 8;$

(b) $y'' - y = 12x^2e^x, \quad x > 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

(c) $y'' - y' = x, \quad x > 2; \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$

3.6 O método de variação das constantes

Embora o método dos coeficientes indeterminados seja relativamente simples de aplicar, a verdade é que o seu âmbito de aplicação é algo limitado. De facto, conforme vimos, a classe de funções que podem surgir no segundo membro da equação diferencial a resolver é restrito e, por outro lado, a equação diferencial deve ter obrigatoriamente coeficientes constantes. Assim, o método dos coeficientes indeterminados não poderia ser aplicado para determinar uma solução particular da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{tg} x,$$

pois $\operatorname{tg} x$ não é uma função CI, nem da equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} + xy = \cos x,$$

já que não tem coeficientes constantes. Desejaríamos, portanto, dispor de um método para determinar soluções particulares de equações lineares não homogéneas que pudesse ser aplicado em todos os casos, inclusivamente quando os coeficientes não são constantes, sempre que seja conhecida a função complementar. É neste contexto que surge o **método de variação das constantes** – também designado método de variação dos parâmetros. Consideraremos este método para determinar uma solução particular de equações diferenciais lineares não homogéneas de ordem n.

Comecemos por considerar a situação em que a equação diferencial é de segunda ordem ($n = 2$). Nestas condições, tem-se

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = F(x). \tag{3.36}$$

Suponhamos que f e g são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial homogénea associada

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{3.37}$$

A função complementar correspondente seria

$$y_c = c_1 f(x) + c_2 g(x),$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

O procedimento adotado no método de variação das constantes consiste em propor que uma solução particular da equação diferencial linear não homogénea (3.36) é da forma

$$y_p = v_1(x)f(x) + v_2(x)g(x), \tag{3.38}$$

onde v_1 e v_2 são funções a determinar. Note-se desde já a semelhança entre as expressões de y_c e y_p, como se as constantes arbitrárias c_1 e c_2 passassem agora a "variar", transformando-se nas funções v_1 e v_2, respetivamente. A designação do método deriva desta semelhança.

Consideremos então que uma solução particular de (3.36) é (3.38). Temos duas incógnitas, v_1 e v_2, mas apenas uma condição, a saber,

$$a_0(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_2(x)y_p = F(x), \tag{3.39}$$

pelo que teremos de impor uma condição adicional (arbitrária). Tal será feito de forma a simplificar ao máximo os cálculos a efetuar. Assim, de (3.38) resulta,

$$y_p' = v_1'(x)\, f(x) + v_2'(x)\, g(x) + v_1(x)\, f'(x) + v_2(x)\, g'(x).$$

Estabelecemos a condição arbitrária impondo que

$$v_1'(x)\, f(x) + v_2'(x)\, g(x) = 0, \tag{3.40}$$

para todo x no intervalo de interesse. Desta forma, a expressão para y_p' simplifica-se, vindo

$$y_p' = v_1(x)\, f'(x) + v_2(x)\, g'(x),$$

pelo que

$$y_p'' = v_1'(x)\, f'(x) + v_2'(x)\, g'(x) + v_1(x)\, f''(x) + v_2(x)\, g''(x).$$

Note-se que devido à condição imposta para a expressão de y_p', a expressão de y_p'' não contém segundas derivadas das funções v_1 e v_2.

Substituindo as expressões obtidas para y_p, y_p' e y_p'' na equação diferencial (3.39) resulta

$$v_1\left[a_0(x)f''+a_1(x)f'+a_2(x)f\right]+v_2\left[a_0(x)g''+a_1(x)g'+a_2(x)g\right]+a_0(x)\left[v_1'f'+v_2'g'\right]=F(x).$$

Atendendo ao facto de f e g serem soluções da equação diferencial (3.37), a equação diferencial (3.39) escreve-se agora

$$a_0(x)\left[v_1'(x)\,f'(x)+v_2'(x)\,g'(x)\right]=F(x).$$

Em resumo, as funções v_1 e v_2 deverão obedecer ao sistema de equações

$$\begin{cases} v_1'(x)\,f(x)+v_2'(x)\,g(x)=0, \\ v_1'(x)\,f'(x)+v_2'(x)\,g'(x)=F(x)/a_0(x). \end{cases} \tag{3.41}$$

Note-se que a condição imposta (3.40) não só simplificou os cálculos, como permitiu que o sistema de equações precedente apenas inclua as incógnitas $v_1'(x)$ e $v_2'(x)$. O sistema de equações (3.41) pode escrever-se na forma matricial

$$\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ F(x)/a_0(x) \end{pmatrix},$$

cujo determinante associado,

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix},$$

mais não é do que o Wronskiano das funções f e g. Uma vez que estas funções são, por hipótese, linearmente independentes (porquê?), resulta que este determinante nunca se anula. Desta forma, o sistema de equações (3.41) tem solução única, a saber ("regra de Cramer")

$$v_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & g(x) \\ F(x)/a_0(x) & g'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}}=-\frac{F(x)g(x)}{a_0(x)W\left[f(x),g(x)\right]},$$

$$v_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} f(x) & 0 \\ f'(x) & F(x)/a_0(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}}=\frac{F(x)f(x)}{a_0(x)W\left[f(x),g(x)\right]}.$$

Obtemos assim as funções v_1 e v_2 definidas por

$$v_1(x)=-\int\frac{F(x)g(x)}{a_0(x)W\left[f(x),g(x)\right]}\,dx,\quad v_2(x)=+\int\frac{F(x)f(x)}{a_0(x)W\left[f(x),g(x)\right]}\,dx.$$

A solução particular da equação diferencial (3.36) obtida por aplicação do método de variação das constantes é assim

$$y_p(x)=v_1(x)\,f(x)+v_2(x)\,g(x),$$

onde as funções $v_1(x)$ e $v_2(x)$ são dadas pelas expressões precedentes.

Exemplo 3.44 *Consideremos a equação diferencial*

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

Conforme já tivemos oportunidade de ver, a função complementar associada é

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x,$$

pelo que queremos determinar um integral particular da equação diferencial dada que seja da forma

$$y_p = v_1(x) \cos x + v_2(x) \operatorname{sen} x.$$

Tem-se

$$y_p' = v_1'(x) \cos x + v_2'(x) \operatorname{sen} x - v_1(x) \operatorname{sen} x + v_2(x) \cos x.$$

Impondo a condição (arbitrária)

$$v_1'(x) \cos x + v_2'(x) \operatorname{sen} x = 0$$

para todo x real, vem

$$y_p' = -v_1(x) \operatorname{sen} x + v_2(x) \cos x \quad \Rightarrow \quad y_p'' = -v_1(x) \cos x - v_2(x) \operatorname{sen} x - v_1'(x) \operatorname{sen} x + v_2'(x) \cos x.$$

Dado que y_p deve verificar

$$y_p'' + y_p = \operatorname{tg} x,$$

resulta

$$-v_1(x) \cos x - v_2(x) \operatorname{sen} x - v_1'(x) \operatorname{sen} x + v_2'(x) \cos x + v_1(x) \cos x + v_2(x) \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x,$$

isto é,

$$-v_1'(x) \operatorname{sen} x + v_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x.$$

Portanto, o sistema de equações a resolver é

$$\begin{cases} v_1'(x) \cos x + v_2'(x) \operatorname{sen} x = 0 \\ -v_1'(x) \operatorname{sen} x + v_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases},$$

vindo

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -\operatorname{tg} x \, \operatorname{sen} x, \quad v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \operatorname{sen} x,$$

ou, equivalentemente,

$$v_1'(x) = \cos x - \sec x, \quad v_2'(x) = \operatorname{sen} x.$$

Assim,

$$v_1(x) = \operatorname{sen} x - \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \,, \quad v_2(x) = -\cos x,$$

pelo que uma solução particular da equação diferencial é

$$y_p = (\operatorname{sen} x - \ln |\sec x + \operatorname{tg} x|) \cos x - \operatorname{sen} x \cos x = -\ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \cos x,$$

resultando a solução geral

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \cos x.$$

Problema Determinar a solução do PVI

$$y'' - y = \frac{2xe^x}{(x+1)^3}, \quad x > 0; \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0.$$

Resp.: $y = \cosh x - (x+1)^{-1} e^x$.

Exemplo 3.45 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\left(x^2+1\right) y'' - 2xy' + 2y = 6\left(x^2+1\right)^2.$$

Solução. *A equação diferencial homogénea correspondente,*

$$\left(x^2+1\right) y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

tem, conforme vimos no Exemplo 3.17, a seguinte solução geral

$$y_c = c_1 x + c_2\left(x^2-1\right).$$

Assim sendo, tem-se

$$y_p = v_1 x + v_2\left(x^2-1\right),$$

pelo que

$$y_p' = v_1' x + v_2'\left(x^2-1\right) + v_1 + 2xv_2.$$

Impondo a condição

$$v_1' x + v_2'\left(x^2-1\right) = 0$$

para todo x real, resulta

$$y_p' = v_1 + 2xv_2 \quad \Rightarrow \quad y_p'' = v_1' + 2xv_2' + 2v_2.$$

Substituindo as expressões obtidas para y_p, y_p' e y_p'' na equação diferencial

$$\left(x^2+1\right) y_p'' - 2xy_p' + 2y_p = 6\left(x^2+1\right)^2,$$

vem

$$\left(x^2+1\right)\left(v_1' + 2xv_2' + 2v_2\right) - 2x\left(v_1 + 2xv_2\right) + 2v_1 x + 2v_2\left(x^2-1\right) = 6\left(x^2+1\right)^2,$$

ou seja,

$$\left(x^2+1\right) v_1' + 2x\left(x^2+1\right) v_2' = 6\left(x^2+1\right)^2.$$

Consequentemente, o sistema de equações a resolver é

$$\left\{\begin{array}{l} xv_1' + \left(x^2-1\right) v_2' = 0 \\ v_1' + 2xv_2' = 6\left(x^2+1\right) \end{array}\right.,$$

obtendo-se

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 \\ 6\left(x^2+1\right) & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = 6\left(1-x^2\right), \quad v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 6\left(x^2+1\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = 6x,$$

pelo que

$$v_1 = 6x - 2x^3, \quad v_2 = 3x^2.$$

Desta forma, tem-se

$$y_p = v_1 x + v_2 \left(x^2 - 1\right) = 6x^2 - 2x^4 + 3x^2 \left(x^2 - 1\right) = 3x^2 + x^4,$$

sendo a solução geral da equação diferencial proposta dada por

$$y = y_c + y_p = c_1 x + c_2 \left(x^2 - 1\right) + 3x^2 + x^4.$$

Problema Determinar a solução geral da equação diferencial

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 32x^2 - 9x, \quad x > 0;$$

sabendo que a equação homogénea associada admite uma solução do tipo x^k, $k \in \mathbb{R}$.
Resp.: $y = (c_1 + c_2 \ln x)\, x^{-2} + 2x^2 - x$.

Exemplo 3.46 *Determinar a solução do PVI*

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = x^{-1} e^x, \quad x > 1; \quad y(1) = -\frac{3}{4}e,\ y'(1) = -\frac{7}{4}e,\ y''(1) = -\frac{11}{4}e. \tag{3.42}$$

Solução. *A equação diferencial homogénea associada*

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

tem solução geral $y_c = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^x$. *A aplicação do método de variação das constantes sugere*

$$y_p = \left(u_1 + u_2 x + u_3 x^2\right) e^x,$$

resultando

$$y_p' = y_p + \left(u_1' + u_2' x + u_3' x^2\right) e^x + (u_2 + 2xu_3)\, e^x.$$

Impondo

$$u_1' + u_2' x + u_3' x^2 = 0$$

para todo $x > 1$, *obtém-se*

$$\begin{aligned} y_p' = y_p + (u_2 + 2xu_3)\, e^x \quad &\Rightarrow \quad y_p'' = y_p' + (u_2 + 2xu_3)\, e^x + (u_2' + 2xu_3')\, e^x + 2u_3 e^x \\ &\Rightarrow \quad y_p'' = y_p + \left[(2u_2 + 4xu_3 + 2u_3) + (u_2' + 2xu_3')\right] e^x. \end{aligned}$$

Necessitamos de impor uma segunda condição, a saber,

$$u_2' + 2xu_3' = 0$$

para todo $x > 1$, *vindo*

$$\begin{aligned} y_p'' = y_p + (2u_2 + 4xu_3 + 2u_3)\, e^x \quad &\Rightarrow \quad y_p''' = y_p' + \left[2\left(u_2' + 2xu_3'\right) + 2u_3' + 6u_3 + 2u_2 + 4xu_3\right] e^x \\ &\Rightarrow \quad y_p''' = y_p + (2u_3' + 6u_3 + 3u_2 + 6xu_3)\, e^x. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões obtidas para y_p, y_p', y_p'' e y_p''' na equação diferencial

$$y_p''' - 3y_p'' + 3y_p' - y_p = x^{-1}e^x, \quad x > 1$$

resulta

$$\left[\left(2u_3' + 6u_3 + 3u_2 + 6xu_3\right) - 3\left(2u_2 + 4xu_3 + 2u_3\right) + 3\left(u_2 + 2xu_3\right)\right] e^x = x^{-1}e^x,$$

ou, equivalentemente,

$$2u_3' = x^{-1},$$

pelo que temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} u_1' + u_2'x + u_3'x^2 = 0 \\ u_2' + 2xu_3' = 0 \\ 2u_3' = x^{-1} \end{cases}.$$

Assim,

$$u_1' = \frac{x}{2}, \quad u_2' = -1, \quad u_3' = \frac{1}{2}x^{-1},$$

vindo

$$u_1 = \frac{x^2}{4}, \quad u_2 = -x, \quad u_3 = \frac{1}{2}\ln x,$$

ou seja,

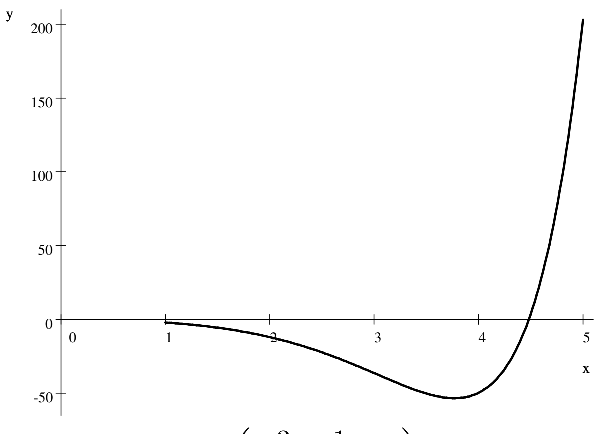
$$y_p = \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right) x^2 e^x,$$

tendo-se a solução geral (porquê?)

$$y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x \ln x.$$

Impondo as condições iniciais, obtém-se

$$y = \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right) x^2 e^x.$$



Representação gráfica da função $\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right) x^2 e^x$, *solução do PVI (3.42)*

Quando a equação diferencial tem coeficientes constantes, mas a natureza do segundo membro não permite aplicar o método dos coeficientes indeterminados para determinar uma solução particular da equação diferencial, pode ser útil usar um método alternativo que consiste na resolução de uma sequência de equações diferenciais lineares de primeira ordem, tantas quantas a ordem da equação diferencial em causa. O método baseia-se na forma que a equação caraterística assume quando fatorizada.

Comecemos por ver um exemplo em que a equação diferencial podia ser resolvida usando o método dos coeficientes indeterminados e depois outro exemplo que obrigaria à utilização do método de variação das constantes. Recorde-se que, aquando da abordagem do cálculo de conjuntos fundamentais de soluções de equações lineares homogéneas em que as raízes da respetiva equação caraterística são reais e repetidas, já usamos este método (ver nota na página 125).

Exemplo 3.47 *Determinar a solução do PVI*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x - x, \quad x > 0; \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0. \tag{3.43}$$

Exercício 3.16 ***Solução.*** *A equação caraterística a considerar é*

$$m^2 - m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m-1) = 0,$$

pelo que sabemos desde já que

$$y_c = c_1 + c_2 e^x.$$

A forma da equação caraterística permite escrever a equação diferencial dada na forma

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - 1\right) y = e^x - x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} - y\right) = e^x - x.$$

Fazendo

$$u = \frac{dy}{dx} - y, \tag{3.44}$$

resulta

$$\frac{du}{dx} = e^x - x,$$

pelo que

$$u = e^x - \frac{x^2}{2} + k_1.$$

Retomando a equação diferencial (3.44), vem

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x - \frac{x^2}{2} + k_1 \underset{k_1=0}{=} e^x - \frac{x^2}{2}.$$

Trata-se de uma equação linear que admite o fator integrante e^{-x}, tendo-se

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x} y\right) = 1 - \frac{x^2}{2} e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} y = x - \frac{1}{2}\int x^2 e^{-x}\, dx + k_2,$$

donde, tomando $k_2 = 0$ e atendendo a que

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -\left(2x + x^2 + 2\right) e^{-x},$$

resulta a solução particular

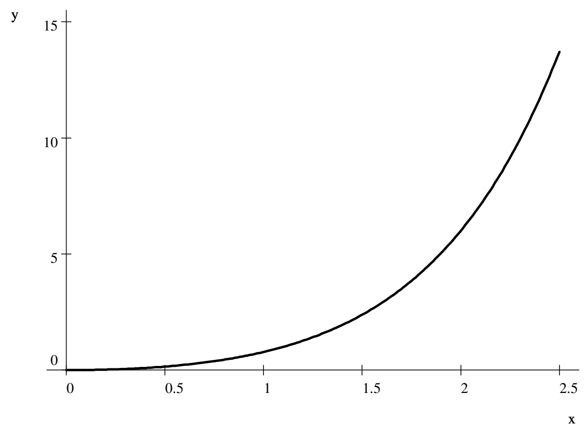
$$y_p = xe^x - \left(2x + x^2 + 2\right).$$

Assim, a solução geral da equação diferencial é

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 e^x + x + \frac{1}{2}x^2 + xe^x.$$

Impondo as condições iniciais, resulta

$$y = 2 - 2e^x + x + \frac{1}{2}x^2 + xe^x.$$



Representação gráfica da função $2 - 2e^x + x + \frac{1}{2}x^2 + xe^x$*, solução do PVI (3.43)*

Exemplo 3.48 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \ln x - 1, \quad x > 0.$$

Solução. *A equação caraterística associada à correspondente equação diferencial homogénea é*

$$m^3 - m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m^2-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m-1)(m+1),$$

pelo que a respetiva função complementar é

$$y_c = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}.$$

Consideramos então a equação diferencial dada escrita na forma

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right) y = -\frac{1}{x^2} - \ln x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - y\right) = -\frac{1}{x^2} - \ln x - 1.$$

Tomando

$$v = \frac{d^2y}{dx^2} - y,$$

tem-se a equação diferencial (linear) de primeira ordem

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \ln x - 1,$$

para a qual se obtém de imediato uma solução particular

$$v = -\int \left(\frac{1}{x^2} + \ln x + 1\right) dx = \frac{1}{x} - x \ln x.$$

Assim, tem-se agora de considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{1}{x} - x \ln x.$$

Novamente, recorrendo à equação caraterística, podemos concluir que esta equação diferencial se pode escrever como

$$\left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{d}{dx} + 1\right) y = \frac{1}{x} - x \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{dy}{dx} + y\right) = \frac{1}{x} - x \ln x.$$

Ora, fazendo

$$u = \frac{dy}{dx} + y,$$

resulta a equação diferencial

$$\frac{du}{dx} - u = \frac{1}{x} - x \ln x,$$

a qual admite o fator integrante e^{-x}*, vindo*

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}u\right) = \frac{e^{-x}}{x} - xe^{-x} \ln x.$$

Tem-se então a solução particular

$$e^{-x}u = \int \frac{e^{-x}}{x}\, dx - \int xe^{-x} \ln x \, dx.$$

Integrando por partes, vem

$$\int \frac{e^{-x}}{x}\, dx = e^{-x} \ln x + \int e^{-x} \ln x \, dx$$

e

$$-\int xe^{-x} \ln x \, dx = xe^{-x} \ln x - \int (\ln x + 1)\, e^{-x}\, dx,$$

pelo que

$$u = (x+1) \ln x + 1.$$

Finalmente, consideramos a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y = u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} + y = (x+1) \ln x + 1,$$

a qual é linear, conforme esperado, admitindo o fator integrante e^x. Tem-se,

$$\frac{d}{dx}\left(e^x y\right) = (x+1)\, e^x \ln x + e^x,$$

vindo

$$e^x y = \int x e^x \ln x \, dx + \int e^x \ln x \, dx + e^x.$$

Uma vez que

$$\int x e^x \ln x \, dx = x e^x \ln x - \int e^x \ln x \, dx - e^x,$$

tem-se

$$e^x y = x e^x \ln x \quad \Leftrightarrow \quad y_p = x \ln x.$$

A função $x \ln x$ é portanto uma solução particular da equação dada, pelo que se tem a solução geral

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x \ln x.$$

Nota Uma vez que no exemplo precedente a resolução da equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = x^{-1} - x \ln x,$$

através da sua conversão em duas equações diferenciais lineares de primeira ordem, obrigou a recorrer sistematicamente à integração por partes, podia ter sido vantajoso determinar uma solução desta equação diferencial usando o método de variação das constantes. Teríamos então,

$$y_c = A e^x + B e^{-x},$$

vindo

$$y_p = f_1 e^x + f_2 e^{-x}$$

obedecendo f_1 e f_2 ao sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1' e^x + f_2' e^{-x} = 0 \\ f_1' e^x - f_2' e^{-x} = x^{-1} - x \ln x \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1' = \dfrac{1}{2}\left(x^{-1} e^{-x} - x e^{-x} \ln x\right) \\ f_2' = -\dfrac{1}{2}\left(x^{-1} e^{x} - x e^{x} \ln x\right) \end{array} \right. .$$

Ainda assim teríamos de determinar, usando integração por partes,

$$\int x^{-1} e^{ax} \, dx = e^{ax} \ln x - a \int e^{ax} \ln x \, dx \tag{3.45}$$

e

$$\int x e^{ax} \ln x \, dx = \frac{1}{a} x e^{ax} \ln x - \frac{1}{a^2} e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} \ln x \, dx, \tag{3.46}$$

sendo que no caso que nos interessa $a = \pm 1$, pelo que combinando (3.45) e (3.46) obtemos

$$\int x^{-1} e^{ax} \, dx - \int x e^{ax} \ln x \, dx = (1 - ax)\, e^{ax} \ln x + e^{ax}.$$

Portanto,

$$f_1 = \frac{1}{2}(1+x)\,e^{-x}\ln x + \frac{1}{2}e^{-x}, \quad f_2 = -\frac{1}{2}(1-x)\,e^{x}\ln x - \frac{1}{2}e^{x},$$

tendo-se o resultado obtido anteriormente

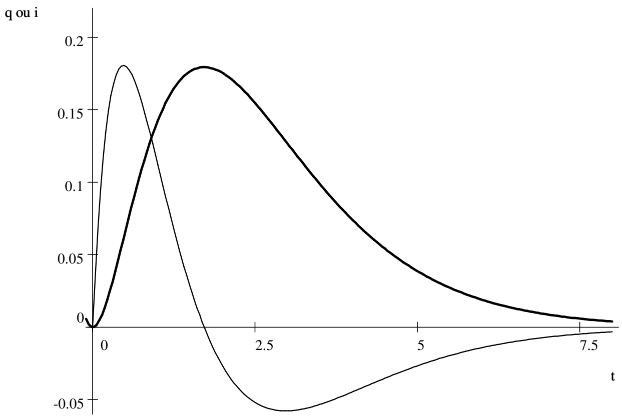
$$y_p = f_1 e^x + f_2 e^{-x} = x\ln x.$$

Problema Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série (circuito RLC). Nestas condições a carga instantânea no condensador q em cada instante de tempo t é tal que

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E,$$

sendo a intensidade de corrente i em cada instante $i = dq/dt$. Supondo que $E = (1+t)^{-1}\,e^{-t}$ (Volt), $R = 2$ (Ohm), $L = 1$ (Henry) e $C = 1$ (Farad), determinar $q(t)$ e $i(t)$ sabendo que $q(0) = i(0) = 0$.

Resp.: $q = ((t+1)\ln(t+1) - t)\,e^{-t}$; $i = (1 - \ln(t+1))\,te^{-t}$



Representação gráfica de $q(t)$ (a cheio) e $i(t)$

Exemplo 3.49 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = -3e^x + 7\frac{e^x}{e^x+1}, \quad x > 0, \tag{3.47}$$

sabendo que a solução geral da equação homogénea associada é

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{3x}.$$

Solução. *Neste caso vamos usar o Princípio da Sobreposição considerando duas equações diferenciais,*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^x, \quad x > 0, \tag{3.48}$$

cuja solução particular designaremos por y_{p_1}, *e*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{e^x}{e^x+1}, \quad x > 0, \tag{3.49}$$

cuja solução particular designaremos por y_{p_2}. *Assim, uma solução particular da equação (3.47) será dada por*

$$y_p = -3y_{p_1} + 7y_{p_2},$$

sendo a respetiva solução geral

$$y = c_1e^x + c_2e^{3x} - 3y_{p_1} + 7y_{p_2}.$$

Para determinar uma solução particular de (3.48) podemos usar o método dos coeficientes indeterminados (porquê?), o qual conduz a

$$y_{p_1} = -\frac{1}{2}xe^x.$$

Relativamente à determinação de uma solução particular de (3.49), podemos usar dois métodos distintos, atendendo ao facto de se tratar de uma equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes.

1. *Método A*

   Usamos o método de variação das constantes, propondo então que

$$y_{p_2} = v_1e^x + v_2e^{3x}.$$

   Mostra-se que substituindo as expressões de y_{p_2}, y'_{p_2} *e* y''_{p_2} *na equação (3.49) e considerando a condição arbitrária habitual, obtém-se o sistema de equações*

$$\begin{cases} e^xv'_1 + e^{3x}v'_2 = 0 \\ e^xv'_1 + 3e^{3x}v'_2 = \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v'_1 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^x+1} \\ v'_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^{2x}+e^{3x}} \end{cases}.$$

   Ora, tem-se

$$v_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{e^x+1}\,dx \underset{u=e^x}{\Rightarrow} v_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u\,(u+1)}\,du = \frac{1}{2}\ln(u+1) - \frac{1}{2}\ln u,$$

   pelo que

$$v_1 = \frac{1}{2}\ln(e^x+1) - \frac{1}{2}x.$$

   Por outro lado,

$$v_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^{2x}+e^{3x}}\,dx \underset{u=e^x}{\Rightarrow} v_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^3(u+1)}\,du = \frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2}\ln(u+1) + \frac{1}{2u} - \frac{1}{4u^2},$$

   implicando,

$$v_2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_{p_2} &= \left(\frac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right)-\frac{1}{2}x\right)e^x+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right)+\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right)e^{3x} \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}\left(2x+1\right)e^x+\frac{1}{2}xe^{3x}+\frac{1}{2}\left(e^x-e^{3x}\right)\ln\left(e^x+1\right). \end{aligned} \tag{3.50}$$

2. *Método B*

A equação caraterística associada à equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=0 \tag{3.51}$$

é $m^2-4m+3=0$, *ou seja,* $(m-1)(m-3)=0$. *Assim, a equação diferencial (3.51) pode ser escrita como*

$$\left(\frac{d}{dx}-1\right)\left(\frac{d}{dx}-3\right)y=0$$

e consequentemente (3.49) pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{d}{dx}-1\right)\left(\frac{d}{dx}-3\right)y=\frac{e^x}{e^x+1},\quad x>0,$$

ou, equivalentemente,

$$\left(\frac{d}{dx}-1\right)\left(\frac{dy}{dx}-3y\right)=\frac{e^x}{e^x+1}.$$

Fazendo

$$u=\frac{dy}{dx}-3y, \tag{3.52}$$

passamos a ter a equação linear de primeira ordem

$$\left(\frac{d}{dx}-1\right)u=\frac{e^x}{e^x+1}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{du}{dx}-u=\frac{e^x}{e^x+1},$$

a qual admite o fator integrante e^{-x}, *obtendo-se*

$$u=e^x\left(x-\ln\left(e^x+1\right)+k_1\right),$$

onde k_1 *é uma constante arbitrária. A equação diferencial (3.52) escreve-se agora*

$$\frac{dy}{dx}-3y=e^x\left(x-\ln\left(e^x+1\right)+k_1\right).$$

Portanto, obtemos novamente uma equação diferencial linear de primeira ordem que admite o fator integrante e^{-3x}, *vindo da sua resolução (considerando as constantes arbitrárias nulas, dado que apenas pretendemos determinar uma solução particular)*

$$y_{p_2}=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{2}xe^{3x}+\frac{1}{2}\left(e^x-e^{3x}\right)\ln\left(e^x+1\right)$$

que mais não é do que (3.50).

Assim, obtivemos

$$y_p = -3y_{p_1} + 7y_{p2} = \frac{7}{2}e^{2x} - 2xe^x - \frac{7}{4}e^x + \frac{7}{2}xe^{3x} + \frac{7}{2}\left(e^x - e^{3x}\right)\ln\left(e^x + 1\right),$$

resultando para a solução geral de (3.47) a expressão

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \frac{7}{2}e^{2x} - 2xe^x + \frac{7}{2}xe^{3x} + \frac{7}{2}\left(e^x - e^{3x}\right)\ln\left(e^x + 1\right).$$

Exercícios sobre método de variação das constantes

Exercício 3.17 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cotg} x;$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{tg}^2 x;$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{x};$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{1}{1+e^x};$

(e) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 4e^x \ln x, \quad x > 0;$

(f) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2} - \ln x - 1, \quad x > 0.$

Exercício 3.18 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(x+2\right)\frac{dy}{dx} + \left(x+2\right)y = x^3, \quad x > 0,$$

sabendo que xe^x é uma solução da equação diferencial homogénea associada.

Exercício 3.19 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\operatorname{sen}^2 x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\operatorname{sen} x\cos x\frac{dy}{dx} + \left(1 + \cos^2 x\right)y = 2\operatorname{sen}^3 x, \quad x \in \left]0, \pi/2\right[,$$

sabendo que $\operatorname{sen} x$ *e* $x \operatorname{sen} x$ *são soluções da equação diferencial homogénea associada.*

3.7 A equação de Cauchy-Euler

Vimos anteriormente como obter a solução geral de equações diferenciais lineares homogéneas de ordem n com coeficientes constantes. Nesses casos é relativamente fácil determinar um conjunto fundamental de soluções e, consequentemente, a respetiva função complementar. No entanto, no caso (geral) em que os coeficientes não são constantes a situação é bem diferente, só se podendo obter a função complementar em casos muito especiais. Um desses casos designa-se **equação de Cauchy-Euler**, sendo esta equação diferencial da forma

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}x\frac{dy}{dx} + a_n y = F(x), \tag{3.53}$$

onde a_0, a_1, ..., a_n, são constantes reais. Note-se que os termos que surgem no primeiro membro da equação precedente são da forma

$$x^k \frac{d^k y}{dx^k}.$$

A resolução deste tipo de equação diferencial baseia-se no seguinte resultado.

Teorema 3.14 *A transformação $x = e^t$ reduz a equação diferencial de Cauchy-Euler (3.53) a uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes.*

Demonstração Consideremos o caso correspondente a uma equação diferencial de segunda ordem (a demonstração no caso geral é similar). Tem-se

$$a_0 x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = F(x). \tag{3.54}$$

Da mudança de variável

$$x(t) = e^t, \quad x > 0,$$

resulta

$$x(t) = e^t \quad \Leftrightarrow \quad t(x) = \ln x,$$

pelo que, atendendo à dependência $y = y(t(x))$, decorre desta transformação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x},$$

isto é,

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}. \tag{3.55}$$

Vejamos agora como se transforma a segunda derivada. Tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}\frac{1}{x} + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),
\end{aligned}$$

pelo que

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}. \tag{3.56}$$

Substituindo as expressões (3.55) e (3.56) na equação diferencial (3.54), obtém-se a equação diferencial

$$a_0\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y = F(e^t) \quad \Leftrightarrow \quad a_0\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_0)\frac{dy}{dt} + a_2 y = F(e^t),$$

que é do tipo

$$b_0\frac{d^2y}{dt^2} + b_1\frac{dy}{dt} + b_2 y = G(t),$$

com $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1 - a_0$, $b_2 = a_2$, $G(t) = F(e^t)$. Fica assim demonstrado o resultado pretendido.

Observe-se que na demonstração supôs-se que $x > 0$. No caso de ser $x < 0$, a mudança de variável a realizar é $x = -e^t$, mantendo-se o restante procedimento inalterado (porquê?). ■

Exemplo 3.50 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3, \quad x > 0.$$

Solução. *Seja* $x = e^t$*. Tem-se,* $t = \ln x$ *e*

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt},$$

resultando a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}.$$

Obteve-se, portanto, uma equação diferencial linear com coeficientes constantes que pode ser resolvida usando o método dos coeficientes indeterminados. Comecemos então por considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

A equação caraterística associada é

$$m^2 - 3m + 2 = 0,$$

cujas raízes são $m_1 = 1$ *e* $m_2 = 2$*, pelo que*

$$y_c = c_1e^t + c_2e^{2t}.$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, pretendemos determinar uma solução particular de

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t},$$

a qual deverá ser da forma $y_p = Ae^{3t}$ *(porquê?). Assim,*

$$y_p = Ae^{3t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_p}{dt} = 3Ae^{3t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y_p}{dt^2} = 9Ae^{3t},$$

pelo que

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} - 3\frac{dy_p}{dt} + 2y_p = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad 2Ae^{3t} = e^{3t},$$

resultando $A = 1/2$*. Obtém-se assim,*

$$y_p = \frac{1}{2}e^{3t},$$

sendo a solução geral da equação diferencial proposta

$$y = y_c + y_p = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t},$$

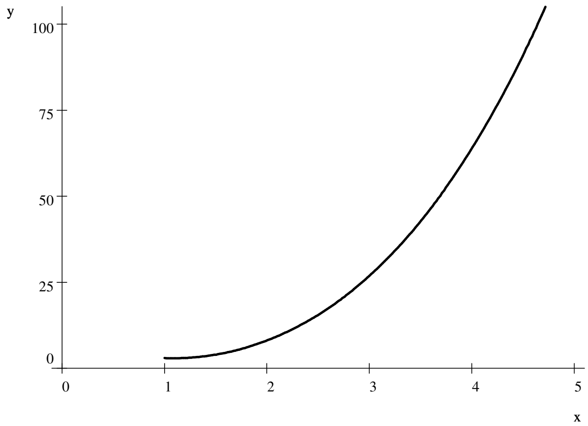
ou, atendendo à transformação $t = \ln x$*,*

$$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

Problema Determinar a solução do PVI

$$x^2y'' + 5xy' + 8y = 29x^3, \quad x > 1; \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -1. \tag{3.57}$$

Resp.: $y = x^3 + 2x^{-2}\cos(2\ln x)$.



Representação gráfica da função $x^3 + 2x^{-2}\cos(2\ln x)$, solução do PVI (3.57)

Exemplo 3.51 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 4\ln(-x), \quad x < 0.$$

Solução. *Fazendo* $x = -e^t$, *tem-se* $t = \ln(-x)$, *vindo*

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

A equação diferencial dada passa a escrever-se

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 2y = 4t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4t.$$

Obteve-se portanto uma equação diferencial linear com coeficientes constantes que pode ser resolvida usando o método dos coeficientes indeterminados.
Comecemos então por considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

A equação caraterística associada é

$$m^2 + 3m + 2 = 0,$$

cujas raízes são $m_1 = -1$ *e* $m_2 = -2$, *pelo que*

$$y_c = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}.$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, pretendemos determinar uma solução particular de

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=4t,$$

que deverá ser da forma $y_p=At+B$ *(porquê?). Assim,*

$$y_p=At+B \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_p}{dt}=A \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y_p}{dt^2}=0,$$

pelo que

$$\frac{d^2y_p}{dt^2}+3\frac{dy_p}{dt}+2y_p=4t \quad \Rightarrow \quad 3A+2\left(At+B\right)=4t,$$

resultando

$$\begin{cases} 3A+2B=0 \\ 2A=4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B=-3 \\ A=2 \end{cases}.$$

Obtém-se assim

$$y_p=2t-3,$$

sendo a solução geral da equação diferencial proposta

$$y=y_c+y_p=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+2t-3,$$

ou, atendendo à transformação $t=\ln\left(-x\right)$*,*

$$y=c_1x+c_2x^2+2\ln\left(-x\right)-3.$$

Nota: nesta caso podíamos em vez de ter usado a transformação $x=-e^t$*, devido ao facto de* $x<0$*, ter reescrito a equação diferencial dada realizando primeiro a mudança de variável* $z=-x$*. Teríamos obtido (porquê?)*

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+4z\frac{dy}{dz}+2y=4\ln(z), \quad z>0,$$

permitindo usar a mudança de variável $z=e^t$*.*

Exemplo 3.52 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$(x-3)^2\,\frac{d^2y}{dx^2}+(x-3)\,\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln\left(x-3\right)}, \quad x>3.$$

Solução. *Fazendo* $z=x-3$*, vem*

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln z}, \quad z>0.$$

Considerando agora a transformação $z=e^t$*, resulta*

$$z\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dt}, \quad z^2\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}.$$

A equação diferencial dada passa a escrever-se,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{t}.$$

Assim, $y_c = c_1 + c_2 t$.

Para determinar uma solução particular da equação diferencial não homogénea procedemos à integração direta

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \ln t + k_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = t\left(\ln t - 1 + k_1\right) + k_2.$$

Considerando $k_1 = 1$ *e* $k_2 = 0$, *obtém-se*

$$y_p = t \ln t,$$

tendo-se para a solução geral da equação diferencial proposta,

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 t + t \ln t,$$

ou, atendendo a que $t = \ln z$ *e* $z = x - 3$,

$$y = c_1 + c_2 \ln\left(x-3\right) + \ln\left(x-3\right) \ln\left[\ln\left(x-3\right)\right].$$

Exercícios sobre a equação de Cauchy-Euler

Exercício 3.20 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(*a*) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0, \quad x > 0;$

(*b*) $x^2y'' + xy' + 9y = 0, \quad x > 0;$

(*c*) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 4x - 6, \quad x > 0;$

(*d*) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 4\ln x, \quad x > 0.$

Exercício 3.21 *Determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(*a*) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 10x^2, \quad x > 1; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -6;$

(*b*) $x^2y'' - 6y = \ln x, \quad x > 1; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$

Exercício 3.22 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$(x+1)^2y'' - (x+1)y - 3y = x^2 - 1, \quad x < -1.$$

3.8 Exercícios de revisão do Capítulo 3

Exercício 3.23 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(*a*) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} = 24x + e^{-x};$

(*b*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 4e^x + 4e^{-x};$

(*c*) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{dy}{dx} = 2e^x + 4e^{-x} + 1;$

(*d*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 2\cos x + 1;$

(*e*) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 1 + 6xe^x;$

(*f*) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 6y = e^{-t}\left(16t - 8\right).$

Exercício 3.24 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{e^x}{x}$; (c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cotg} x$;

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{e^x}{\cos x}$; (d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 6\cos^2 t$.

Exercício 3.25 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$(t-1)\frac{d^2y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} + y = (t-1)^2 e^t,$$

sabendo que t e e^t são duas soluções da equação diferencial homogénea associada.

Exercício 3.26 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{9}{x^2}y = 0, \quad x > 0.$$

Exercício 3.27 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 10x, \quad x > 0,$$

sabendo que $x \ln x$ é uma solução da equação diferencial homogénea associada.

Exercício 3.28 *Determinar a solução geral das seguintes equações diferenciais*

(a) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2} + t\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad t > 0$;

(b) $(x-1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x-1)\dfrac{dy}{dx} + y = x^2, \quad x < 1$;

(c) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + y = x\ln x, \quad x > 0$;

(d) $(z+1)\dfrac{d^2y}{dz^2} + 2\dfrac{dy}{dz} = z, \quad z > 0$.

Exercício 3.29 *Considere-se uma mola que está fixa numa das extremidades. Um objeto pontual P, de massa m, está preso na outra extremidade da mola. Suponhamos que o afastamento de P relativamente à posição de equilíbrio O obdece à seguinte lei (movimento livre e não amortecido)*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

onde $k > 0$ é a constante de elasticidade da mola, ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = 0,$$

onde $\lambda^2 = k/m$. Sabendo que P parte com velocidade $v_0 = dx/dt(0)$, do ponto de abcissa x_0:

(a) determinar $x(t)$;

(b) determinar o valor mínimo e máximo da abcissa de P;

(c) determinar o período do movimento de P;

(d) representar o gráfico de $x(t)$ considerando $x_0 = 2$, $v_0 = 1$, $\lambda = 1$.

Exercício 3.30 *Considere-se uma mola que está fixa num dos seus extremos. Um objeto pontual Q, de massa m, está preso na outra extremidade da mola. Suponhamos que o afastamento de Q relativamente à posição de equilíbrio O obdece à seguinte lei (movimento livre e amortecido)*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

onde $k > 0$ é a constante de elasticidade da mola e $a > 0$, ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = 0,$$

onde $\lambda^2 = k/m$ e $a/m = 2b$. Sabendo que Q parte com velocidade $v_0 = dx/dt(0)$, do ponto de abcissa x_0, determinar $x(t)$ quando:

(a) $b < \lambda$ $\quad (a < 2\sqrt{km})$; representar o gráfico de $x(t)$ para $\lambda = 5$, $b = 3$, $x_0 = 1$, $v_0 = 2$;

(b) $b = \lambda$ $\quad (a = 2\sqrt{km})$; representar o gráfico de $x(t)$ para $\lambda = b = 4$, $x_0 = 1$, $v_0 = 2$;

(c) $b > \lambda$ $\quad (a > 2\sqrt{km})$; representar o gráfico de $x(t)$ para $\lambda = 3$, $b = 5$, $x_0 = 1$, $v_0 = 2$.

Exercício 3.31 *Considere-se uma mola que está fixa num dos extremos. Um objeto pontual M, de massa m, está preso na outra extremidade da mola. Suponhamos que o afastamento de M relativamente à posição de equilíbrio O obdece à seguinte lei (movimento forçado correspondente à ação de uma força externa $F\cos\omega t$)*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F\cos\omega t,$$

onde $k > 0$ é a constante de elasticidade da mola e $a > 0$, ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = E\cos\omega t,$$

onde $\lambda^2 = k/m$, $a/m = 2b$ e $E = F/m$. Sabendo que M parte com velocidade $v_0 = dx/dt(0)$, do ponto de abcissa x_0, determinar $x(t)$ quando $\lambda = \omega$ e $b < \lambda$.

Exercício 3.32 *Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série (circuito RLC). Nestas condições a carga instantânea no condensador q é tal que*

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E,$$

sendo a intensidade de corrente i, em cada instante de tempo t, dada por $i = dq/dt$.

Supondo que $E = 100\cos 60t$ (Volt), $R = 4$ (Ohm), $L = 0.1$ (Henry) e $C = 1/40$ (Farad), e sabendo que no instante inicial a intensidade de corrente e a carga do condensador eram ambas nulas:

(a) determinar a carga do condensador em cada instante;

(b) determinar a intensidade de corrente em cada instante;

(c) representar os gráficos de $q(t)$ e de $i(t)$.

3.9 Soluções dos exercícios do Capítulo 3

3.2. (b) $y = c_1e^x + c_2xe^x$; (c) $y = e^x + 3e^x x$.

3.3. (b) $y = c_1x + c_2x^2$.

3.4. (d) $y = c_1e^x + c_2e^{4x}$.

3.5. $g(x) = x^4$, $y = c_1x + c_2x^4$.

3.6. $q(x) = x + 1$, $y = c_1e^{2x} + c_2\,(x + 1)$.

3.7. (b) $y_c = c_1e^x + c_2e^{2x}$; (d) $y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$.

3.8. $y_p = 2/3 + 2x - 3e^x/2$.

3.9. (a) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$; (b) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$; (c) $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$;
(d) $y = (c_1 + c_2x)\, e^{4x}$; (e) $y = (c_1 + c_2x)\, e^{-x/2}$; (f) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-x}$;
(g) $y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right) e^{2x}$; (h) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-x} \operatorname{sen} x + c_4e^{-x} \cos x$;
(i) $y = c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5$.

3.10. (a) $y = 2e^{4x} + e^{-3x}$; (b) $y = \left(13e^{-x} - e^{-5x}\right)/4$;
(c) $y = e^{2x} - \sqrt{3}e^{3x/2}\left(\frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

3.11. $y = e^{3x}(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{2x}[(c_5 + c_6x) \cos 3x + (c_7 + c_8x) \operatorname{sen} 3x]$.

3.12. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + e^x\,(c_3 \operatorname{sen} 2x + c_4 \cos 2x)$.

3.13. (a) Sim, pois a equação diferencial é linear, com coeficientes constantes, e o segundo membro é um múltiplo da função CI x^2; (b) Não, pois a equação diferencial não é linear; (c) Não, pois a equação diferencial apesar de ser linear não é de coeficientes constantes; (d) Sim, pois a equação diferencial é linear, com coeficientes constantes, e o segundo membro é uma combinação linear das funções CI 1, e^x e e^{-x}; (e) Não, pois a equação diferencial não é de coeficientes constantes e o segundo membro não é uma combinação linear finita de funções CI; (f) Sim, pois a equação diferencial é linear, com coeficientes constantes, podendo-se reescrever por forma a que o segundo membro seja um múltiplo da função CI x^7.

3.14. (a) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 7 + 6x + 2x^2$; (b) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x} - \left(e^{2x} + 6e^{-3x}\right)/2$;

(c) $y = e^{-x}(c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x) + 2 \operatorname{sen} 2x - \cos 2x$;

(d) $y = (x/2 + 1/10)\, e^{-2x} + e^{-x}\,(c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x)$;

(e) $y = c_1e^x + e^{-x}\,(c_2 + c_3x) - 9 + 4x - 2x^2 + \frac{2}{25}\cos 2x - \frac{1}{25}\operatorname{sen} 2x$;

(f) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - x\cos 2x - 2x^2 \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2} + 3x^2$.

3.15. (a) $6\cos 2x + 5\operatorname{sen} 2x - 2x\cos 2x$; (b) $y = \left(2x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)e^x + 2e^{-x}$;

(c) $y = 5e^{x-2} - x^2/2 - x - 1$.

3.17. (a) $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \operatorname{sen} x \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x|$;

(b) $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - 2 + \operatorname{sen} x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$;

(c) $y = e^{-3x}\,(c_1 + c_2x) + e^{-3x}x\,(\ln x - 1)$; (d) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln\left(e^x + 1\right)$;

(e) $y = e^x\,(c_1 + c_2x) + x^2e^x\,(2\ln x - 3)$; (f) $c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + x\ln x$.

3.18. $y = c_1x\,(e^x - 1) + c_2x\,(e^x + 1) - x^2$.

3.19. $y = (c_1 + c_2x)\operatorname{sen} x + x^2 \operatorname{sen} x$.

3.20. (a) $y = c_1x + c_2x^3$; (b) $y = c_1 \cos(3\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(3\ln x)$; (c) $y = c_1x^2 + c_2x^3 + 2x - 1$;

(d) $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2} + 2\ln x - 3$.

3.21. (a) $y = 2x^{-3} + x^2\,(2\ln x - 1)$; (b) $y = \left(8x^3 - 9x^{-2} - 6\ln x + 1\right)/36$.

3.22. $y = c_1\,(x+1)^{-1} + c_2\,(x+1)^3 - x^2\,(3 + 2x)\,(x+1)^{-1}/6$.

3.23. (a) $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} - 3x^2 + 2x^3 + e^{-x}$; (b) $y = (c_1 + c_2x)\,e^x + 2x^2e^x + e^{-x}$;

(c) $y = c_1 + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x + e^x - 2e^{-x} + x$; (d) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} x + 1$;

(e) $y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x + x - 3x^2e^x + x^3e^x$; (f) $y = c_1e^{-2t} + c_2e^{3t} - 4te^{-t} + 5e^{-t}$.

3.24. (a) $y = (c_1 + c_2x)\,e^x + x\,(\ln x)\,e^x$;

(b) $y = e^x\,(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + e^x(\cos x \ln|\cos x| + x\operatorname{sen} x)$;

(c) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x)\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x|$; (d) $y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \cos 2t + 3$.

3.25. $y = c_1t + c_2e^t - te^t + t^2e^t/2$.

3.26. $y = c_1x^{-3} + c_2x^3$.

3.27. $y = c_1x + c_2x\ln x + 5x\ln^2 x$.

3.28. (a) $y = c_1 \cos(2\ln t) + c_2 \operatorname{sen}(2\ln t)$;

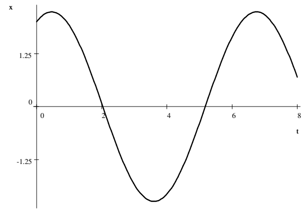
(b) $y = c_1(1-x) + c_2(1-x)\ln(1-x) + (1-x)^2 + 1 - (1-x)\ln^2(1-x)$;

(c) $y = \frac{1}{3}x(1-\ln x) + x^{-1/2}(c_1\cos(\sqrt{3}(\ln x)/2) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}(\ln x)/2))$;

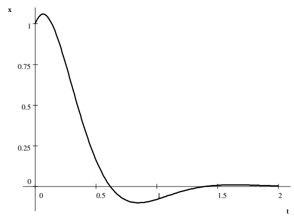
(d) $y = -\left(c_1 + c_2 z - \frac{1}{6}z^3\right)(z+1)^{-1}$.

3.29. (a) $x = \dfrac{v_0}{\lambda}\operatorname{sen}\lambda t + x_0\cos\lambda t$; (b) $\pm\left((v_0/\lambda)^2 + x_0^2\right)^{1/2}$; (c) $2\pi/\lambda$;

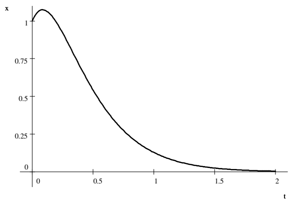
(d)



3.30. (a) $x = e^{-bt}\left(\frac{v_0+bx_0}{r}\operatorname{sen} rt + x_0\cos rt\right)$, $r = \sqrt{\lambda^2 - b^2}$;



(b) $x = e^{-bt}(x_0 + (v_0 + bx_0)t)$;



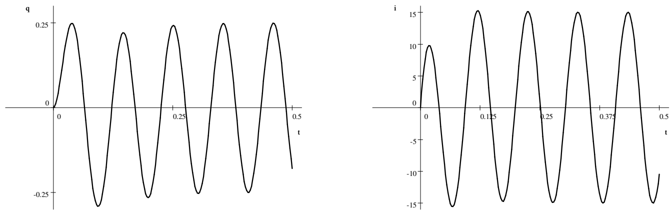
(c) $x = e^{-bt}\left(\frac{v_0+bx_0}{r}\operatorname{senh} rt + x_0\cosh rt\right)$, $r = \sqrt{b^2 - \lambda^2}$;.

3.31. $x = e^{-bt}\left(\theta^{-1}(v_0 + bx_0 - \frac{1}{2b}E)\operatorname{sen}\theta t + x_0\cos\theta t\right) + \frac{E}{2b\omega}\operatorname{sen}\omega t,\ \theta = \sqrt{\omega^2 - b^2}$.

3.32. (a) $q = (\frac{1}{5} - 5t)e^{-20t} - \frac{1}{5}\cos 60t + \frac{3}{20}\operatorname{sen} 60t$;

(b) $i = (-9 + 100t)e^{-20t} + 9\cos 60t + 12\operatorname{sen} 60t$;

(c)



Capítulo 4

A Transformada de Laplace

4.1 Definição, existência e propriedades

Definição 4.1 *Seja f uma função real de variável real t, definida para $t > 0$. Seja s uma variável real e F uma função definida por*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{4.1}$$

*para todos os valores de s para os quais este integral existe (finito). A função F definida por (4.1) designa-se **transformada de Laplace** da função f. Usaremos a seguinte notação para a transformada de Laplace da função f,*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Dada a natureza do integral impróprio (4.1), para garantir que este integral existe para um certo conjunto de valores de s temos de impor restrições adequadas à função f. No entanto, antes de analisarmos estas restrições detalhadamente, comecemos por determinar a transformada de Laplace de algumas funções simples e, em cada caso, quais os valores de s para os quais o integral (4.1) é finito.

Exemplo 4.1 *Considere-se a função*

$$f(t) = 1, \quad t > 0.$$

Então, aplicando a definição (4.1), resulta

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st}\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^R = \frac{1}{s}$$

para todo $s > 0$. Assim,

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.2 *Considere-se a função*

$$f(t) = t, \quad t > 0.$$

Então, aplicando a definição (4.1), resulta

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} t\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{s^2} e^{-st}(st+1) \right]_0^R = \frac{1}{s^2}$$

para todo $s > 0$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.3 *Considere-se a função*

$$f(t) = e^{at}, \quad a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \quad t > 0.$$

Então,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at}\, dt = \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-(s-a)t}\, dt = \lim_{R \to \infty} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{a-s} \right]_0^R = \frac{1}{s-a}$$

para todo $s > a$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Exemplo 4.4 *Considere-se a função*

$$f(t) = \cos bt, \quad b \in \mathbb{R}^+, \quad t > 0.$$

Então,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos bt\, dt = \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-st} \cos bt\, dt.$$

Integrando por partes, obtém-se

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \lim_{R \to \infty} \left[\frac{e^{-st}}{s^2+b^2} \left(-s \cos bt + b \operatorname{sen} bt\right) \right]_0^R = \frac{s}{s^2+b^2}$$

para todo $s > 0$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.5 *Considere-se a função*

$$f(t) = \operatorname{sen} bt, \quad b \in \mathbb{R}^+, \quad t > 0.$$

Então,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \operatorname{sen} bt\, dt = \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-st} \operatorname{sen} bt\, dt$$

Integrando por partes, obtém-se

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt\} = \lim_{R \to \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s^2+b^2} \left(s \operatorname{sen} bt + b \cos bt\right) \right]_0^R = \frac{b}{s^2+b^2}$$

para todo $s > 0$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Em cada um dos casos anteriores constatámos, sem surpresa, que o integral (4.1) existe (é finito) apenas para certos valores de s. Abordaremos agora uma classe de funções para as quais o integral (4.1) existe sempre. Antes, porém, temos de considerar algumas propriedades de funções.

Definição 4.2 *Uma função $f(t)$ diz-se uma* ***função seccionalmente contínua*** *no intervalo limitado $a \leq t \leq b$ se este intervalo puder ser dividido num número finito de subintervalos tais que:*

(a) f é contínua no interior de cada subintervalo;

(b) $f(t)$ tem limite finito quando t se aproxima de qualquer um dos extremos de cada subintervalo a partir do seu interior.

Exemplo 4.6 *Considere-se a função*

$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}.$$

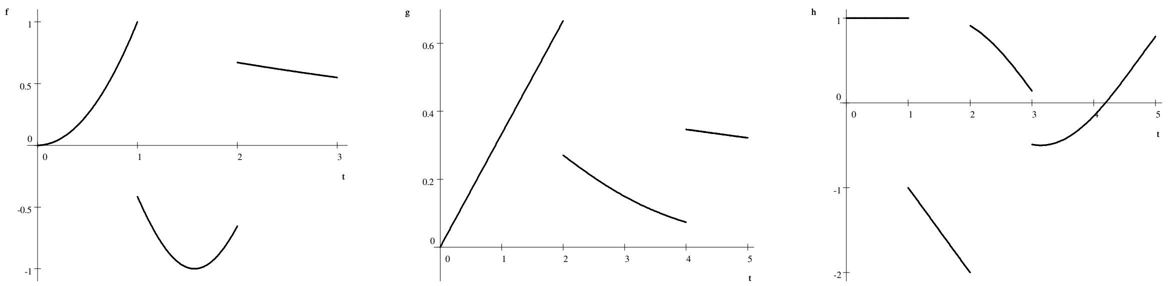
Averiguar se a função f é seccionalmente contínua no intervalo finito $0 \leq t \leq b$ qualquer que seja o número real positivo b.

Solução. *De facto, a função f é contínua em $]0,2[$ e em $]2,c[$ para todo $c > 2$. Tem-se ainda*

$$f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t) = -1, \quad f(2^-) = \lim_{t \to 2^-} f(t) = -1, \quad f(2^+) = \lim_{t \to 2^+} f(t) = +1,$$

pelo que os limites de f quando t se aproxima de qualquer um dos extremos de cada subintervalo a partir do seu interior são finitos. Portanto, f é seccionalmente contínua no intervalo finito $0 \leq t \leq b$ para todo $b > 0$.

Exemplo 4.7 *Alguns exemplos de gráficos de funções seccionalmente contínuas.*



Exemplo 4.8 *Considere-se a função*

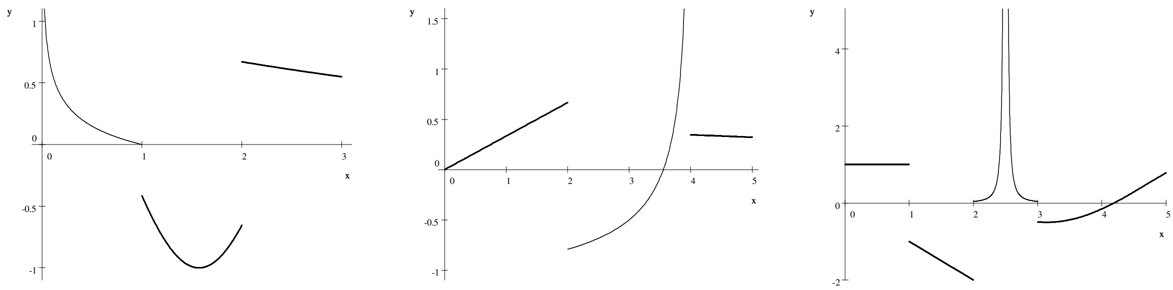
$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 5 \\ (x-5)^{-1}, & t > 5 \end{cases}.$$

A função g não é seccionalmente contínua no intervalo finito $0 \leq t \leq d$ para $d > 5$ uma vez que o limite

$$f(5^+) = \lim_{t \to 5^+} g(t)$$

não é finito ($+\infty$).

Exemplo 4.9 *Alguns exemplos de gráficos de funções que não são seccionalmente contínuas.*



Definição 4.3 *Uma função f diz-se uma* ***função de ordem exponencial*** *se existe uma constante real α e constantes positivas t_0 e M, tais que*

$$e^{-\alpha t}\,|f(t)| < M$$

para todo $t > t_0$ para o qual f esteja definida. Dizemos portanto que f é de ordem exponencial $e^{\alpha t}$ se existe uma constante positiva α tal que o produto

$$e^{-\alpha t}\,|f(t)|$$

é limitado para valores de t suficientemente elevados. Tem-se

$$e^{-\alpha t}\,|f(t)| < M \quad \Leftrightarrow \quad |f(t)| < Me^{\alpha t}$$

para todo $t > t_0$ para o qual f esteja definida.

Note-se que se f é uma função de ordem exponencial $e^{\alpha t}$, então também é de ordem exponencial $e^{\beta t}$ para todo $\beta > \alpha$ (porquê?).

Exemplo 4.10 *Toda a função limitada é de ordem exponencial $e^{\alpha t}$ com $\alpha = 0$. Assim, $\cos bt$ e $\operatorname{sen} bt$ são funções de ordem exponencial pois*

$$|\cos bt| \leq 1 < Me^{\alpha t} \quad e \quad |\operatorname{sen} bt| \leq 1 < Me^{\alpha t}$$

para $M > 1$ e $\alpha = 0$, para todo t.

Exemplo 4.11 *Toda a função f do tipo $e^{at}\cos bt$ é de ordem exponencial com $\alpha = a$ pois*

$$\left|e^{at}\cos bt\right| \leq e^{at} < Me^{\alpha t}$$

para $M > 1$ e $\alpha = a$, para todo t. O mesmo se aplica a funções do tipo $e^{at}\operatorname{sen} bt$.

Exemplo 4.12 *Considere-se a função $f(t) = t^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Dado que*

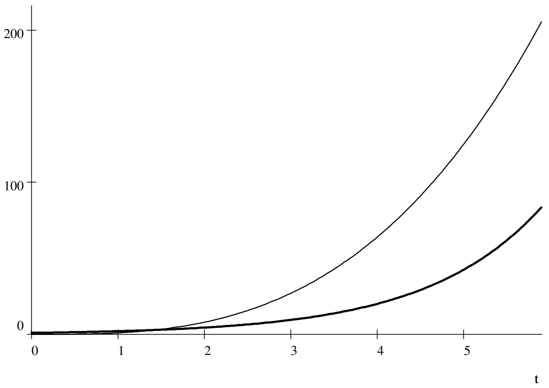
$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}t^n = 0,$$

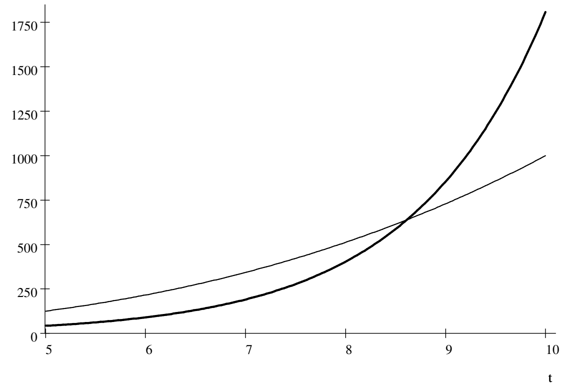
para $\alpha > 0$, então deverão existir $M > 0$ e $t_0 > 0$ tais que

$$e^{-\alpha t}\,|t^n| = e^{-\alpha t}t^n < M$$

para $t > t_0$. *Portanto,* $f(t) = t^n$ *é de ordem exponencial para* $\alpha > 0$.

Nota: neste caso a representação gráfica das funções t^n *e* $e^{\alpha t}$ *é uma boa forma de ilustrar esta conclusão. Nos dois gráficos seguintes representam-se as funções* t^3 *e* $e^{3t/4}$ *(esta última a cheio).*

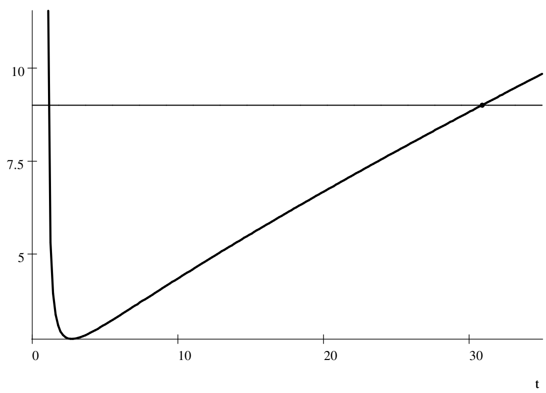




Apesar de para valores relativamente pequenos de t *o gráfico da função* t^3 *estar tipicamente acima do gráfico da função* $e^{3t/4}$, *existe um valor de* t, *neste caso concreto* $t_0 \approx 8.6$, *tal que* $e^{3t/4} > t^3$ *para todo* $t > t_0$. *No caso geral, o comportamento descrito acima verifica-se qualquer que seja* n *desde que se tome* $\alpha > 0$ *por muito próximo que* α *esteja de zero. Quanto maior for a razão* n/α *maior será naturalmente o valor de* t_0, *dado que* t_0 *é a maior raiz da equação (porquê?)*

$$\frac{t}{\ln t} = \frac{n}{\alpha},$$

conforme se pode concluir do gráfico seguinte que representa a função $t(\ln t)^{-1}$ *(a reta horizontal representa um valor hipotético para a razão* n/α*).*



Exemplo 4.13 *A função* $f(t) = e^{t^2}$ *não é uma função de ordem exponencial já que*

$$e^{-\alpha t} e^{t^2} = e^{(t-\alpha)t}$$

não é limitada quando $t \to \infty$, *independentemente do valor de* α. *Em termos gráficos tal quer dizer que por muito grande que seja o valor de* α, *não existe nenhum valor* t_0 *tal que o gráfico da função* $e^{\alpha t}$ *esteja sempre acima do gráfico da função* e^{t^2} *para todo* $t > t_0$ *(na realidade, passa-se precisamente o contrário).*

Podemos agora apresentar um teorema que nos dá condições sobre f suficientes para que o integral (4.1) exista.

Teorema 4.1 *Seja f uma função real com as seguintes propriedades:*

(a) f é seccionalmente contínua para todos os intervalos limitados fechados $0 \leq t \leq b$, onde $b > 0$;

(b) f é de ordem exponencial, isto é, existem constantes α, $M > 0$ e $t_0 > 0$, tais que

$$e^{-\alpha t} |f(t)| < M$$

para todo $t > t_0$.

Nestas condições a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

existe para $s > \alpha$. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em S.L. Ross.

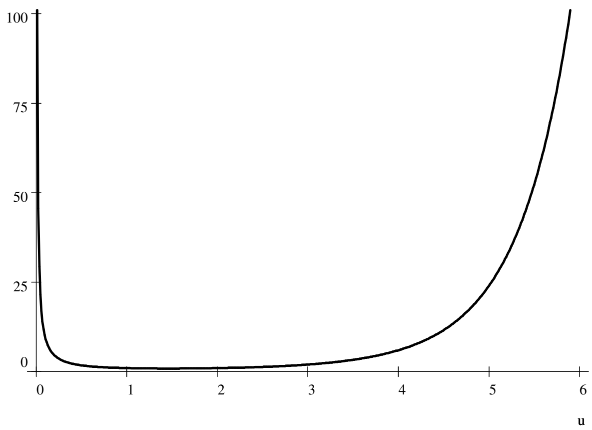
Note-se que o teorema precedente estabelece condições suficientes para que determinada função f admita transformada de Laplace. No entanto, há funções que mesmo não cumprindo alguma das condições deste teorema têm transformada de Laplace. Por exemplo, a função $t^{-1/3}$ não tem limite finito quando $t \to 0^+$, pelo que não é seccionalmente contínua em $0 \leq t \leq b$, e no entanto

$$\mathcal{L}\left\{t^{-1/3}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} t^{-1/3}\, dt = s^{-2/3} \int_0^\infty e^{-x} x^{-1/3}\, dx = s^{-2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right),$$

onde Γ é a função Gamma

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x} x^{u-1} dx,$$

é finito, pelo que a função $t^{-1/3}$ tem transformada de Laplace para $s > 0$ apesar de não cumprir as condições do teorema.



$0,6$

Vejamos agora algumas propriedades básicas da transformada de Laplace que decorrem da respetiva definição (4.1) e que, conforme veremos, serão úteis no cálculo da transformada de Laplace e suas aplicações à determinação da solução de PVIs envolvendo equações (integro-) diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Teorema 4.2 ***(Propriedade da linearidade)*** *Sejam f e g funções cuja transformada de Laplace existe para $s > a$. Sejam ainda A e B constantes. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{Af + Bg\right\} = A\mathcal{L}\left\{f\right\} + B\mathcal{L}\left\{g\right\}, \quad s > a.$$

Demonstração *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{Af + Bg\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left(Af + Bg\right)\,dt = A\int_0^{\infty} e^{-st} f\,dt + B\int_0^{\infty} e^{-st} g\,dt = A\mathcal{L}\left\{f\right\} + B\mathcal{L}\left\{g\right\},$$

conforme requerido. ■

É fácil mostrar que o resultado precedente se pode generalizar ao seguinte.

Proposição 4.3 *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_m$ funções cuja transformada de Laplace existe para $s > a$. Sejam ainda $A_1, A_2, \ldots, A_m$ constantes. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{\textstyle\sum_{i=1}^{m} A_i f_i\right\} = \textstyle\sum_{i=1}^{m} A_i \mathcal{L}\left\{f_i\right\}.$$

Exemplo 4.14 *Determinar $\mathcal{L}\left\{5 - 3t + 8t^2\right\}$ usando o teorema precedente.*
Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{5 - 3t + 8t^2\right\} = 5\mathcal{L}\left\{1\right\} - 3\mathcal{L}\left\{t\right\} + 8\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \frac{5}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{16}{s^3}$$

para todo $s > 0$, uma vez que as funções 1 e t admitem, como já vimos, transformada de Laplace para $s > 0$, o mesmo acontecendo com a função t^2 (ver mais adiante).

Exemplo 4.15 *Determinar $\mathcal{L}\left\{\cos^2 at\right\}$ usando o teorema precedente e o facto de se ter*

$$\cos^2 at = \frac{1 + \cos 2at}{2}.$$

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{\cos^2 at\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1 + \cos 2at}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{1\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\cos 2at\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4a^2}\right) = \frac{2s^2 + 4a^2}{\left(s^2 + 4a^2\right)s}$$

para todo $s > 0$, uma vez que as funções 1 e $\cos 2at$ são funções de ordem exponencial com $\alpha = 0$ (porquê?).

Problema Determinar $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}^2 at\right\}$ usando o teorema precedente, sabendo que

$$\operatorname{sen}^2 at = \frac{1 - \cos 2at}{2}.$$

Resp.: $2s^{-1}(s^2 + 4)^{-1}$.

O teorema seguinte dá-nos um primeiro resultado que será essencial para podermos aplicar a transformada de Laplace à resolução de PVIs envolvendo equações lineares com coeficientes constantes. Para já este resultado permitirá abordar, num primeiro momento, PVIs envolvendo equações diferenciais de primeira ordem.

J. Figueiredo, C. Ribeiro – 2013

Teorema 4.4 *Seja f uma função real contínua para $t \geq 0$ e de ordem exponencial $e^{\alpha t}$. Seja f' uma função seccionalmente contínua em todo o intervalo fechado $0 \leq t \leq b$, $b > 0$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0), \quad s > \alpha.$$

Demonstração *(Esboço) Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f' \, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f' \, dt.$$

Integrando por partes, resulta

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \lim_{R\to\infty} \left[e^{-st} f\right]_0^R + \lim_{R\to\infty} \int_0^R s e^{-st} f \, dt = -f(0) + s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}.$$

Ora, $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ existe por hipótese para $s > \alpha$, pelo que

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0), \quad s > \alpha,$$

conforme requerido. A demonstração completa pode ser consultada em S.L. Ross. ∎

Exemplo 4.16 *Considere-se a função $f(t) = \operatorname{sen} at$. Esta função satisfaz as hipóteses do Teorema 4.4, tendo-se $f(0) = 0$ e $f'(t) = a\cos at$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{a\cos at\right\} = s\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} at\right\}, \quad s > 0,$$

ou seja

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} at\right\} = \frac{a}{s}\mathcal{L}\left\{\cos at\right\} = \frac{a}{s}\frac{s}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$$

Portanto, o uso do Teorema precedente permite relacionar $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} at\right\}$ com $\mathcal{L}\left\{\cos at\right\}$ e determinar uma destas transformadas de Laplace se a outra for conhecida. Veremos de seguida outro teorema que permite o cálculo de qualquer uma destas transformadas de forma independente.

Problema Considerar a função $f(t) = \cos at$ e obter o resultado do exemplo precedente assumindo conhecido $\mathcal{L}\left\{\cos at\right\}$.

Vejamos agora como podemos usar o Teorema 4.4 para obter $\mathcal{L}\left\{t^n\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, de forma recursiva.

Exemplo 4.17 *Seja $g(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Esta função verifica as hipóteses do teorema 4.4 com $\alpha = 0$, tendo-se $g'(t) = nt^{n-1}$ e $g(0) = 0$. Então*

$$n\mathcal{L}\left\{t^{n-1}\right\} = s\mathcal{L}\left\{t^n\right\}, \quad s > 0,$$

isto é

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\left\{t^{n-1}\right\}.$$

Assim, $\mathcal{L}\left\{t\right\} = s^{-1}\mathcal{L}\left\{1\right\} = s^{-2}$, $\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = 2s^{-1}\mathcal{L}\left\{t\right\} = 2s^{-3}$, $\mathcal{L}\left\{t^3\right\} = 3s^{-2}\mathcal{L}\left\{t\right\} = 6s^{-4}$, $\ldots$, sendo fácil deduzir que

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

Apesar dos exemplos precedentes serem ilustrativos quanto ao interesse prático do resultado expresso pelo Teorema 4.4, acresce o facto deste resultado ser a base para a resolução de PVIs envolvendo equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes, conforme se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo 4.18 *Considere-se o seguinte PVI*

$$\frac{dy}{dt} + y = 1, \quad y(0) = 1.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s}. \tag{4.2}$$

Por outro lado, da aplicação do Teorema 4.4 resulta

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0),$$

pelo que a equação (4.2) passa a escrever-se

$$s\mathcal{L}\{y(t)\} + \mathcal{L}\{y\} - y(0) = \frac{1}{s},$$

ou, atendendo à condição inicial do PVI,

$$(s+1)\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s} + 1.$$

Ou seja, a solução $y(t)$ do PVI, se existir, é tal que a sua transformada de Laplace $\mathcal{L}\{y(t)\}$ obedece a

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s\,(s+1)} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s}.$$

Ora, vimos anteriormente que $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, pelo que o PVI admite pelo menos a solução $y(t) = 1$.

Este exemplo pretende apenas ilustrar a aplicação da transformada de Laplace para determinar a solução de um PVI envolvendo uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes constantes. Este assunto será posteriormente desenvolvido em secção própria.

Problema Considerar o PVI

$$\frac{dy}{dt} - y = t, \quad t > 0; \quad y(0) = 0.$$

Mostrar que a transformada de Laplace de $y(t)$ deve obedecer a

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

e, consequentemente, que uma solução do PVI é $y(t) = t - 1 + e^{-t}$ (porquê?).

O resultado do Teorema 4.4 pode ser generalizado, permitindo aplicar a transformada de Laplace à resolução de PVIs envolvendo equações lineares com coeficientes constantes de qualquer ordem.

Teorema 4.5 *Seja f uma função real tendo derivadas até à ordem $n-1$ contínuas para $t \geq 0$, onde $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que as funções f, f', ..., $f^{(n-1)}$, são todas de ordem exponencial $e^{\alpha t}$. Suponhamos ainda que $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua para todo o intervalo fechado limitado $0 \leq t \leq b$, $b > 0$. Então $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}$ existe para $s > \alpha$ e*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Nota: Para $n = 1$, obtém-se o resultado do teorema precedente, enquanto que para $n = 2$ e $n = 3$, resulta

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - sf(0) - f'(0),$$
$$\mathcal{L}\left\{f'''(t)\right\} = s^3\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

Demonstração *(Esboço) A demonstração deste teorema é feita por indução.*

Passo 1. Para $n = 1$, obtém-se, conforme já referimos, o resultado do Teorema 4.4.

Passo 2. Suponhamos agora que o resultado é válido para $k = n-1$, ou seja,

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n-1)}(t)\right\} = s^{n-1}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s^{n-2}f(0) - s^{n-3}f'(0) - \cdots - sf^{(n-3)}(0) - f^{(n-2)}(0). \tag{4.3}$$

Definindo $g(t) = f^{(n-1)}(t)$, tem-se que a função g é seccionalmente contínua, tendo transformada de Laplace dada por (ver Teorema 4.4),

$$\mathcal{L}\left\{g'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} - g(0)$$

ou seja

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f^{(n-1)}(t)\right\} - f^{(n-1)}(0).$$

Substituindo a expressão de $\mathcal{L}\left\{f^{(n-1)}(t)\right\}$ dada por (4.3) na expressão precedente, obtém-se o resultado pretendido. A demonstração completa pode ser consultada em S.L. Ross. ∎

Exemplo 4.19 *Aplicamos este teorema no caso $n = 2$ para determinar $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\}$ sem recorrer à definição de transformada de Laplace. Tem-se que $f(t) = \operatorname{sen} bt$ satisfaz as condições do Teorema 4.5 com $\alpha = 0$. Por outro lado, para $n = 2$ obtemos,*

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - sf(0) - f'(0).$$

Assim,

$$\mathcal{L}\left\{(\operatorname{sen} bt)''\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} - s\operatorname{sen} 0 - b\cos 0 = s^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} - b.$$

Desta forma, dado que $(\operatorname{sen} bt)'' = -b^2 \operatorname{sen} bt$, resulta

$$-b^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} - b \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Problema Aplicar o Teorema 4.5 para obter a transformada de Laplace da função $\mathcal{L}\left\{\cos bt\right\}$ sem recorrer à respetiva definição.

Tal como anteriormente, daremos agora um exemplo ilustrativo da aplicação da transformada de Laplace para determinar a solução de um PVI envolvendo uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Este assunto será posteriormente desenvolvido em secção própria.

Exemplo 4.20 *Determinar uma solução do PVI*

$$y'' + 25y = 0, \quad t > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5,$$

usando a transformada de Laplace.

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 25y\right\} = \mathcal{L}\{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\left\{y''\right\} + 25\mathcal{L}\{y\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(s^2 + 25\right)\mathcal{L}\{y\} - 5 = 0,$$

pelo que $y(t)$ deverá ser tal que

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{5}{s^2 + 25}.$$

Uma solução para o PVI é então (porquê?)

$$y(t) = \operatorname{sen} 5t.$$

Problema Determinar uma solução do PVI

$$y'' + 4y = 0, \quad t > 0; \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0,$$

usando a transformada de Laplace.
Resp.: $y = -2\cos 2t$.

Teorema 4.6 *(**Propriedade da translação**) Suponhamos que f é tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > \alpha$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a), \quad s > \alpha + a,$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Demonstração *Seja*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f\, dt,$$

então

$$F(s-a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\left(e^{at}f\right)\, dt = \mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}.$$

Por outro lado, se f é de ordem exponencial $e^{\alpha t}$, então existem constantes t_0 e M, tais que

$$e^{-\alpha t}|f(t)| < M \quad \Rightarrow \quad e^{-(\alpha+a)t}\left|e^{\alpha t}f(t)\right| < M$$

para todo $t > t_0$, pelo que $e^{\alpha t}f(t)$ é de ordem exponencial $e^{(\alpha+a)t}$. ■

Exemplo 4.21 *Determinar $\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\}$. Tem-se,*

$$\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = F(s-a),$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

Dado que t é de ordem exponencial com $\alpha = 0$, vem

$$\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad s > a.$$

Exemplo 4.22 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\}$. *Tem-se,*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\} = F(s-a),$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\cos bt\right\} = \frac{s}{s^2+b^2}.$$

Dado que $\cos bt$ *é de ordem exponencial com* $\alpha = 0$, *vem*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\} = \frac{s}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a.$$

Problema Determinar $\mathcal{L}\left\{2t^2e^{-t} - 3e^t \operatorname{sen} 5t\right\}$, usando as propriedades da linearidade e da translação.
Resp.: $4(s+1)^{-3} - 15[(s-1)^2+25]^{-1}$, $s > 1$.

Vejamos agora um resultado que nos permitirá determinar a transformada de Laplace de funções do tipo $t^n f(t)$. Neste contexto, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 4.7 *Suponhamos que a função* f *admite transformada de Laplace para* $s > \alpha$. *Então,*

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left[F(s)\right],$$

onde

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f \, dt.$$

Demonstração *Derivando*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f \, dt$$

sucessivamente em ordem a s, *obtém-se*

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f \, dt = (-1)^1 \int_0^\infty e^{-st} t f \, dt = (-1)^1 \mathcal{L}\left\{t^1 f(t)\right\}$$

$$\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left[(-1)^1 \int_0^\infty e^{-st} t f \, dt\right] = (-1)^2 \int_0^\infty e^{-st} t^2 f \, dt = (-1)^2 \mathcal{L}\left\{t^2 f(t)\right\}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^nF(s)}{ds^n} = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st} t^n f \, dt = (-1)^n \mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\},$$

donde se conclui que

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n},$$

conforme requerido. ■

Exemplo 4.23 *Determinar* $\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} bt\}$.

Solução. *Usando o resultado que se acaba de demonstrar, obtém-se*

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} bt\} = (-1)^1 \frac{dF(s)}{ds},$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{s^2+b^2},$$

resultando

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} bt\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) = -2\frac{bs}{(b^2+s^2)^2}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.24 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{t^2 \cos bt\right\}$.

Solução. *Aplicando o Teorema 4.7, obtém-se*

$$\mathcal{L}\left\{t^2 \cos bt\right\} = (-1)^2 \frac{d^2F(s)}{ds^2},$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2},$$

vindo

$$\mathcal{L}\left\{t^2 \cos bt\right\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+b^2}\right) = 2s\frac{s^2-3b^2}{(s^2+b^2)^3} = \frac{2s}{(b^2+s^2)^2} - \frac{8b^2 s}{(b^2+s^2)^3}.$$

Problema Determinar $\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\}$ e comparar o resultado com aquele que se obteve por aplicação da propriedade da translação.

Problema Determinar $\mathcal{L}\left\{t^3\right\}$ usando o facto de $\mathcal{L}\left\{t^3\right\} = \mathcal{L}\left\{t^2 f(t)\right\}$, com $f(t) = t$.
Resp.: $6s^{-4}$.

Problema Determinar $\mathcal{L}\{t^n\}$ usando o facto de $\mathcal{L}\{t^n\} = \mathcal{L}\{t^n f(t)\}$, com $f(t) = 1$.
Resp.: $n!\,/\,s^{(n+1)}$.

Vejamos agora uma propriedade da transformada de Laplace que permite determinar uma solução de um PVI envolvendo uma equação integro-diferencial linear com coeficientes constantes.

Teorema 4.8 *Suponhamos que a função f admite transformada de Laplace $F(s)$ para $s > \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s}, \quad s > \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração *A definição de transformada de Laplace permite escrever*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] e^{-st}\,dt = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a\left[\int_0^t f(u)\,du\right] e^{-st}\,dt.$$

Por outro lado, designando por g uma primitiva de f, tem-se

$$\int_0^a \left[\int_0^t f(u)\,du\right] e^{-st}\,dt = \int_0^a [g(t)-g(0)]\; e^{-st}\,dt = \int_0^a g(t)\,e^{-st}\,dt - g(0)\int_0^a e^{-st}\,dt,$$

pelo que aplicando integração por partes, resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^a \left(\int_0^t f(u)\,du\right) e^{-st}\,dt &= \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\,e^{-st}\,dt - \frac{1}{s}\left[g(t)\,e^{-st}\right]_0^a + \frac{g(0)}{s}\left[e^{-st}\right]_0^a \\
&= \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\,e^{-st}\,dt - \frac{g(a)}{s}\,e^{-sa} + \frac{g(0)}{s} + \frac{g(0)}{s}(e^{-sa}-1) \\
&= \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\,e^{-st}\,dt + \frac{1}{s}e^{-sa}\,(g(0)-g(a))\,.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $a \to +\infty$ e uma vez que $s > \alpha > 0$, obtém-se finalmente

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \left[\int_0^t f(u)\,du\right] e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(t)\,e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt = \frac{F(s)}{s},$$

ou

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s},$$

tal como requerido. ■

Exemplo 4.25 *Sendo*

$$\operatorname{sen} t = \int_0^t \cos u\,du$$

e

$$\mathcal{L}\{\cos u\} = \frac{s}{s^2+1}, \quad s > 0,$$

resulta da aplicação do teorema precedente

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos u\,du\right\} = \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 0.$$

O principal interesse do resultado expresso pelo Teorema 4.8 prende-se, como foi anteriormente referido, com a sua aplicação na resolução de PVIs envolvendo equações integro-diferenciais lineares com coeficientes constantes. Vejamos um pequeno exemplo de ilustrição, à semelhança do que fizemos anteriormente para ilustrar a resolução de PVIs utilizando a transformada de Laplace.

Exemplo 4.26 *Considere-se o seguinte PVI envolvendo uma equação integro-diferencial*

$$\frac{dy}{dt} - \int_0^t y(x)\,dx = 1, \quad t > 0; \quad y(0) = 1.$$

Tem-se

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(x)\,dx\right\} = \mathcal{L}\{1\}\,.$$

Designando $\mathcal{L}\{y\}$ *por* $Y(s)$*, vem*

$$sY(s) - y(0) - \frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s-1},$$

pelo que uma solução do PVI é

$$y(t) = e^t.$$

Problema Determinar uma solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} - 4\int_0^t y(x)\,dx = -2, \quad t > 0; \quad y(0) = 1.$$

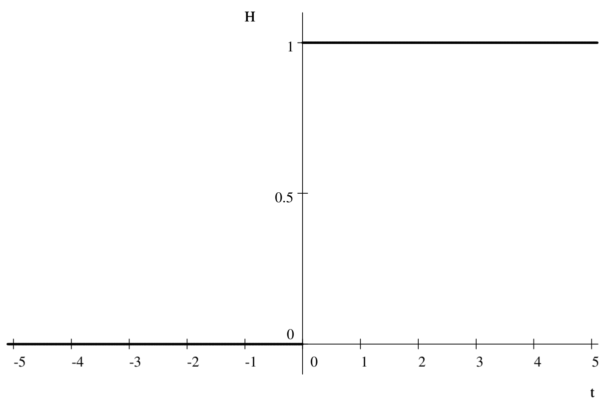
Resp.: $y = e^{-2t}$.

As funções que surgem nos segundos membros das equações diferenciais lineares são por vezes definidas por ramos. Seguindo o processo que não recorre à transformada de Laplace, é necessário determinar a solução de tantos PVIs quantos os ramos envolvidos na definição da função que surge no segundo membro da equação diferencial. O uso da transformada de Laplace permite, conforme veremos, determinar a solução do PVI dado independentemente do número de ramos envolvidos. No entanto, para abordar este tipo de problemas, necessitamos de abordar alguma noções adicionais.

Definição 4.4 *A função de Heaviside* H *(também designada "função salto unitário") define-se para todo* $t \in \mathbb{R}$ *como*

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases},$$

sendo o respetivo gráfico



Representação gráfica da função de Heaviside

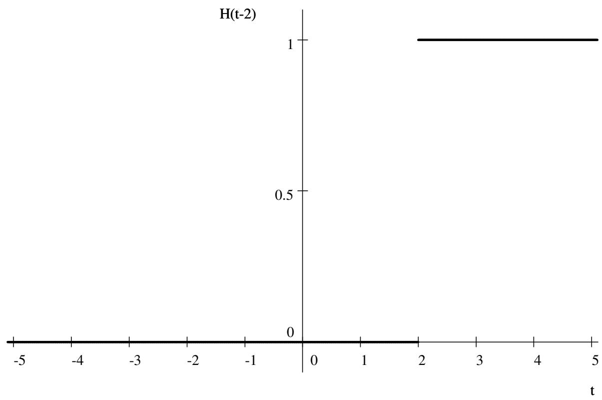
Consideremos também a função de Heaviside avaliada em $t - a$ (translação), onde $a \geq 0$, ou seja

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}.$$

Por exemplo, para $a = 2$, tem-se

$$H(t-2) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases},$$

correspondendo-lhe o seguinte gráfico



Representação gráfica da função de Heaviside avaliada em $t-2$

Trata-se portanto de uma translação da função de Heaviside $H(t)$.

A função de Heaviside permite a representação de funções que têm vários ramos sem ter de os explicitar. Além disso, a "amplitude, base e direção do salto" podem variar. Os exemplos seguintes ilustram estas propriedades.

Exemplo 4.27 *A função $f(t)$ definida por*

$$f(t) = A + B\,H(t-a), \quad t \geq 0,\ a \geq 0,$$

onde A e B são constantes reais, corresponde a

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < a \\ A+B, & t \geq a \end{cases}.$$

Portanto, dependendo dos valores atribuídos às constantes a, A e B, podemos ter funções distintas, por exemplo,

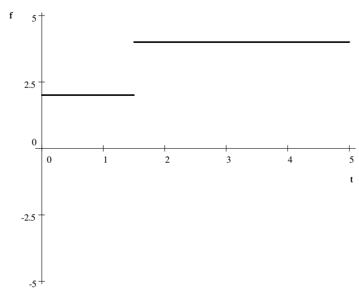


Gráfico de $2 + 2H(t-3/2)$

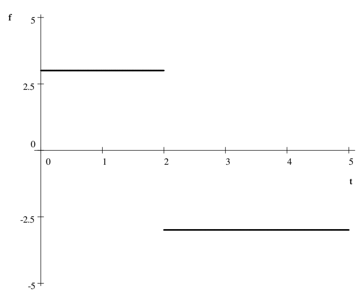


Gráfico de $3 - 6H(t-2)$

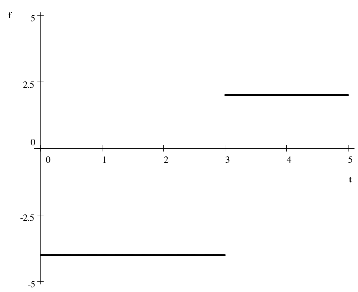


Gráfico de $-4 + 6H(t-3)$

Podemos ainda ter, por exemplo, funções do tipo $(a < b)$

$$g(t) = A + B\,H(t-a) + C\,H(t-b) = \begin{cases} A, & 0 \le t < a \\ A+B, & a \le t < b \\ A+B+C, & t \ge b \end{cases},$$

ou

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)\,H(t-a) = \begin{cases} h_1(t), & 0 \le t < a \\ h_1(t)+h_2(t), & t \ge a \end{cases},$$

conforme se ilustra nos gráficos seguintes.

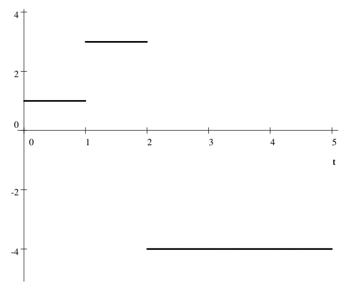


Gráfico de $1 + 2H(t-1) - 7H(t-2)$

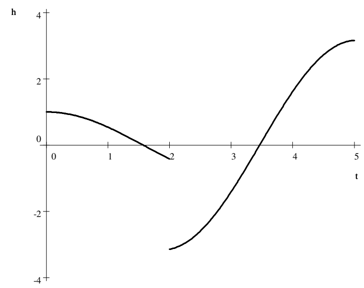


Gráfico de $\cos(t) - 3\,\mathrm{sen}(t)H(t-2)$

Conforme veremos de seguida, um procedimento que é necessário realizar no âmbito do cálculo da transformada de Laplace de funções definidas por ramos é o de expressar tais funções à custa da combinação de funções de Heaviside.

Comecemos por determinar a transformada de Laplace da função de Heaviside avaliada em $t-a$. Tem-se, por definição,

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}H(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_a^R e^{-st}\,dt = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^R = \frac{e^{-as}}{s},$$

para todo $s > 0$. Então,

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0.$$

Dada a definição que adoptamos para a transformada de Laplace, resulta, quando se toma $a = 0$,

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0,$$

o que é natural porque $H(t) = 1$ quando $t \ge 0$.

Exemplo 4.28 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2 \\ 3, & t \ge 2 \end{cases},$$

cujo gráfico é

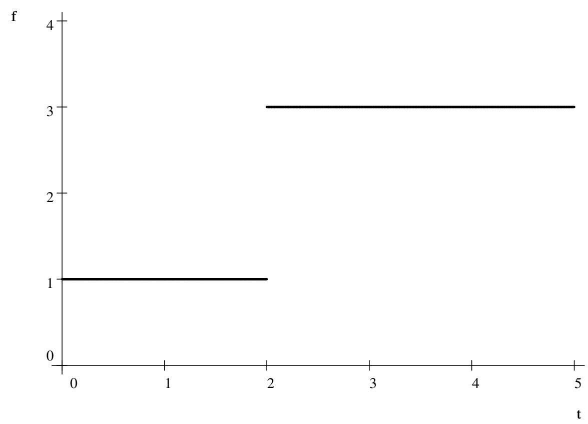


Gráfico da função $f(t)$

Solução. *Pode-se recorrer à definição para determinar $\mathcal{L}\{f(t)\}$, mas o objetivo é escrever $f(t)$ à custa da função de Heaviside para poder usar o resultado anterior. É fácil mostrar que em geral se tem*

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < a \\ B, & t \geq a \end{cases} = A + (B - A)\, H(t-a).$$

Então

$$f(t) = 1 + 2H(t-2),$$

pelo que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1 + 2H(t-2)\} = \mathcal{L}\{1\} + 2\mathcal{L}\{H(t-2)\} = \frac{1}{s} + 2\frac{e^{-2s}}{s}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.29 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ -3, & 1 \leq t < 4 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}.$$

Solução. *Novamente, o primeiro passo consiste em escrever a função dada à custa da função de Heaviside. Tem-se o seguinte resultado geral ($a < b$)*

$$g(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < a \\ B, & a \leq t < b \\ C, & t \geq b \end{cases} = A + (B - A)\, H(t-a) + (C - B)\, H(t-b).$$

Portanto,

$$g(t) = 2 - 5H(t-1) + 3H(t-4)$$

e assim

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{2 - 5H(t-1) + 3H(t-4)\} = \frac{2}{s} - 5\frac{e^{-s}}{s} + 3\frac{e^{-4s}}{s}, \quad s > 0.$$

Nota Se uma função $h(t)$ for definida por $n+1$ ramos,

$$h(t) = \begin{cases} A_1, & 0 \le t < a_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_k, & a_{k-1} \le t < a_k \\ \vdots & \vdots \\ A_{n+1} & t \ge a_n \end{cases},$$

onde $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots < a_n$, então

$$h(t) = A_1 + (A_2 - A_1)\, H(t-a_1) + (A_3 - A_2)\, H(t-a_2) + \cdots + (A_{n+1} - A_n)\, H(t-a_n).$$

Este resultado é ainda válido mesmo quando os ramos da função não são constantes.

Consideremos, agora, a função definida por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ f(t-a), & t \ge a \end{cases},$$

ou seja,

$$g(t) = f(t-a)H(t-a).$$

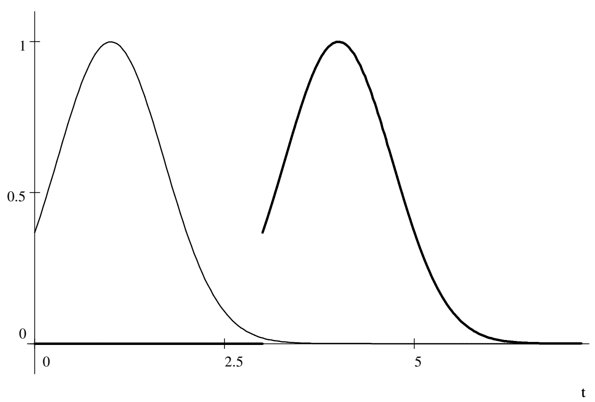
Por exemplo, para

$$f(t) = e^{-(t-1)^2} \quad \text{e} \quad a = 3,$$

tem-se

$$g(t) = f(t-3)H(t-3) = e^{-(t-4)^2}H(t-3) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3 \\ e^{-(t-4)^2}, & t \ge 3 \end{cases},$$

correspondendo-lhe o seguinte gráfico:



Representação gráfica das funções $e^{-(t-1)^2}$ e $H(t-3)e^{-(t-4)^2}$ (a cheio)

Tem-se, portanto, uma translação da função $f(t)$.

Teorema 4.9 *Seja f uma função que admite transformada de Laplace $F(s) \equiv \mathcal{L}\{f(t)\}$ para $s > \alpha$. Seja ainda*

$$r(t) = f(t-a)H(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ f(t-a), & t \geq a \end{cases}.$$

Então

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s)$$

para $s > \alpha$.

Demonstração *Tem-se,*

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt.$$

Fazendo $u = t - a$, vem

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}\,du = e^{-as}\int_0^\infty f(u)e^{-su}\,du.$$

O integral é finito para $s > \alpha$, pelo que nessas condições,

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s),$$

tal como requerido. ■

Exemplo 4.30 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 7 \\ t-4, & t \geq 7 \end{cases},$$

cujo gráfico é

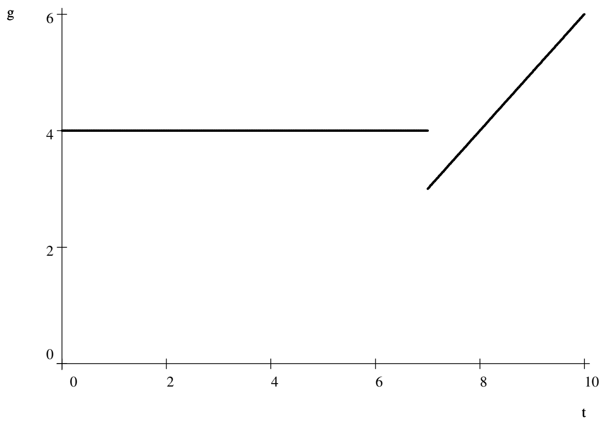


Gráfico da função $g(t)$

Solução. *Atendendo ao resultado apresentado na nota presente na página 187, tem-se*

$$g(t) = 4 + (t-4-4)\;H(t-7) = 4 + (t-8)\;H(t-7).$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{4 + (t-8)\ H(t-7)\} = 4\mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{(t-8)\ H(t-7)\}.$$

Resta determinar

$$\mathcal{L}\{(t-8)\ H(t-7)\}.$$

Para esse efeito, e para poder aplicar o Teorema 4.9, teremos de determinar uma função $f(t)$ de forma que

$$(t-8)\ H(t-7) = f(t-a)H(t-a), \tag{4.4}$$

já que nesse caso teríamos

$$\mathcal{L}\{(t-8)\ H(t-7)\} = e^{-as}F(s),$$

com $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Ora, da equação (4.4) decorre imediatamente que $a = 7$, pelo que $f(t)$ terá de verificar a condição

$$f(t-7) = t-8. \tag{4.5}$$

Resta determinar $f(t)$. Para tal considere-se a mudança de variável

$$x = t-7 \quad \Rightarrow \quad t = x+7.$$

A equação (4.5) escreve-se agora

$$f(x) = x+7-8 = x-1,$$

e por isso concluímos que (recorde-se que x, tal como t, são "variáveis mudas")

$$f(t) = t-1 \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = 4\mathcal{L}\{1\} + e^{-5s}F(s) = \frac{4}{s} + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)e^{-5s}, \quad s > 0.$$

Exemplo 4.31 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$h(t) = \begin{cases} 2\operatorname{sen} 3t, & 0 \le t < \pi/2 \\ 3\cos 4t, & t \ge \pi/2 \end{cases},$$

cujo gráfico é

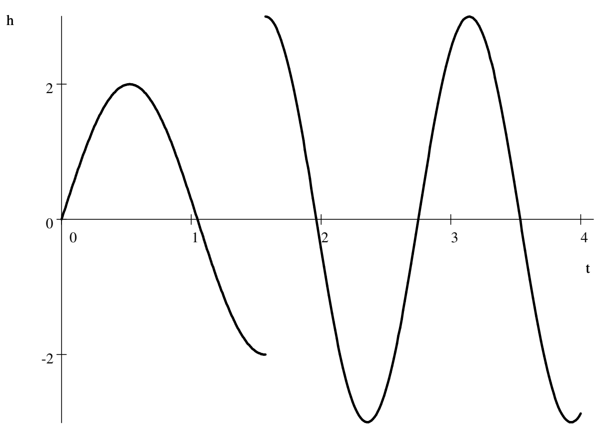


Gráfico da função $h(t)$

Solução. *Tem-se*
$$h(t) = 2\,\text{sen}\,3t + (3\cos 4t - 2\,\text{sen}\,3t)\ H\,(t - \pi/2)\,.$$
Assim,
$$\mathcal{L}\,\{h(t)\} = 2\mathcal{L}\,\{\text{sen}\,3t\} + 3\mathcal{L}\,\{\cos 4t\,H\,(t-\pi/2)\} - 2\mathcal{L}\,\{\text{sen}\,3t\,H\,(t-\pi/2)\}\,. \tag{4.6}$$
Comecemos pelo termo
$$\mathcal{L}\,\{\cos 4t\,H\,(t-\pi/2)\} = \mathcal{L}\,\{h_1(t-a)\,H\,(t-a)\} = e^{-as}H_1(s),$$
onde definimos $H_1(s) = \mathcal{L}\,\{h_1(t)\}$*. Determinamos então a função* $h_1(t)$ *sabendo que* $a = \pi/2$*. Tem-se,*
$$h_1(t-\pi/2) = \cos 4t,$$
pelo que fazendo
$$x = t - \pi/2 \quad \Rightarrow \quad t = x + \pi/2,$$
resulta
$$h_1(x) = \cos\,(4x + 2\pi) = \cos 4x,$$
pelo que
$$H_1(s) = \mathcal{L}\,\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2+16}, \quad s > 0. \tag{4.7}$$
Consideramos agora o termo
$$\mathcal{L}\,\{H\,(t-\pi/2)\ \text{sen}\,3t\} = \mathcal{L}\,\{H\,(t-a)\ h_2(t-a\} = e^{-as}H_2(s),$$
onde $H_2(s) = \mathcal{L}\,\{h_2(t)\}$*. Dado que* $a = \pi/2$*, tem-se*
$$h_2(t-\pi/2) = \text{sen}\,3t.$$
Neste caso a mudança de variável apropriada é novamente $x = t - \pi/2$ *e por isso*
$$h_2(x) = \text{sen}\,(3x + 3\pi/2) = -\cos 3x,$$
vindo
$$H_2(s) = -\mathcal{L}\,\{\cos 3t\} = -\frac{s}{s^2+9}, \quad s > 0. \tag{4.8}$$
Combinando (4.6) - (4.8), tem-se, finalmente,
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\,\{h(t)\} &= 2\mathcal{L}\,\{\text{sen}\,3t\} + 3H_1(s)e^{-\pi s/2} - 2H_2(s)e^{-\pi s/2} \\ &= \frac{6}{s^2+9} + \left(\frac{3s}{s^2+16} + \frac{2s}{s^2+9}\right)e^{-\pi s/2}, \quad s > 0.\end{aligned}$$

Problema Determinar a transformada de Laplace da função
$$w(t) = \begin{cases} t+2, & 0 \le t < 1 \\ 2, & t \ge 1 \end{cases}.$$
Resp.: $s^{-1}\,(2 - e^{-s}) + s^{-2}\,(1 - e^{-s})\,, \quad s > 0.$

Exemplo 4.32 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$r(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 3t+2, & 1 \le t < 2 \\ 2t-1, & t \ge 2 \end{cases},$$

cujo gráfico é

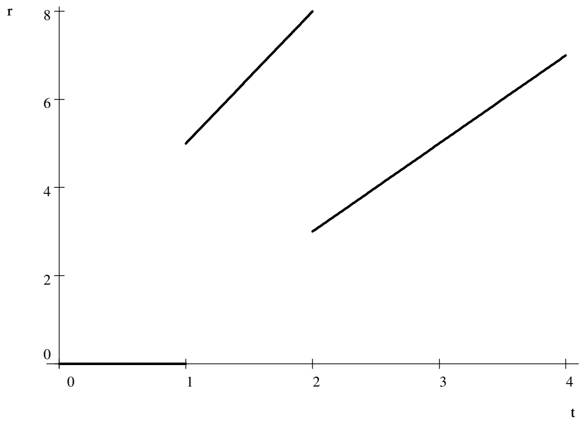


Gráfico da função $r(t)$

Solução. *Tem-se*

$$r(t) = (3t+2)\ H(t-1) + (-t-3)\ H(t-2) = (3t+2)\ H(t-1) - (t+3)\ H(t-2),$$

vindo

$$\mathcal{L}\left\{r(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{(3t+2)\ H(t-1)\right\} - \mathcal{L}\left\{(t+3)\ H(t-2)\right\} = R_1(s)e^{-s} - R_2(s)e^{-2s},$$

com

$$R_1(s) = \mathcal{L}\left\{r_1(t)\right\},\ r_1(t-1) = 3t+2; \quad R_2(s) = \mathcal{L}\left\{r_2(t)\right\},\ r_2(t-2) = t+3.$$

Então, considerando $x = t-1$, resulta $t = x+1$ e consequentemente

$$r_1(x) = 3\,(x+1) + 2 = 3x+5 \quad \Rightarrow \quad R_1(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{5}{s}, \quad s > 0.$$

Por outro lado, fazendo $y = t-2$, vem $t = y+2$ e portanto

$$r_2(y) = y+2+3 = y+5 \quad \Rightarrow \quad R_2(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{5}{s}, \quad s > 0.$$

Conclui-se então que

$$\mathcal{L}\left\{r(t)\right\} = e^{-s}R_1(s) + e^{-2s}R_2(s) = \left(\frac{3}{s^2} + \frac{5}{s}\right)e^{-s} - \left(\frac{1}{s^2} + \frac{5}{s}\right)e^{-2s}, \quad s > 0.$$

Problema Determinar a transformada de Laplace da função

$$v(t) = \begin{cases} -2t^2, & 0 \le t < 3 \\ 1-t, & 3 \le t < 5 \\ 0, & t \ge 5 \end{cases}.$$

Resp.: $e^{-5s}\left(4s^{-1}+s^{-2}\right)-4s^{-3}+e^{-3s}\left(16s^{-1}+11s^{-2}+4s^{-3}\right), \quad s>0.$

Abordamos agora a transformada de Laplace de funções periódicas. É certo que já lidámos com as funções periódicas seno e cosseno, mas essas são funções especiais na medida em que a sua periodicidade é de alguma forma intrínseca, não obrigando a definir estas funções por ramos. Por exemplo, a função períodica $f(t)$ a que corresponde o seguinte gráfico

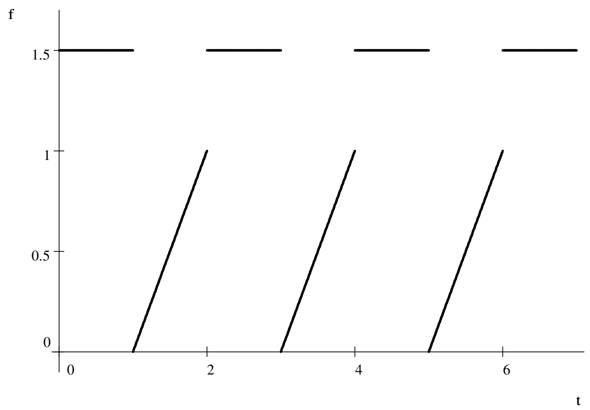


Gráfico da função periódica $f(t)$

define-se analiticamente como

$$f(t)=\begin{cases} 3/2, & 0\le t<1 \\ t-1, & 1\le t<2 \end{cases} \quad \text{e} \quad f(t+2)=f(t) \text{ para } t\ge 0.$$

Coloca-se portanto a questão de como calcular a transformada de Laplace deste tipo de funções. O teorema seguinte dá-nos a resposta.

Teorema 4.10 *Suponhamos que f é uma função periódica, com período p, que admite transformada de Laplace. Então,*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-ps}}. \tag{4.9}$$

Demonstração *Tem-se, por definição de transformada de Laplace,*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt+\int_p^{2p} e^{-st}f(t)\,dt+\cdots+\int_{kp}^{kp+p} e^{-st}f(t)\,dt+\cdots,$$

ou

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{kp}^{(k+1)p} e^{-st}f(t)\,dt.$$

Considerando a mudança de variável $u=t-kp$, resulta

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^p e^{-s(u+kp)}f(u+kp)\,du.$$

Atendendo à periodicidade da função f, tem-se $f(u+kp)=f(u)$, pelo que

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}e^{-kps}\left[\int_0^p e^{-su}f(u)\,du\right].$$

Ora,

$$\sum_{k=0}^{n}e^{-kps}=1+\sum_{k=1}^{n}e^{-kps}$$

envolve a soma de n termos de uma progressão geométrica em que o primeiro termo é e^{-ps} e a razão é também e^{-ps}. Então,

$$1+\sum_{k=1}^{n}e^{-kps}=1+e^{-ps}\frac{e^{-nps}-1}{e^{-ps}-1}$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}e^{-kps}=1+\frac{e^{-ps}}{1-e^{-ps}}=\frac{1}{1-e^{-ps}}.$$

Concluindo,

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=\frac{\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-ps}},$$

conforme requerido. ■

Este teorema permite-nos portanto determinar a transformada de Laplace de uma função periódica recorrendo apenas à definição da função no intervalo $[0,p[$. O termo que aparece no denominador da expressão (4.9) é necessariamente inferior a 1 (porquê?), "compensando" assim o facto do integral que surge no numerador se restringir ao intervalo $[0,p[$.

Exemplo 4.33 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<2\\ -1, & 2\le t<4\end{cases}\qquad e\quad f(t+4)=f(t)\ \ para\ t\ge 0.$$

Solução. *Sendo f uma função periódica, de período $p=4$, que admite transformada de Laplace (porquê?), vem*

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=\frac{\int_0^4 e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-4s}}=\frac{\int_0^2 e^{-st}\,dt-\int_2^4 e^{-st}\,dt}{1-e^{-4s}}=\frac{1}{s}\frac{\left(1-e^{-2s}\right)^2}{\left(1-e^{-2s}\right)\left(1+e^{-2s}\right)}=\frac{1}{s}\frac{1-e^{-2s}}{1+e^{-2s}},\quad s>0.$$

Exemplo 4.34 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$g(t)=\begin{cases}t, & 0\le t<1\\ 0, & 1\le t<2\end{cases}\qquad e\quad g(t+2)=g(t)\ \ para\ t\ge 0.$$

Solução. *Sendo g uma função periódica, de período $p = 2$, que admite transformada de Laplace (porquê?), vem*

$$\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = \frac{\int_0^2 e^{-st} g(t)\,dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{\int_0^1 te^{-st}\,dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{s^2}\frac{1 - (1+s)\,e^{-s}}{1 - e^{-2s}}, \quad s > 0.$$

Problema Determinar a transformada de Laplace da função

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & \pi \le t < 2\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad h(t + 2\pi) = h(t) \text{ para } t \ge 0.$$

Resp.: $\left(1 - e^{-2\pi s}\right)^{-1}\left(s^2 + 1\right)^{-1}\left(1 + e^{-\pi s}\right), \quad s > 0.$

Exercícios sobre a transformada de Laplace

Exercício 4.1 *Determinar a transformada de Laplace das seguintes funções, usando a respetiva definição. Indicar, em cada caso, o domínio da transformada de Laplace, recorrendo, para o efeito, à definição de função de ordem exponencial.*

(a) $f(t) = t^2$; $\qquad$ (c) $h(t) = \begin{cases} 4, & 0 \le t < 3 \\ 2, & t > 3 \end{cases}$;

(b) $g(t) = \operatorname{senh} t$; $\qquad$ (d) $\varphi(t) = \begin{cases} t, & 1 \le t < 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$.

Exercício 4.2 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}^2(\sqrt{2}t)\right\}$ *usando a propriedade da linearidade e o facto de*

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

Exercício 4.3 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{\cos^2 3t \operatorname{sen} 3t\right\}$ *em função de* $\mathcal{L}\left\{\cos^3 3t\right\}$*, atendendo ao facto de se ter* $\left(\cos^3 3t\right)' = -9\cos^2 3t \operatorname{sen} 3t$ *e recorrendo ao resultado do Teorema 4.4 (ver página 176).*

Exercício 4.4 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{t^4\right\}$ *sabendo que* $\mathcal{L}\left\{t^3\right\} = 6/s^4$.

Exercício 4.5 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{e^{-3t}t^2\right\}$ *usando a propriedade da translação.*

Exercício 4.6 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{t^3 \operatorname{sen} 5t\right\}$ *usando o resultado do Teorema 4.7 (ver página 180).*

Exercício 4.7 *Determinar a transformada de Laplace das seguintes funções.*

$(a)\quad f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<6\\ 5, & t\ge 6\end{cases};\qquad (d)\quad \psi(t)=\begin{cases}2t, & 0\le t<5\\ 10, & t\ge 5\end{cases};$

$(b)\quad g(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<5\\ 2, & 5\le t<7\\ 0 & t\ge 7.\end{cases};\qquad (e)\quad \varphi(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<2,\\ e^{-t} & t\ge 2.\end{cases};$

$(c)\quad h(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<4\\ 3t, & t\ge 4\end{cases};\qquad (f)\quad \rho(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\pi\\ \cos t, & t\ge \pi\end{cases}.$

4.2 A transformada inversa de Laplace

Até agora considerámos o seguinte problema: dada uma função $f(t)$, definida para $t>0$, pretende-se determinar a sua transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ - ou $F(s)$. Considere-se agora o problema inverso, isto é, dada uma função $F(s)$, determinar uma função $f(t)$ cuja transformada de Laplace seja $F(s)$. Usaremos a notação $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ para representar tal função f, ou seja,

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\},$$

pelo que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s).$$

Nestas condições, $f(t)$ designa-se a **transformada inversa de Laplace** da função $F(s)$. A este respeito colocam-se três questões:

1. Dada uma função $F(s)$, existe sempre a sua transformada inversa de Laplace?
2. Supondo que $F(s)$ admite transformada inversa de Laplace, ela é única?
3. Como se determina a transformada inversa Laplace?

A resposta à questão 1, relativa à existência da transformada inversa de Laplace, é que nem todas funções admitem transformada inversa de Laplace. Por exemplo, resulta da definição da transformada de Laplace que esta não é crescente (porquê?). Por isso qualquer função $F(s)$ que seja crescente não admite transformada inversa de Laplace (exemplo: s, $s^2(s+1)^{-1}$, e^s). Portanto, há funções que têm transformada inversa de Laplace, enquanto que outras não são a transformada de Laplace de nenhuma função.

Quanto à questão 2, relativa à unicidade da transformada inversa de Laplace, se assumirmos que a transformada inversa de Laplace existe, em que medida é que podemos afirmar que a sua transformada inversa é única? Para as aplicações que nos interessam a resposta é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 4.11 *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções contínuas para $t\ge 0$ que têm a mesma transformada de Laplace $F(s)$. Então $f(t)=g(t)$ para todo $t\ge 0$.*

Ou seja, se soubermos que uma dada função $F(s)$ tem transformada inversa contínua $f(t)$, então $f(t)$ é a única função contínua que é a transformada inversa de Laplace de $F(s)$, isto é, não existe mais nenhuma função contínua cuja transformada de Laplace seja $F(s)$.

Exemplo 4.35 *Conforme vimos, $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$. Portanto, uma transformada inversa de Laplace da função $1/s$ é a função contínua f definida para todo $t \geq 0$ por $f(t) = 1$. Há outras funções cuja transformada de Laplace é $1/s$, mas estas são forçosamente descontínuas como é, por exemplo, o caso da função*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 5, & t = 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases} .$$

Assim, considerando apenas funções contínuas definidas para $t \geq 0$, tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1.$$

Consideremos agora a questão 3. Supondo que existe uma e uma só função contínua $f(t)$ que é a transformada inversa de $F(s)$, como é que a determinamos? Não consideraremos aqui a determinação direta da transformada inversa de Laplace, a qual teria de ser abordada no âmbito da Análise Complexa. Faremos antes uso de tabelas de transformadas de Laplace, as quais existem em abundância em numerosas publicações. Consulte-se, a título de exemplo, a tabela publicada em S.L. Ross, ou ainda "Fórmulas e Tabelas de Matemática Aplicada, L. Abellanas, M.R. Spiegel, ed. McGraw-Hill, 1990". As referidas tabelas são semelhantes à Tabela 4.1 (ver página seguinte).

Embora as funções cuja transformada inversa de Laplace queremos determinar não sejam em geral iguais às que figuram na Tabela 4.1, é possível expressar tais funções como combinações lineares daquelas que se encontram tabeladas. Usando algumas das propriedades da transformada inversa de Laplace, que decorrem das propriedades da transforrmada de Laplace, conseguimos efetuar o respetivo cálculo. Assim, por exemplo, da propriedade da linearidade da transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}\{Af_1(t) + Bf_2(t)\} = A\mathcal{L}\{f_1(t)\} + B\mathcal{L}\{f_2(t)\},$$

resulta

$$\mathcal{L}\{Af_1(t) + Bf_2(t)\} = AF_1(s) + BF_2(s),$$

onde $F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$ e $F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$. Aplicando a transformada inversa de Laplace aos dois membros da equação precedente, vem

$$Af_1(t) + Bf_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{AF_1(s) + BF_2(s)\}$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\{AF_1(s) + BF_2(s)\} = A\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + B\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\},$$

pois $\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = f_1(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t)$. A equação precedente mostra que a transformada inversa de Laplace também goza da propriedade da linearidade.

Vejamos agora alguns exemplos de determinação da transformada inversa de Laplace.

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\dfrac{1}{s}$
2.	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
3.	$\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$
4.	$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$
5.	$\operatorname{senh} bt$	$\dfrac{b}{s^2-b^2}$
6.	$\cosh bt$	$\dfrac{s}{s^2-b^2}$
7.	$t^n \ (n=1,2,\ldots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
8.	$t^n e^{at} \ (n=1,2,\ldots)$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
9.	$t \operatorname{sen} bt$	$\dfrac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
10.	$t \cos bt$	$\dfrac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
11.	$e^{at} \operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
12.	$e^{at} \cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
13.	$H(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
14.	$f(t-a)\, H(t-a)$	$e^{-as}F(s)$

Tabela 4.1: Transformadas de Laplace de algumas funções

Exemplo 4.36 *Determinar a transformada inversa de Laplace da função*

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13}$$

recorrendo à Tabela 4.1.

Solução. *Uma vez que queremos determinar*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 6s + 13}\right\},$$

gostaríamos de ver tabelado

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{as^2 + bs + c}\right\},$$

ou seja,

$$F(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c},$$

mas não é assim. No entanto, encontra-se tabelado

$$F(s) = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2},$$

isto é

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}\right\} = e^{-at} \operatorname{sen} bt.$$

Assim, tendo em conta que

$$\frac{1}{s^2 + 6s + 13} = \frac{1}{(s+3)^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\frac{2}{(s+3)^2 + 2^2},$$

resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 6s + 13}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2 + 2^2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-3t} \operatorname{sen} 2t.$$

Problema Determinar a transformada inversa de Laplace da função

$$G(s) = \frac{5s}{s^2 - 2s - 24}$$

Resp.: $2e^{-4t} + 3e^{6t}$.

Problema Determinar a transformada inversa de Laplace da função

$$H(s) = \frac{3s - 9}{s^2 - 6s + 18}$$

Resp.: $3(\cos 3t)\, e^{3t}$.

Exemplo 4.37 *Determinar*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}.$$

Solução. *Recorrendo à decomposição*

$$\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{(A+B)\,s^2+Cs+A}{s\left(s^2+1\right)},$$

resulta $A=1$*,* $B=-1$ *e* $C=0$*, pelo que*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=1-\cos t.$$

Problema Determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3-s}\right\}.$$

Resp.: $e^t+e^{-t}-2$.

Exemplo 4.38 *Determinar*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s}-3\frac{e^{-3s}}{s}-2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\}.$$

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s}-3\frac{e^{-3s}}{s}-2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\}=5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\}.$$

Ora,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1,$$

enquanto que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s}\right\}=H(t-3)=\begin{cases}0, & 0\le t<3\\ 1, & t>3\end{cases},$$

uma vez que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\}=H(t-a).$$

Dado que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\}=f(t-a)\,H(t-a),\quad \textit{onde}\quad f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\},$$

tem-se ainda

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\}=f(t-7)\,H(t-7)=\begin{cases}0, & 0\le t<7\\ f(t-7), & t\ge 7\end{cases},$$

onde

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t,$$

pelo que

$$f(t-7) = t-7$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = (t-7)\,H(t-7) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 7 \\ t-7, & t \ge 7 \end{cases}.$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s} - 3\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = 5 - 3H(t-3) - 2H(t-7)(t-7).$$

Considerando os vários ramos que intervêm nesta expressão, podemos escrever

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s} - 3\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = \begin{cases} 5, & 0 \le t < 3 \\ 5-3, & 3 \le t < 7 \\ 5-3-2(t-7), & t \ge 7 \end{cases} = \begin{cases} 5, & 0 \le t < 3 \\ 2, & 3 \le t < 7 \\ 16-2t, & t \ge 7 \end{cases}.$$

Exemplo 4.39 *Determinar*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}e^{-5s}\right\}.$$

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}e^{-5s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-as}\right\} = f(t-a)\,H(t-a),$$

onde $a = 5$ e

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\}.$$

Uma vez que (porquê?)

$$\frac{s}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2},$$

resulta

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = (t+1)\,e^t.$$

Então,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}e^{-5s}\right\} = H(t-5)f(t-5) = H(t-5)\left[(t-4)\,e^{t-5}\right],$$

isto é

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}e^{-5s}\right\} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 5 \\ (t-4)\,e^{t-5}, & t \ge 5 \end{cases}.$$

Problema Determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}e^{-3\pi s} - \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\}.$$

Resp.: $\operatorname{sen} t\, H\,(t-\pi) + \cos 2t\, H\,(t-3\pi)$.

Problema Determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2\left(s^2-1\right)}{s^3-s^2-2s}e^{-s}\right\}.$$

Resp.: $\left(e^{2t-2}+1\right)\,H\left(t-1\right)$.

4.2.1 A convolução

Outro procedimento importante relacionado com o uso de tabelas para a determinação da transformada inversa de Laplace é aquele que decorre do **Teorema da Convolução**. No entanto, antes de enunciar o teorema, definimos primeiro o conceito de convolução de duas funções.

Definição 4.5 *Sejam f e g duas funções que são seccionalmente contínuas para todo o intervalo fechado limitado $0 \le t \le b$, $b \in \mathbb{R}^+$. A função $h(t) = f(t) * g(t)$ definida por*

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g\left(t-\tau\right)\,d\tau \tag{4.10}$$

designa-se ***convolução das funções*** *f e g.*

Note-se que o resultado da convolução de duas funções é ainda uma função. Por outro lado, se no integral presente em (4.10) realizarmos a mudança de variável

$$u = t-\tau \quad \Leftrightarrow \quad \tau = t-u$$

resulta $d\tau = -du$, e consequentemente

$$f(t) * g(t) = -\int_t^0 f(t-u)g\left(u\right)\,du = \int_0^t f(t-u)g\left(u\right)\,du = \int_0^t g\left(u\right)f(t-u)\,du = g(t) * f(t),$$

concluindo-se portanto que a convolução é uma operação comutativa.

O principal resultado que estabelece a ligação entre a convolução de funções e a transformada (inversa) de Laplace é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 4.12 (Teorema da Convolução) *Sejam f e g duas funções que são seccionalmente contínuas para todo o intervalo fechado limitado $0 \le t \le b$, $b \in \mathbb{R}^+$, ambas de ordem exponencial $e^{\alpha t}$. Nestas condições a transformada de Laplace*

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\}$$

existe para $s > \alpha$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\,\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em S.L. Ross.

Usando a notação, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, o Teorema da Convolução toma a forma

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)\,G(s),$$

permitindo escrever

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = f(t) * g(t).$$

Tem-se assim uma forma alternativa de determinar a transformada inversa de Laplace de um produto de duas funções a partir das respetivas transformadas inversas de Laplace.

Exemplo 4.40 *Vimos no Exemplo 4.37 (ver página 199) que*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos t,$$

tendo, para o efeito, recorrido à decomposição da função racional $s^{-1}\left(s^2+1\right)^{-1}$. *Pretende-se agora determinar*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\}$$

usando o Teorema da Convolução.

Solução. *Tem-se*

$$\frac{1}{s\,(s^2+1)} = \frac{1}{s}\,\frac{1}{s^2+1},$$

pelo que escolhendo

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad f(t) = 1; \qquad G(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad g(t) = \operatorname{sen} t,$$

tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = f(t) * g(t),$$

isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\} = 1 * \operatorname{sen} t = \int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\; d\tau = [\cos(t-\tau)]_0^t = 1 - \cos t.$$

Atendendo à comutatividade da convolução, podíamos ter escrito

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\} = \operatorname{sen} t * 1 = \int_0^t \operatorname{sen}\tau\, d\tau = [-\cos(\tau)]_0^t = 1 - \cos t.$$

Exemplo 4.41 *Determinar, usando o Teorema da Convolução,*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s+1)}\right\}.$$

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\,\frac{1}{s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\},$$

donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s+1)}\right\} = 1 * e^{-t} = e^{-t} * 1 = \int_0^t e^{-x}\, dx = 1 - e^{-t}.$$

Problema Determinar, usando o Teorema da Convolução,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2-1)}\right\}.$$

Resp.: $\cosh t - 1$.

Problema Determinar, usando o Teorema da Convolução,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\}.$$

Resp.: $e^t - t - 1$.

O Teorema da Convolução pode ainda ser usado no seguinte contexto. Sejam $h(t)$ e $f(t)$ funções seccionalmente contínuas em $0 \leq t \leq b$, para todo $b > 0$, que admitem transformada de Laplace. Estas funções são conhecidas e relacionam-se através da seguinte equação

$$h(t) = f(t) * g(t).$$

Coloca-se a questão de como determinar analiticamente a função $g(t)$ - que se admite ser seccionalmente contínua e ter transformada de Laplace?

O Teorema da Convolução permite escrever

$$\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} \quad \Leftrightarrow \quad H(s) = F(s)\,G(s),$$

pelo que

$$G(s) = \frac{H(s)}{F(s)} \quad \Rightarrow \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(s)}{F(s)}\right\}.$$

Exemplo 4.42 *Considerem-se as funções $f(t) = t$ e $h(t) = t^2 - t$. Determinar a função $g(t)$ que verifica*

$$h(t) = f(t) * g(t).$$

Solução. *Por aplicação do Teorema da Convolução, tem-se*

$$H(s) = F(s)\,G(s) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\left\{t^3 - t^2\right\} = \mathcal{L}\left\{t\right\}\,G(s) \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{6}{s^2} - \frac{2}{s},$$

vindo

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2} - \frac{2}{s}\right\} = 6t - 2.$$

Para confirmar este resultado fazemos

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t * (6t-2)\right\} = \int_0^t (6\tau - 2)\,(t-\tau)\;d\tau = t^3 - t^2,$$

obtendo-se, portanto, o resultado esperado.

Problema Considerem-se as funções $f(t) = 3e^{-t}$ e $h(t) = e^{2t} - e^{-t}$. Determinar a função $g(t)$ que verifica

$$h(t) = f(t) * g(t).$$

Resp.: $g(t) = e^{2t}$.

Problema Considerem-se as funções $f(t) = 2\cos t$ e $h(t) = t \operatorname{sen} t$. Determinar a função $g(t)$ que verifica

$$h(t) = f(t) * g(t).$$

Resp.: $g(t) = \operatorname{sen} t$.

Exercícios sobre a transformada inversa de Laplace

Exercício 4.8 *Determinar a transformada inversa de Laplace das seguintes funções.*

(a) $\dfrac{6}{s^2+9}$; (e) $\dfrac{2s+2}{s^3+2s}$; (i) $\dfrac{6s+27}{s^2+4s+13}e^{-3s}$;

(b) $\dfrac{30}{(s-2)^4}$; (f) $\dfrac{7s+12}{s^2+9}$; (j) $3\dfrac{e^{-4s}-e^{-7s}}{s^2}$;

(c) $\dfrac{3s}{s^2-4}$; (g) $\dfrac{35s+56}{s^2+3s-10}$; (k) $\dfrac{2+2e^{-\pi s}}{s^2+4}$;

(d) $\dfrac{5s}{s^2+4s+4}$; (h) $\dfrac{5s+6}{s^2+9}e^{-\pi s}$; (l) $\dfrac{4\left(e^{-2s}-1\right)}{s\left(s^2+4\right)}$.

Exercício 4.9 *Determinar a transformada inversa de Laplace das seguintes funções recorrendo ao Teorema da Convolução.*

(a) $\dfrac{1}{s^2+5s+6}$; (c) $\dfrac{9}{2s\left(s^2+9\right)}$;

(b) $\dfrac{10}{s^2-6s-16}$; (d) $\dfrac{9}{s^2\left(s+3\right)}$.

4.3 Aplicações da transformada de Laplace

4.3.1 Solução de problemas de valores iniciais envolvendo equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Veremos agora como é que a transformada de Laplace pode ser usada para determinar a solução de PVIs envolvendo equações diferenciais lineares de ordem n com coeficientes constantes, ou seja, do tipo

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = b(t),$$

com condições iniciais

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}.$$

Vimos anteriormente alguns exercícios simples, para $n = 1$ e $n = 2$, mas aqui vamos começar por considerar o caso geral. Tomando a transformada de Laplace de ambos os membros da equação diferencial acima obtém-se,

$$a_0\mathcal{L}\left\{y^{(n)}\right\} + a_1\mathcal{L}\left\{{}_1y^{(n-1)}\right\} + \cdots + a_{n-1}\mathcal{L}\left\{y'\right\} + a_n\mathcal{L}\left\{y\right\} = \mathcal{L}\left\{b(t)\right\}.$$

Aplicando o resultado enunciado no Teorema 4.5 (ver página 178),

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

e usando a notação

$$Y(s) = \mathcal{L}\left\{y\left(t\right)\right\}, \qquad B(s) = \mathcal{L}\left\{b\left(t\right)\right\},$$

resulta

$$\left(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n\right)Y(s) - A(s) = B(s),$$

onde $A(s)$ é um polinómio de grau $n-1$ na variável s envolvendo, por um lado, as constantes $a_0, \ldots, a_n$, as quais estão associadas à forma da equação diferencial homogénea associada, e por outro lado, as constantes que determinam as condições iniciais $c_0, \ldots, c_{n-1}$. Assim,

$$Y(s) = \frac{B(s) - A(s)}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n},$$

pelo que a solução do PVI é

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\left(s\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s) - A(s)}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}\right\}.$$

Exemplo 4.43 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} - 2y = e^{5t}, \quad t > 0; \quad y(0) = 3, \tag{4.11}$$

usando a transformada de Laplace.

Solução. *Tem-se*

$$\frac{dy}{dt} - 2y = e^{5t} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt} - 2y\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{5t}\right\}.$$

Atendendo a que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt} - 2y\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 2\mathcal{L}\left\{y\right\} = sY(s) - y(0) - 2Y(s) = (s-2)Y(s) - 3,$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}$, *e*

$$\mathcal{L}\left\{e^{5t}\right\} = \frac{1}{s-5},$$

resulta

$$(s-2)Y(s) - 3 = \frac{1}{s-5} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{-14+3s}{\left(s-5\right)\left(s-2\right)}.$$

Ora, escrevendo,

$$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-5},$$

obtém-se $A = 8/3$ *e* $B = 1/3$ *(porquê?), pelo que*

$$Y(s) = \frac{8}{3}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-5},$$

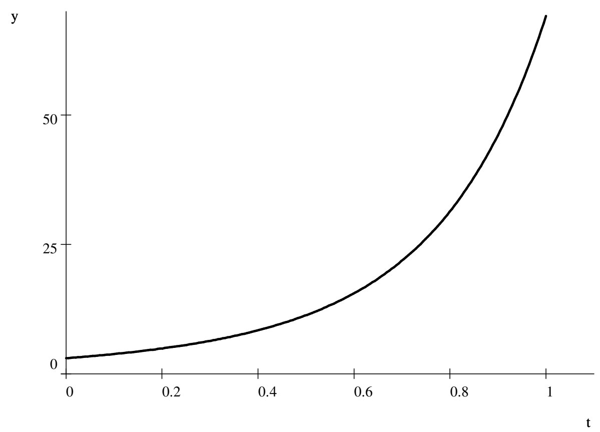
vindo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y\left(s\right)\right\} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\},$$

ou seja,

$$y(t) = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}.$$

Note-se que $y(0) = 3$*, conforme requerido.*



Representação gráfica da função $y(t) = \left(8e^{2t} + e^{5t}\right)/3$*, solução do PVI (4.11)*

Nota Dado que as soluções dos PVIs que podem ser resolvidos usando a transformada de Laplace são forçosamente soluções explícitas (porquê?), averiguar se a solução obtida está correta é um processo que pode requerer mais ou menos cálculos, mas que é, na essência, simples. Em todo o caso, se tal não for feito, e à falta de melhor, pode-se averiguar se as condições iniciais são verificadas pela solução encontrada. Isto porque a imposição das condições iniciais é realizada logo no início do cálculo (ao contrário do que se passa quando se utilizam os métodos que abordamos no capítulo precendente) e por isso se a solução estiver errada é muito provável que as condições iniciais não sejam satisfeitas pela solução obtida. Atenção: se as condições iniciais forem satisfeitas, tal não garante que a solução obtida esteja correta, mas costuma ser um bom aferidor.

Exemplo 4.44 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' - 2y' - 8y = 0, \quad t > 0; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 6, \tag{4.12}$$

usando a transformada de Laplace.

Solução. *Tem-se*

$$y'' - 2y' - 8y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{y'' - 2y' - 8y\right\} = 0.$$

Atendendo a que

$$\mathcal{L}\left\{y''\right\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - 3s - 6$$

e

$$\mathcal{L}\left\{y'\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 3,$$

resulta

$$\left(s^2 Y(s) - 3s - 6\right) - 2\left(sY(s) - 3\right) - 8Y(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{3s}{s^2 - 2s - 8}.$$

Ora, escrevendo

$$Y(s) = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+2},$$

obtém-se $A = 2$ e $B = 1$, pelo que

$$Y(s) = \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2},$$

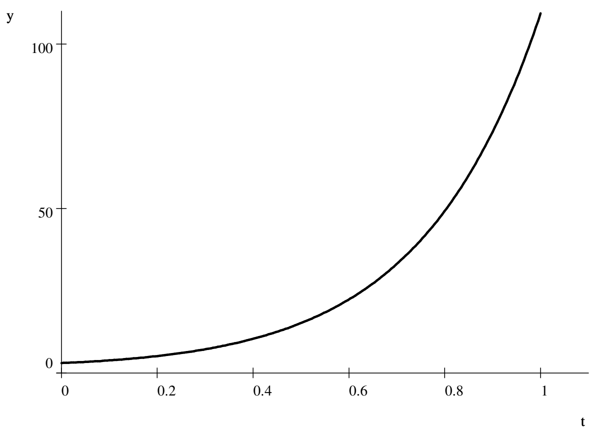
vindo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\},$$

ou seja,

$$y(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}.$$

Note-se que $y(0) = 3$, enquanto que $y'(0) = 6$, conforme requerido.



Representação gráfica da função $y(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}$, solução do PVI (4.12)

Problema Determinar, usando a transformada de Laplace, a solução do PVI

$$y'' + 4y = \cos 2t, \quad t > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Resp.: $2 \operatorname{sen} 2t + t \operatorname{sen} 2t$.

Problema Determinar a solução do seguinte PVI usando a transformada de Laplace.

$$y''' - y' = 2t, \quad t > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Resp.: $e^t + e^{-t} - t^2 - 2$.

Nos exemplos precedentes as condições iniciais foram colocadas sistematicamente para $t = 0$. No entanto, conforme se ilustra no exemplo seguinte, tal não tem porque ser necessariamente assim.

Exemplo 4.45 *Determinar a solução do problema de valores iniciais*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = t, \quad t > \pi; \quad y(\pi) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(\pi) = 1 \tag{4.13}$$

usando a transformada de Laplace. Realizando a mudança de variável $x = t - \pi$ resulta $t = x + \pi$ e o PVI proposto escreve-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x + \pi, \quad x > 0; \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1.$$

Aplicando a transformada de Laplace, vem

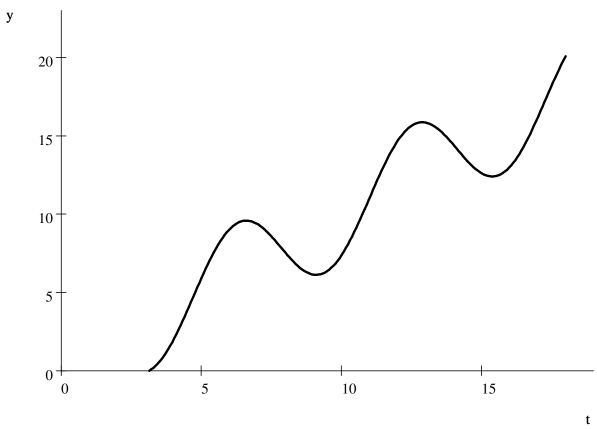
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2} + y\right\} = \mathcal{L}\left\{x + \pi\right\} \quad \Rightarrow \quad s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s},$$

pelo que

$$\left(s^2 + 1\right)Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s} + 1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1 + \pi s}{\left(s^2 + 1\right)s^2} + \frac{1}{s^2 + 1} = -\frac{\pi s}{s^2 + 1} + \frac{\pi}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

Obtém-se então

$$y(x) = -\pi \cos x + \pi + x \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\pi \cos\left(t - \pi\right) + t = \pi \cos t + t.$$



Representação gráfica da função $y(t) = \pi \cos t + t$, solução do PVI (4.13)

Portanto, se o PVI a resolver envolver condições impostas para $t = t_0$ ($t_0 \neq 0$), então a mudança de variável $x = t - t_0$ conduzirá a um PVI cujas condições estarão impostas para $x = 0$, tal como requerido.

Qualquer dos exercícios precedentes podia ter sido resolvido recorrendo, por exemplo, ao método dos coeficientes indeterminados. O uso da transformada de Laplace tem especial interesse no caso do segundo membro da EDO ser uma função definida por ramos. Esse tipo de problema pode também ser resolvido usando os métodos abordados no capítulo relativo à resolução de equações diferencias lineares de ordem n, mas nesse caso a resolução é em geral mais morosa já que os ramos têm de ser tratados um a um. Conforme veremos nos próximos exemplos, o uso da transformada de Laplace com recurso à função de Heaviside permite evitar esta situação.

Exemplo 4.46 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' + 2y' + 5y = h(t), \quad t > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{4.14}$$

onde

$$h(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases},$$

usando a transformada de Laplace.

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 2y' + 5y\right\} = \mathcal{L}\left\{h(t)\right\}.$$

Ora,

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 2y' + 5y\right\} = \left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + 5Y(s) = \left(s^2 + 2s + 5\right) Y(s).$$

e

$$\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\, dt = 5 \int_0^\pi e^{-st}\, dt = 5 \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\pi = 5\,\frac{1 - e^{-\pi s}}{s}.$$

Assim, a equação para $Y(s)$ é

$$\left(s^2 + 2s + 5\right) Y(s) = 5\,\frac{1 - e^{-\pi s}}{s} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{5}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)} - \frac{5e^{-\pi s}}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)}.$$

Portanto,

$$y(t) = 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)}\right\} - 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)}\right\}.$$

Tem-se por isso de determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} \quad e \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\},$$

onde

$$F(s) = \frac{1}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)}.$$

Dado que

$$\frac{1}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5}\right),$$

vem

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right\}.$$

Tendo em conta que

$$\frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+2}{(s+1)^2+2^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{(s+1)^2+2^2},$$

então,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right\} = e^{-t}\cos 2t + \frac{e^{-t}}{2}\operatorname{sen} 2t.$$

Resumindo,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{5} - \frac{e^{-t}}{5}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right].$$

É agora fácil determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\} = f(t-\pi)\,H(t-\pi),$$

onde

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right].$$

Tem-se então

$$f(t-\pi) = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2\,(t-\pi) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\,(t-\pi)\right)\right] = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right],$$

resultando

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\} = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right]\ H(t-\pi).$$

Atendendo a que

$$y(t) = 5\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} - 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\},$$

tem-se

$$y(t) = 1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) - \underbrace{\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right]}_{u(t)}H(t-\pi),$$

isto é,

$$y(t) = \frac{1}{2}\begin{cases} 2 - (2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)\,e^{-t}, & 0 \le t < \pi \\ (e^{\pi} - 1)\,(2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)\,e^{-t}, & t \ge \pi \end{cases}. \tag{4.15}$$

Facilmente se conclui que $y(0) = 0$. Por outro lado,

$$y'(t) = \frac{5}{2}\begin{cases} e^{-t}\operatorname{sen} 2t, & 0 \le t < \pi \\ (1 - e^{\pi})\,e^{-t}\operatorname{sen} 2t, & t \ge \pi \end{cases}, \tag{4.16}$$

pelo que $y'(0) = 0$ conforme requerido.

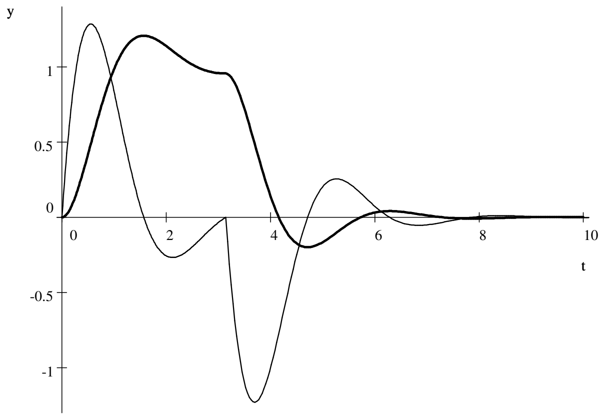
Apesar do segundo membro da equação diferencial ser uma função descontínua, tanto a solução deste PVI como a sua derivada são contínuas em $t = \pi$ *(o que já era esperado - porquê?). De facto,* $u(\pi) = u'(\pi)$ *e por isso*

$$\lim_{t \to \pi -} y(t) = y(\pi) = 1 - e^{-\pi},$$

enquanto que

$$\lim_{t \to \pi -} y'(t) = y(\pi) = 0.$$

Tal como previsto, a segunda derivada de $y(t)$ *não é contínua em* $x = \pi$ *(ver gráfico seguinte).*



Representação gráfica da função (4.15), solução do PVI (4.14), bem como da sua primeira derivada (4.16) (representada pela linha fina)

Nota Qual seria a solução do PVI proposto no exemplo precedente se resolvessemos a equação diferencial ramo a ramo impondo

$$\lim_{t \to \pi -} y(t) = y(\pi) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \pi -} y'(t) = y'(\pi).$$

Comecemos por considerar a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = 5, \quad 0 \leq t < \pi.$$

Da aplicação do método dos coeficientes indeterminados resulta (porquê?)

$$y_-(t) = 1 + c_1 e^{-t} \operatorname{sen} 2t + c_2 e^{-t} \cos 2t.$$

As constantes c_1 e c_2 determinam-se impondo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, vindo

$$y_-(t) = 1 - \frac{1}{2} e^{-t} \operatorname{sen} 2t - e^{-t} \cos 2t, \quad 0 \leq t < \pi.$$

Consideremos agora a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad t \geq \pi.$$

A sua solução geral é

$$y_+(t) = k_1 e^{-t} \operatorname{sen} 2t + k_2 e^{-t} \cos 2t, \quad t \geq \pi.$$

 J. Figueiredo, C. Ribeiro – 2013

O valor das constantes k_1 e k_2 não pode ser determinado usando as condições iniciais uma vez que esta solução não é válida para $t = 0$, mas apenas para $t \geq \pi$. As constantes são tais que

$$\lim_{t\to\pi-} y_-(t) = y_+(\pi) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\pi-} y_-'(t) = y_+'(\pi).$$

Ora,

$$\begin{aligned} y_-(t) &= 1 - \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t - e^{-t}\cos 2t, \quad 0 \leq t < \pi, \\ y_+(t) &= c_1 e^{-t}\operatorname{sen} 2t + c_2 e^{-t}\cos 2t, \quad t \geq \pi, \end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{t\to\pi-} y_-(t) = y_+(\pi) \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-\pi} = c_2 e^{-\pi},$$

resultando

$$k_2 = e^{\pi} - 1.$$

Tem-se ainda

$$\begin{aligned} y_-'(t) &= \frac{5}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t, \quad 0 \leq t < \pi, \\ y_+'(t) &= (-2k_2 - k_1)\, e^{-t}\operatorname{sen} 2t + (2k_1 - k_2)\, e^{-t}\cos 2t, \quad t \geq \pi, \end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{t\to\pi-} y_-'(t) = 0 \quad \text{e} \quad y_+'(\pi) = (2k_1 - k_2)\, e^{-\pi}.$$

Combinando a condição

$$\lim_{t\to\pi-} y_-'(t) = y_+'(\pi),$$

com o facto de se ter $k_2 = e^{\pi} - 1$, resulta

$$\begin{cases} (2k_1 - k_2)\, e^{-\pi} = 0 \\ k_2 = e^{\pi} - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{2}(e^{\pi} - 1) \\ k_2 = e^{\pi} - 1 \end{cases}.$$

Assim, a solução do PVI proposto usando o método dos coeficientes indeterminados é

$$\begin{aligned} y_-(t) &= 1 - \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t - e^{-t}\cos 2t, \quad 0 \leq t < \pi, \\ y_+(t) &= \frac{1}{2}(e^{\pi} - 1)\, e^{-t}\operatorname{sen} 2t + (e^{\pi} - 1)\, e^{-t}\cos 2t, \quad t \geq \pi, \end{aligned}$$

ou seja

$$y(t) = \begin{cases} 1 - 2\,(2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)\, e^{-t}, & 0 \leq t < \pi \\ \dfrac{1}{2}(e^{\pi} - 1)(2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)\, e^{-t}, & t \geq \pi \end{cases},$$

que mais não é do que a solução obtida anteriormente usando a transformada de Laplace.

Exemplo 4.47 *Determinar a solução do PVI*

$$y'' - y = p(t), \quad t > 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{4.17}$$

onde

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 3 \\ 2t, & t \ge 3 \end{cases},$$

usando a transformada de Laplace.

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{y'' - y\right\} = \mathcal{L}\left\{p(t)\right\},$$

isto é

$$\left(s^2 - 1\right) Y(s) = P(s),$$

onde

$$P(s) = \mathcal{L}\left\{p(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{1 + (2t-1)H(t-3)\right\} = \mathcal{L}\left\{1\right\} - \mathcal{L}\left\{H(t-3\right\} + 2\mathcal{L}\left\{t\, H(t-3)\right\}.$$

Uma vez que

$$\mathcal{L}\left\{t\, H(t-3)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t-a)\, H(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$$

desde que consideremos

$$a = 3 \quad e \quad f(t-3) = t = (t-3) + 3,$$

concluímos que

$$f(\tau) = \tau + 3 \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}.$$

Portanto,

$$P(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + 2\left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right) e^{-3s}$$

e assim a equação a que deve obedecer $Y(s)$ é

$$\left(s^2 - 1\right) Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + 2\left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right) e^{-3s},$$

ou seja

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2-1\right)} + \left(\frac{5}{s\left(s^2-1\right)} + \frac{2}{s^2\left(s^2-1\right)}\right) e^{-3s}. \tag{4.18}$$

Designando

$$K(s) = \frac{1}{s\left(s^2-1\right)},$$

tem-se, usando o Teorema da Convolução em alternativa à decomposição da função racional $K(s)$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{K(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} \quad \Rightarrow \quad k(t) = \operatorname{senh} t * 1 = \cosh t - 1.$$

Ora, de (4.18) resulta

$$Y(s) = K(s) + \left(5K(s) + \frac{2}{s}K(s)\right) e^{-3s},$$

pelo que definindo

$$R(s) = \frac{1}{s} K(s),$$

tem-se

$$y(t) = k(t) + 5k(t-3)\, H(t-3) + 2r(t-3)\, H(t-3),$$

restando apenas determinar a função $r(t)$. *Para esse efeito evocamos uma vez mais o Teorema da Convolução, obtendo-se*

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{R(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\{K(s)\} = 1 * k(t),$$

isto é,

$$r(t) = 1 * (\cosh t - 1) = (\cosh t - 1) * 1 = \int_0^t (\cosh x - 1)\, dx = \operatorname{senh} t - t.$$

Tem-se, finalmente,

$$\begin{aligned} y(t) &= k(t) + [5k(t-3) + 2r(t-3)]\ H(t-3) \\ &= \cosh t - 1 + [5\,(\cosh(t-3) - 1) + 2\,(\operatorname{senh}(t-3) - t + 3)]\ H(t-3) \\ &= \cosh t - 1 + \underbrace{[5\cosh(t-3) + 2\operatorname{senh}(t-3) - 2t + 1]}_{v(t)} H(t-3), \end{aligned}$$

pelo que

$$y'(t) = \operatorname{senh} t + \underbrace{[5\operatorname{senh}(t-3) + 2\cosh(t-3) - 2]}_{v'(t)} H(t-3)$$

ou, explicitando os vários ramos,

$$y(t) = \begin{cases} \cosh t - 1, & 0 \le t < 3 \\ \cosh t + 5\cosh(t-3) + 2\operatorname{senh}(t-3) - 2t, & t \ge 3 \end{cases} \tag{4.19}$$

e

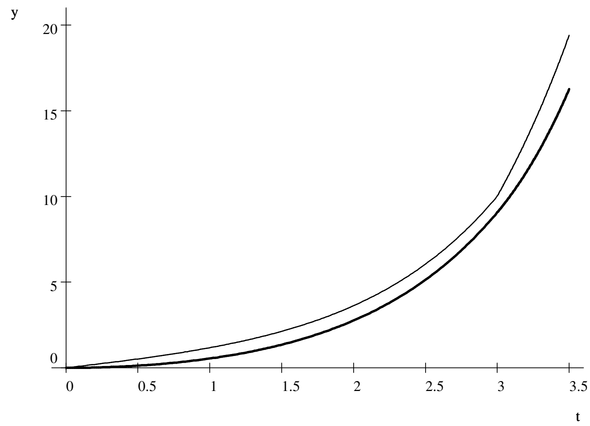
$$y'(t) = \begin{cases} \operatorname{senh} t, & 0 \le t < 3 \\ \operatorname{senh} t + 5\operatorname{senh}(t-3) + 2\cosh(t-3) - 2, & t \ge 3 \end{cases}. \tag{4.20}$$

Portanto, as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ *são verificadas pela solução obtida, tendo-se ainda* $v(3) = v'(3) = 0$, *pelo que*

$$\lim_{t \to 3^-} y(t) = y(3) = \cosh 3 - 1,$$

$$\lim_{t \to 3^-} y'(t) = y'(3) = \operatorname{senh} 3,$$

confirmando a continuidade da solução e da respetiva derivada (ver gráfico seguinte).



Representação gráfica da função (4.19), solução do PVI (4.14), bem como da sua primeira derivada (4.20) (representada pela mais linha fina)

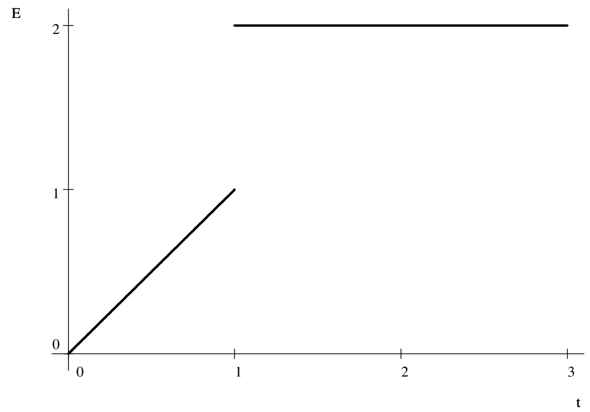
Exemplo 4.48 *Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série (circuito RLC) . Como vimos em exemplos anteriores, nestas condições a carga no condensador em cada instante de tempo $q(t)$ é tal que*

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E, \tag{4.21}$$

sendo a intensidade de corrente dada por $i(t) = q'(t)$. Determinar $q(t)$ e $i(t)$ quando $q(0) = i(0) = 0$, $L = 1/2$, $R = 1$, $C = 1$ e

$$E(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & t \geq 1 \end{cases},$$

nas unidades habituais.



Representação gráfica da função $E(t)$

Solução. *Comecemos por determinar $\mathcal{L}\{E(t)\}$. Tem-se,*

$$E(t) = t + (2 - t)\ H(t - 1).$$

Atendendo a que

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

e, por outro lado, que

$$\mathcal{L}\{(2-t)\ H(t-1)\} = \mathcal{L}\{f(t-a)\,H(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

com $a = 1$ *e* $f(t-1) = 2-t$*, conduz a*

$$f(t) = 1-t \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2},$$

tem-se

$$\mathcal{L}\{E(t)\} = \frac{1}{s^2} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right) e^{-s}.$$

Consideramos agora a EDO (4.21)

$$\frac{1}{2}q'' + q' + q = E.$$

Por aplicação da transformada de Laplace, resulta

$$\frac{1}{2}s^2Q(s) + sQ(s) + Q(s) = \frac{1}{s^2} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right) e^{-s},$$

isto é

$$Q(s) = \frac{2}{s^2\left((s+1)^2+1\right)}\left(1-e^{-s}\right) + \frac{2}{s\left((s+1)^2+1\right)}e^{-s}.$$

Seja

$$R(s) = \frac{2}{s^2\left((s+1)^2+1\right)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$P(s) = \frac{2}{s\left((s+1)^2+1\right)} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+1}$$

então

$$Q(s) = R(s) + (P(s) - R(s))\,e^{-s} \quad \Rightarrow \quad q(t) = r(t) + (p(t-1) - r(t-1))\,H(t-1),$$

com

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{R(s)\} = t - 1 + e^{-t}\cos t$$

$$p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)\} = 1 - (\cos t + \operatorname{sen} t)\,e^{-t}$$

e consequentemente

$$q(t) = t - 1 + e^{-t}\cos t + \underbrace{\left(3 - t - e^{1-t}\left(\operatorname{sen}(t-1) + 2\cos(t-1)\right)\right)}_{w(t)}H(t-1),$$

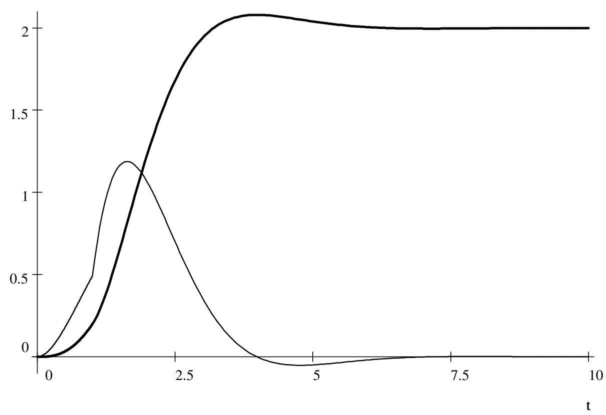
ou,

$$q(t) = \begin{cases} t - 1 + e^{-t}\cos t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - e^{1-t}\left(\operatorname{sen}(t-1) + 2\cos(t-1)\right) + e^{-t}\cos t, & t \geq 1 \end{cases},$$

implicando

$$i(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}\left(\cos t + \operatorname{sen} t\right), & 0 \leq t < 1 \\ e^{1-t}\left(\cos(1-t) - 3\operatorname{sen}(1-t)\right) - \left(\operatorname{sen} t + \cos t\right)e^{-t}, & t \geq 1 \end{cases}.$$

Tem-se $q(0) = 0$ *e* $i(0) = 0$, *conforme requerido. Além disso,* $w(1) = w'(1) = 0$, *pelo que* $q(t)$ *e* $i(t) = q'(t)$ *são funções contínuas.*



Representação gráfica da solução do PVI (4.21) $q(t)$ *- a cheio - e de* $i(t)$

Conforme já tínhamos perspetivado anteriormente, a transformada de Laplace também pode ser usada para resolver problemas de valores iniciais envolvendo equações integro-diferenciais, conforme se exemplifica de seguida.

Exemplo 4.49 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$\frac{du}{dt} + \int_0^t u\,dt = \frac{t^2}{2}; \quad x > 0, \quad u(0) = 0. \tag{4.22}$$

Solução. *Aplicando a transformada de Laplace obtém-se*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt} + \int_0^t u\,dt\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t u\,dt\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\},$$

$$s\mathcal{L}(u) - u(0) + \mathcal{L}\left\{\int_0^t u\,dt\right\} = \frac{1}{s^3}. \tag{4.23}$$

A propriedade enunciada no Teorema 4.8 (ver página 181) conduz a

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u\,dt\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}(u),$$

pelo que de (4.23) vem

$$s\mathcal{L}(u) - u(0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}(u) = \frac{1}{s^3},$$

ou seja, definindo $U(s) = \mathcal{L}(u)$ *e atendendo a que* $u(0) = 0$*,*

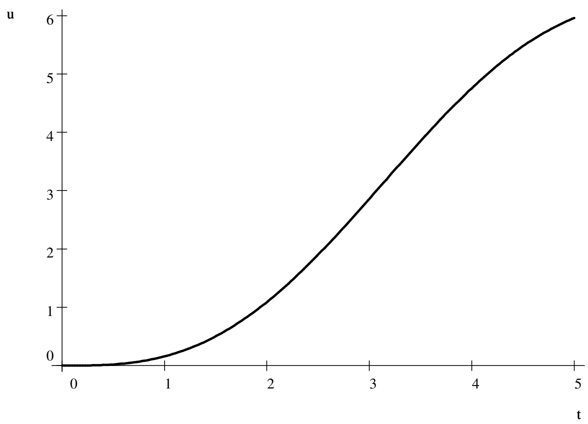
$$\left(s + s^{-1}\right) U(s) = \frac{1}{s^3}.$$

Assim,

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + s^4} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1},$$

resultando

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) = t - \operatorname{sen} t.$$



Representação gráfica da função $u(t) = t - \operatorname{sen} t$*, solução do PVI (4.14)*

4.3.2 Solução de problemas de valores iniciais envolvendo sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Aplicaremos a transformada de Laplace para determinar a solução de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem do tipo

$$\begin{cases} a_1\dfrac{dx}{dt} + a_2\dfrac{dy}{dt} + a_3x + a_4y = \beta_1(t) \\ b_1\dfrac{dx}{dt} + b_2\dfrac{dy}{dt} + b_3x + b_4y = \beta_2(t) \end{cases},$$

onde a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3 e b_4 são constantes e β_1 e β_2 são funções conhecidas, satisfazendo as condições iniciais

$$x(0) = c_1, \quad y(0) = c_2.$$

O método é análogo ao usado para determinar a solução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, sendo facilmente aplicável a equações diferenciais de ordem mais elevada e com mais funções incógnita. Vejamos alguns exemplos que ilustram o método.

Exemplo 4.50 *Determinar a solução do sistema de equações diferenciais*

$$\frac{dx}{dt} - 6x + 3y = 8e^t, \quad \frac{dy}{dt} - y - 2x = 4e^t,$$

satisfazendo as condições iniciais $x(0) = -1, \ y(0) = 0.$

Solução. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt} - 6x + 3y\right\} = \mathcal{L}\left\{8e^t\right\}, \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt} - y - 2x\right\} = \mathcal{L}\left\{4e^t\right\},$$

resultando da aplicação da propriedade da linearidade

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} - 6\mathcal{L}\left\{x\right\} + 3\mathcal{L}\left\{y\right\} = \mathcal{L}\left\{8e^t\right\}, \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - \mathcal{L}\left\{y\right\} - 2\mathcal{L}\left\{x\right\} = \mathcal{L}\left\{4e^t\right\}.$$

Usando a notação $X(s) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$ *e* $Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}$, *vem*

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) - 6X(s) + 3Y(s) = \dfrac{8}{s-1} \\ sY(s) - y(0) - Y(s) - 2X(s) = \dfrac{4}{s-1} \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} (s-6)\,X(s) + 3Y(s) = -\dfrac{s-9}{s-1} \\ -2X(s) + (s-1)\,Y(s) = \dfrac{4}{s-1} \end{cases}.$$

Resta resolver o sistema precedente em ordem a $X(s)$ *e* $Y(s)$. *Tem-se então,*

$$\begin{cases} 2\,(s-6)\,X(s) + 6Y(s) = -2\dfrac{s-9}{s-1} \\ -2\,(s-6)\,X(s) + (s-1)\,(s-6)\,Y(s) = 4\dfrac{s-6}{s-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(s^2 - 7s + 12\right)Y(s) = \dfrac{2s-6}{s-1} \\ -2X(s) + (s-1)\,Y(s) = \dfrac{4}{s-1} \end{cases},$$

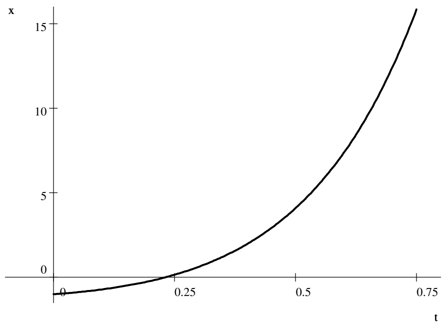
resultando

$$\begin{cases} (s-3)\,(s-4)\,Y(s) = \dfrac{2\,(s-3)}{s-1} \\ X(s) = \dfrac{1}{2}\,(s-1)\,Y(s) - \dfrac{2}{s-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y(s) = -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s-4} \\ X(s) = \dfrac{1}{s-4} - \dfrac{2}{s-1} \end{cases}.$$

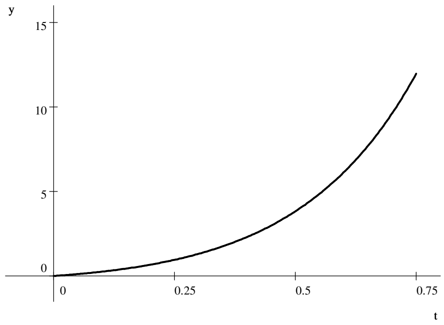
Dado que $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}$ *e* $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$, *obtém-se*

$$x(t) = e^{4t} - 2e^t, \quad y(t) = \frac{2}{3}e^{4t} - \frac{2}{3}e^t.$$

Note-se que se tem $y(0) = 0$ e $x(0) = -1$, tal como requerido.



Representação gráfica da função $x(t)$



Representação gráfica da função $y(t)$

Exemplo 4.51 *Determinar a solução do PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2y - x = -2e^t \operatorname{sen} t \\ \dfrac{dy}{dt} + x = e^t \left(2\cos t + 1\right) \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1 \end{cases}.$$

Solução. *Aplicando a transformada de Laplace tem-se*

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2y - x\right\} = \mathcal{L}\left\{-2e^t \operatorname{sen} t\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\dfrac{dy}{dt} + x\right\} = \mathcal{L}\left\{e^t \left(2\cos t + 1\right)\right\} \end{cases},$$

vindo

$$\begin{cases} sX(s) - 1 + sY(s) - 1 - 2Y(s) - X(s) = \dfrac{-2}{(s-1)^2 + 1} \\ sY(s) - 1 + X(s) = 2\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} + \dfrac{1}{s-1} \end{cases},$$

ou

$$\begin{cases} (s-1)X(s) + (s-2)Y(s) = \dfrac{-2}{(s-1)^2 + 1} + 2 \\ X(s) + sY(s) = 2\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} + \dfrac{1}{s-1} + 1 \end{cases},$$

resultando

$$\begin{cases} (s-1)X(s) + (s-2)Y(s) = \dfrac{-2}{(s-1)^2 + 1} + 2 \\ Y(s) = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} + \dfrac{1}{(s-1)^2+1} \end{cases}.$$

Concluímos que

$$y(t) = e^t(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Para determinar $x(t)$, podemos resolver o sistema de equações precedente em ordem a $X(s)$ e determinar a respetiva transformada inversa de Laplace,

$$X(s) = \frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^t,$$

ou, alternativamente, usar a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + x = e^t\,(2\cos t + 1) \quad \Leftrightarrow \quad x = e^t\,(2\cos t + 1) - \frac{dy}{dt}$$

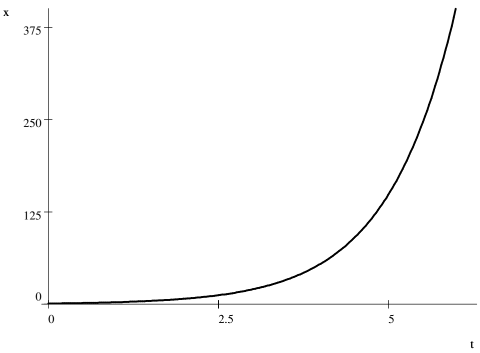
e a expressão já obtida para $y(t)$, vindo

$$x(t) = e^t\,(2\cos t + 1) - \frac{d}{dt}\left[e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)\right] = e^t.$$

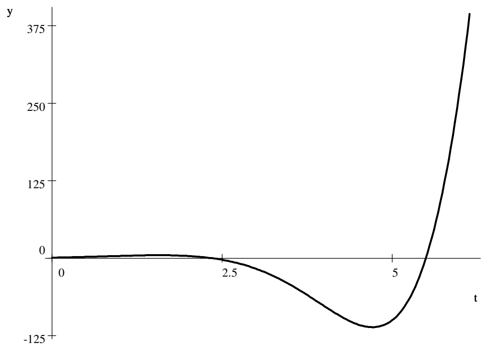
Desta forma, a solução do PVI proposto é

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = e^t(\cos t + \operatorname{sen} t),$$

verificando-se as condições iniciais impostas.



Representação gráfica da função $x(t)$



Representação gráfica da função $y(t)$

Problema Determinar a solução do PVI

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y - 2x = -4e^t \\ \dfrac{dy}{dt} - 2x = 2e^t\,(2t+1) \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \end{cases}.$$

Resp.: $x(t) = \cos\left(\sqrt{2}t\right) - 2te^t - e^t$, $y(t) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}t\right)$.

Exemplo 4.52 *Determinar a solução do PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dw}{dt} + 4x + 2w = e^{-2t}\,(1+4t) \\ \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dw}{dt} - 2x + 3w = e^{-2t}(1-t^2) - 8 \\ x(0) = 1, \quad w(0) = -2 \end{cases}.$$

Solução. *Aplicando a transformada de Laplace tem-se*

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dw}{dt}+4x+2w\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{-2t}+4te^{-2t}\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\dfrac{dx}{dt}+2\dfrac{dw}{dt}-2x+3w\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{-2t}-t^2e^{-2t}-8\right\} \end{cases},$$

ou seja

$$\begin{cases} sX(s)-1+sW(s)+2+4X(s)+2W(s)=\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{4}{(s+2)^2} \\ sX(s)-1+2sW(s)+4-2X(s)+3W(s)=\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{2}{(s+2)^3}-\dfrac{8}{s} \end{cases},$$

resultando

$$\begin{cases} (s+4)\,X(s)+(s+2)\,W(s)=\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{4}{(s+2)^2}-1 \\ (s-2)\,X(s)+(2s+3)\,W(s)=\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{2}{(s+2)^3}-\dfrac{8}{s}-3 \end{cases},$$

isto é,

$$\begin{cases} (s+4)\,X(s)+(s+2)\,W(s)=-\dfrac{s^2+3s-2}{(s+2)^2} \\ (s-2)\,X(s)+(2s+3)\,W(s)=-\dfrac{3s^4+25s^3+80s^2+118s+64}{s\,(s+2)^3} \end{cases}.$$

Tem-se, aplicando o método de eliminação de Gauss,

$$\begin{cases} -(2s+3)\,(s+4)\,X(s)-(s+2)\,(2s+3)\,W(s)=\dfrac{2s^3+9s^2+5s-6}{(s+2)^2} \\ (s+2)\,(s-2)\,X(s)+(s+2)\,(2s+3)\,W(s)=-\dfrac{3s^4+25s^3+80s^2+118s+64}{s\,(s+2)^2} \end{cases},$$

vindo

$$X(s)=\frac{s^4+16s^3+75s^2+124s+64}{s\,(s+2)^2\,(s^2+11s+16)}.$$

Ora, nem 0 *nem* -2 *são raízes comuns ao numerador e ao denominador do segundo membro da equação precendente, mas as raízes de* $s^2+11s+16$*,*

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{57}-11\right),\quad -\frac{1}{2}\left(\sqrt{57}+\frac{11}{2}\right),$$

também anulam o numerador. Então, aplicando a "regra de Ruffini", obtém-se,

$$s^4+16s^3+75s^2+124s+64=\left(s^2+11s+16\right)\left(s^2+5s+4\right),$$

pelo que

$$X(s)=\frac{s^2+5s+4}{s\,(s+2)^2}=\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+2)^2}.$$

Portanto,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{(s+2)^2}\right\} = 1 + te^{-2t}.$$

Para determinar $w(t)$ podemos optar por calcular $W(s)$ e de seguida $w(t)$, ou então substituir a expressão obtida para $x(t)$ no PVI inicial, vindo

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} + 2w = e^{-2t}(1+4t) - \dfrac{dx}{dt} - 4x \\ 2\dfrac{dw}{dt} + 3w = e^{-2t}(1-t^2) - 8 - \dfrac{dx}{dt} + 2x \\ w(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dw}{dt} + 2w = 2te^{-2t} - 4 \\ 2\dfrac{dw}{dt} + 3w = 4te^{-2t} - t^2e^{-2t} - 6 \\ w(0) = -2 \end{cases}.$$

Nesta fase podemos optar por resolver qualquer um dos dois PVIs, por exemplo

$$\frac{dw}{dt} + 2w = 2te^{-2t} - 4, \quad w(0) = -2,$$

para obter $w(t)$ ou, em alternativa, trabalhar o sistema anterior de forma a não ter de resolver qualquer equação diferencial. De facto, multiplicando ambos os membros da primeira equação diferencial por -2, tem-se (método de eliminação de Gauss)

$$\begin{cases} -2\dfrac{dw}{dt} - 4w = -4te^{-2t} + 8 \\ 2\dfrac{dw}{dt} + 3w = 4te^{-2t} - t^2e^{-2t} - 6 \end{cases} \Rightarrow \quad w(t) = t^2e^{-2t} - 2.$$

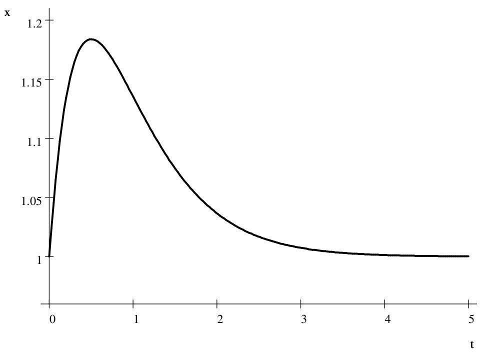
Assim, a solução do PVI proposto é

$$x(t) = 1 + te^{-2t}, \quad w(t) = t^2e^{-2t} - 2.$$

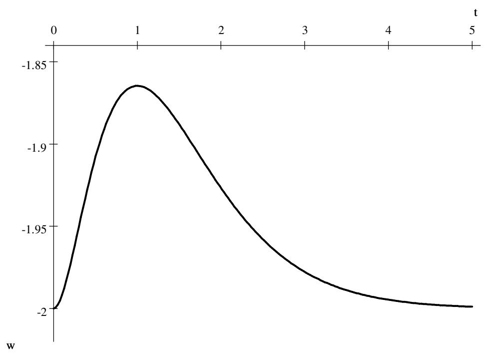
Consequentemente, tem-se

$$x(0) = 1, \quad w(0) = -2,$$

conforme requerido. Mostra-se facilmente que a substituição das expressões de $x(t)$ e $w(t)$ nas duas equações diferenciais presentes no PVI, conduzem a duas identidades.



Representação gráfica da função $x(t)$



Representação gráfica da função $w(t)$

Exercícios sobre aplicações da transformada de Laplace

Exercício 4.10 *Usar a transformada de Laplace para determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(a) $\dfrac{dy}{dt} - y = 2e^{3t}, \quad y(0) = 2;$

(b) $\dfrac{dy}{dt} + y = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = -1;$

(c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 2;$

(d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = h(t), \quad y(0) = 0, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 0, \quad h(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 4 \\ 0, & t \ge 4 \end{cases};$

(e) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = 4te^t, \quad y(1) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(1) = 0.$

Exercício 4.11 *Usar a transformada de Laplace para determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = 6e^t \\ \dfrac{dy}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 0 \end{cases};$ (b) $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt} - y + x = 9e^t \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y + 2x = 3e^t \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}.$

Exercício 4.12 *Usar a transformada de Laplace para determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(a) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2y = -\cos t - 2t \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + x - 3y = \cos t - 3t \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases};$ (b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt} = 4e^{-t} \\ \dfrac{dx}{dt} + 2y = 4e^t \\ \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dz}{dt} = 0 \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0 \end{cases}.$

4.4 Exercícios de revisão do Capítulo 4

Exercício 4.13 *Determinar a transformada inversa de Laplace das seguintes funções através de dois métodos distintos.*

(a) $F(s) = \dfrac{2}{(s^2+1)^2};$

(b) $G(s) = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2};$

(c) $H(s) = \dfrac{5}{(s^2+1)(s-2)}.$

Exercício 4.14 *Usar a transformada de Laplace para determinar a solução dos seguintes PVIs.*

(*a*) $y'' + 2y' + y = te^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

(*b*) $y'' + y = g(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3; \quad g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \pi \\ \pi, & t \ge \pi \end{cases};$

(*c*) $y' + y = h(x), \quad y(-1) = 0; \quad h(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 0, & x \ge 2 \end{cases};$

(*d*) $\begin{cases} y'' - 4z = 0 \\ z' - 2y = 0 \\ y(0) = 6, \quad y'(0) = 6, \quad z(0) = 0 \end{cases};$ (*e*) $\begin{cases} y' + z + x = 2\cosh t + 1 \\ z' + x' - y = -2\,\mathrm{senh}\, t \\ y' - x' = e^t \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1 \end{cases}.$

Exercício 4.15 *Considere-se um circuito elétrico constituido por uma força eletromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série. Nestas condições a carga instantânea no condensador q é tal que*

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E, \tag{4.24}$$

sendo a intensidade de corrente i em cada instante de tempo t dada por

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{4.25}$$

Nestas condições (4.25) permite escrever

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i\, du. \tag{4.26}$$

Combinado (4.24) - (4.26) resulta

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\left(q(0) + \int_0^t i\, du\right) = E. \tag{4.27}$$

Considere-se um circuito do tipo descrito (RLC) em que $E = 100\cos 60t$ (Volts), $R = 4$ (Ohms), $L = 0.1$ (Henries) e $C = 1/40$ (Farads). Sabe-se que no instante inicial a intensidade de corrente e a carga do condensador eram ambas nulas.

(*a*) *Determinar a intensidade de corrente em cada instante recorrendo à equação (4.27);*

(*b*) *Usar a equação (4.26) para determinar a carga do condensador em cada instante;*

Sugestão: Comparar os resultados agora obtidos com os obtidos no Exercício 3.32 (ver página 164).

4.5 Soluções dos exercícios do Capítulo 4

4.1. (a) $2s^{-3}$, $s>0$; (b) $\left(s^2-1\right)^{-1}$, $s>1$; (c) $4s^{-1}-2s^{-1}e^{-3s}$, $s>0$;
(d) $\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)\left(2s^{-1}+s^{-2}\right)$, $s>0$.

4.2. $4\left[s\left(s^2+8\right)\right]^{-1}$.

4.3. $\left(1-s\mathcal{L}\left\{\cos^3 3t\right\}\right)/9$.

4.4. $\mathcal{L}\left\{t^4\right\}=\mathcal{L}\left\{t\times t^3\right\}=\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\}=24s^{-5}$, $s>0$.

4.5. $2\left(s+3\right)^{-3}$, $s>-3$.

4.6. $120s\left(s^2-25\right)\left(s^2+25\right)^{-4}$, $s>0$.

4.7. (a) $5e^{-6s}/s$, $s>0$; (b) $2\left(e^{-5s}-e^{-7s}\right)/s$, $s>0$; (c) $3e^{-4s}\left(s^{-2}+4s^{-1}\right)$, $s>0$;
(d) $2s^{-2}\left(1-e^{-5s}\right)$, $s>0$; (e) $(s+1)^{-1}e^{-2(s+1)}$, $s>-1$; (f) $-e^{-\pi s}s/\left(s^2+1\right)$, $s>0$.

4.8. (a) $2\operatorname{sen}3t$; (b) $5t^3e^{2t}$; (c) $3\cosh 2t$; (d) $(5-10t)\,e^{-2t}$; (e) $\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t-\cos\sqrt{2}t+1$;
(f) $7\cos 3t+4\operatorname{sen}3t$; (g) $18e^{2t}+17e^{-5t}$; (h) $-\left(5\cos 3t+2\operatorname{sen}3t\right)u_\pi(t)$;
(i) $e^{-2t+6}u_3(t)(6\cos 3\,(t-3)+5\operatorname{sen}3\,(t-3))$; (j) $3\,(t-4)\,u_4(t)+3\,(7-t)\,u_7(t)$;
(k) $(1+u_\pi(t))\operatorname{sen}2t$; (l) $\cos 2t-1+(1-\cos(2t-4))\,u_2(t)$.

4.9. (a) $e^{-2t}-e^{-3t}$; (b) $e^{8t}-e^{-2t}$; (c) $\operatorname{sen}^2(3t/2)$; (d) $3t-1+e^{-3t}$.

4.10. (a) $y=e^{3t}+e^t$; (b) $y=-\cos t+\operatorname{sen}t$; (c) $y=e^{2t}$;
(d) $y=1+e^{2t}-2e^t-u_4(t)(1-2e^{t-4}+e^{2t-8})$; (e) $y=e^t\,(2t-3)+1+e^{2-t}$.

4.11. (a) $x=-2e^t+4e^{2t}$, $y=2e^t-2e^{2t}$; (b) $x=e^t-3te^t$, $y=3te^t$.

4.12. (a) $x=\cos t$, $y=t$; (b) $x=4e^t\,(t-1)+6-2e^{-t}$, $y=2e^t\,(1-t)-e^{-t}$, $z=2e^t\,(1-t)-1-e^{-t}$.

4.13. (a) $f(t)=\operatorname{sen}t-t\cos t$; (b) $g(t)=t\operatorname{sen}t$; (c) $h(t)=e^{2t}-\cos t-2\operatorname{sen}t$.

4.14. (a) $y=(t+2)\,e^{-2t}+e^{-t}\,(2t-1)$; (b) $y=2\cos t+2\operatorname{sen}t+t-(t-\pi+\operatorname{sen}t)\,u_\pi(t)$;
(c) $y=u_1(x)\left(1-e^{1-x}\right)-u_2(x)\left(1-e^{-x+2}\right)$;
(d) $z=3e^{2x}+\sqrt{3}e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x-3e^{-x}\cos\sqrt{3}x$; $y=3e^{2x}+\sqrt{3}e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)+3e^{-x}\cos(\sqrt{3}x)$;
(e) $x=1-e^{-t}+\cos t-\operatorname{sen}t$, $y=e^t-e^{-t}+\cos t-\operatorname{sen}t$, $z=e^{-t}+2\operatorname{sen}t$.

4.15. (a) $i=(-9+100t)e^{-20t}+9\cos 60t+12\operatorname{sen}60t$;
(b) $q=(\frac{1}{5}-5t)e^{-20t}-\frac{1}{5}\cos 60t+\frac{3}{20}\operatorname{sen}60t$.

Parte II

Equações Diferenciais Parciais

Capítulo 5

Introdução às equações diferenciais parciais

5.1 Problemas com condições de fronteira: valores próprios e funções próprias

Nas aplicações que iremos estudar neste capítulo seremos confrontados com o seguinte problema: para que valores do parâmetro real λ podemos determinar soluções não triviais $y(x)$ que satisfaçam

$$y'' + \lambda y = 0, \quad a\,y(0) + b\,y'(0) = 0, \quad c\,y(l) + d\,y'(l) = 0, \tag{5.1}$$

onde a, b, c, d e l são constantes (reais) dadas. O conjunto de equações (5.1) designa-se um problema de valores de fronteira (PVF), dado que são impostas condições envolvendo a solução da equação diferencial $y(x)$ e a respetiva derivada $y'(x)$ para dois valores distintos da variável independente, $x = 0$ e $x = l$ (cf. Secção 1.3).

A intuição diz-nos que este PVF tem solução não trivial $y(x)$ apenas para alguns valores de λ. Vejamos, a este propósito, um exemplo simples mas extremamente importante no âmbito da resolução da equação de calor, conforme veremos adiante.

Exemplo 5.1 *Para que valores da constante real λ é que o PVF*

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \tag{5.2}$$

tem solução não trivial?

Solução. *Atendendo a que se trata de uma equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes, podemos usar a equação caraterística que lhe está associada,*

$$m^2 + \lambda = 0,$$

para determinar a respetiva solução geral. As duas raízes desta equação são

$$m_1 = \sqrt{-\lambda}, \quad m_2 = -\sqrt{-\lambda}.$$

Conforme já vimos, a forma da solução geral depende da natureza destas duas raízes, sendo que apenas podemos ter três dos quatro casos que abordámos anteriormente (porquê?): duas raízes reais *distintas, duas raízes reais repetidas, duas raízes complexas conjugadas distintas. Como o valor de* λ *está em aberto, é impossível escrever a solução geral da equação diferencial sem considerar três cenários distintos, os quais correspondem precisamente aos três casos acima mencionados. Assim, como as raízes da equação caraterística são iguais quando* $\lambda = 0$*, vamos considerar três cenários, a saber,*

1. $\lambda = 0 \to m_1 = m_2 = 0$ *(raízes reais iguais);*
2. $\lambda < 0 \to m_1 = \sqrt{-\lambda}$, $m_2 = -\sqrt{-\lambda}$ *(raízes reais distintas - simétricas neste caso);*
3. $\lambda > 0 \to m_1 = i\sqrt{\lambda}$, $m_2 = -i\sqrt{\lambda}$ *(raízes complexas conjugadas distintas; note-se a alteração no argumento da raiz quadrada dado que* $-\lambda < 0$*).*

Vejamos então o que acontece para cada uma destas três possibilidades:

(i) $\lambda = 0$*: A solução do PVF (5.2) escreve-se (porquê?)*

$$y(x) = c_1 + c_2 x,$$

escolhendo adequadamente o valor das constantes c_1 *e* c_2*. A condição* $y(0) = 0$ *implica que* $c_1 = 0$*, enquanto que a condição* $y(l) = 0$ *conduz a* $c_2 = 0$*. Portanto,* $y(x) = 0$ *é a única solução do PVF quando* $\lambda = 0$*.*

(ii) $\lambda < 0$*: Neste caso, a solução do PVF escreve-se (porquê?)*

$$y(x) = c_1\, e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \tag{5.3}$$

escolhendo adequadamente o valor das constantes c_1 *e* c_2*. Assim sendo, as condições de fronteira* $y(0) = y(l) = 0$ *implicam que*

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1\, e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \tag{5.4}$$

Portanto, $c_2 = -c_1$*, e por isso a solução é do tipo*

$$y(x) = k\left(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right) = \widetilde{k}\,\operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}x,$$

para algum valor de $\widetilde{k}$*, onde*

$$\operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}x = \frac{e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}}{2}.$$

O sistema de equações (5.4) tem sempre solução trivial $c_1 = c_2 = 0$ *(porquê?), pelo que a questão reside em saber se existem também outras soluções não triviais. Ora, tal acontece se e só se o sistema em causa não tiver solução única, ou seja, se existirem valores de* λ *tais que o determinante do sistema seja nulo, isto é,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}l} - e^{\sqrt{-\lambda}l} = 0.$$

Tal implica que $e^{-\sqrt{-\lambda}l} = e^{\sqrt{-\lambda}l}$*, ou equivalentemente* $e^{2\sqrt{-\lambda}l} = 1$*. No entanto, esta condição é impossível dado que* $e^z > 1$ *se* $z > 0$*. Assim sendo, tem-se* $c_1 = c_2 = \widetilde{k} = 0$*, pelo que o PVF (5.2) não tem solução não trivial quando* $\lambda < 0$*.*

(iii) $\lambda > 0$*: Neste caso, a solução do PVF escreve-se (porquê?)*

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x,$$

escolhendo adequadamente o valor das constantes c_1 *e* c_2*. A condição* $y(0) = 0$ *implica que* $c_1 = 0$ *e a condição* $y(l) = 0$ *implica que* $c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l = 0$*. Esta condição é verificada para todo o valor de* c_2 *se* $\sqrt{\lambda} l = n\pi$*, ou seja, se* $\lambda = n^2\pi^2/l^2$ *para algum inteiro positivo* n *(porquê?).*

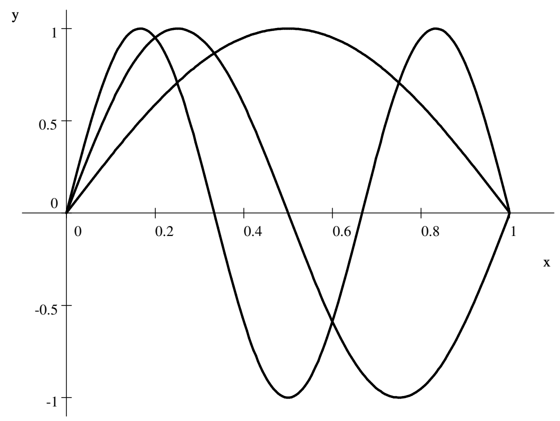
Concluímos que o PVF (5.2) admite soluções não triviais da forma

$$y(x) = k \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

para $\lambda = n^2\pi^2/l^2$*, onde* k *é uma constante arbitrária. Ou seja, na realidade obtivemos uma infinidade de pares* $(\lambda_n, y_n(x))$*, onde* $n \in N$*, com*

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad y_n(x) = k_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

os quais "satisfazem" o PVF (5.2). De facto, é fácil verificar que para cada valor próprio λ_n*, a função própria* $y_n(x)$ *é uma solução do referido PVF.*



Representação gráfica das funções próprias $y_1(x)$, $y_2(x)$ *e* $y_3(x)$ *do PVF (5.2) para* $l = 1$

Nota A obtenção do resultado para o caso $\lambda < 0$ pode ser simplificada se tivermos em consideração que nessas circunstâncias toda a solução $y(x)$ também pode ser escrita na forma

$$y(x) = k_1 \cosh \sqrt{-\lambda} x + k_2 \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} x,$$

onde

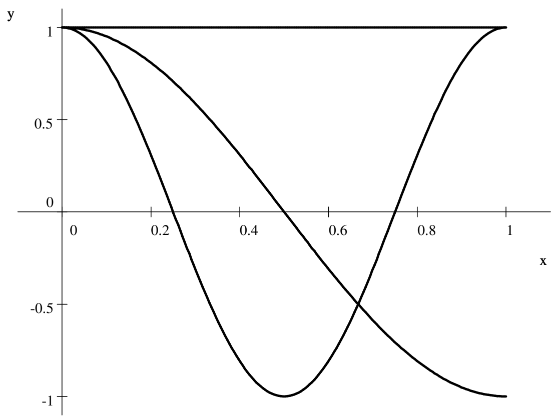
$$\cosh \sqrt{-\lambda} x = \frac{e^{\sqrt{-\lambda} x} + e^{-\sqrt{-\lambda} x}}{2},$$

a qual é equivalente a (5.3) (porquê?). Assim, a condição $y(0) = 0$ implica de imediato que $k_1 = 0$, enquanto que a condição $y(l) = 0$ conduz a $k_2 \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} l = 0$. Mas $\operatorname{senh} z > 0$ se $z > 0$, pelo que $k_2 = 0$ e então $y(x) = 0$.

Problema Determinar para que valores da constante real λ é que o PVF

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0, \tag{5.5}$$

tem solução não trivial e indicar as respetivas soluções.
Resp.: $\lambda_n = (n-1)^2\pi^2/l^2$, $y_n(x) = c_n \cos(n-1)\pi x/l$, $n \in \mathbb{N}$.



Representação gráfica das funções próprias $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ do PVF (5.5) para $l = 1$

O Exemplo 5.1 e o Problema 5.1, aos quais voltaremos aquando da abordagem da equação de calor, são indicativos relativamente ao que se passa no PVF geral (5.1). De facto, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 5.1 *O PVF (5.1) tem soluções não triviais $y(x)$ apenas para um conjunto numerável de valores λ_1, λ_2,..., com $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$, onde λ_n tende para infinito quando n tende para infinito. Estes valores especiais de λ designam-se **valores próprios** do PVF (5.1) e as soluções não triviais $y(x)$ são designadas **funções próprias** do PVF.*

Nota O PVF (5.1) é, na realidade, um caso particular do **problema** (ou sistema) **de Sturm-Liouville**, o qual é constituído por:

1. uma equação linear de segunda ordem homogénea da forma

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]\,y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dp(x)}{dx}\frac{dy}{dx} + [q(x) + \lambda r(x)]\,y = 0, \tag{5.6}$$

   onde p, q e r são funções reais tais que p tem derivada contínua, q e r são contínuas, e $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ para todo x no intervalo $a \le x \le b$; e λ é um parâmetro independente de x;

2. duas condições suplementares

$$A_1\,y(a) + A_2\,y'(a) = 0,$$
$$B_1\,y(b) + B_2\,y'(b) = 0,$$

   onde A_1, A_2, B_1 e B_2 são constantes reais tais que A_1 e A_2 não são ambas nulas, o mesmo acontecendo com B_1 e B_2.

Mostra-se que o problema de Sturm-Liouville admite uma infinidade de valores próprios com as propriedades mencionadas no Teorema 5.1 e que a cada valor próprio λ_n ($n \in \mathbb{N}$) está associada uma função própria y_n que depende apenas do parâmetro n. Por outro lado, mostra-se ainda que cada função própria y_n, correspondente ao valor próprio λ_n, tem exatamente $n-1$ zeros no intervalo aberto $a < x < b$.

Usando as designações agora introduzidas, podemos dizer que os valores próprios do PVF (5.2) são π^2/l^2, $4\pi^2/l^2$, $9\pi^2/l^2$,... e as funções próprias são todos os múltiplos constantes das funções $\operatorname{sen} \pi x/l$, $\operatorname{sen} 2\pi x/l$, ..., sendo que a função $y_1(x) = \operatorname{sen} \pi x/l$ não se anula no intervalo aberto $0 < x < l$, a função $y_2(x) = \operatorname{sen} 2\pi x/l$ anula-se uma e uma só vez nesse intervalo (em $x = l/2$), etc (ver gráfico correspondente). No caso do Problema 5.1, os valores próprios são 1, π^2/l^2, $4\pi^2/l^2$, $9\pi^2/l^2$,... e as funções próprias são todos os múltiplos constantes de 1, $\cos \pi x/l$, $\cos 2\pi x/l$, ..., sendo que a função $y_1(x) = 1$ não se anula no intervalo aberto $0 < x < l$, a função $y_2(x) = \cos \pi x/l$ anula-se uma vez e uma só vez no mesmo intervalo (em $x = l/2$), etc (ver gráfico correspondente).

A razão pela qual se utilizam neste contexto as designações "valores próprios" e "funções próprias" pode ser explicada de forma simples. Seja V o conjunto de todas as funções $y(x)$ que são de classe $\mathcal{C}^2$ e que satisfazem as condições $a\,y(0) + b\,y'(0) = 0$, $c\,y(l) + d\,y'(l) = 0$. Assim sendo, V é um espaço vetorial (ou espaço linear) de dimensão infinita (porquê?). Considere-se agora o operador (linear) $\mathcal{L}$ definido por

$$[\mathcal{L}y](x) = -\frac{d^2y}{dx^2}(x).$$

As soluções $y(x)$ de (5.1) são aquelas funções y que pertencem a V e para as quais

$$\mathcal{L}y = \lambda y.$$

Ou seja, as soluções $y(x)$ de (5.1) são precisamente as funções de V que são transformadas por $\mathcal{L}$ em λ vezes elas próprias. No caso do exemplo precedente tem-se

$$y_n(x) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

pelo que

$$-\frac{d^2 y_n(x)}{dx^2} = -\frac{d^2}{dx^2}\left(c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\, c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\, y_n(x).$$

Portanto, para o operador diferencial $-d^2/dx^2$, o valor próprio $\lambda_n = n^2\pi^2/l^2$ está associado à função própria $y_n = c_n \operatorname{sen} n\pi x/l$. De notar ainda que $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sucessão cujo termo geral é crescente e tende para infinito quando n tende para infinito. A situação para o Problema 5.1 é inteiramente análoga. Pode-se notar ainda o paralelismo que existe entre a definição de "valores próprios" e "funções próprias" no contexto do PVF (5.1) e as noções de "valores próprios" e "vetores próprios" de uma matrix quadrada.

Em geral, as funções próprias são consideradas a menos de um fator multiplicativo uma vez que se $f(x)$ é uma função própria de determinado operador linear (definido num espaço vetorial), então $cf(x)$ também é uma função própria desse mesmo operador. Assim, é habitual associar apenas uma função própria a cada valor próprio. Desta forma, no exemplo precedente, ao valor próprio $n^2\pi^2/l^2$ corresponde a função própria $\operatorname{sen} n\pi x/l$.

Consideremos ainda o seguinte exemplo.

Exemplo 5.2 *Determinar os valores próprios e as funções próprias do PVF*

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y'(1) - y(1) = 0. \tag{5.7}$$

Solução. *A equação caraterística a usar é novamente*

$$m^2 + \lambda = 0,$$

pelo que, tal como no Exemplo 5.1 (ver página 229), iremos considerar três casos: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ *e* $\lambda > 0$.

(i) $\lambda = 0$*: Tem-se* $y(x) = c_1 + c_2 x$ *e* $y'(x) = c_2$*. Então,*

$$\begin{cases} y'(0) - y(0) = 0 \\ y'(1) - y(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 - c_1 = 0 \\ c_2 - c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $y(x) = 0$ *e consequentemente* $\lambda = 0$ *não é um valor próprio do PVF (5.7).*

(ii) $\lambda < 0$*: Tem-se*

$$y(x) = c_1 \cosh\sqrt{-\lambda}x + c_2 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}x \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \sqrt{-\lambda}\left(c_1 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}x + c_2 \cosh\sqrt{-\lambda}x\right).$$

Assim, as condições $y'(0) - y(0) = 0$ *e* $y'(1) - y(1) = 0$ *conduzem a*

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}c_2 - c_1 = 0 \\ \sqrt{-\lambda}\left(c_1 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} + c_2 \cosh\sqrt{-\lambda}\right) - c_1 \cosh\sqrt{-\lambda} - c_2 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} = 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{-\lambda}c_2 \\ c_2\,(\lambda + 1)\operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $\lambda_1 = -1$ *é um valor próprio do PVF (5.7), sendo a respetiva função própria (porquê?)*

$$y_1(x) = \cosh x + \operatorname{senh} x = e^x.$$

(iii) $\lambda > 0$*: Tem-se*

$$y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \sqrt{\lambda}\left(-c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x\right),$$

pelo que

$$\begin{cases} y'(0) - y(0) = 0 \\ y'(1) - y(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\lambda}c_2 - c_1 = 0 \\ \sqrt{\lambda}\left(-c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\right) - c_1 \cos\sqrt{\lambda} - c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases},$$

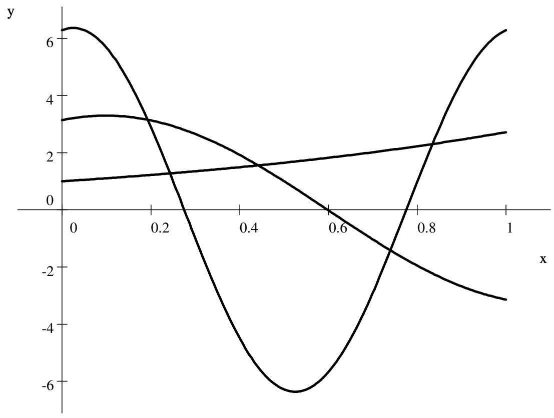
isto é,

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{\lambda}c_2 \\ c_2\,(\lambda + 1)\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}.$$

Assim, o PVF dado também admite os valores próprios $\lambda_n = (n-1)^2\pi^2$, $n = 2, 3, \ldots$, *sendo as correspondentes funções próprias* $y_n(x) = (n-1)\pi \cos(n-1)\pi x + \operatorname{sen}(n-1)\pi x$.

Em conclusão, o PVF (5.7) admite como valores próprios $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_n = (n-1)^2\pi^2$, $n = 2, 3, \ldots$, sendo as respetivas funções próprias $y_1(x) = e^x$ e $y_n(x) = (n-1)\pi\ \cos(n-1)\pi x + \operatorname{sen}(n-1)\pi x$, $n = 2$, $3, \ldots$ Substituindo qualquer dos pares $(\lambda_k, y_k(x))$, $k \in \mathbb{N}$, no PVF (5.7) obtêm-se identidades, quer para a EDO, quer para as condições de fronteira.

Note-se que no intervalo $0 < x < 1$: a função $y_1(x) = e^x$ não se anula, enquanto que a função $y_2(x) = \pi\ \cos\pi x + \operatorname{sen}\pi x$ anula-se somente para $x = 1 - \pi^{-1}\operatorname{arctg}\pi \approxeq 0.6$ (porquê?), etc, conforme se ilustra no gráfico seguinte.

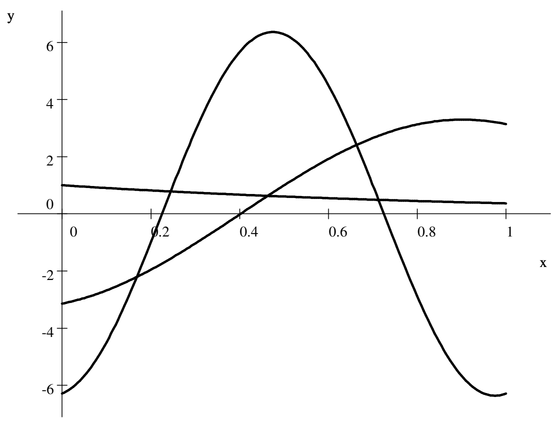


Representação gráfica das funções próprias $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ do PVF (5.7)

Problema Determinar os valores próprios e as funções próprias do PVF

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) + y(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0. \tag{5.8}$$

Resp.: $\lambda_1 = -1$ e $y_1(x) = e^{-x}$; $\lambda_n = (n-1)^2\pi^2$ e $y_n(x) = -(n-1)\pi\cos(n-1)\pi x + \operatorname{sen}(n-1)\pi x$, $n = 2, 3, \ldots$



Representação gráfica das funções próprias $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ do PVF (5.8)

Nos exemplos/problemas precedentes os valores próprios e as correspondentes funções próprias foram determinados de forma analítica. Ora, tal nem sempre é possível. Há casos em que apesar de se saber que existem valores próprios (de acordo com o Teorema 5.1), só é possível determiná-los numericamente conforme se ilustra no exemplo seguinte.

Exemplo 5.3 *Determinar os valores próprios e as funções próprias do PVF*

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{5.9}$$

Solução. *Novamente, consideramos as três situações que vimos anteriormente.*

(i) $\lambda = 0$*: Neste caso a solução geral escreve-se* $y(x) = c_1 x + c_2$*. As condições* $y(0) + y'(0) = 0$ *e* $y(1) = 0$ *implicam ambas que* $c_2 = -c_1$*. Portanto,*

$$y(x) = c(x-1), \quad c \neq 0,$$

é uma solução não trivial de (5.9) quando $\lambda = 0$*. Ou seja,* $y(x) = x - 1$ *é uma função própria de (5.9) com valor próprio associado zero.*

(ii) $\lambda < 0$*: Neste caso tem-se* $y(x) = c_1 \cosh\sqrt{-\lambda}x + c_2 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}x$*. As condições* $y(0) + y'(0) = 0$ *e* $y(1) = 0$ *implicam*

$$c_1 + c_2\sqrt{-\lambda} = 0, \quad c_1 \cosh\sqrt{-\lambda} + c_2 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} = 0. \tag{5.10}$$

Assim, a solução é do tipo

$$y(x) = c\left(-\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}x + \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}x\right),$$

para algum valor de c. O sistema de equações (5.10) tem solução não trivial (c_1, c_2) *se e só se*

$$\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{-\lambda} \\ \cosh\sqrt{-\lambda} & \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} \end{vmatrix} = \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} - \sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda} = 0,$$

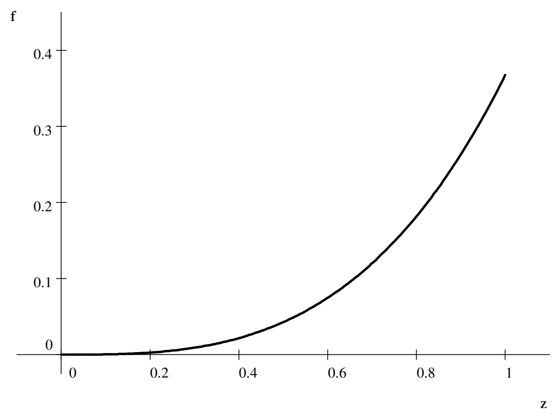
ou seja, se e só se $\operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} = \sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}$*. Mas esta equação não tem solução para* $\lambda < 0$*. De facto, o problema consiste em determinar* $z = \sqrt{-\lambda} > 0$ *tal que*

$$z\cosh z - \operatorname{senh} z = 0, \tag{5.11}$$

Ora, definindo $f(z) = z\cosh z - \operatorname{senh} z$*, tem-se*

$$f(0) = 0, \quad f'(z) = z \operatorname{senh} z,$$

pelo que $f'(z) > 0$ *para todo* $z > 0$*. Assim,* $f(z) > 0$ *para todo* $z > 0$ *(porquê?), pelo que se confirma que a equação (5.11) não tem solução para* $z > 0$ *e consequentemente não há valores próprios negativos.*



Representação gráfica da função $f(z) = z\cosh z - \operatorname{senh} z$ *para* $0 \leq z \leq 1$

(iii) $\lambda > 0$*: Neste caso tem-se* $y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x$*. As condições de fronteira implicam que*

$$c_1 + c_2\sqrt{\lambda} = 0, \quad c_1 \cos\sqrt{\lambda} + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} = 0. \tag{5.12}$$

Neste caso, a solução é da forma

$$y(x) = c\left(-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x\right),$$

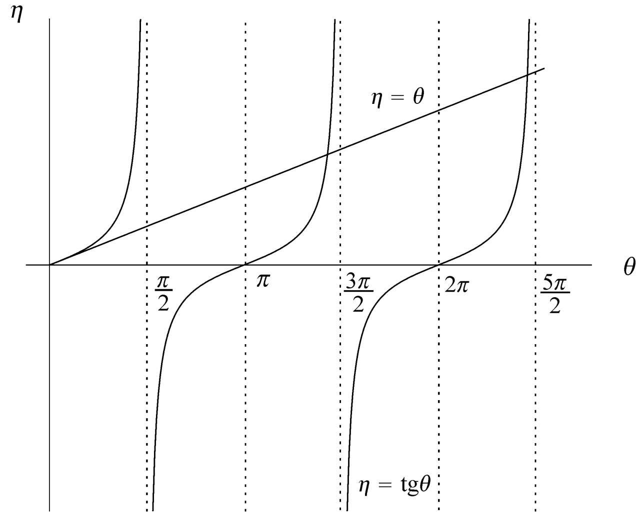
para algum valor de c. O sistema de equações (5.12) tem solução não trivial (c_1, c_2) *se e só se*

$$\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\lambda} \\ \cos\sqrt{\lambda} & \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}. \tag{5.13}$$

Para determinar quais os valores de λ *que satisfazem a equação (5.13), fazemos* $\theta = \sqrt{\lambda}$ *e traçamos o gráfico das funções* $\eta = \theta$ *e* $\eta = \operatorname{tg}\theta$ *no plano* $\theta \times \eta$*:*



A coordenada θ de cada ponto de interseção destas curvas é então uma raiz da equação $\theta = \operatorname{tg}\theta$. É fácil concluir que estas curvas intersetam-se apenas uma vez no intervalo $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, e que tal ocorre num ponto de abcissa $\theta_1 > \pi$. De igual modo, estas curvas intersetam-se apenas uma vez no intervalo $3\pi/2 < \theta < 5\pi/2$, num ponto de abcissa $\theta_2 > 2\pi$. Em geral, as curvas $\eta = \theta$ e $\eta = \operatorname{tg}\theta$ intersetam-se apenas uma vez no intervalo

$$\frac{2n-1}{2}\pi < \theta < \frac{2n+1}{2}\pi$$

e tal ocorre num ponto $\theta_n > n\pi$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, as curvas $\eta = \theta$ e $\eta = \operatorname{tg}\theta$ não se intersetam no intervalo $0 < \theta < \pi/2$. De facto, considerando $h(\theta) = \operatorname{tg}\theta - \theta$, tem-se

$$h(0) = 0, \quad h'(\theta) = \operatorname{tg}^2\theta,$$

pelo que $h'(\theta) > 0$ para todo $0 < \theta < \pi/2$. Assim, $h(\theta) > 0$ para todo $0 < \theta < \pi/2$, pelo que a equação $\operatorname{tg}\theta - \theta = 0$ não tem raízes no intervalo $0 < \theta < \pi/2$.

Conclui-se que os valores próprios do PVF (5.9) são $\lambda_1 = \theta_1^2$, $\lambda_2 = \theta_2^2$, $\ldots$, onde $\operatorname{tg}\theta_n = \theta_n$, e as respetivas funções próprias são

$$-\sqrt{\lambda_1}\cos\sqrt{\lambda_1}x + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_1}x, \quad -\sqrt{\lambda_2}\cos\sqrt{\lambda_2}x + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_2}x, \quad \ldots.$$

Não podemos determinar analiticamente o valor exato de λ_n, mas sabemos que

$$n^2\pi^2 < \lambda_n < (2n+1)^2\pi^2/4, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, é óbvio que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Os valores próprios podem ser determinados de forma aproximada a partir da solução numérica da equação (5.13). Uma vez que existe uma infinidade de soluções, a informação relativa aos intervalos em que se situa cada solução, bem como ao facto da função $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}$ ser crescente em cada um desses intervalos, é essencial para a adopção da metodologia correta para calcular esses valores.

Problema Determinar os valores próprios e as funções próprias do PVF

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) - y(1) = 0.$$

Nota: a função $f(z) = \cosh z - z \operatorname{senh} z$ tem a seguinte propriedade $f(1) > 0$.
Resp.: $(n-1)^2\pi^2 < \lambda_n < (2n-1)^2\pi^2/4$, onde $\operatorname{cotg}\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n}$, $y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x$, $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos agora um exemplo de um PVF em que os casos a considerar para o valor de λ não são aqueles que foram analisados nos exemplos/problemas precedentes, ou seja, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$.

Exemplo 5.4 *Determinar os valores próprios e as funções próprias do PVF*

$$y'' + 4y' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0. \tag{5.14}$$

Solução. *Embora não se trate de um problema de Sturm-Liouville, uma vez que (5.14) não tem a forma (5.6), podemos analisar o PVF de modo semelhante ao que fizemos em casos anteriores. Neste caso, a equação caraterística a considerar é*

$$m^2 + 4m + \lambda = 0,$$

cujas raízes são

$$-2 \pm \sqrt{4-\lambda}.$$

Portanto, as duas raízes da equação caraterística são iguais quando $\lambda = 4$ *(e não quando* $\lambda = 0$*), pelo que teremos de considerar três casos:* $\lambda = 4$, $\lambda < 4$ *e* $\lambda > 4$. *De facto, tem-se:*

1. $\lambda = 4 \to m_1 = m_2 = -2$ *(raízes reais iguais);*
2. $\lambda < 4 \to m_1 = -2 + \sqrt{4-\lambda}$, $m_2 = -2 - \sqrt{4-\lambda}$ *(raízes reais distintas - não simétricas);*
3. $\lambda > 4 \to m_1 = -2 + i\sqrt{\lambda - 4}$, $m_2 = -2 - i\sqrt{\lambda-4}$ *(raízes complexas conjugadas distintas).*

Tal como nos casos precedentes, vejamos o que acontece para cada uma destas três possibilidades:

(i) $\lambda = 4$: *Tem-se,*

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x},$$
$$y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + c_2(1-2x)e^{-2x}.$$

Então,

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2c_1 + c_2 = 0 \\ -2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $y(x) = 0$ *e consequentemente* $\lambda = 4$ *não é um valor próprio do PVF (5.14).*

(ii) $\lambda < 4$: *Definindo, por mera comodidade de escrita,* $\theta \equiv 4 - \lambda > 0$, *tem-se (porquê?)*

$$y(x) = e^{-2x}\left(c_1 \cosh\sqrt{\theta}x + c_2 \operatorname{senh}\sqrt{\theta}x\right),$$
$$y'(x) = e^{-2x}\left(c_1\sqrt{\theta}\operatorname{senh}\sqrt{\theta}x - 2c_1\cosh\sqrt{\theta}x + c_2\sqrt{\theta}\cosh\sqrt{\theta}x - 2c_2\operatorname{senh}\sqrt{\theta}x\right).$$

Assim, as condições $y'(0) = 0$ *e* $y'(1) = 0$ *conduzem a*

$$\begin{cases} -2c_1 + c_2\sqrt{\theta} = 0 \\ -2c_1\cosh\sqrt{\theta} + c_1\sqrt{\theta}\operatorname{senh}\sqrt{\theta} + c_2\sqrt{\theta}\cosh\sqrt{\theta} - 2c_2\operatorname{senh}\sqrt{\theta} = 0 \end{cases},$$

pelo que temos soluções não triviais se e só se (porquê?)

$$\begin{vmatrix} -2 & \sqrt{\theta} \\ \sqrt{\theta}\operatorname{senh}\sqrt{\theta} - 2\cosh\sqrt{\theta} & \sqrt{\theta}\cosh\sqrt{\theta} - 2\operatorname{senh}\sqrt{\theta} \end{vmatrix} = 0$$

para algum valor de $\lambda < 4$ $(\theta > 0)$*, ou seja, se e só se*

$$\lambda \operatorname{senh} \sqrt{4-\lambda} = 0,$$

o que é impossível (porquê?). O PVF (5.14) não admite valores próprios inferiores a 4.

(iii) $\lambda > 4$*: Tem-se, de forma análoga ao caso* $\lambda < 4$ *(observe-se no entanto a alteração no argumento da raiz quadrada e consequentemente que agora* $\theta \equiv \lambda - 4 > 0$*),*

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-2x}\left(c_1 \cos\sqrt{\theta}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\theta}x\right), \\ y'(x) &= e^{-2x}\left(-2c_1\cos\sqrt{\theta}x - c_1\sqrt{\theta}\operatorname{sen}\sqrt{\theta}x + c_2\sqrt{\theta}\cos\sqrt{\theta}x - 2c_2\operatorname{sen}\sqrt{\theta}x\right) \end{aligned}$$

pelo que as condições $y'(0) = 0$ *e* $y'(1) = 0$ *implicam que*

$$\begin{cases} -2c_1 + c_2\sqrt{\theta} = 0 \\ -2c_1\cos\sqrt{\theta} - c_1\sqrt{\theta}\operatorname{sen}\sqrt{\theta} + c_2\sqrt{\theta}\cos\sqrt{\theta} - 2c_2\operatorname{sen}\sqrt{\theta} = 0 \end{cases}.$$

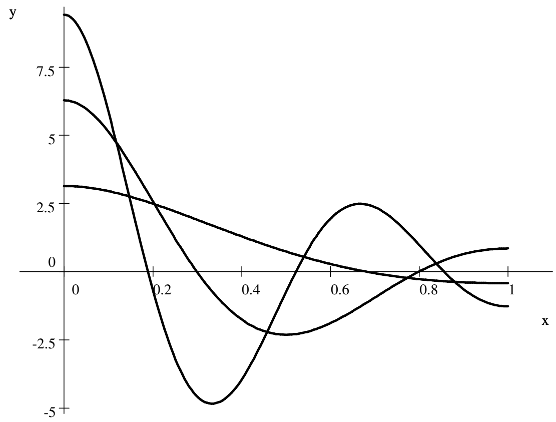
Assim, temos soluções não triviais para o PVF se e só se

$$\begin{vmatrix} -2 & \sqrt{\theta} \\ -2\cos\sqrt{\theta} - \sqrt{\theta}\operatorname{sen}\sqrt{\theta} & \sqrt{\theta}\cos\sqrt{\theta} - 2\operatorname{sen}\sqrt{\theta} \end{vmatrix} = 0$$

para algum valor de $\lambda > 4$ $(\theta > 0)$*, isto é, se e só se*

$$\lambda \operatorname{sen}\sqrt{\lambda - 4} = 0.$$

Portanto, o PVF (5.14) admite os valores próprios $\lambda_n = 4 + n^2\pi^2$*, sendo as correspondentes funções próprias* $y_n(x) = e^{-2x}\left(n\pi \cos n\pi x + 2 \operatorname{sen} n\pi x\right),\ n \in \mathbb{N}$.



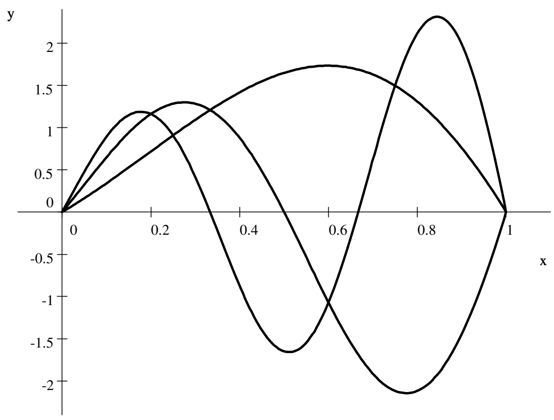
Representação gráfica das funções próprias $y_1(x)$*,* $y_2(x)$ *e* $y_3(x)$ *do PVF (5.14); Note-se que* $y_k(x)$ *tem* k *raízes no intervalo* $0 < x < 1$*, o que reforça o facto de não estarmos na presença de um problema de Sturm-Liouville (porquê?)*

Nota A EDO presente em (5.14) também se pode expressar como $y'' + 4y' + (\widetilde{\lambda} + 4)y = 0$, bastando para o efeito definir $\widetilde{\lambda} \equiv \lambda - 4$. Se o problema for formulado desta forma, então os três casos a considerar para $\widetilde{\lambda}$ são os habituais: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ (porquê?). Os valores próprios passariam a ser $\widetilde{\lambda}_n = n^2\pi^2$, $n \in N$, mantendo-se obviamente as expressões das funções próprias associadas.

Problema Determinar os valores próprios e as funções próprias do PVF

$$y'' - 2y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{5.15}$$

Resp.: $\lambda_n = 1 + n^2\pi^2$ e $y_n(x) = e^x \operatorname{sen} n\pi x$, $n \in N$.



Representação gráfica das funções próprias $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ do PVF (5.15)

Há ainda PVFs que não correspondem exatamente ao problema de Sturm-Liouville (5.6) devido à forma das condições impostas na fronteira, mas que podem ainda assim ser analisados de forma semelhante ao realizado nos exemplos precedentes.

Exemplo 5.5 *Determinar os valores próprios e as funções próprias do PVF*

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y(1) = 0, \quad y'(0) + y'(1) = 0. \tag{5.16}$$

Solução. *Mais uma vez a equação caraterística a considerar é* $m^2 + \lambda = 0$. *Assim,*

(i) $\lambda = 0$*: Tem-se* $y(x) = c_1 + c_2 x$ *e* $y'(x) = c_2$. *Então,*

$$\begin{cases} y(0) + y(1) = 0 \\ y'(0) + y'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $\lambda = 0$ *não é um valor próprio do PVF (5.16).*

(ii) $\lambda < 0$*: Tem-se*

$$y(x) = c_1 \cosh\sqrt{-\lambda}x + c_2 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}x \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \sqrt{-\lambda}\left(c_1 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}x + c_2 \cosh\sqrt{-\lambda}x\right).$$

Assim, as condições na fronteira $y(0) + y(1) = 0$ *e* $y'(0) + y'(1) = 0$ *conduzem a*

$$\begin{cases} c_1\left(1 + \cosh\sqrt{-\lambda}\right) + c_2 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}x = 0 \\ c_1 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} + c_2\left(1 + \cosh\sqrt{-\lambda}\right) = 0 \end{cases}.$$

Então, o PVF tem soluções não triviais se e só se

$$\begin{vmatrix} 1+\cosh\sqrt{-\lambda} & \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} \\ \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} & 1+\cosh\sqrt{-\lambda} \end{vmatrix} = 2\left(1+\cosh\sqrt{-\lambda}\right) = 0,$$

para algum $\lambda < 0$. Uma vez que o determinante precedente nunca se anula, concluímos que o PVF (5.16) não admite valores próprios negativos.

(iii) $\lambda > 0$*: Tem-se*

$$y(x) = c_1\,\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\,\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \sqrt{\lambda}\left(-c_1\,\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x + c_2\,\cos\sqrt{\lambda}x\right),$$

pelo que

$$\begin{cases} y(0)+y(1)=0 \\ y'(0)+y'(1)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1\left(1+\cos\sqrt{\lambda}\right)+c_2\,\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}=0 \\ -c_1\,\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}+c_2\left(1+\cos\sqrt{\lambda}\right)=0 \end{cases}. \tag{5.17}$$

Novamente, o PVF só admite soluções não triviais se e só se

$$\begin{vmatrix} 1+\cos\sqrt{\lambda} & \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} \\ -\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} & 1+\cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 2\left(1+\cos\sqrt{\lambda}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = (2n-1)\,\pi,\ n\in\mathbb{N}.$$

Assim, o PVF dado admite somente valores próprios positivos que são da forma $\lambda_n = (2n-1)^2\,\pi^2$, $n\in\mathbb{N}$. Para obter as correspondentes funções próprias observe-se que de (5.17) decorre que c_1 e c_2 são independentes (porquê?), pelo que as soluções não triviais do PFV são do tipo

$$y_n(x) = c_1\,\cos(2n-1)\,\pi x + c_2\,\operatorname{sen}(2n-1)\,\pi x,\ n\in\mathbb{N},\ \ (c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\,.$$

Na Figura A faz-se a representação gráfica de algumas soluções não triviais do PVF (5.16) para $c_1 = c_2$ e na Figura B para $c_1 = -c_2$.

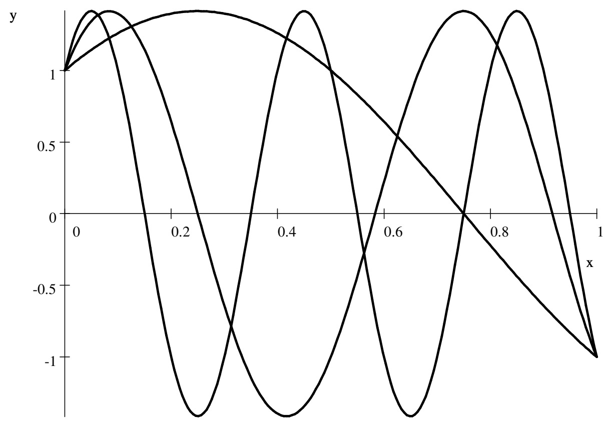


Figura A

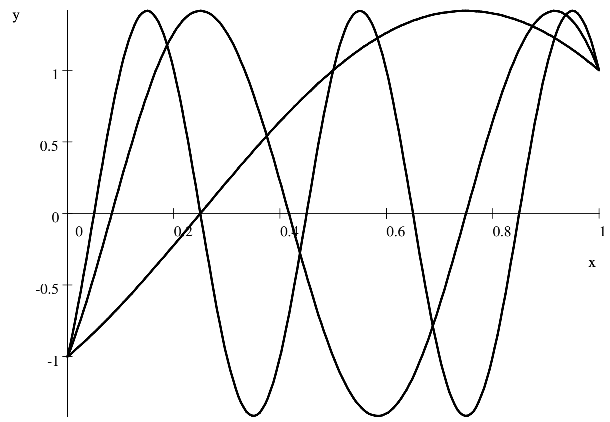


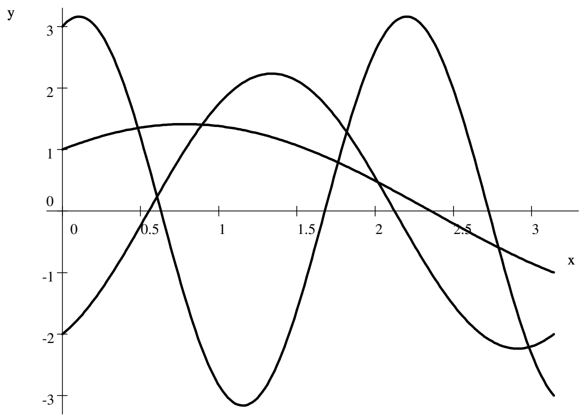
Figura B

Problema Determinar os valores próprios do PVF

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) + y'(\pi) = 0, \quad y'(0) + y(\pi) = 0, \tag{5.18}$$

bem como as respetivas soluções não triviais.

Resp.: $\lambda_n = n^2$, $y_{2n-1}(x) = (2n-1)\cos(2n-1)x + \operatorname{sen}(2n-1)x$ e $y_{2n}(x) = -2n\cos 2nx + \operatorname{sen} 2nx$, $n \in \mathbb{N}$.



Representação gráfica das funções próprias $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ do PVF (5.18)

Exercícios sobre PVFs: valores próprios e funções próprias

Exercício 5.1 *Determinar os valores próprios e as funções próprias dos seguintes PVFs.*

(a) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0;$

(b) $y'' - \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0;$

(c) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0;$

(d) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0.$

Exercício 5.2 *Determinar os valores próprios do PVF*

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi),$$

bem como as correspondentes soluções não triviais.

5.2 Classificação de equações diferenciais parciais de segunda ordem

Até agora estudamos apenas equações diferenciais envolvendo uma variável independente, designadas equações diferenciais ordinárias (EDOs). No entanto, há muitos problemas do âmbito de várias áreas científicas que se traduzem em equações diferenciais parciais (EDPs), uma vez que envolvem mais do que uma variável independente. Por exemplo, a equação diferencial

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

é uma equação diferencial parcial para a função $u(x,t)$. De igual modo, as equações diferenciais

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

constituem um sistema de EDPs para as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$. Tal como nas equações diferenciais ordinárias, a ordem da equação diferencial é dada pela ordem da derivada de ordem mais elevada que nela figura. Assim, por exemplo, a EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^3 = u$$

é de ordem 2.

Classicamente, existem três equações diferenciais parciais de segunda ordem que surgem em muitas aplicações e que têm especial importância na teoria das EDPs:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{(equação de Laplace)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c \in \mathbb{R}, \qquad \text{(equação de onda)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \text{(equação de calor)}.$$

Podemos ainda considerar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y), \qquad \text{(equação de Poisson)}.$$

Para tornar a escrita desta equações menos pesada usaremos frequentemente a notação: $u_x = \partial u/\partial x$, $u_y = \partial u/\partial y$, $u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$, $u_{xy} = \partial^2 u/\partial x \partial y$, etc. Com base nesta notação, os exemplos acima podem escrever-se, respetivamente, como

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad u_t = \alpha^2 u_{xx}, \qquad u_{xx} + u_{yy} = g(x,y).$$

Outra noção importante no que respeita às equações diferenciais parciais é, tal como nas EDOs, o da linearidade. Tal pode ser abordado de forma simples no contexto da aplicação de um operador diferencial $\mathcal{L}$ a uma função u. São exemplos de operadores diferenciais:

$$\mathcal{L}u = u_x, \quad \mathcal{L}u = 5u - \cos y\, u_y, \quad \mathcal{L}u = u\, u_{xy}.$$

Tem-se a seguinte definição.

Definição 5.1 *Um operador $\mathcal{L}$ diz-se linear se*

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v, \quad \mathcal{L}(ku) = k\,\mathcal{L}u,$$

quaisquer que sejam as funções u e v e qualquer que seja a constante real k ou, de forma equivalente, se

$$\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathcal{L}u + \beta\mathcal{L}v,$$

quaisquer que sejam as funções u e v e quaisquer que sejam as constantes reais α e β.

Exemplo 5.6 *Os operadores definidos por*

$$\mathcal{L}u = 2u - u_x, \quad \mathcal{L}u = 2ux - e^y u_{yy}, \quad \mathcal{L}u = u_{xx} - u_x,$$

são lineares, mas os operadores

$$\mathcal{L}u = u_y + 1, \quad \mathcal{L}u = u^2 - u_x, \quad \mathcal{L}u = (u_x)^2 + (u_y)^2,$$

não são lineares (porquê?).

Problema Indicar, relativamente aos seguintes operadores diferenciais, aqueles que são lineares,

(i)	$\mathcal{L}u = 2x - u_x;$	(iv)	$\mathcal{L}u = e^u - u_x;$
(ii)	$\mathcal{L}u = x^2u + u_x + 2u_{yy};$	(v)	$\mathcal{L}u = 2u_x + 2u_{yy};$
(iii)	$\mathcal{L}u = u\,u_x + u_{xy};$	(vi)	$\mathcal{L}u = u_x + \cos(u).$

Resp.: (ii), (v).

Definição 5.2 *Uma EDP diz-se* ***linear*** *se pode ser escrita na forma*

$$\mathcal{L}u = g,$$

onde $\mathcal{L}$ é um operador diferencial linear e g uma função que depende apenas das variáveis independentes envolvidas na EDP. Caso se tenha $g = 0$, então a EDP diz-se ***homogénea*** *(tal como sucede no caso das EDOs lineares).*

Exemplo 5.7 *A equação de Laplace, a equação de onda e a equação de calor são exemplos de EDPs lineares homogéneas. A equação de Poisson é uma EDP linear não homogénea.*

A EDP linear de segunda ordem mais geral em duas variáveis independentes (x e y) escreve-se

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y),$$

onde a, b, c, d, e, f e g são funções dadas.

Exemplo 5.8 *As seguintes EDPs de segunda ordem são lineares:*

$$\begin{aligned} &u_{xx} + e^{xy}\,u_{xy} + xu_{yy} = x, \\ &u_{zz} + \cos x\, u_x = yz, \\ &u_{xx} + u_y + u = \cos y. \end{aligned}$$

Problema Indicar, relativamente às seguintes EDPs, aquelas que são lineares.

(i)	$u_{xx} - 2u_{xy} = xy;$	(iv)	$u_{yy} - 3u_x = e^x;$
(ii)	$u\,u_y - u_x = 0;$	(v)	$u_{yy} = 0;$
(iii)	$u_y - u_x = u;$	(vi)	$(u_x)^2 - (u_y)^2 = u.$

Resp.: (i), (iii), (iv), (v).

É impossível formular um teorema geral sobre a existência de solução que se aplique a todas as equações diferenciais parciais lineares, mesmo que nos restrijamos ao caso das EDPs de segunda ordem. Em vez disso, é mais natural especificar a solução através de um conjunto de condições de fronteira ou condições iniciais de acordo com a equação diferencial em causa.

Por exemplo, conforme veremos, a solução da equação de calor $u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0$ na região $0 < x < l$, para $0 < t < \infty$, pode ser especificada de forma única em termos das condições iniciais para $t = 0$ e das condições de fronteira em $x = 0$ e $x = l$.

Por outro lado, a solução da equação de onda $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ na região $0 < x < l$, para $0 < t < \infty$, pode ser especificada, de forma única, em termos das condições de fronteira em $x = 0$ e $x = l$ e de duas condições iniciais às quais a solução deve obedecer: $u(x, 0)$ e $u_t(x, 0)$.

De forma a ainda assim poder abordar esta questão com alguma generalidade, é usual classificar as equações diferenciais lineares de segunda ordem da seguinte maneira.

Definição 5.3 *Para a EDP linear de segunda ordem,*

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u = g(x, y),$$

tem-se a seguinte classificação,

$$\begin{aligned} &\textit{se } 4ac - b^2 > 0, \ \textit{ a EDP diz-se } \textbf{\textit{elíptica}}, \\ &\textit{se } 4ac - b^2 = 0, \ \textit{ a EDP diz-se } \textbf{\textit{parabólica}}, \\ &\textit{se } 4ac - b^2 < 0, \ \textit{ a EDP diz-se } \textbf{\textit{hiperbólica}}, \end{aligned}$$

a qual tem apenas em conta a "parte principal" da EDP, ou seja, o termo $a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy}$.

Exemplo 5.9 *A equação de Laplace e a equação de Poisson são ambas EDPs elípticas, enquanto que a equação de onda é hiperbólica. A equação de calor é parabólica. Estas classificações são válidas para qualquer domínio de* $\mathbb{R}^2$.

Problema Classificar as seguintes EDPs lineares de segunda ordem.

$$\begin{array}{llll} (i) & u_x - 2u_{xx} = e^x; & (iii) & u_{xx} + 2u_{xy} + u_{xy} = 0; \\ (ii) & u_{yy} - u_{xx} = y; & (iv) & u_{xx} + u_{xy} + u_{xy} = 0. \end{array}$$

Resp.: (i) parabólica, (ii) hiperbólica, (iii) parabólica, (iv) elíptica.

A classificação desta classe de EDPs pode depender do domínio de $\mathbb{R}^2$ considerado conforme se ilustra no exemplo seguinte.

Exemplo 5.10 *A EDP*

$$u_{xx} - xu_{xy} + u_{yy} = 0, \quad x > 0,$$

é elíptica em qualquer domínio da região definida por

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : 4 - x^2 > 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2\right\},$$

sendo hiperbólica em qualquer domínio do semiplano

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : 4 - x^2 < 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2\right\}.$$

A EDP não é parabólica em nenhum domínio de $\mathbb{R}^2$ *uma vez que a reta* $x = 2$ *não é um domínio de* $\mathbb{R}^2$ *(porquê?).*

Problema Qual a região de $\mathbb{R}^2$ em que a EDP

$$y\, u_{yy} + 4x^2 u_{xy} - u_{xx} = 0$$

é elíptica?

Resp.: Em qualquer domínio que se encontre na região que é limitada superiormente pela parábola $y = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Existem teoremas gerais para cada uma destas classes de EDPs cujo enunciado e demonstração podem ser encontrados em livros avançados sobre EDPs. Aqui apenas nos preocuparemos em indicar qual o tipo de condições de fronteira que é natural associar a cada um destes três tipos de equações.

Se uma EDP é elíptica, podemos resolver um **problema de Dirichlet**, a saber, queremos determinar a solução de $\mathcal{L}u = g$ numa região D satisfazendo a condição de fronteira $u = \phi(x, y)$ na fronteira de D. Por exemplo, o problema físico que consiste em determinar a deflexão $u(x, y)$ de uma membrana devido ao seu peso quando a sua fronteira D se encontra fixa, conduz ao PVF elíptico

$$\begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & \text{para todo } (x, y) \text{ pertencente ao interior de } D, \\ u(x, y) = 0, & \text{para todo } (x, y) \text{ pertencente a } D, \end{array}$$

onde $f(x, y)$ é uma função dada que reflete as propriedades físicas da membrana.

Se a equação é parabólica ou hiperbólica, é natural resolver um **problema de Cauchy**, no qual se especifica a solução e a sua derivada temporal para $t = 0$ ao longo de uma linha, bem como as condições de fronteira que sejam relevantes. Conforme veremos, a equação da corda vibrante é um exemplo deste tipo de problema. Neste caso, o afastamento de cada ponto da corda relativamente ao eixo OX, $u(x, t)$, obedece a

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < l, \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < l, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t > 0. \end{array}$$

As condições iniciais f, g representam a posição e a velocidade inicial de cada ponto da corda vibrante. As condições de fronteira em $x = 0$ e $x = l$ significam que os extremos da corda se encontram fixos qualquer que seja o instante de tempo considerado.

Exercícios sobre classificação de EDPs de segunda ordem

Exercício 5.3 *Escrever a forma mais geral de uma EDP linear de primeira ordem em três variáveis independentes. Quantas funções são necessárias para especificar esta EDP?*

Exercício 5.4 *Considerar o operador $\mathcal{L}$ dado por $\mathcal{L}u(x,y) = a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$. Mostrar que $\mathcal{L}$ é um operador diferencial linear.*

Exercício 5.5 *Supor que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são operadores diferenciais lineares. Mostrar que o operador $\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2$ também é um operador diferencial linear.*

Exercício 5.6 *Classificar cada uma das seguintes EDPs lineares de segunda ordem como elíptica, parabólica ou hiperbólica.*

(*a*) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$; (*c*) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$;

(*b*) $u_{xx} + 3u_{xy} + 8u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$; (*d*) $u_{xx} + xu_{yy} = 0$.

5.3 O princípio da sobreposição e o princípio da subtração

Conforme vimos anteriormente no estudo das equações diferenciais ordinárias é muitas vezes possível escrever a solução geral de forma explícita, em termos de constantes arbitrárias e de um conjunto de soluções particulares. Tal não é possível no caso das equações diferenciais parciais. Para ver que assim é, consideremos o exemplo da EDP de segunda ordem $u_{xx} = 0$ para a função incógnita $u(x,y)$. Integrando uma vez resulta

$$u_x(x,y) = \phi(y),$$

enquanto que uma segunda integração conduz a

$$u(x,y) = x\phi(y) + \psi(y),$$

onde $\phi(y)$ e $\psi(y)$ são funções arbitrárias. É evidente que existe um número infinito de escolhas possíveis tanto para $\phi(y)$ como para $\psi(y)$, pelo que a solução não pode ser especificada recorrendo a um número finito de constantes arbitrárias. Ou seja, o espaço das soluções tem dimensão infinita.

De modo a poder trabalhar de forma eficiente com EDPs lineares é necessário desenvolver regras para combinar soluções conhecidas. O princípio que passamos a enunciar é a base de muitos resultados que encontraremos mais adiante.

Proposição 5.2 *(*Princípio da sobreposição para EDPs lineares homogéneas*) Se u_1, u_2, ..., u_m são soluções da EDP linear homogénea $\mathcal{L}u = 0$ num domínio de $\mathbb{R}^n$, então $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m$, onde c_1, c_2, ..., c_m são constantes arbitrárias, é ainda uma solução da EDP nesse domínio.*

Demonstração *A demonstração baseia-se na propriedade da linearidade. De facto, tem-se por hipótese $\mathcal{L}u_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Portanto,*

$$\mathcal{L}(c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m) = c_1\mathcal{L}u_1 + c_2\mathcal{L}u_2 + \ldots + c_m\mathcal{L}u_m = 0,$$

devido à linearidade de $\mathcal{L}$. ■

Note-se que este resultado também é válido para EDOs lineares homogéneas tal como já vimos anteriormente. A demonstração é que se torna mais simples recorrendo à noção de operador diferencial linear (que também podia ter-se usado no caso de EDOs).

Exemplo 5.11 *Considere-se a função* $u(x,y) = e^{kx}\cos ky$ *onde* k *é uma constante real arbitrária. Esta função é solução da equação de Laplace* $u_{xx} + u_{yy} = 0$ *uma vez que*

$$u_{xx} = k^2 e^{kx}\cos ky, \quad u_{yy} = -k^2 e^{kx}\cos ky.$$

Então as seguintes funções

$$e^{-x}\cos y, \quad e^{-3x}\cos 3y, \quad e^{-\pi x}\cos \pi y, \quad 1$$

são, entre uma infinidade de outras, soluções desta EDP. Consequentemente, o princípio da sobreposição permite concluir que a função

$$u(x,y) = -e^{-x}\cos y + 2e^{-3x}\cos 3y - 5e^{-\pi x}\cos \pi y + 4$$

também é uma solução da equação de Laplace.

Problema Considere-se a EDP $xu_x - yu_y = 0$, onde $u = u(x,y)$. Escrever uma combinação linear de 4 funções (distintas) que seja solução desta EDP, sabendo que esta admite soluções que tenham a seguinte propriedade: $u(x,y) = u(y,x)$.

Resp.: Por exemplo, $3 + 7e^{xy} - 2x^2y^2 - 3\cos xy$.

O princípio da sobreposição não se aplica a EDPs lineares não homogéneas. Por exemplo, se u_1 e u_2 são soluções da equação de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = 1$, então $u_1 + u_2$ é solução de uma EDP diferente, a saber, $u_{xx} + u_{yy} = 2$. No entanto, tem-se o seguinte princípio geral que permite relacionar soluções de EDPs lineares não homogéneas com as respetivas soluções das EDPs homogéneas associadas.

Proposição 5.3 *(*Princípio da subtração para EDPs lineares não homogéneas*) Se* u_1 *e* u_2 *são soluções da mesma EDP linear não homogénea* $\mathcal{L}u = g$ *num domínio de* $\mathbb{R}^n$*, então a função* $u_1 - u_2$ *é uma solução da equação homogénea associada* $\mathcal{L}u = 0$ *nesse mesmo domínio.*

Demonstração *Tem-se por hipótese* $\mathcal{L}u_1 = g$ *e* $\mathcal{L}u_2 = g$*. Então*

$$\mathcal{L}(u_1 - u_2) = \mathcal{L}u_1 - \mathcal{L}u_2 = g - g = 0,$$

onde mais uma vez usámos o facto do operador diferencial $\mathcal{L}$ *ser linear.* ■

Exemplo 5.12 *Se* u_1 *e* u_2 *são soluções da equação de Poisson* $u_{xx} + u_{yy} = 1$*, então* $u_1 - u_2$ *é uma solução da equação de Laplace* $u_{xx} + u_{yy} = 0$*.*

Partindo do princípio da subtração, podemos concluir facilmente que a soma de uma solução da EDP linear $\mathcal{L}u = g$ com uma solução qualquer da equação homogénea associada também é solução de $\mathcal{L}u = g$, tal como acontece no caso das EDOs. Mais ainda, é possível mostrar-se o seguinte resultado.

Corolário 5.4 *A solução geral da equação diferencial parcial linear* $\mathcal{L}u = g$ *pode ser escrita na forma*

$$u = v + U,$$

onde U *é uma solução particular da equação* $\mathcal{L}u = g$ *e* v *é a solução geral da equação homogénea associada* $\mathcal{L}u = 0$*.*
Novamente, este resultado já tinha sido obtido para as EDOs lineares.

Exemplo 5.13 *Determinar a solução geral $u(x,y)$ da equação diferencial $u_{xx} = 2$.*

Solução. *Fazendo sucessivas integrações (parciais) em ordem a x conclui-se que $U(x,y) = x^2$ é uma solução da equação dada. Por outro lado, a solução geral da equação homogénea associada $u_{xx} = 0$ é $v(x,y) = xg(y) + h(y)$. Assim sendo, a solução geral da equação diferencial não homogénea é $u(x,y) = xg(y) + h(y) + x^2$.*

Problema Determinar a solução geral $u(x,y)$ da equação diferencial $u_{yy} = 2x$.
Resp.: $u(x,y) = f(x)y + g(x) + xy^2$ ou outra expressão equivalente.

Exercícios sobre o princípio da sobreposição e o princípio da subtração

Exercício 5.7 *Mostrar que a função $u(x,y) = e^{ay} \operatorname{sen} ax$ é uma solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ qualquer que seja o valor da constante a. Verificar que a função $f(x,y) = \operatorname{senh} 3y \operatorname{sen} 3x$ é uma solução desta EDP e que tal decorre do princípio da sobreposição (sugestão: atender à definição da função seno hiperbólico).*

Exercício 5.8 *Mostrar que a função $u(x,t) = e^{mx}e^{-m^2t}$ é uma solução da equação de calor $u_{xx} + u_t = 0$ qualquer que seja o valor da constante m. Verificar que a função $g(x,t) = e^{-4t} \cosh 2x$ é uma solução desta EDP e que tal decorre do princípio da sobreposição (sugestão: atender à definição da função cosseno hiperbólico).*

Exercício 5.9 *Mostrar que a solução geral da EDP $u_{xxx} = e^{-x}$, onde $u = u(x,y)$, pode ser escrita na forma $u(x,y) = f(y)x^2 + g(y)x + h(y) - e^{-x}$.*

5.4 Exercícios de revisão do Capítulo 5

Exercício 5.10 *Determinar os valores próprios e as funções próprias dos seguintes PVFs.*

(a) $y'' - \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0;$

(b) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

Exercício 5.11 *Para que valores de λ é que o PVF*

$$y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

tem solução não trivial? Determinar as correspondentes funções próprias.

Exercício 5.12 *Considerar o PVF*

$$y'' + \lambda y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

(a) Mostrar que se λ for um valor próprio do problema homogéneo, então o problema proposto: i) pode não ter solução; ii) a solução (quando existe) não é única;

(b) Mostrar que este problema tem uma só solução $y(t)$ se λ não é um valor próprio do problema homogéneo. (Sugestão: usar o seguinte resultado: $a \Rightarrow b$ é equivalente a $(\sim b \Rightarrow \sim a)$).

Exercício 5.13 *Classificar as seguintes EDPs lineares de segunda ordem.*

(a) $u_{xx} + 2e^{xy}\, u_{xy} + e^{2xy}\, u_{yy} = 0$;

(b) $e^y\, u_{xx} + e^x\, u_{yy} = 0$;

(c) $u_{xx} + 2\cos x\, u_{yy} = 0, \quad x \in \,]0, \pi[\,$.

Exercício 5.14 *Mostrar que a função* $u(x, y) = e^{n(x-y)}$ *é solução da equação de onda* $u_{xx} - u_{yy} = 0$ *qualquer que seja o valor da constante real* n.

Exercício 5.15 *Mostrar que a função* $u(x, y) = (r/2)x^2 + (1 - r)y^2/2$ *é uma solução da equação de Poisson* $u_{xx} + u_{yy} = 1$ *qualquer que seja o valor da constante real* r.

5.5 Soluções dos exercícios do Capítulo 5

5.1. (a) $\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2/(4l^2)$, $y_n(x) = \operatorname{sen}(2n-1)\pi x/(2l)$, $n \in \mathbb{N}$;
(b) $\lambda_n = -\,(n-1)^2\,\pi^2/l^2$, $y_n(x) = \cos{(n-1)}\,\pi x/l$, $n \in \mathbb{N}$;
(c) $y_1(x) = \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda_1}x$, onde $\operatorname{tgh}\sqrt{-\lambda_1}\pi = \sqrt{-\lambda_1}$, $\sqrt{-\lambda_1} \approx 0.996\,18$; $y_n(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x$, onde $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}\pi = \sqrt{\lambda_n}$ e $(2n-3)^2/4 < \lambda_n < (n-1)^2$, $n = 1, 2, \ldots$; (d) $\lambda_1 = -1$, $y_1(x) = e^x$; $\lambda_n = (n-1)^2$, $y_n(x) = (n-1)\cos{[(n-1)x]} + \operatorname{sen}(n-1)x$, $n = 1, 2, \ldots$

5.2. $\lambda_n = (n-1)^2$, $y_n(x) = c_1\, \cos(n-1)x + c_2\, \operatorname{sen}(n-1)x$, $n \in \mathbb{N}$, $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

5.3. $a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z + d(x,y,z)u = f(x,y,z)$; são necessárias 5 funções.

5.6. (a) hiperbólica; (b) elíptica; (c) parabólica; (d) elíptica se $x > 0$, hiperbólica se $x < 0$.

5.10. (a) $\lambda_n = -(2n-1)^2\pi^2/(4l^2)$, $y_n(x) = \cos(2n-1)\pi x/(2l)$, $n \in \mathbb{N}$;
(b) $y_n(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x + \cos\sqrt{\lambda_n}x$, onde $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n} = -\sqrt{\lambda_n}$ e $(2n-1)^2\pi^2/4 < \lambda_n < n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$.

5.11. $\lambda_n = (n-1)^2\,\pi^2$, $y_n(x) = e^x\operatorname{sen}(n-1)\pi x$, $n \in \mathbb{N}$.

5.13. (a) parabólica; (b) elíptica; (c) elíptica se $x \in \,]0, \pi/2[$, hiperbólica se $x \in \,]\pi/2, \pi[$.

Capítulo 6

Separação de variáveis, séries de Fourier e aplicações

Neste capítulo abordaremos alguns assuntos que se prendem com a determinação de soluções analíticas de equações diferenciais parciais (EDPs) lineares. Começaremos por ilustrar a aplicação do **método de separação de variáveis** a EDPs de primeira ordem e seguidamente à **equação de calor**, a qual suscitará a necessidade de introduzir as **séries de Fourier** e algumas das suas propriedades, bem como o recurso à resolução de problemas de valores próprios e funções próprias abordados no capítulo precedente. Finalmente, abordaremos a solução da **equação de onda** e da **equação de Laplace** recorrendo, tal como no caso da equação de calor, ao método de separação de variáveis e às séries de Fourier.

6.1 O método de separação de variáveis: aplicação a EDPs lineares de primeira ordem

Comecemos por recordar que uma EDP linear de primeira ordem que seja homogénea pode-se escrever como (assumindo que x e y são variáveis independentes): $u = u(x, y)$ é tal que

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0$$

para todo (x, y) num domínio de $\mathbb{R}^2$. Conforme veremos de seguida, algumas destas equações podem ser resolvidas recorrendo ao método de separação de variáveis, o qual parte do pressuposto que a solução da EDP, $u(x, y)$, pode ser escrita na forma

$$u(x, y) = X(x)\,Y(y)$$

(daí a designação de **método de separação de variáveis**). No caso de se ter

$$u = u(x, y, z),$$

então procuraremos soluções que tenham a propriedade

$$u(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z).$$

Em qualquer dos casos, e o mesmo será aplicável conforme veremos a EDPs de segunda ordem, o objetivo é converter o problema inicial (cuja incógnita depende de pelo menos duas variáveis independentes) em vários problemas, tantos quantos o número de variáveis independentes, que envolvam apenas equações diferencias ordinárias (EDOs) lineares.

Vejamos então alguns exemplos de aplicação deste método.

Exemplo 6.1 *Considere-se o problema*

$$u = u(x, y) : u_x - 2u_y = 0, \quad u(0, y) = 4 \operatorname{senh} 2y. \tag{6.1}$$

Averiguar se a respetiva solução analítica pode ser obtida usando o método de separação de variáveis, indicando a solução caso o método seja aplicável.

Solução. *Supondo então que*

$$u(x, y) = X(x)\, Y(y),$$

tem-se

$$u_x = X'(x)\, Y(y) \quad e \quad u_y = X(x)\, Y'(y),$$

pelo que a EDP presente em (6.1) passa a escrever-se

$$X'(x)Y(y) - 2X(x)Y'(y) = 0$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Uma vez que a função $u(x, y)$ não pode ser identicamente nula (porquê?), então o mesmo acontece com $X(x)Y(y)$ (porquê?) e, por isso, podemos dividir ambos os membros da equação anterior por $X(x)Y(y)$, resultando

$$\frac{X'(x)}{X(x)} - 2\frac{Y'(y)}{Y(y)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X'(x)}{X(x)} = 2\frac{Y'(y)}{Y(y)}. \tag{6.2}$$

Portanto, a equação obtida é do tipo

$$f(x) = g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

e por isso, como x e y são variáveis independentes, a equação (6.2) só é verificada se cada um dos membros for constante, ou seja, se as funções $X(x)$ e $Y(y)$ forem tais que

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = 2\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

onde λ é uma constante real. Obtemos assim duas EDOs lineares de primeira ordem que são homogéneas, a saber

$$X'(x) - \lambda X(x) = 0 \quad e \quad 2Y'(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Ora, qualquer destas EDOs tem coeficientes constantes, e assim a forma mais simples de determinar a respetiva solução geral é recorrer à equação caraterística associada. Comecemos então por abordar a EDO $X'(x) - \lambda X(x) = 0$. A equação caraterística é $m - \lambda = 0$, tendo por isso a raiz $m = \lambda$. Então

$$X(x) = Ae^{\lambda x}$$

é a respetiva solução geral, onde A é uma constante arbitrária.

De forma análoga, associamos à EDO $2Y'(y) - \lambda Y(y) = 0$ *a equação caraterística* $2m - \lambda = 0$, *resultando* $\lambda = 1/2$ *e consequentemente a respetiva solução geral é*

$$Y(y) = Be^{\lambda y/2},$$

onde B *é uma constante arbitrária.*

Concluímos portanto que a EDP presente em (6.1) admite soluções do tipo

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = e^{\lambda(x+y/2)}, \tag{6.3}$$

qualquer que seja o valor da constante λ. *Note-se que omitimos propositadamente qualquer constante arbitrária multiplicativa na expressão (6.3), uma vez que tratando-se de uma EDP linear e homogénea, então qualquer múltiplo constante de uma solução ainda é solução da EDP. Mais ainda, qualquer combinação linear de soluções da EDP dada é uma solução dessa EDP e por isso podemos escrever*

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i(x+y/2)}. \tag{6.4}$$

Resta-nos determinar os valores dos pares de constantes (c_i, λ_i) *de forma a que a condição*

$$u(0,y) = 4\,\mathrm{senh}\,2y = 2e^{2y} - 2e^{-2y}$$

seja verificada pela solução. Ora, de (6.4) resulta

$$u(0,y) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i y/2},$$

devendo ter-se

$$\sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i y/2} = 2e^{2y} - 2e^{-2y}.$$

Portanto, uma escolha possível é $(c_1, \lambda_1) = (2, 4)$ *- reproduzindo o termo* $2e^{2y}$ *- e* $(c_2, \lambda_2) = (-2, 4)$ *- reproduzindo o termo* $-2e^{-2y}$. *Tem-se ainda* $c_i = 0$ *para* $i = 3,\ 4,\ \ldots$ *Desta escolha para os pares de constantes* (c_i, λ_i), *e atendendo a (6.4), obtém-se para solução do problema (6.1) a função*

$$u(x,y) = c_1 e^{\lambda_1(x+y/2)} + c_2 e^{\lambda_2(x+y/2)} = 2e^{4(x+y/2)} - 2e^{-4(x+y/2)},$$

ou seja,

$$u(x,y) = 4\,\mathrm{senh}\,(4x+2y)\,. \tag{6.5}$$

Verifiquemos agora que esta função, determinada usando o método de separação de variáveis, é efetivamente solução do problema proposto. De (6.5) decorre imediatamente que

(i) $u(0,y) = 4\,\mathrm{senh}\,2y$;

(ii) $u_x - 2u_y = 16\,\mathrm{senh}\,(4x+2y) - 16\,\mathrm{senh}\,(4x+2y) = 0$;

conforme requerido.

Exemplo 6.2 *Considere-se o problema*

$$v = v(x,t) : v_x + v_t - v = 0, \quad v(x,0) = 6e^x - 5e^{2x} + 3e^{-3x}. \tag{6.6}$$

Determinar a respetiva solução analítica usando o método de separação de variáveis.

Solução. *Supondo então que*

$$v(x,t) = X(x)\,T(t),$$

tem-se

$$v_x = X'(x)\,T(t) \quad e \quad v_t = X(x)\,T'(t).$$

De (6.6) resulta

$$X'(x)T(t) + X(x)T'(t) - X(x)T(t) = 0,$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$*. Dividindo ambos os membros da equação anterior por* $X(x)T(t)$*, obtém-se*

$$\frac{X'(x)}{X(x)} + \frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X'(x)}{X(x)} = 1 - \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Novamente, como x *e* t *são variáveis independentes, tem-se*

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = 1 - \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

onde λ *é uma constante real (podia-se ter escrito* λ *em vez de* $-\lambda$*, o resultado final seria o mesmo), isto é*

$$X'(x) + \lambda X(x) = 0 \quad e \quad T'(t) - (1+\lambda)\,T(t) = 0.$$

Tem-se de novo duas EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes, pelo que (porquê?)

$$X(x) = e^{-\lambda x} \quad e \quad T(t) = e^{(\lambda+1)t},$$

resultando (porquê?)

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{-\lambda_i x} e^{(\lambda_i+1)t}. \tag{6.7}$$

Resta-nos determinar os valores dos pares (c_i, λ_i) *de forma a ter-se*

$$v(x,0) = 6e^x - 5e^{2x} + 3e^{-3x},$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{N} c_i e^{-\lambda_i x} = 6e^x - 5e^{2x} + 3e^{-3x}.$$

Uma escolha possível é $(c_1, \lambda_1) = (6, -1)$*,* $(c_2, \lambda_2) = (-5, -2)$ *e* $(c_3, \lambda_3) = (3, 3)$*, sendo os restantes coeficientes* c_k *todos nulos. Desta forma, de (6.7) obtém-se para solução do problema (6.6)*

$$v(x,t) = 6e^x - 5e^{2x}e^{-t} + 3e^{-3x}e^{4t}.$$

É fácil verificar que $v_x + v_t = v$ *e que a condição imposta para* $t = 0$ *é satisfeita.*

Problema Determinar a solução analítica de

$$u = u(y,z) : 7u_z - 3u_y = 2u, \quad u(y,0) = 2 + e^{4y} - e^{-2y/3},$$

usando o método de separação de variáveis.
Resp.: $u(y,z) = 2e^{2z/7} + e^{2(2y+z)} - e^{-2y/3}$.

Nos exemplos precedentes, as duas EDOs (lineares) resultantes da aplicação do método de separação de variáveis tinham coeficientes constantes, pelo que o método mais simples para determinar a respetiva solução geral passou pelo recurso à equação caraterística associada. No entanto, nem sempre é assim. As EDOs que se obtêm são necessariamente lineares e homogéneas (tais como as EDPs que lhes dão origem), mas podem ter coeficientes não constantes. Nesse caso, a solução geral da EDO é obtida tendo em conta que a equação diferencial é linear de primeira ordem ou, em alternativa, que é de variáveis separáveis (porquê?).

Vejamos agora alguns exemplos que ilustram esta situação.

Exemplo 6.3 *Determinar a solução analítica do problema*

$$u = (x,y) : u_y - u_x = 2x\,u, \quad u(0,y) = -2\,\mathrm{senh}\,y, \tag{6.8}$$

usando o método de separação de variáveis.

Solução. *Assumindo que* $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$ *tem-se*

$$u_x = X'(x)\,Y(y) \quad e \quad u_y = X(x)\,Y'(y).$$

Então, de (6.8) resulta

$$X(x)Y'(y) - X'(x)Y(y) - 2x\,X(x)Y(y) = 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Procedendo como habitualmente, divide-se ambos os membros da equação precedente por* $X(x)Y(y)$, *obtendo-se*

$$\frac{Y'(y)}{Y(y)} - \frac{X'(x)}{X(x)} - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \frac{X'(x)}{X(x)} + 2x = \lambda.$$

Temos então a EDO

$$Y'(y) - \lambda Y(y) = 0,$$

pelo que $Y(y) = e^{\lambda y}$, *e ainda a EDO*

$$\frac{X'(x)}{X(x)} + 2x = \lambda.$$

Esta última, que não tem coeficientes constantes, pode ser resolvida usando dois métodos distintos:

(i) *A EDO é de variáveis separáveis,*

$$\frac{1}{X}\,dX + (2x - \lambda)\,dx = 0,$$

tendo-se (porquê?)

$$X(x) = k\,e^{x(\lambda - x)}, \;\; k \in \mathbb{R}. \tag{6.9}$$

(ii) *A EDO é linear de primeira ordem,*

$$\frac{dX}{dx} + (2x - \lambda)\, X = 0,$$

pelo que um fator integrante é (porquê?)

$$\mu = e^{x^2 - \lambda x} = e^{x(x-\lambda)},$$

tendo-se

$$e^{x(x-\lambda)}\frac{dX}{dx} + e^{x(x-\lambda)}\,(2x-\lambda)\, X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[e^{x(x-\lambda)}X\right] = 0,$$

donde resulta (6.9).

Assim, e tal como vimos nos exemplos precedentes,

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{x(\lambda_i - x)} e^{\lambda_i y}. \tag{6.10}$$

A condição $u(0,y) = -\operatorname{senh} y$ *implica que*

$$\sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i y} = e^{-y} - e^{y}$$

e consequentemente $(c_1, \lambda_1) = (1, -1)$ *e* $(c_2, \lambda_2) = (-1, 1)$*, sendo os restantes c's nulos. De (6.10) obtém-se finalmente*

$$u(x,y) = e^{-x^2}\left(e^{-(y+x)} - e^{x+y}\right) = -e^{-x^2}\operatorname{senh}(x+y)\,.$$

Esta função verifica a condição $u(0,y) = -\operatorname{senh} y$*, bem como a EDP* $u_y - u_x = 2x\, u$.

Exemplo 6.4 *Determinar a solução analítica de*

$$w = w(x,t) : \frac{x^2+1}{2x}\, w_x + t\, w_t = 0, \quad x, t > 0; \quad w(1,t) = (1+t)^2\,, \tag{6.11}$$

usando o método de separação de variáveis.

Solução. *Assumindo que* $w(x,t) = X(x)\, T(t)$*, a EDP acima conduz a*

$$\frac{x^2+1}{2x}\, X'(x)T(t) + t\, X(x)T'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+1}{2x}\,\frac{X'(x)}{X(x)} + t\frac{T'(t)}{T(t)} = 0,$$

pelo que

$$\frac{x^2+1}{2x}\,\frac{X'(x)}{X(x)} = -t\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Temos portanto duas EDOs lineares e homogéneas, nenhuma delas com coeficientes constantes,

$$X'(x) - \lambda\frac{2x}{x^2+1}\, X(x) = 0 \quad e \quad T'(t) + \frac{\lambda}{t}T(t) = 0.$$

Assim, tem-se para a EDO com incógnita $X(x)$:

$$\frac{1}{X}\,dX - \lambda\frac{2x}{x^2+1}\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|X| = \lambda \ln\left(x^2+1\right) + c_1,$$

pelo que podemos adoptar

$$X(x) = \left(x^2+1\right)^{\lambda}.$$

Para a outra EDO, tem-se

$$\frac{1}{T}\,dT + \frac{\lambda}{t}\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|T| = -\lambda \ln t + c_2,$$

resultando

$$T(t) = t^{-\lambda}.$$

Em conclusão, tem-se que a função $\left(x^2+1\right)^{\lambda} t^{-\lambda}$ verifica a EDP dada qualquer que seja o valor do parâmetro λ, donde

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \left(x^2+1\right)^{\lambda_i} t^{-\lambda_i}. \tag{6.12}$$

Ora, de (6.11) e (6.12) resulta

$$w(1,t) = \sum_{i=1}^{N} c_i 2^{\lambda_i} t^{-\lambda_i} = t^2 + 2t + 1,$$

pelo que restringindo o somatório aos três primeiros termos obtém-se (por exemplo)

$$\begin{aligned} t^2 &\;\to\; \lambda_1 = -2,\ c_1 = 4,\\ 2t &\;\to\; \lambda_2 = -1,\ c_2 = 4,\\ 1 &\;\to\; \lambda_3 = 0,\ c_3 = 1, \end{aligned}$$

conduzindo à solução

$$w(x,t) = 4\left(x^2+1\right)^{-2} t^2 + 4\left(x^2+1\right)^{-1} t + 1.$$

Problema Determinar a solução analítica de

$$q = q(x,z) : z\,q_z + 2z^2\,q_x = q, \quad z > 1; \quad q(x,1) = \cosh 2x,$$

usando o método de separação de variáveis.
Resp.: $q(x,z) = z\cosh(2x + 2 - 2z^2)$.

Nos exemplos/problemas precedentes foi possível determinar a respetiva solução recorrendo ao método de separação de variáveis. No entanto, este método nem sempre é aplicável, mesmo que a EDP seja linear e homogénea. Por exemplo, a EDP

$$u = u(x,y) : (x+y)\,u_x + u_y = 0,$$

não pode ser resolvida por este método uma vez que supondo que a respetiva solução pode ser escrita na forma $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$ resulta

$$(x+y)\,X'(x)Y(y) + X(x)Y'(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)\,\frac{X'(x)}{X(x)} + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = 0,$$

não sendo portanto possível obter uma equação da forma $f(x) = g(y)$ para todo (x, y) pertencente a um domínio de $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, há casos em que a condição imposta invalida a aplicação do método. Por exemplo, se a condição imposta no Exemplo 6.4 fosse $w(1,t) = \cos t$, então não seria possível determinar uma solução do problema recorrendo a este método. A não aplicabilidade do método não quer dizer que o problema não tenha solução, apenas que a solução, a existir, não é da forma proposta. Por exemplo, o problema

$$u = u(x,y) : u_x - u_y = 0, \quad u(0,y) = y,$$

admite a solução

$$u(x,y) = x + y,$$

apesar do método de separação de variáveis não ser aplicável.

Exercícios sobre resolução de EDPs de primeira ordem usando o método de separação de variáveis

Exercício 6.1 *Usar o método de separação de variáveis para determinar a solução dos seguintes problemas.*

(a) $u = u(t,y) : u_t = u_y; \quad u(t,0) = e^{-3t} + e^{2t};$

(b) $u = u(x,y) : u_x = u_y - u; \quad u(x,0) = e^{-5x} + 2e^{-7x} - 14e^{13x};$

(c) $v = v(x,t) : x\, v_x - 2t\, v_t = 0, \quad x, t > 1; \quad v(1,t) = 10t^2 + 9t^{-3};$

(d) $w = w(t,z) : w_z = w_t - 3z^2\, w; \quad w(t,1) = 2\cosh(2t).$

6.2 A equação de calor; separação de variáveis

Considere-se o problema de valores iniciais e valores de fronteira (PVIVF)

$$\begin{array}{ll} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0 \end{array} . \tag{6.13}$$

Este problema envolve uma equação diferencial parabólica (do tipo "equação de difusão"). Se $u(x,t)$ designar a temperatura no instante de tempo t no ponto de abcissa x de uma barra fina que ocupa o domínio $0 < x < l$, então temos a equação de calor que abordámos no capítulo precedente. Neste caso, tem-se

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho C_p},$$

onde k é a condutividade térmica do material que constitui a barra, sendo ρ e C_p a respetiva densidade e calor específico. Neste modelo supõe-se que só pode haver transferência de calor entre a barra e o meio circundante através dos seus extremos $x = 0$ e $x = l$. Neste contexto, $f(x)$ corresponde ao perfil inicial de temperatura, ou seja, à distribuição de temperatura ao longo da barra no instante $t = 0$, enquanto que as condições (de fronteira) impostas indicam que os extremos da barra são mantidos à temperatura nula.

O objetivo é determinar a solução $u(x,t)$ do problema (6.13). Para isso é útil relembrar como se resolve o problema de valores iniciais

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'. \tag{6.14}$$

Primeiro, e tendo em conta que se trata de uma EDO linear homogénea, determinamos duas soluções da equação diferencial que sejam linearmente independentes, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, de forma a obter a solução geral $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$. Depois determinamos o valor das constantes c_1 e c_2 de forma a obter a solução de (6.14). Sucede que, conforme já referimos anteriormente, qualquer combinação linear $c_1u_1(x,t) + \ldots + c_mu_m(x,t)$ de soluções $u_1(x,t)$, $\ldots$, $u_m(x,t)$ de

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \tag{6.15}$$

é ainda uma solução de (6.15), já que esta EDP é linear e homogénea. Além disso, se $u_1(x,t)$, $\ldots$, $u_m(x,t)$ verificam as condições de fronteira $u(0,t) = u(l,t) = 0$, então a combinação linear $c_1u_1 + \ldots + c_mu_m$ também verifica essas condições de fronteira (porquê?). Este facto sugere a seguinte forma de abordar a resolução do problema (6.13):

(i) Determinar tantas soluções $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $\ldots$ do problema

$$\begin{array}{ll} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0 \end{array}, \tag{6.16}$$

quantas seja possível.

(ii) Determinar a solução $u(x,t)$ de (6.13) considerando uma combinação linear apropriada das funções $u_m(x,t)$, $m = 1, 2, \ldots$

Vejamos então como podemos proceder relativamente a cada um destes dois itens.

(i) Como de momento não sabemos resolver equações diferenciais parciais do tipo (6.15), temos de reduzir a resolução do problema (6.16) à resolução de duas EDOs (porquê?). Tal pode ser conseguido supondo que o problema admite soluções da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ (método de separação de variáveis). Assim, tem-se

$$u_t = X\,T' \quad \text{e} \quad u_{xx} = X''\,T.$$

Vemos que $u(x,t) = X(x)T(t)$ é solução da equação $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ se

$$X\,T' = \alpha^2\, X''\, T,$$

ou seja,

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T}. \tag{6.17}$$

Note-se que o primeiro membro de (6.17) só depende de x, enquanto que o segundo membro só depende de t. Tal implica, conforme vimos quando abordámos as EDPs lineares de primeira ordem, que

$$\frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\lambda, \tag{6.18}$$

para algum valor da constante real λ. Além disso, as condições de fronteira

$$0 = u(0,t) = X(0)\,T(t)$$

e

$$0 = u(l,t) = X(l)\,T(t),$$

para todo $t > 0$, implicam que $X(0) = 0$ e $X(l) = 0$ (caso contrário $T(t) = 0$, o que implicaria $u(x,t) = 0$). Portanto, $u(x,t) = X(x)T(t)$ é solução de (6.16) se

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \tag{6.19}$$

e

$$T' + \lambda\alpha^2 T = 0. \tag{6.20}$$

Até aqui a constante λ é arbitrária. No entanto, sabemos do Exemplo 5.1 (ver página 229) que o PVF (6.19) tem solução não trivial $X(x)$ apenas quando $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/l^2$, $n \in \mathbb{N}$ e que, neste caso,

$$X(x) = X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Por outro lado, a equação (6.20) conduz a

$$T(t) = e^{-\lambda\alpha^2 t},$$

isto é,

$$T(t) = T_n(t) = e^{-\alpha^2 n^2\pi^2 t\,/\,l^2}.$$

De facto, tanto $X(x)$ como $T(t)$ deveriam aparecer multiplicados por constantes arbitrárias, mas omitem-se aqui essas constantes uma vez que posteriormente consideraremos combinações lineares das funções $X_n(x)T_n(t)$ para construir a solução do PVIVF proposto. Portanto,

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2\pi^2 t\,/\,l^2}$$

é uma solução não trivial de (6.16) qualquer que seja o número inteiro positivo n.

(ii) Suponhamos que a função $f(x)$ presente em (6.13), a qual define o perfil inicial de temperatura, é uma combinação linear finita das funções $\operatorname{sen} n\pi x/l$, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Então,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2\pi^2 t\,/\,l^2}$$

é a solução procurada de (6.13) uma vez que é uma combinação linear de soluções de (6.16) que verifica a condição inicial

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad 0 < x < l.$$

Infelizmente, a maior parte das funções $f(x)$ não pode ser expressa como uma combinação linear finita das funções $\operatorname{sen} n\pi x/l$, $n = 1, 2, \ldots,$ no intervalo $0 < x < l$. Tal leva-nos a colocar a seguinte questão: pode uma função arbitrária $f(x)$ ser escrita como uma combinação linear infinita das funções $\operatorname{sen} n\pi x/l$, $n = 1, 2, \ldots,$ no intervalo $0 < x < l$? Por outras palavras, dada uma função arbitrária f, é possível determinar constantes $c_1, c_2, \ldots,$ tais que

$$f(x) = c_1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} + c_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{l} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l\,?$$

A resposta é afirmativa, conforme veremos na Secção 6.3. No imediato, vejamos alguns exemplos de determinação da solução de problemas envolvendo a equação de calor através do uso do método de separação de variáveis nos quais a forma de $f(x)$ é tal que não obriga ao uso de séries de Fourier.

Exemplo 6.5 *No instante $t = 0$ a temperatura $u(x, 0)$ de uma barra de cobre fina ($\alpha^2 = 1.14$) de comprimento unitário é dada por*

$$u(x, 0) = 2 \operatorname{sen} 3\pi x + 5 \operatorname{sen} 8\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Os extremos da barra estão mergulhados em gelo, pelo que a sua temperatura é mantida a $0\,^oC$. Determinar a temperatura $u(x, t)$ na barra para qualquer instante de tempo $t > 0$.

Solução. *A temperatura $u(x, t)$ deve verificar o seguinte problema*

$$\begin{array}{ll} u_t = 1.14\, u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u(x, 0) = 2 \operatorname{sen} 3\pi x + 5 \operatorname{sen} 8\pi x, & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \end{array}.$$

Neste caso, e atendendo aos resultados apresentados no início desta secção, tem-se que

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen} n\pi x\, e^{-1.14n^2\pi^2 t}$$

é solução do problema

$$\begin{array}{ll} u_t = 1.14\, u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \end{array},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e por isso, tem-se

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} n\pi x\, e^{-1.14n^2\pi^2 t},$$

pelo que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} n\pi x.$$

Falta agora determinar o valor das constantes c_n de forma a cumprir-se a condição imposta para $u(x, 0)$, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} n\pi x = 2 \operatorname{sen} 3\pi x + 5 \operatorname{sen} 8\pi x, \quad 0 < x < 1.$$

Conclui-se que as constantes são todas nulas exceto $c_3 = 2$ e $c_8 = 5$, resultando

$$u(x,t) = 2\,\text{sen}\,3\pi x\, e^{-9\,(1.14)\,\pi^2 t} + 5\,\text{sen}\,8\pi x\, e^{-64\,(1.14)\,\pi^2 t}. \tag{6.21}$$

Nos gráficos seguintes representa-se o perfil de temperatura para vários instantes de tempo. Note-se, desde já, que de (6.21) resulta (porquê?)

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0,$$

facto que é vísivel na representação gráfica.

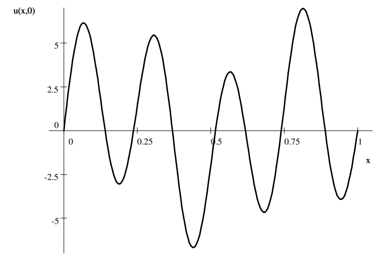


Gráfico de $u(x,0)$

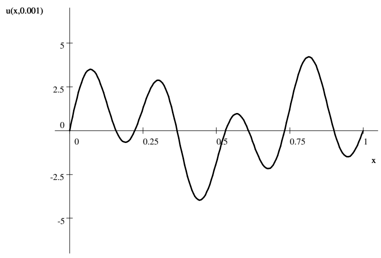


Gráfico de $u(x,0.001)$

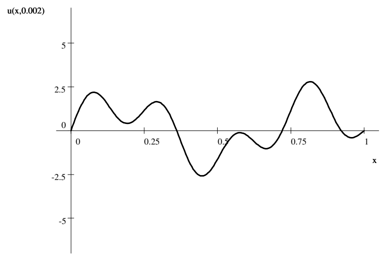


Gráfico de $u(x,0.002)$

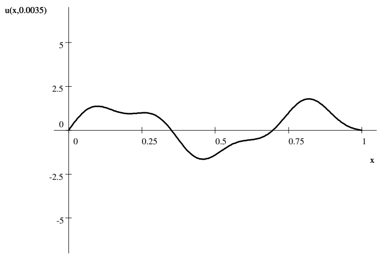


Gráfico de $u(x,0.0035)$

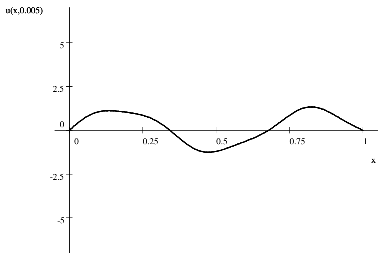
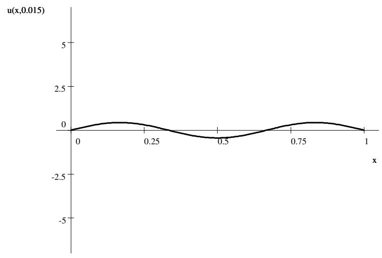


Gráfico de $u(x,0.005)$



Gráfica de $u(x,0.015)$

Exemplo 6.6 *Voltemos a considerar o problema abordado no exemplo precedente, mas agora considerando uma barra de cobre fina ($\alpha^2 = 1.14$) de comprimento unitário que tem os extremos isolados. Estando os extremos isolados, não há fluxo de calor através dos extremos, e sendo esse fluxo proporcional ao gradiente de temperatura u_x, terá de se impor $u_x = 0$ em $x = 0$ e $x = l$.*

Solução. *Neste caso a temperatura $u(x,t)$ deve verificar o seguinte problema*

$$\begin{array}{ll} u_t = 1.14\, u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0 \end{array} .$$

De momento deixamos o perfil inicial de temperatura $f(x)$ em aberto. A mudança de variável é a habitual, $u(x,t) = X(x)\,T(t)$, resultando novamente

$$\frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\lambda.$$

No entanto, a condição de fronteira

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

implica agora que

$$0 = u_x(0,t) = X'(0)\,T(t)$$

e

$$0 = u_x(1,t) = X'(1)\,T(t),$$

para todo $t > 0$*, e por isso* $X'(0) = 0$ *e* $X'(1) = 0$ *(porquê?). Portanto,* $u(x,t) = X(x)T(t)$ *é solução do problema dado se*

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(1) = 0.$$

Ora, a resolução deste PVF foi proposta no Problema 5.1 (ver página 232), tendo este solução não trivial $X(x)$ *apenas quando* $\lambda_n = n^2\pi^2$*,* $n \in \mathbb{N}_0$ *e, neste caso,*

$$X(x) = X_n(x) = \cos n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Assim, uma vez que a EDO para $T(t)$ *é a mesma do exemplo precedente, tem-se*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cos n\pi x\, e^{-1.14n^2\pi^2 t} = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos n\pi x\, e^{-1.14n^2\pi^2 t}.$$

Portanto,

$$u(x,0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos n\pi x = f(x),$$

para todo $0 < x < 1$*. Nesta fase só podemos determinar os valores das constantes* c_n *se o perfil inicial de temperatura for uma combinação apropriada de cossenos. Suponhamos que* $f(x) = 3 - 2\cos 4\pi x$*. Neste caso tem-se que todos os* c*'s são nulos exceto* $c_0 = 3$ *e* $c_4 = -2$*, vindo*

$$u(x,t) = 3 - 2\cos 4\pi x\, e^{-18.24\pi^2 t}.$$

Neste caso tem-se

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 3,$$

conforme é patente na representação gráfica de $u(x,t)$*. Conforme veremos, este limite corresponde, neste tipo de problema, ao valor médio de* $f(x)$ *no intervalo* $[0,1]$*.*

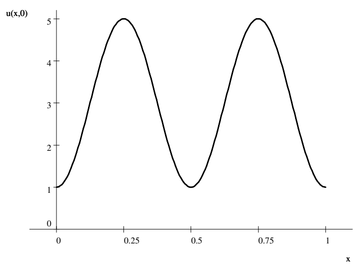


Gráfico de $u(x,0)$

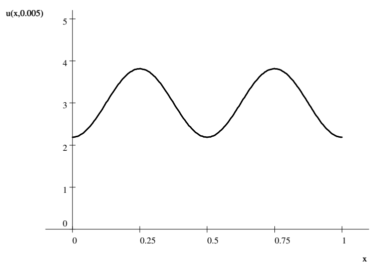


Gráfico de $u(x,0.005)$

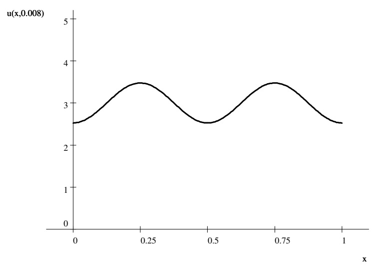


Gráfico de $u(x,0.008)$

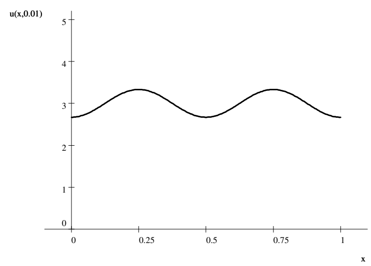


Gráfico de $u(x, 0.01)$

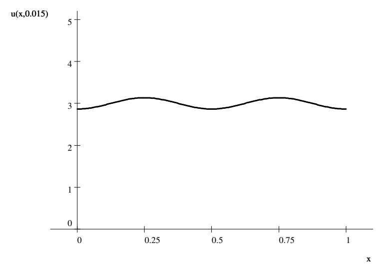


Gráfico de $u(x, 0.015)$

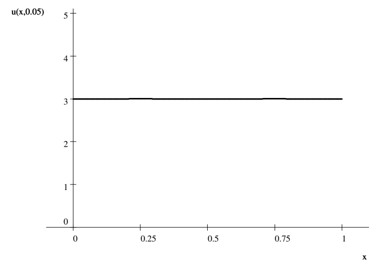


Gráfico de $u(x, 0.05)$

Exemplo 6.7 *Determinar a solução do seguinte problema usando o método de separação de variáveis.*

$$\begin{array}{ll} u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta^2 u, & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(x,0) = 3\operatorname{sen} 2x - 7\operatorname{sen} 4x, & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0. & t > 0 \end{array}.$$

Este problema corresponde a um modelo para uma barra cilíndrica fina que troca calor com o meio circundante (suposto à temperatura nula) não só através dos seus extremos, mas também através da restante superfície, tendo-se

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho c_p}, \quad \beta^2 = \frac{hP}{A\rho c_p},$$

onde h é o coeficiente de convecção de calor, A a área da secção transversal da barra e P o respetivo perímetro.

Solução. *Admitindo, uma vez mais, que a solução $u(x,t)$ se pode escrever na forma*

$$u(x,t) = X(x)\,T(t),$$

resulta de $u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta^2 u$,

$$X\,T' = \alpha^2 X''\,T - \beta^2 X\,T \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^{-2}\left(\frac{T'}{T} + \beta^2\right) = \frac{X''}{X}.$$

Assim, deverá ter-se

$$\frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \alpha^{-2}\left(\frac{T'}{T} + \beta^2\right) = -\lambda$$

para algum valor da constante λ. Portanto, as funções $X(x)$ e $T(t)$ devem obedecer a

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + (\lambda\alpha^2 + \beta^2)T = 0,$$

tendo-se ainda as condições de fronteira

$$0 = u(0,t) = X(0)\,T(t), \quad 0 = u(\pi,t) = X(\pi)\,T(t),$$

para todo $t > 0$, implicando $X(0) = 0$, $X(\pi) = 0$. Ora, conforme vimos anteriormente, o PVF

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0,$$

só tem solução não trivial se

$$\lambda = \lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

e neste caso

$$X(x) = X_n(x) = \operatorname{sen} nx.$$

Por outro lado, a equação diferencial $T' + (\lambda\alpha^2 + \beta^2)T$ *conduz a*

$$T(t) = T_n(t) = e^{-(\lambda_n \alpha^2 + \beta^2)t} = e^{-(\alpha^2 n^2 + \beta^2)t}.$$

Assim,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} nx \, e^{-(\alpha^2 n^2 + \beta^2)t}$$

é solução do problema

$$\begin{array}{ll} u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta^2 u, & t > 0, \ 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0. & t > 0 \end{array},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Ora, uma vez que se impõe*

$$u(x,0) = 3\operatorname{sen} 2x - 7\operatorname{sen} 4x, \quad 0 < x < \pi,$$

deverá ter-se

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} nx = 3\operatorname{sen} 2x - 7\operatorname{sen} 4x,$$

pelo que as constantes são todas nulas exceto $c_2 = 3$ *e* $c_4 = -7$. *A solução do problema proposto é então*

$$u(x,t) = 3\operatorname{sen} 2x \, e^{-(4\alpha^2+\beta^2)t} - 7\operatorname{sen} 4x \, e^{-(16\alpha^2+\beta^2)t}.$$

De notar que $u(x,0) = 3\operatorname{sen} 2x - 7\operatorname{sen} 4x$, *conforme requerido e*

$$\begin{aligned} u_t &= -(12\alpha^2 + 3\beta^2)\operatorname{sen} 2x \, e^{-(4\alpha^2+\beta^2)t} + (112\alpha^2 + 7\beta^2)\operatorname{sen} 4x \, e^{-(16\alpha^2+\beta^2)t}, \\ \alpha^2 u_{xx} &= -12\alpha^2 \operatorname{sen} 2x \, e^{-(4\alpha^2+\beta^2)t} + 112\alpha^2 \operatorname{sen} 4x \, e^{-(16\alpha^2+\beta^2)t}, \\ -\beta^2 u &= -3\beta^2 \operatorname{sen} 2x \, e^{-(4\alpha^2+\beta^2)t} + 7\beta^2 \operatorname{sen} 4x \, e^{-(16\alpha^2+\beta^2)t}. \end{aligned}$$

Ou seja, a solução obtida verifica a EDP $u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta^2 u$. *Tem-se, tal como no exemplo precedente,*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0.$$

A respetiva representação gráfica (assumindo $\alpha^2 = \beta^2 = 1$*) é apresentada de seguida.*

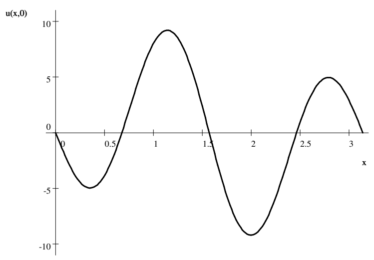


Gráfico de $u(x,0)$

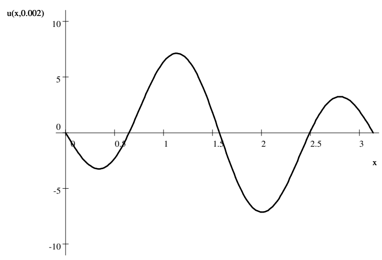


Gráfico de $u(x,0.002)$

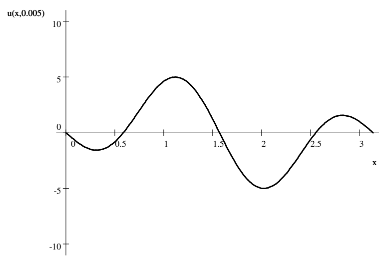


Gráfico de $u(x,0.005)$

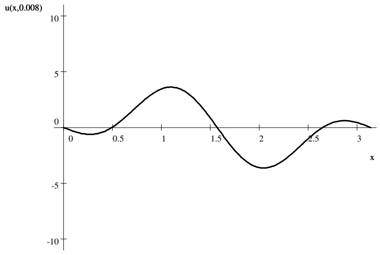


Gráfico de $u(x, 0.008)$

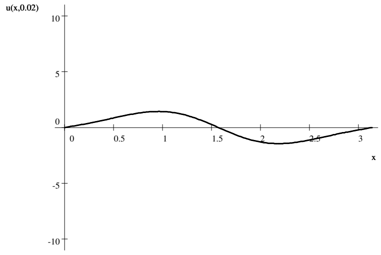


Gráfico de $u(x, 0.02)$

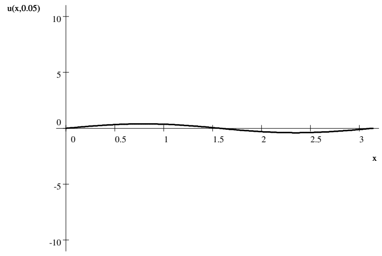


Gráfico de $u(x, 0.05)$

Problema Determinar a solução do seguinte problema usando o método de separação de variáveis e representar graficamente a solução obtida para vários instantes de tempo.

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} - \pi^2 u, & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(x,0) = -1/2 + \cos x, & 0 < x < \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0. & t > 0 \end{array} .$$

Este problema corresponde a um modelo para uma barra cilíndrica fina, isolada nos extremos, mas que troca calor com o meio circundante (suposto à temperatura nula) através da restante superfície.
Resp.: $u(x,t) = -1/2e^{-t} + \cos x\, e^{-2t}$.

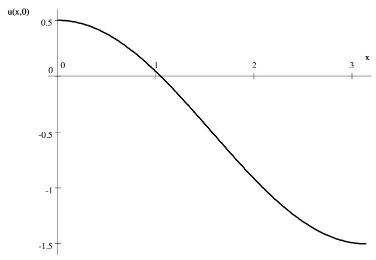


Gráfico de $u(x, 0)$

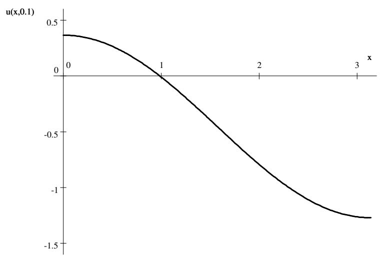


Gráfico de $u(x, 0.1)$

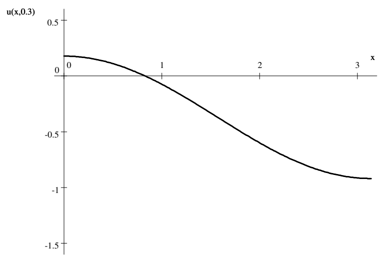


Gráfico de $u(x, 0.3)$

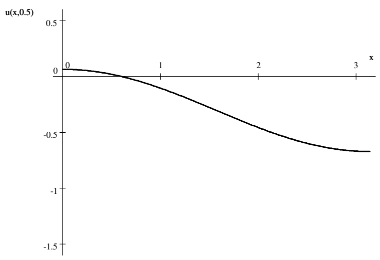


Gráfico de $u(x, 0.5)$

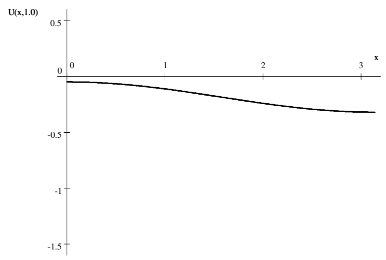


Gráfico de $u(x, 1.0)$

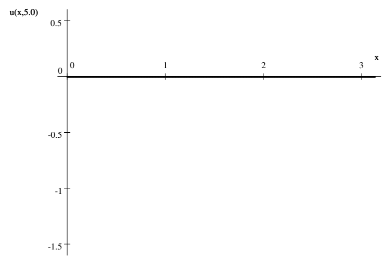


Gráfico de $u(x, 5.0)$

Nos exemplos/problemas precedentes o perfil inicial de temperatura foi "ajustado" de forma a poder-se determinar a solução do problema usando o método de separação de variáveis. A forma de evitar este condicionamento envolve, conforme veremos de seguida, o uso de séries de Fourier. Por outro lado, as condições de fronteira usadas, seja na temperatura seja no seu gradiente, foram sistematicamente homogéneas. Há casos em que é possível resolver o problema da equação de calor analiticamente ainda que as condições de fronteira do problema físico não sejam homogéneas. Para o fazer é necessário recorrer a uma mudança de variável adequada que transforme o problema original noutro problema em que as condições de fronteira sejam homogéneas, pois essa é uma condição necessária para se poder usar o método de separação de variáveis, e que preserve a forma do problema da equação de calor para assim podermos aplicar o método que temos vindo a usar na resolução deste tipo de problema. Estes dois aspetos, perfil inicial de temperatura e condições de fronteira, não são independentes e por isso serão abordados em conjunto no contexto das séries de Fourier.

Exercícios sobre a resolução da equação de calor usando o método de separação de variáveis

Exercício 6.2 *Determinar a solução do seguinte problema e realizar a respetiva representação gráfica para vários instantes de tempo.*

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(x,0) = 5\operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} 5x, & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0. & t > 0 \end{array}.$$

Exercício 6.3 *Determinar a solução do seguinte problema e realizar a respetiva representação gráfica para vários instantes de tempo.*

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \pi/2 \\ u(x,0) = 5\operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} 5x, & 0 < x < \pi/2 \\ u(0,t) = u_x(\pi/2,t) = 0. & t > 0 \end{array}.$$

Nota: Pode ser útil ter presente o resultado do Exercício 5.1 (ver página 243).

Exercício 6.4 *A equação de calor no espaço bidimensional é dada por*

$$u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy}). \tag{6.22}$$

(a) Supondo que $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$, determinar as equações diferenciais ordinárias que devem ser satisfeitas por X, Y e T;

(b) Determinar soluções $u(x,y,t)$ da equação diferencial (6.22) que satisfaçam as condições de fronteira $u(0,y,t) = 0$, $u(a,y,t) = 0$, $u(x,0,t) = 0$, $u(x,b,t) = 0$.

6.3 Séries de Fourier: definição e principais propriedades

Definição

Muitos problemas de valores de fronteira clássicos admitem soluções separadas envolvendo funções trigonométricas. É neste contexto que surge a teoria das séries de Fourier.

Em 1807 Fourier postulou que qualquer função $f(x)$ pode ser desenvolvida numa série infinita de senos e cossenos. Mais concretamente, seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $-l < x < l$ e definam-se as sucessões (numéricas)

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.23}$$

e

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.24}$$

Então, em determinadas condições, a série infinita

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{l} + b_1\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{6.25}$$

converge para $f(x)$. O facto é que apenas recentemente foi possível estabelecer condições extremamente precisas para que a série (6.25) convirja. Este resultado constitui, na realidade, um dos teoremas matemáticos mais importantes do século XX. O teorema que se enuncia de seguida, embora não seja o mais geral possível, abarca as situações mais relevantes que surgem em aplicações.

Definição 6.1 *A série infinita (6.25), com coeficientes a_n e b_n dados por (6.23) e (6.24), respetivamente, designa-se* ***série de Fourier*** *da função f no intervalo $-l < x < l$.*

Nota O termo da série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

mais não é do que o valor médio da função f no intervalo $-l < x < l$.

Por comodidade definimos

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right),$$

que é a soma parcial de ordem N da série trigonométrica (6.25).

Tem-se o seguinte resultado relativo à convergência (pontual) da série de Fourier (6.25).

Teorema 6.1 (Teorema da Convergência). *Sejam f e f' funções seccionalmente contínuas no intervalo $-l < x < l$, e considere-se $f(x^-) \equiv \lim_{t\to x^-} f(t)$ e $f(x^+) \equiv \lim_{t\to x^+} f(t)$. Então a série de Fourier de f (6.25) converge (pontualmente) para $f(x)$ se esta função for contínua em x, e para $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ se f for descontínua em x. Em $x = \pm l$ a série de Fourier (6.25) converge para $[f(l) + f(-l)]/2$, onde $f(\pm l)$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para $\pm l$.*

Nota A quantidade $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ é a média aritmética dos limites de f à esquerda e à direita no ponto x. Se definirmos $f(x)$ como sendo a média aritmética dos limites de f à esquerda e à direita para qualquer ponto de descontinuidade x, então a série de Fourier (6.25) converge para $f(x)$ em todos os pontos x do intervalo $-l < x < l$.

Quando falamos de **convergência pontual** da série de Fourier estamos a dizer que fixando um qualquer valor de x no intervalo $-l < x < l$, então existe uma valor de $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Se considerarmos outro valor de x nesse mesmo intervalo, então o valor de N vai ser, em princípio, distinto, pelo que $N = N(\varepsilon, x)$. Caso, uma vez fixado o valor de ε, exista um valor de N que não dependa de x tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n > N$, então além de convergência pontual temos também **convergência uniforme**. Assim, a existência de convergência uniforme implica a existência de convergência pontual, mas o recíproco não é verdade conforme se ilustrará nos exemplos seguintes. Quando o tipo de convergência não é especificado, convenciona-se que estamos a referir-nos à convergência pontual.

Exemplo 6.8 *Seja f a função dada por*

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0\\ 1, & 0\le x<1\end{cases}.$$

Determinar a série de Fourier de f no intervalo $-1<x<1$ e analisar a sua convergência nesse intervalo.

Solução. *Neste caso, $l=1$. Portanto, de (6.23) e (6.24) resulta,*

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_0^1 dx=1,$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\,\cos n\pi x\,dx=\int_0^1\cos n\pi x\,dx=0,\quad n\in\mathbb{N},$$

e

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\,\operatorname{sen} n\pi x\,dx=\int_0^1\operatorname{sen} n\pi x\,dx=\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{1-(-1)^n}{n\pi},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Assim,

$$b_n=\begin{cases}0, & n \text{ par}\\ 2/n\pi, & n \text{ ímpar}\end{cases}.$$

Portanto, a série de Fourier da função f no intervalo $-1<x<1$ é tal que

$$f_N(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\pi x}{1}+\frac{\operatorname{sen}3\pi x}{3}+\ldots+\frac{\operatorname{sen}(2N-1)\pi x}{2N-1}\right]=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{2n-1}.$$

Pelo Teorema 6.1, esta série converge para 0 se $-1<x<0$ e para 1 se $0<x<1$; em $x=-1$, 0 e $+1$ a série converge para $1/2$.

De seguida apresentam-se alguns gráficos que ilustram a forma como a série de Fourier tende para a função f.

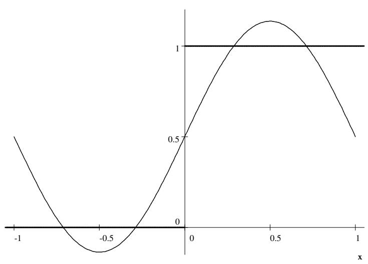


Gráfico de $f_1(x)$ e $f(x)$

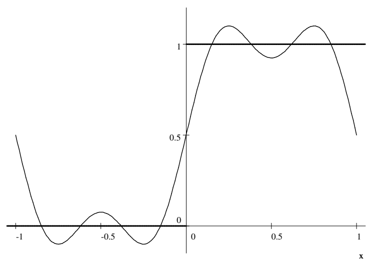


Gráfico de $f_2(x)$ e $f(x)$

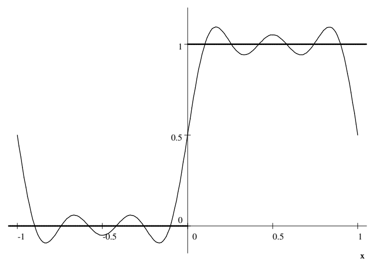


Gráfico de $f_3(x)$ e $f(x)$

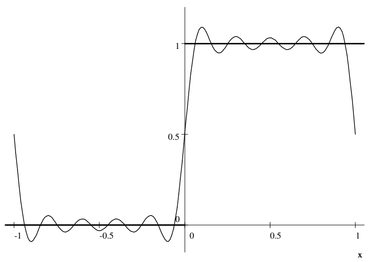


Gráfico de $f_5(x)$ e $f(x)$

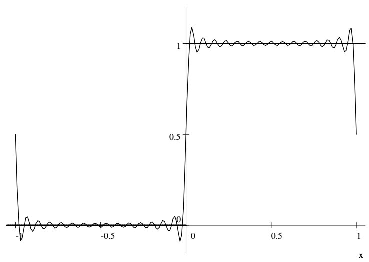


Gráfico de $f_{15}(x)$ e $f(x)$

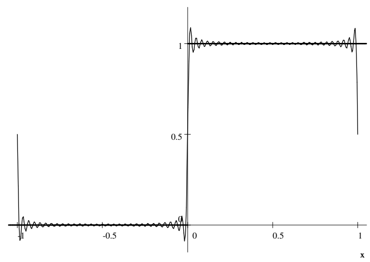


Gráfico de $f_{30}(x)$ e $f(x)$

Note-se desde já que a convergência não é uniforme uma vez que por mais elevado que seja o valor de N considerado, há sempre valores de x (na vizinhança da descontinuidade e dos extremos do intervalo $[-l, l]$) para os quais a série de Fourier não tende para a função f. Ou seja, fixando um valor de ε suficientemente pequeno, não existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo x.

Exemplo 6.9 *Seja $g(x)$ a função definida por*

$$g(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}.$$

Determinar a série de Fourier da função g no intervalo $-2 < x < 2$.

Solução. *Nesta caso, $l = 2$. Portanto, de (6.23) e (6.24), resulta*

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\,dx = 2,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos\pi n - 1\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,dx = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos\pi n + 1\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tem-se, então,

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -4/n^2\pi^2, & n \text{ ímpar} \end{cases}, \quad b_n = \begin{cases} -2/n\pi, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ ímpar} \end{cases}.$$

pelo que a série de Fourier da função g no intervalo $-2 < x < 2$ é tal que

$$g_N(x) = 1 - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{4}{\pi}\frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2} + \frac{\mathrm{sen}\,n\pi x}{n}\right].$$

Pelo Teorema 6.1, esta série converge para 1 se $-2 < x < 0$, para x se $0 < x < 2$, para $1/2$ se $x = 0$, e para $3/2$ se $x = \pm 2$.

Apresentam-se de seguida alguns gráficos que ilustram a forma como a série de Fourier tende para a função g.

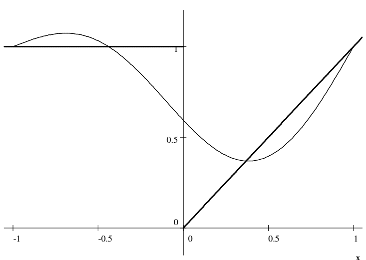


Gráfico de $g_1(x)$ e $g(x)$

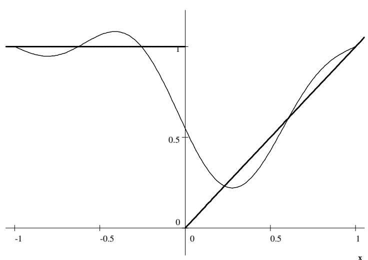


Gráfico de $g_2(x)$ e $g(x)$

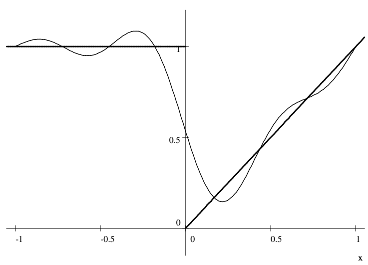


Gráfico de $g_3(x)$ e $g(x)$

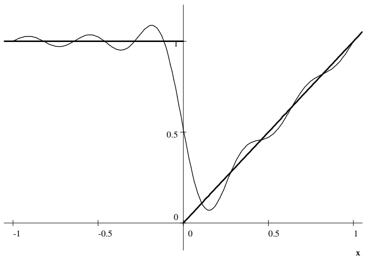


Gráfico de $g_5(x)$ e $g(x)$

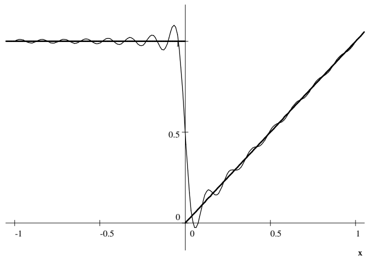


Gráfico de $g_{15}(x)$ e $g(x)$

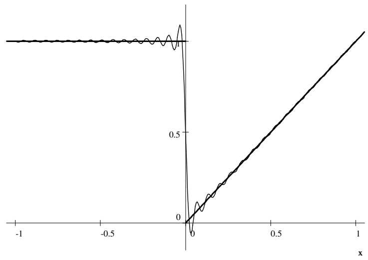


Gráfico de $g_{30}(x)$ e $g(x)$

Tal como no exemplo precedente, não existe convergência uniforme devido à descontinuidade da função g *em* $x = 0$.

Problema Seja r a função dada por

$$r(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

Determinar a série de Fourier de r no intervalo $-1 < x < 1$ e analisar a sua convergência nesse intervalo.
Resp.: $r_N(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \left[1 - (-1)^n\right] \operatorname{sen} nx = -\frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)\, x$.

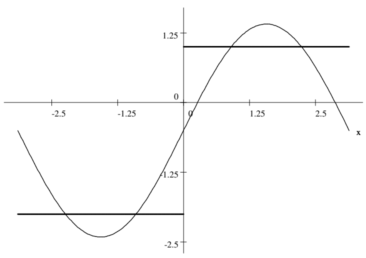


Gráfico de $r_1(x)$ *e* $r(x)$

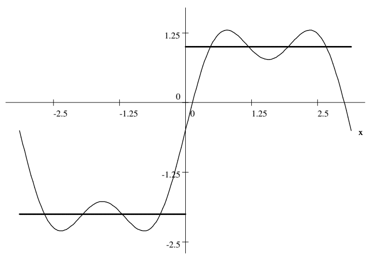


Gráfico de $r_2(x)$ *e* $r(x)$

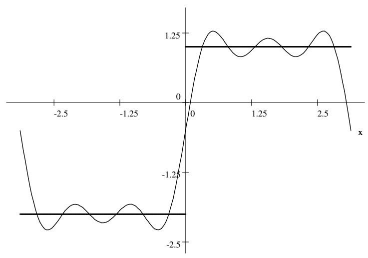


Gráfico de $r_3(x)$ *e* $r(x)$

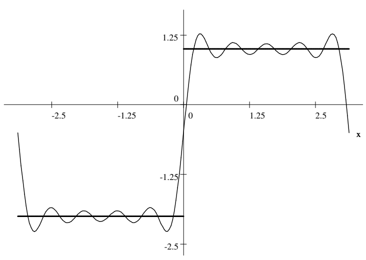


Gráfico de $r_5(x)$ *e* $r(x)$

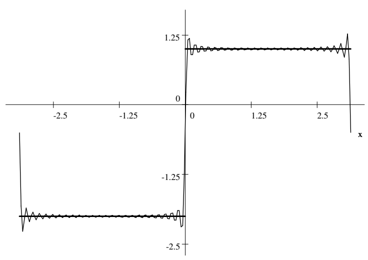


Gráfico de $r_{25}(x)$ *e* $r(x)$

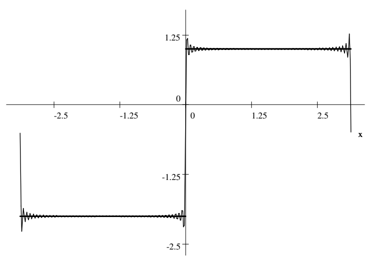


Gráfico de $r_{50}(x)$ *e* $r(x)$

Como seria de esperar, observa-se convergência pontual de forma análoga ao observado no Exemplo 6.8, mas não há convergência uniforme.

Os exemplos/problema precedentes correspondem a séries de Fourier de funções descontínuas e por isso, conforme veremos de seguida, observa-se um comportamento "oscilante" da série de Fourier na vizinhança dos pontos de descontinuidade da função denominado "fenómeno de Gibbs". Este comportamento também se verifica na vizinhança dos extremos do intervalo considerado caso a função em causa tenha limites distintos quando $x \to \pm l$ (como é o caso no Exemplo 6.8 e no problema precedente). No exemplo seguinte este comportamento não se verifica.

Exemplo 6.10 *Seja $v(x)$ a função definida por*

$$v(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x(\pi - x), & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

Determinar a série de Fourier da função v no intervalo $-\pi < x < \pi$.

Solução. *Tem-se,*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\;dx = \frac{1}{6}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\,\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos nx\,dx = -\frac{(-1)^n + 1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\,\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\operatorname{sen} nx\,dx = -2\frac{(-1)^n - 1}{n^3\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ímpar} \\ -2/n^2, & n \text{ par} \end{cases}, \quad b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ 4/\left(n^3\pi\right), & n \text{ ímpar} \end{cases}, \tag{6.26}$$

então a série de Fourier da função v no intervalo $-\pi < x < \pi$ é tal que

$$\widetilde{v}_N(x) = \frac{1}{12}\pi^2 + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{4}{(2n-1)^3\pi}\operatorname{sen}(2n-1)\,x - \frac{1}{2n^2}\cos 2nx\right]$$

Apresentam-se de seguida alguns gráficos que ilustram a forma como a série de Fourier tende para a função v.

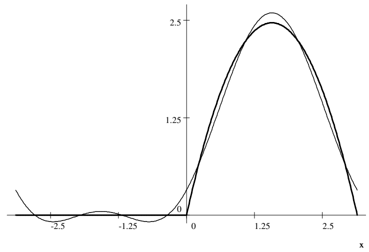


Gráfico de $\widetilde{v}_1(x)$ e $v(x)$

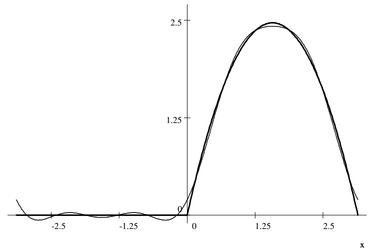


Gráfico de $\widetilde{v}_2(x)$ e $v(x)$

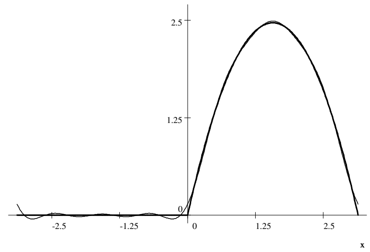


Gráfico de $\widetilde{v}_3(x)$ e $v(x)$

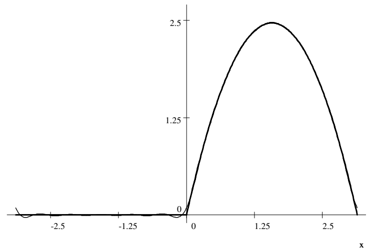


Gráfico de $\widetilde{v}_5(x)$ e $v(x)$

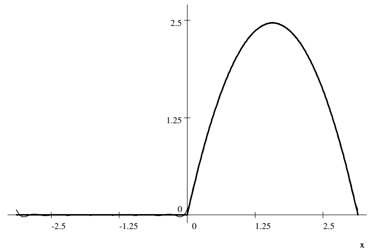


Gráfico de $\widetilde{v}_7(x)$ e $v(x)$

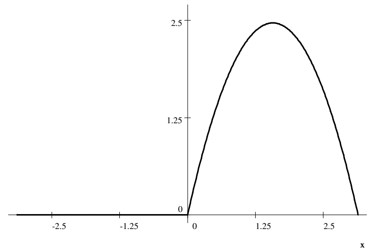


Gráfico de $\widetilde{v}_{50}(x)$ e $v(x)$

Neste caso, além de convergência pontual temos também convergência uniforme uma vez que a série de Fourier da função v aproxima a função globalmente tão bem quanto se queira, desde que o valor de N seja suficientemente elevado.

Nota Como a série de Fourier associada da função v no intervalo $-\pi < x < \pi$ tem vários termos cuja contribuição é nula, conforme se conclui facilmente de (6.26), optou-se por escrever a série numa forma em que esses termos nulos não surgem. Por esse motivo tem-se $\widetilde{v}_N(x) = v_{2N}(x),\ N \in \mathbb{N}$ (porquê?).

Problema Determinar a série de Fourier da função $q(x) = x^2$ no intervalo $-\pi < x < \pi$.
Resp.: $q_N(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$.

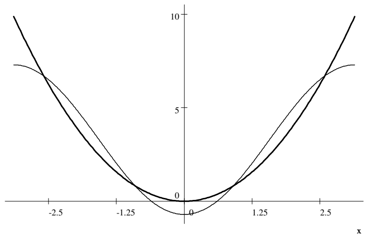


Gráfico de $q_1(x)$ *e* $q(x)$

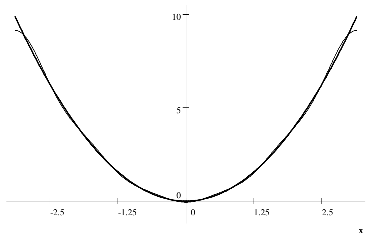


Gráfico de $q_5(x)$ *e* $q(x)$

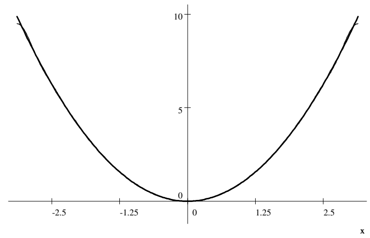


Gráfico de $q_{10}(x)$ *e* $q(x)$

Em certos casos, os coeficientes de Fourier definidos por (6.23) e (6.24) podem ser obtidos de forma simples, sem ter de se recorrer à respetiva definição para os calcular, conforme mostra o seguinte resultado.

Teorema 6.2 *Se uma função seccionalmente contínua $f(x)$ puder ser expressa como uma série de senos e cossenos no intervalo $-l < x < l$ da forma*

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k \cos\frac{k\pi x}{l} + d_k \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\right),$$

então essa série tem de ser necessariamente a série de Fourier de $f(x)$, isto é (6.25).

Demonstração *Suponhamos que $f(x)$ é uma função seccionalmente contínua e que*

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k \cos\frac{k\pi x}{l} + d_k \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{6.27}$$

para algumas constantes c_k e d_k. Supõe-se que a equação (6.27) é aplicável a todos os pontos do intervalo $-l < x < l$, com exceção de um número finito de pontos. Integrando ambos os membros de (6.27) entre $-l$ e l, obtém-se

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = c_0 l,$$

uma vez que

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(Nota: Pode-se mostrar, conforme veremos posteriormente, que a série (6.27) pode ser integrada termo a termo).

De forma análoga, multiplicando ambos os membros de (6.27) por $\cos n\pi x/l$ *e integrando entre* $-l$ *e* l *conduz a*

$$l\, c_n = \int_{-l}^{l} f(x)\, \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

enquanto que multiplicando ambos os membros de (6.27) por $\operatorname{sen} n\pi x/l$ *e integrando entre* $-l$ *e* l *leva a*

$$l\, d_n = \int_{-l}^{l} f(x)\, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

Isto deve-se ao facto de se terem os seguintes resultados (ver Exercício 6.7)

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi x}{l}\, \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ l, & k = n \end{cases}, \tag{6.28}$$

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}\, \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = 0, \tag{6.29}$$

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}\, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ l, & k = n \end{cases}, \tag{6.30}$$

que traduzem ***relações de ortogonalidade****.*

Portanto, os coeficientes c_n *e* d_n *devem ser iguais aos coeficientes de Fourier* a_n *e* b_n *dados por (6.23) e (6.24), respetivamente. Assim, uma função* f *pode ser desenvolvida em série de Fourier de forma única no intervalo* $-l < x < l$*.* ■

Exemplo 6.11 *Determinar a série de Fourier da função* $\cos^2 x$ *no intervalo* $-\pi < x < \pi$*.*

Solução. *Conforme acabámos de ver, a função* $\cos^2 x$ *tem uma e uma só série de Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\pi} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

no intervalo $-\pi < x < \pi$*. Mas, uma vez que,*

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x,$$

então a série de Fourier de $\cos^2 x$ *no intervalo* $-\pi < x < \pi$ *é* $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$*.*

Problema Determinar a série de Fourier da função $\operatorname{sen}^2 x$ no intervalo $-\pi < x < \pi$.
Resp.: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

As funções $\cos n\pi x/l$ e $\operatorname{sen} n\pi x/l$, $n \in \mathbb{N}$, são periódicas com período $2l$, pelo que se repetem a cada intervalo de amplitude $2l$:

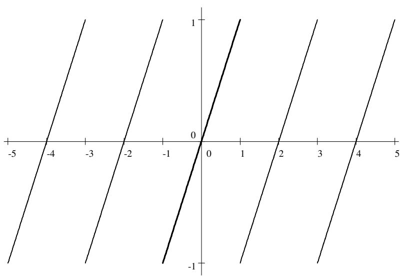
$$\cos \frac{n\pi}{l}(x + 2l) = \cos \left(\frac{n\pi x}{l} + 2n\pi \right) = \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{l}(x + 2l) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} + 2n\pi \right) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

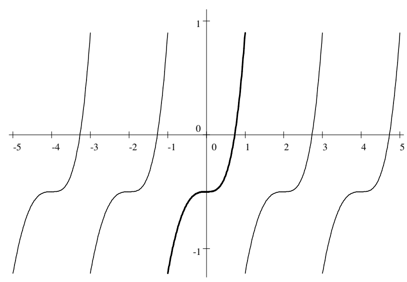
Assim sendo, na realidade a série de Fourier de $f(x)$ (6.25) está definida para todo x real e converge para uma função periódica $F(x)$. Esta função é designada **extensão periódica** de $f(x)$, sendo definida por

$$\begin{cases} F(x) = f(x), & -l < x < l \\ F(x) = \frac{1}{2}\left[f(l) - f(-l)\right], & x = \pm l \\ F(x+2l) = F(x) & \end{cases}.$$

Exemplo 6.12 *A extensão periódica da função $f(x) = x$ e da função $g(x) = x^3 e^{x/3} - 1/2$, se estas estiverem definidas no intervalo $-1 < x < 1$, têm a seguinte representação gráfica*



Extensão periódica da função $f(x)$



Extensão periódica da função $g(x)$

Série de Fourier de funções pares e de funções ímpares

Existem casos particulares em que a série de Fourier de uma função f se resume a uma série envolvendo apenas senos ou apenas cossenos. Esta situação ocorre quando f é uma função par ou uma função ímpar.

Definição 6.2 *Uma função f diz-se uma **função par** se $f(-x) = f(x)$.*

Exemplo 6.13 *A função $f(x) = x^2$ é uma função par pois*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Exemplo 6.14 *A função $g(x) = \cos n\pi x/l$ é uma função par já que*

$$g(-x) = \cos(-n\pi x/l) = \cos n\pi x/l = g(x).$$

Definição 6.3 *Uma função f diz-se uma **função ímpar** se $f(-x) = -f(x)$.*

Exemplo 6.15 *A função $f(x) = x^3$ é uma função ímpar pois*

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Exemplo 6.16 *A função $g(x) = \operatorname{sen} n\pi x/l$ é uma função ímpar uma vez que*

$$g(-x) = \operatorname{sen}(-n\pi x/l) = -\operatorname{sen} n\pi x/l = -g(x).$$

Mostra-se facilmente que as funções pares e ímpares têm as seguintes propriedades elementares.

P1. O produto de duas funções pares é uma função par.

P2. O produto de duas funções ímpares é uma função par.

P3. O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

P4. Se f é uma função ímpar definida no intervalo $[-l, l]$, então

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 0.$$

P5. Se f é uma função par definida no intervalo $[-l, l]$, então

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{l} f(x)\, dx.$$

Relativamente às funções pares e ímpares tem-se o seguinte lema.

Lema 6.3 *Tem-se:*

(a) A série de Fourier no intervalo $-l < x < l$ de uma função par é uma série de cossenos, ou seja, não contém qualquer termo do tipo $\operatorname{sen} n\pi x/l$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) A série de Fourier no intervalo $-l < x < l$ de uma função ímpar é uma série de senos, isto é, não contém qualquer termo do tipo $\cos n\pi x/l$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração *(a) Se f é par, então $f(x) \operatorname{sen} n\pi x/l$ é ímpar. Logo, pela Propriedade P4, os coeficientes*

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

da série de Fourier de f são todos nulos;

(b) Se f é ímpar, então $f(x) \cos n\pi x/l$ é ímpar. Consequentemente, pela Propriedade P4, os coeficientes

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots$$

da série de Fourier de f são todos nulos. ■

6.3.1 Séries de Fourier de cossenos e séries de Fourier de senos

Até agora vimos que, em geral, a série de Fourier no intervalo $-l < x < l$ de uma função tem senos e cossenos. Se a função for par então a sua série de Fourier (que é única) não tem senos e se f for ímpar então a respetiva série de Fourier só tem senos. Veremos agora como, dada uma função definida no intervalo $0 < x < l$, podemos obter uma série de Fourier contendo apenas senos ou apenas cossenos, consoante desejarmos. Recordemos, a este propósito, que as equações que temos em aberto no âmbito da equação de calor envolvendo o perfil inicial de temperatura $f(x)$ são:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad 0 < x < l; \qquad c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad 0 < x < l,$$

cada uma delas correspondendo a um tipo de condições de fronteira, onde as incógnitas são as constantes reais c_i.

Para esse efeito comecemos por demonstrar o seguinte teorema que constitui uma extensão do Teorema 6.1 (ver página 270). Este teorema possibilitará a resolução do problema de valores iniciais e valores de fronteira envolvendo a equação de calor já abordado na Secção 6.2, bem como a resolução de outros problemas relevantes em vários domínos.

Teorema 6.4 *Sejam f e f' funções seccionalmente contínuas no intervalo $0 < x < l$. Então, neste intervalo, a função f pode ser desenvolvida numa série só de cossenos*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

ou numa série só de senos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

No primeiro caso os coeficientes a_n são dados por

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.31}$$

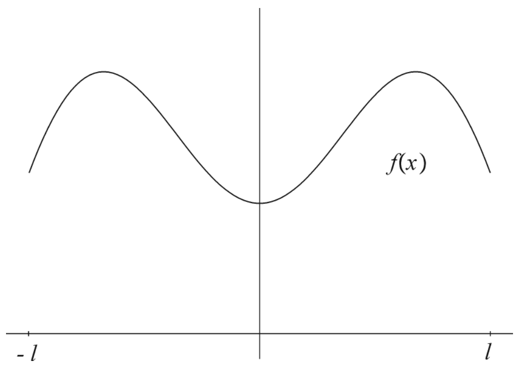
enquanto que no segundo caso os coeficientes b_n são dados por

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.32}$$

Demonstração *Comecemos por considerar a função*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x < l \\ f(-x), & -l < x < 0 \end{cases}.$$

*Embora a função $f(x)$ não esteja definida em $x = 0$, podemos considerar que $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ dado f ser seccionalmente contínua em $0 < x < l$. Apresenta-se de seguida a representação gráfica de $F(x)$, sendo fácil de contatar que esta função é par (por esta razão F é designada a **extensão par** de f em $-l < x < l$).*



Portanto, pelo Lema 6.3, a série de Fourier de F no intervalo $-l < x < l$ contém apenas cossenos:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{6.33}$$

Tem-se ainda que a função $F(x) \cos n\pi x/l$ é par. Assim, pela Propriedade P5, tem-se

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

Finalmente, uma vez que $F(x) = f(x)$ para $0 < x < l$, então de (6.33) resulta

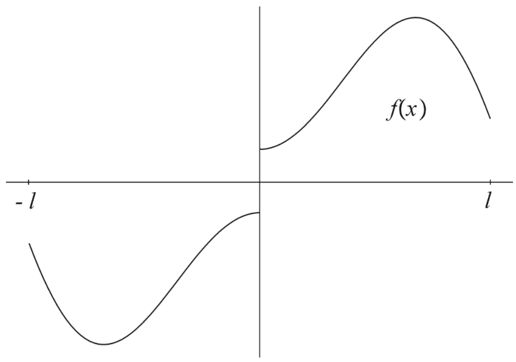
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l.$$

De notar ainda que a série (6.33) converge para $f(x)$ em $x = 0$. Fica assim demonstrado o resultado relativo à possibilidade de escrever $f(x)$ como uma série de cossenos no intervalo $0 < x < l$.

Para demonstrar que a função $f(x)$ também pode ser desenvolvida numa série de senos, consideremos a função

$$G(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < l \\ -f(-x), & -l < x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Apresenta-se de seguida a representação gráfica de $G(x)$, sendo fácil de ver que esta função é ímpar (por esta razão G é designada a ***extensão ímpar*** *de f em $-l < x < l$).*



Portanto, pelo Lema 6.3, a série de Fourier de G no intervalo $-l < x < l$ contém apenas senos:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} G(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{6.34}$$

Tem-se ainda que a função $G(x) \operatorname{sen} n\pi x/l$ é par. Portanto, pela Propriedade P5 (ver página 6.3), tem-se

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l G(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

Finalmente, uma vez que $G(x) = f(x)$ *para* $0 < x < l$*, então de (6.34) resulta*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l.$$

De notar ainda que a série (6.34) se anula em $x = 0$*. Fica assim demonstrado o resultado relativo à possibilidade de escrever* $f(x)$ *como uma série de senos no intervalo* $0 < x < l$*.* ■

Exemplo 6.17 *Desenvolver a função* $f(x) = 1$ *numa série de Fourier de senos no intervalo* $0 < x < \pi$*.*

Solução. *Pelo Teorema 6.4, tem-se*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

onde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos \pi n) = \begin{cases} 0, & n \text{ é par} \\ \dfrac{4}{n\pi}, & n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Assim,

$$f_N(x) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots + \frac{\operatorname{sen}[(2N-1)x]}{2N-1}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{sen}[(2n-1)x]}{2n-1}, \quad 0 < x < \pi.$$

Apresentam-se de seguida alguns gráficos que ilustram a forma como a série de Fourier tende para a função 1 no intervalo $0 < x < \pi$*.*

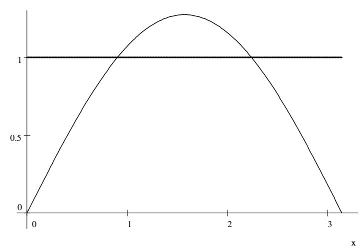


Gráfico de $f_1(x)$ e $f(x)$

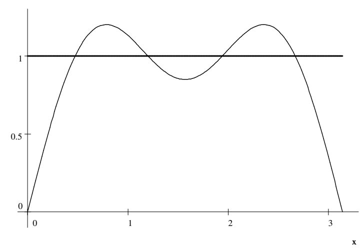


Gráfico de $f_2(x)$ e $f(x)$

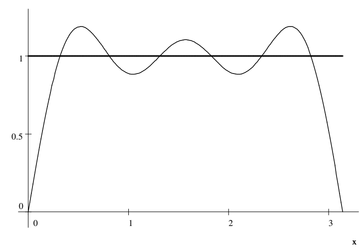


Gráfico de $f_3(x)$ e $f(x)$

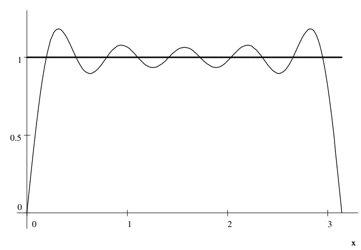


Gráfico de $f_5(x)$ e $f(x)$

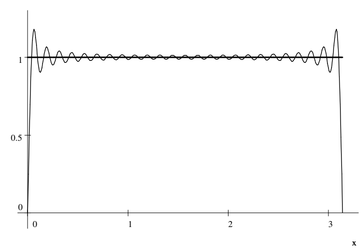


Gráfico de $f_{25}(x)$ e $f(x)$

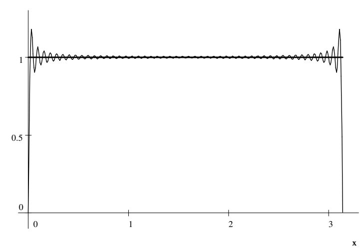


Gráfico de $f_{50}(x)$ e $f(x)$

Continua-se a observar o fenómeno de Gibbs. Tal deve-se ao facto de para obter a série de Fourier em senos no intervalo $0 < x < \pi$ *se ter de usar uma extensão ímpar da função 1. Ora, essa função é* *descontínua para $x = 0$ e assume o valor -1 no extremo $x = \pi$, resultando então o fenómeno de Gibbs na vizinhança quer de $x = 0$ quer de $x = 1$. Dada a forma como é feita a extensão ímpar, a série de Fourier em senos no intervalo $0 < x < l$ apresentará o fenómeno de Gibbs sempre que a função não se anule em $x = 0$ e em $x = l$.*

Problema Desenvolver a função $g(x) = x$ numa série de Fourier de senos no intervalo $0 < x < \pi$ e analisar a respetiva convergência.

Resp.: $g_N(x) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx$.

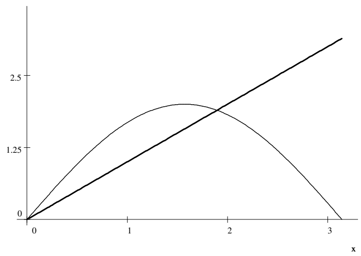


Gráfico de $g_1(x)$ *e* $g(x)$

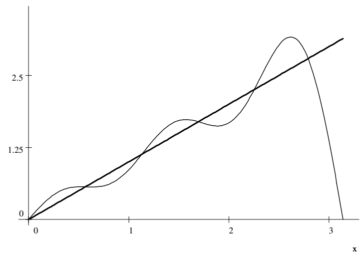


Gráfico de $g_5(x)$ *e* $g(x)$

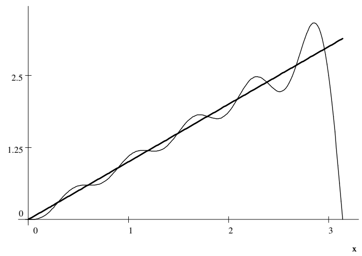


Gráfico de $g_{10}(x)$ *e* $g(x)$

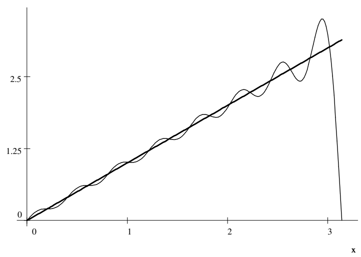


Gráfico de $g_{15}(x)$ *e* $g(x)$

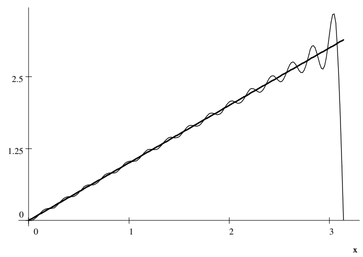


Gráfico de $g_{30}(x)$ *e* $g(x)$

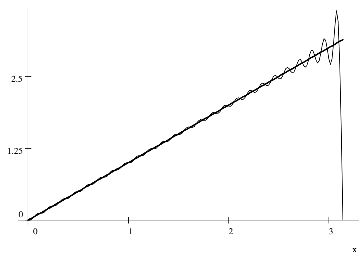


Gráfico de $g_{50}(x)$ *e* $g(x)$

O fenómeno de Gibbs surge apenas na vizinhança de $x = \pi$ conforme esperado (porquê?).

Exemplo 6.18 *Desenvolver a função $p(x) = \operatorname{sen} x$ numa série de Fourier de cossenos no intervalo $0 < x < \pi$.*

Solução. *Pelo Teorema 6.4, tem-se*

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

onde

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx \, dx = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2-1}\left(1+(-1)^n\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ é ímpar} \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1}, & n \text{ é par} \end{cases}.$$

Assim,

$$p_N(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2nx,$$

cuja representação gráfica é

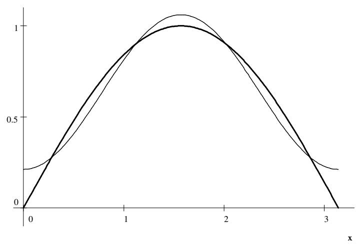


Gráfico de $p_1(x)$ e $p(x)$

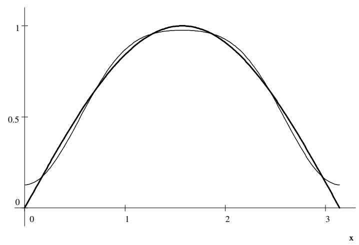


Gráfico de $p_2(x)$ e $p(x)$

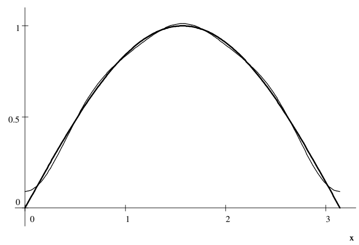


Gráfico de $p_3(x)$ e $p(x)$

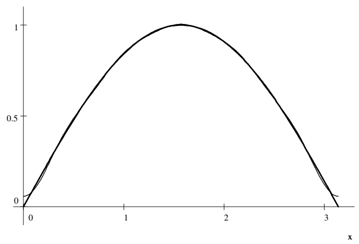


Gráfico de $p_5(x)$ e $p(x)$

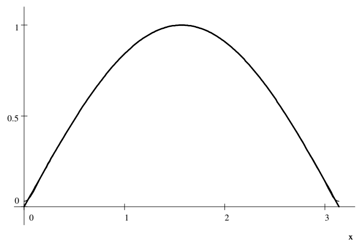


Gráfico de $p_{10}(x)$ e $p(x)$

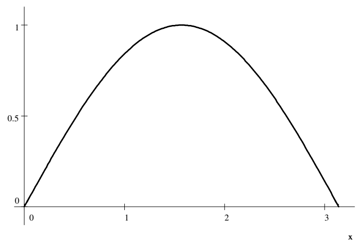


Gráfico de $p_{25}(x)$ e $p(x)$

No caso da série de Fourier em cossenos nunca se observa o fenómeno de Gibbs na vizinhança de $x = 0$ *ou de* $x = l$ *(porquê?).*

Problema Desenvolver a função $w(x) = \cos x$ numa série de Fourier de senos no intervalo $0 < x < \pi$.
Resp.: $w_N(x) = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{1-4n^2} \operatorname{sen} 2nx$.

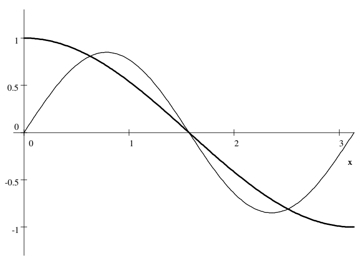


Gráfico de $w_1(x)$ *e* $w(x)$

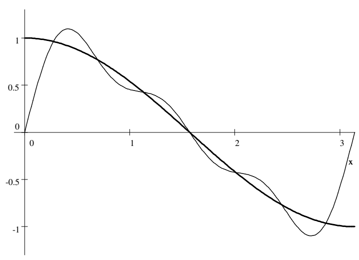


Gráfico de $w_3(x)$ *e* $w(x)$

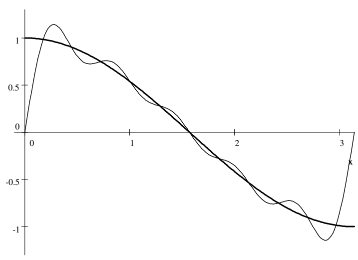


Gráfico de $w_5(x)$ *e* $w(x)$

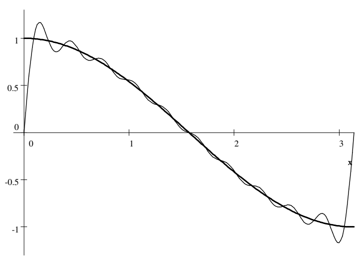


Gráfico de $w_{10}(x)$ *e* $w(x)$

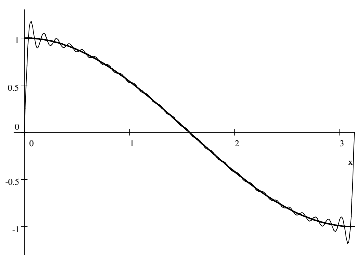


Gráfico de $w_{25}(x)$ *e* $w(x)$

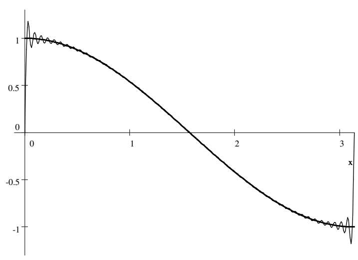


Gráfico de $w_{50}(x)$ *e* $w(x)$

O fenómeno de Gibbs surge apenas na vizinhança de $x = 0$ e $x = \pi$ conforme esperado (porquê?).

Exemplo 6.19 *Desenvolver a função $h(x) = e^x$ numa série de Fourier de cossenos no intervalo $0 < x < 1$.*

Solução. *Pelo Teorema 6.4, tem-se*

$$h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x,$$

onde

$$a_0 = 2\int_0^1 e^x\,dx = 2(e-1)$$

e

$$a_n = 2\int_0^1 e^x \cos n\pi x\,dx = \frac{2(e\cos n\pi - 1)}{\pi^2 n^2 + 1}.$$

Portanto,

$$h_N(x) = e - 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{e(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2 + 1} \cos n\pi x, \quad 0 < x < 1,$$

a que corresponde a seguinte representação gráfica.

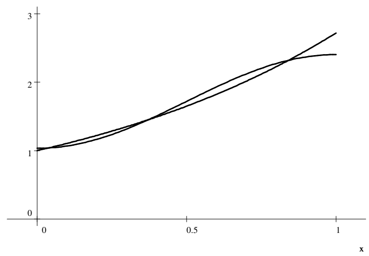


Gráfico de $h_1(x)$ e $h(x)$

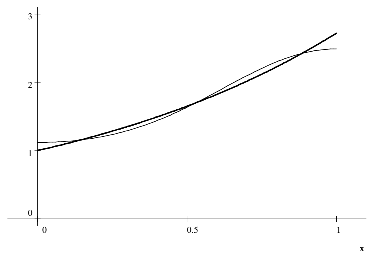


Gráfico de $h_2(x)$ e $h(x)$

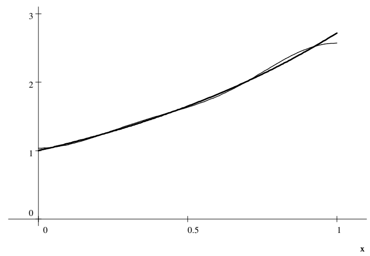


Gráfico de $h_3(x)$ e $h(x)$

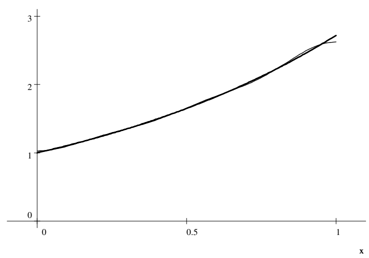


Gráfico de $h_5(x)$ e $h(x)$

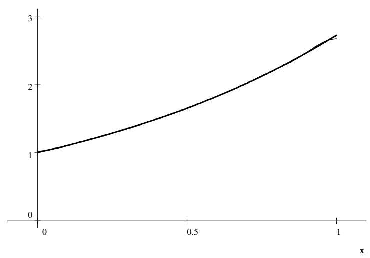


Gráfico de $h_{10}(x)$ e $h(x)$

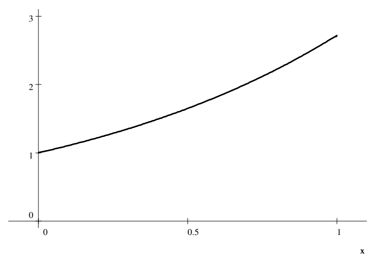


Gráfico de $h_{30}(x)$ e $h(x)$

Convergência da série de Fourier

Discutiremos aqui a validade da equação

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right),$$

onde (a_n, b_n) são os coeficientes de Fourier da função $f(x)$ no intervalo $-l < x < l$. Por simplicidade de escrita consideraremos $l = \pi$, sem perda de generalidade, uma vez que os resultados obtidos podem ser aplicados ao intervalo $-l < x < l$ realizando a mudança de variável $x' = x\pi/l$.

Primeiro é conveniente estabelecer a noção de função seccionalmente suave. Tal é necessário pois nem todas as séries de Fourier convergem, mesmo quando impomos que as funções a desenvolver são contínuas. De facto, existem funções em $[-\pi, \pi]$ cuja série de Fourier diverge numa infinidade de pontos! Por isso devemos centrar a nossa atenção sobre outra classe de funções, as funções seccionalmente suaves. Comecemos por recordar a definição relativa a funções seccionalmente contínuas.

Definição 6.4 *Uma função $f(x)$, $a < x < b$, diz-se **seccionalmente contínua** se existe um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p < x_{p+1} = b$ tais que:*

(i) f *é contínua em* $x \neq x_i, \quad i = 1, \ldots, p$;

(ii) $f(x_i^+) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x_i + \varepsilon)$ *existe (é finito),* $\quad i = 0, \ldots, p$;

(iii) $f(x_i^-) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x_i - \varepsilon)$ *existe(é finito),* $\quad i = 1, \ldots, p + 1$.

Tendo por base esta definição, podemos agora abordar o conceito de função seccionalmente suave.

Definição 6.5 *Uma função $f(x)$, $a < x < b$, diz-se **seccionalmente suave** se f e todas as suas derivadas são seccionalmente contínuas.*

Supomos que a subdivisão $x_0 < x_1 < \ldots < x_{p+1}$ se aplica tanto a f como a todas as suas derivadas. Nestas condições, a derivada de uma função seccionalmente suave é ainda uma função seccionalmente suave. Se $f(x)$, $a < x < b$, é seccionalmente suave, então $f'(x)$ existe exceto em $x = x_1, \ldots, x_p$.

Exemplo 6.20 *Seja*

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi.$$

Neste caso consideramos $x_0 = -\pi$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$. A função f é contínua em todo o intervalo. Tem-se ainda que f é seccionalmente contínua, com $f'(0^-) = -1$ e $f'(0^+) = 1$. Todas as derivadas de ordem superior são nulas, pelo que f é seccionalmente suave.

Exemplo 6.21 *Considere-se*

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & -\pi < x < 0 \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

Vemos que g é contínua exceto em $x = 0$ já que $g(0^-) = 0$ e $g(0^+) = 1$. As derivadas de ordem mais elevada são seccionalmente contínuas em $-\pi < x < \pi$, pelo que g é seccionalmente suave.

Exemplo 6.22 *Seja*

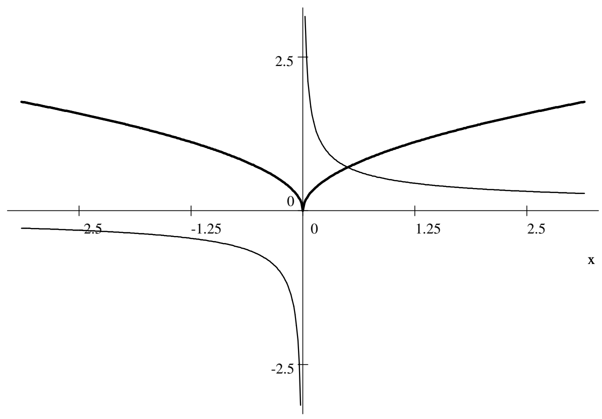
$$h(x) = \frac{1}{x^2 - \pi^2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Neste caso h é contínua, mas não é seccionalmente contínua uma vez que $h(\pi^-)$ e $h(\pi^+)$ não são finitos. Assim, h não é seccionalmente suave.

Exemplo 6.23 *Considere-se*

$$q(x) = \sqrt{|x|}, \quad -\pi < x < \pi.$$

A função é contínua, mas não é seccionalmente suave porque $q'(0^-) = -\infty$ e $q'(0^+) = +\infty$, conforme se pode observar no gráfico seguinte.



Representação gráfica de $q(x)$ - a cheio - e da sua derivada

Problema Relativamente às seguintes funções, indicar as que são seccionalmente suaves no intervalo $-\pi < x < \pi$: (i) $f(x) = \cos x$; (ii) $g(x) = \sqrt{|x+\pi|}$; (iii) $h(x) = x^{5/3}$; (iv) $p(x) = x^3$.

Resp.: As funções f e p.

Da definição de função seccionalmente suave decorre naturalmente que se f é uma função seccionalmente suave no intervalo $-l < x < l$, então f e f' são seccionalmente contínuas nesse intervalo. Assim sendo, a série de Fourier de uma função seccionalmente suave f converge para a função f nos termos do Teorema da Convergência (ver página 270).

Convergência uniforme e fenómeno de Gibbs

Vimos que a série de Fourier de uma função seccionalmente suave converge para a função exceto nos pontos de descontinuidade de f, onde converge para a média dos limites da função à esquerda e à direita. Uma vez que estamos interessados em aproximar funções por somas parciais das suas séries de Fourier, tem interesse analisar como é que a série de Fourier converge próximo de pontos de descontinuidade. Para esse efeito observe-se os gráficos apresentados nos Exemplos 6.8, 6.9 e 6.17. Vemos que nos vários casos a série de Fourier ultrapassa f na vizinhança dos seus pontos de descontinuidade, independentemente do número de termos da série de Fourier que consideramos na aproximação: o **fenómeno de Gibbs**. Este fenómeno pode ser descrito dizendo que as somas parciais não convergem uniformemente para f (isto é, a curva não está arbitrariamente próxima do gráfico de f para valores suficientemente elevados de n). É possível mostrar que no caso geral se tem o seguinte resultado.

Proposição 6.5 *Seja $f(x)$ uma função seccionalmente suave em $-\pi < x < \pi$ e x_0 um ponto de descontinuidade de f. Então, devido ao fenómeno de Gibbs, a soma parcial de ordem n, f_n, ultrapassa a função f na vizinhança de x_0 de uma quantidade que é aproximadamente*

$$0.09\left|f(x_0^+) - f(x_0^-)\right| \tag{6.35}$$

para valores elevados de n.

Exemplo 6.24 *Vimos no Exemplo 6.8 que a série de Fourier da função*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1 \end{cases},$$

era tal que

$$g_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}(2k-1)\pi x}{2k-1}.$$

Recorrendo à mudança de variável $x' = \pi x$ concluímos que a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases},$$

é tal que

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}(2k-1)x}{2k-1}.$$

Ora, $f_n(x)$ atinge o valor máximo para os pontos de abcissa x tais que $f_n'(x) = 0$, ou seja, aqueles que obedecem à condição

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x = 0.$$

Mostra-se que as raízes desta equação são

$$x = \pm\frac{\pi}{2n}, \pm\frac{2\pi}{2n}, \pm\frac{3\pi}{2n}, \ldots, \pm\pi,$$

que são, para cada n, pontos igualmente espaçados no intervalo $[-\pi, \pi]$. Assim, o máximo que se encontra mais próximo do ponto $x_0 = 0$, do lado positivo do eixo dos x, ocorre em $x = \pi/2n$, tendo-se

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{2k-1} \approx 1.0895.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left[f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - f\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right] \approx 1.0895 - 1 = 0.0895$$

e

$$\left|f(0^+) - f(0^-)\right| = |1-0| = 1,$$

o que está de acordo com a estimativa (6.35).

Em muitos problemas é importante evitar o fenómeno de Gibbs, ou seja, devemos garantir que a função $f(x)$ é tão bem aproximada quanto se queira pela soma parcial $f_n(x)$ em todos os pontos do intervalo $-l < x < l$ desde que o valor de n seja suficientemente elevado. Tal é equivalente a requerer que exista convergência uniforme, ou seja, que

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| = 0,$$

para todo $-l < x < l$. Ora, esta condição é violada quando existe o fenómeno de Gibbs. De facto, vimos no exemplo precedente que

$$\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - f\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| \approx 1.0895.$$

Dois critérios para convergência uniforme

Abordaremos agora dois critérios para a existência de convergência uniforme. O primeiro pode ser testado na série de Fourier, enquanto que o segundo pode ser testado na função.

Proposição 6.6 *(*Primeiro critério para a convergência uniforme*). Seja $f(x)$, $-l < x < l$, uma função seccionalmente suave. Suponhamos que os coeficientes de Fourier $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ verificam a condição*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty. \tag{6.36}$$

Então a série de Fourier converge uniformemente.

Exemplo 6.25 *As séries $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx)/n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{sen} nx)/n^3$ são séries de Fourier uniformente convergentes no intervalo $-\pi < x < \pi$ por se verificar a condição (6.36).*

Exemplo 6.26 *A série de Fourier obtida no Exemplo 6.10 (ver página 274) é uniformente convergente por se verificar a condição (6.36).*

Problema Os coeficientes da série de Fourier do Exemplo 6.8 (ver página 271) satisfazem a condição (6.36)?

Resp.: Não, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ não é limitada e portanto não se pode garantir que exista convergência uniforme (na realidade não existe porque o fenómeno de Gibbs está presente conforme se pode ver na respetiva representação gráfica).

Proposição 6.7 *(*Segundo critério para a convergência uniforme*). Seja $f(x)$, $-l < x < l$, uma função seccionalmente suave. Suponhamos ainda que f é contínua em $-l < x < l$ e que $f(-l^+) = f(l^-)$, então a respetiva série de Fourier converge uniformemente.*

Exemplo 6.27 *A série de Fourier da função $f(x) = |x|$ no intervalo $-l < x < l$ converge uniformemente.*

Exemplo 6.28 *A série de Fourier da função $g(x) = x^2$ no intervalo $-\pi < x < \pi$ converge uniformemente (ver problema da página 275).*

Problema A série de Fourier da função

$$h(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases},$$

no intervalo $-1 < x < 1$ converge uniformemente?

Resp.: Não, porque apesar da função h ser seccionalmente suave e se ter $h(-1^+) = h(1^-) = 1$, h não é contínua no ponto de abcissa $x = 0$.

Se nos concentrarmos na classe das funções seccionalmente suaves, então estes dois critérios são necessários e suficientes, ou seja, se a série de Fourier de uma função seccionalmente suave f converge uniformemente, então f é contínua, $f(-l^+) = f(l^-)$, e $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty$.

Exemplo 6.29 *A série de Fourier da função $f(x) = x$, $-1 < x < 1$, não converge uniformemente pois $f(-1^+) \neq f(1^-)$, enquanto que a série de Fourier da função*

$$g(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

no intervalo $-1 < x < 1$ converge uniformemente (porquê?). De notar que se tem

$$f_N(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} n\pi x,$$

$$g_N(x) = \frac{5}{12} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} - \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{(2n-1)^3},$$

sendo a respetiva representação gráfica:

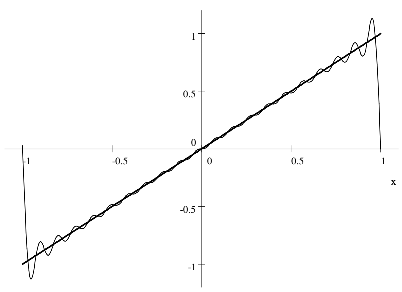


Gráfico de $f_{20}(x)$ e $f(x)$

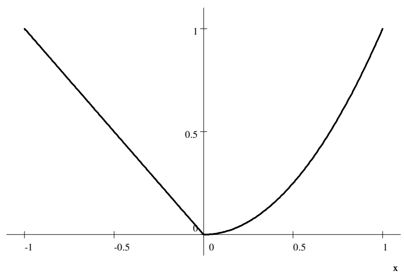


Gráfico de $g_{20}(x)$ e $g(x)$

Problema Para que valor(es) de l é que a série de Fourier da função

$$h(x) = \begin{cases} 4x^2, & -l < x < 0 \\ x^4, & 0 \leq x < l \end{cases},$$

no intervalo $-l < x < l$ converge uniformemente?

Resp.: Apenas para $l = 2$, de forma a ter-se $f(-l^+) = f(l^-)$.

Diferenciação de séries de Fourier

Vejamos agora um critério geral para a diferenciação de séries de Fourier.

Proposição 6.8 *Seja $f(x)$, $-l < x < l$, uma função contínua e seccionalmente suave tal que $f(-l^+) = f(l^-)$, e*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right)$$

a respetiva série de Fourier em $-l < x < l$. Então,

$$\frac{1}{2} \left[f'(x^+) + f'(x^-) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} \left(b_n \cos \frac{n\pi x}{l} - a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Demonstração *Neste caso a função f' é seccionalmente suave em $-l < x < l$ e por isso podemos aplicar o Teorema da Convergência (ver página 270) a esta função (porquê?). Assim,*

$$\frac{1}{2}\left[f'(x^+) + f'(x^-)\right] = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right),$$

com

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\,dx = f(l^-) - f(-l^+) = 0,$$

$$A_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx = \frac{n\pi}{l^2}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx = \frac{n\pi}{l}b_n,$$

$$B_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx = -\frac{n\pi}{l^2}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx = -\frac{n\pi}{l}a_n,$$

onde se usou integração por partes conjuntamente com o facto de f ser contínua. ■

Exemplo 6.30 *Suponhamos que queremos calcular a série de Fourier de $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$. Ora, a série de Fourier da função par x^2 é da forma $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, com $\{a_n\}$ a determinar (porquê?). Por outro lado, a série de Fourier da função $g(x) = 2x$, $-\pi < x < \pi$, é*

$$2x = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n},$$

pelo que a proposição precedente permite escrever

$$2x = -\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n \operatorname{sen} nx.$$

Assim, conluímos que

$$a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para determinar a_0 recorremos à definição

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Portanto, temos a seguinte série de Fourier,

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad -\pi < x < \pi,$$

cuja representação gráfica se encontra na página 275.

Problema Determinar a série de Fourier de $p(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$, sabendo que série de Fourier da função

$$q(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases},$$

em $-\pi < x < \pi$ é tal que

$$q_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\,x}{2n-1}.$$

Resp.: $|x| = \pi^2 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

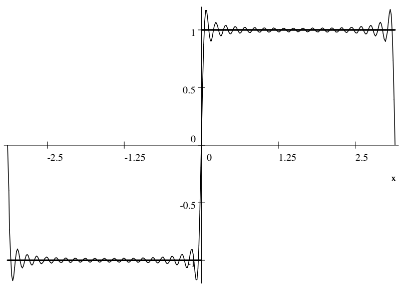


Gráfico de $q_{20}(x)$ e $q(x)$

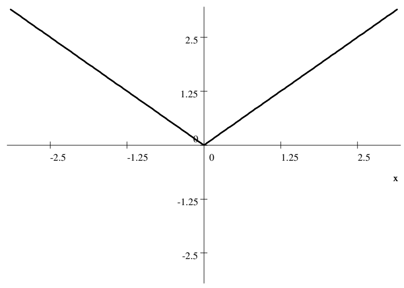


Gráfico de $p_{20}(x)$ e $p(x)$

Nota A Proposição 6.8 não é aplicável a funções ímpares (porquê?).

Integração de séries de Fourier

Vejamos agora um critério geral que estabelece em que condições a integração de uma série de Fourier pode ser feita termo a termo.

Proposição 6.9 *Seja $f(x)$, $-l < x < l$, uma função seccionalmente suave com série de Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Se $-l \leq x_0 < x \leq l$, então

$$\int_{x_0}^{x} f(u)\, du = \frac{a_0}{2}(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} \left(a_n \cos \frac{n\pi u}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi u}{l} \right) du.$$

Demonstração *Seja*

$$F(x) = \int_{-l}^{x} \left[f(u) - \frac{a_0}{2} \right] du.$$

A função $F(x)$ é contínua e seccionalmente suave, com $F(-l) = F(l) = 0$. Assim, pelo Teorema da Convergência (ver página 270) tem-se

$$F(x) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\widetilde{a}_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \widetilde{b}_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right), \quad -l \leq x \leq l,$$

onde $(\widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n)$ *são os coeficientes da série de Fourier de* $F(x)$. *Estes coeficientes são dados por, para* $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \\
&= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\left\{\int_{-l}^{x}\left[f(u)-\frac{a_0}{2}\right]du\right\}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left[f(u)-\frac{a_0}{2}\right]\left(\int_{u}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right)du \\
&= -\frac{1}{\pi n}\int_{-l}^{l}\left[f(u)-\frac{a_0}{2}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi u}{l}\,du = -\frac{1}{\pi n}\int_{-l}^{l} f(u)\operatorname{sen}\frac{n\pi u}{l}\,du \\
&= -\frac{l}{n\pi}b_n.
\end{aligned}$$

De igual modo,

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi n}\int_{-l}^{l}\left[f(u)-\frac{a_0}{2}\right]\left(\cos\frac{n\pi u}{l}-\cos n\pi\right)du = \\
&= \frac{l}{n\pi}a_n,
\end{aligned}$$

onde se recorreu ao facto de

$$f(u)-\frac{a_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\right),$$

conjuntamente com as relações de ortogonalidade apresentadas na pág. 276.

Recordando a definição de $F(x)$, *mostrámos então que*

$$\int_{-l}^{x} f(u)\,du = \frac{a_0}{2}(x+l) + \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi}\left(a_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} - b_n\cos\frac{n\pi x}{l}\right), \quad -l \leq x \leq l.$$

Substituindo x *por* x_0 *na igualdade precedente e subtraindo a igualdade resultante, o termo* $\widetilde{a}_0/2$ *cancela e temos o resultado proposto* . ■

Exemplo 6.31 *De novo, suponhamos que queremos calcular a série de Fourier de* $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$, *sabendo que a série de Fourier da função* $g(x) = 2x$, $-\pi < x < \pi$, *é*

$$2x = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Usando $x_0 = 0$, *a proposição precendente permite escrever*

$$\int_0^x 2u\,du = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^x \operatorname{sen} nu\,du,$$

ou seja,

$$\left[u^2\right]_{u=0}^{u=x} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left[\cos nu\right]_{u=0}^{u=x}$$

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\cos nx - 1)$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Mas

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{12}\pi^2,$$

resultando

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Reencontramos assim o resultado obtido no exemplo precedente.

O Teorema de Parseval e o erro quadrático médio

Após a abordagem das propriedades de convergência das séries de Fourier, dedicamos agora a atenção ao **Teorema de Parseval** dada a sua relevância em problemas envolvendo séries de Fourier.

Teorema 6.10 (Teorema de Parseval) *Seja $f(x)$, $-l < x < l$, uma função seccionalmente suave com série de Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{6.37}$$

Então

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right). \tag{6.38}$$

O lado esquerdo da igualdade representa a média de$[f(x)]^2$ no intervalo $-l < x < l$. O lado direito envolve a soma dos quadrados dos coeficientes de Fourier.

Demonstração *Aqui admitiremos que a função $f(x)$ é contínua e seccionalmente suave, tendo-se ainda $f(-l^+) = f(l^-)$. Neste caso multiplicamos a série de Fourier (6.37), que é uniformemente convergente, por $f(x)$ tendo-se*

$$f^2(x) = \frac{a_0}{2}\,f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\,f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\,f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right].$$

Esta série ainda é uniformemente convergente, pelo que a podemos integrar termo a termo para $-l < x < l$*, vindo*

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx + \int_{-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\, f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\, f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\Big]\,dx,$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx\right].$$

Atendendo à definição dos coeficientes a_n *e* b_n *[cf. (6.23) e (6.24)] resulta*

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2}l + l\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Dividindo por $2l$ *obtém-se a* ***Igualdade de Parseval***

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right),$$

conforme requerido. ■

A primeira aplicação do Teorema de Parseval envolve o conceito de **erro quadrático médio**.

Definição 6.6 *Seja* $f(x)$, $-l < x < l$*, uma função seccionalmente suave e* $f_n(x)$ *a soma parcial da respetiva série de Fourier. Definimos o erro quadrático médio* σ_n^2 *como*

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}[f(x) - f_n(x)]^2\,dx.$$

Esta quantidade mede quanto é que, em média, $f_n(x)$ *difere de* $f(x)$*. A série de Fourier de* $f(x) - f_n(x)$ *é*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi x}{l}\right),$$

pelo que o Teorema de Parseval permite escrever

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}[f(x) - f_n(x)]^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

e consequentemente

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

Exemplo 6.32 *Seja* $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$*. Determinar o erro quadrático médio e indicar uma estimativa assintótica quando* $n \to \infty$*.*

Solução. *Tem-se*

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{sen}\,mx\,dx = 0, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

dado $f(x)$ ser uma função par. Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos mx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos mx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi m^2}\left[\cos mx + mx \operatorname{sen} mx\right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{2}{\pi m^2}\left(\cos m\pi - 1\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$a_{2m} = 0, \qquad a_{2m-1} = -\frac{4}{\pi(2m-1)^2},$$

pelo que

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1}^2 = \sigma_{2n}^2 &= \frac{1}{2}\sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=n+1}^{\infty} a_{2m-1}^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=n+1}^{\infty}\left[-\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\right]^2 \\ &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}. \end{aligned}$$

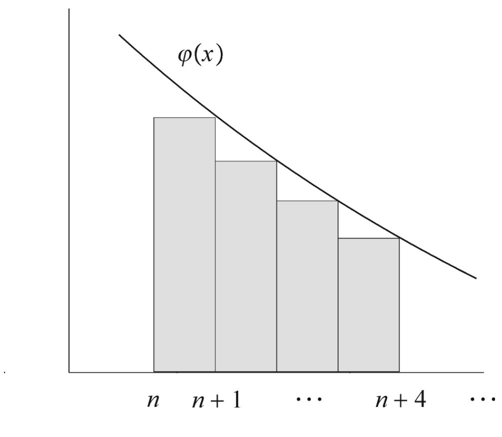
Apesar de não ser possível efetuar o cálculo da soma desta série, podemos realizar uma estimativa assintótica. Para esse efeito, comparamos a soma da série com o integral

$$\frac{8}{\pi^2}\int_n^{\infty}\frac{1}{(2x-1)^4}\, dx = \frac{4}{3\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^3}.$$

Podemos agora usar o seguinte resultado: se $\varphi(x)$ é uma função positiva e decrescente, então

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\varphi(m) \le \int_n^{\infty}\varphi(x)\, dx,$$

conforme se ilustra na figura seguinte.



A área sombreada representa a soma da série, enquanto que a área sob a curva corresponde ao integral. Portanto,

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4} \leq \frac{4}{3\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^3},$$

pelo que

$$\sigma_{2n}^2 = O(n^{-3}), \quad n \to \infty.$$

Exemplo 6.33 *Seja $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$. Determinar o erro quadrático médio e indicar uma estimativa assintótica quando $n \to \infty$.*

Solução. *Tem-se*

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos mx\,dx = 0,$$

dado $f(x)$ ser uma função ímpar. Por outro lado,

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} mx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} mx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi m^2}\left[\operatorname{sen} mx - mx\cos mx\right]_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{2}{m}\cos m\pi \\ &= \frac{2}{m}(-1)^{m+1}, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}$$

Tem-se então,

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{4}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{k^2}.$$

Para obter uma estimativa assintótica desta soma, fazemos a comparação com o integral

$$\int_n^{\infty}\frac{2}{x^2}\,dx = \frac{2}{n},$$

pelo que

$$\sigma_n^2 = O(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

Exercícios sobre séries de Fourier

Exercício 6.5 *Determinar a série de Fourier de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

$(a)\quad f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1, \end{cases} \quad |x| < 1;$ $\qquad (b)\quad f(x) = x \quad |x| < 1;$

$(c)\quad f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \end{cases} \quad |x| < 2;$ $\qquad (d)\quad f(x) = \begin{cases} 0, & -l < x < 0, \\ e^x, & 0 \leq x < l, \end{cases} \quad |x| < l;$

$(e)\quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & -l < x < 0, \\ e^x, & 0 \leq x < l, \end{cases} \quad |x| < l;$ $\qquad (f)\quad f(x) = \operatorname{sen}^3 x, \quad |x| < \pi.$

Exercício 6.6 *Determinar a série de Fourier da função x^2 no intervalo $|x| < \pi$.*

Exercício 6.7 *Obter as equações (6.28) - (6.30). Sugestão: usar as igualdades trigonométricas*

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)],$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)],$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)].$$

Exercício 6.8 *Determinar a série de Fourier, envolvendo apenas cossenos, de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < a, \\ a, & a \leq x < 2a, \end{cases} \quad 0 < x < 2a; \qquad (b) \quad f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < 1;$

$(c) \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < l/2, \\ l - x, & l/2 \leq x < l, \end{cases} \quad 0 < x < l.$

Exercício 6.9 *Determinar a série de Fourier, envolvendo apenas senos, de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \end{cases} \quad 0 < x < 2; \qquad (b) \quad f(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0 < x < \pi.$

Exercício 6.10 *(a) Desenvolver a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ numa série de Fourier de cossenos no intervalo $0 < x < \pi$.*

(b) Desenvolver a função $f(x) = \cos x$ numa série de Fourier de senos no intervalo $0 < x < \pi$.

(c) Pode-se desenvolver a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ numa série de Fourier de cossenos no intervalo $-\pi < x < \pi$? Justificar a resposta.

Exercício 6.11 *Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi/l^2} \operatorname{sen} n\pi x/l$ a série de Fourier de uma função seccionalmente suave. Mostrar que*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} e^{-n^2\pi/l^2} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-n^2\pi/l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

Exercício 6.12 *Considerar a série de Fourier da função $f(x) = x$ no intervalo $-l < x < l$:*

$$x = \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

Integrando esta série, determinar a série de Fourier da função x^2 no intervalo $-l < x < l$.

Exercício 6.13 *Seja $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$. Determinar o máximo da soma parcial $f_n(x)$ e verificar a presença do fenómeno de Gibbs. Pista: atender aos seguintes gráficos:*

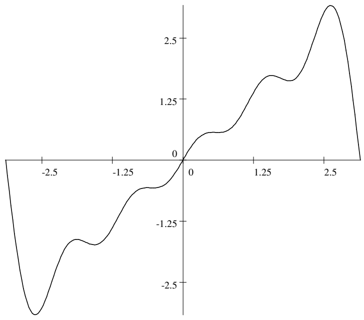


Gráfico de $f_5(x)$

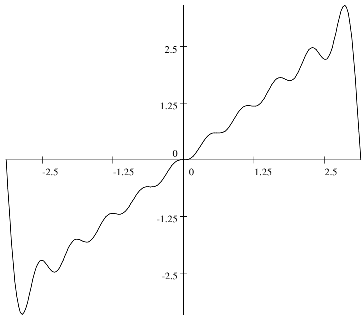


Gráfico de $f_{10}(x)$

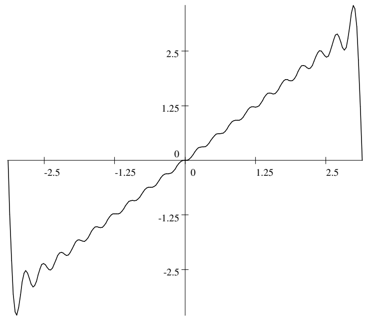


Gráfico de $f_{20}(x)$

Exercício 6.14 *Determinar o erro quadrático médio das séries de Fourier das seguintes funções:*

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad -\pi < x < \pi; \qquad (b) \quad f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi;$$

$$(c) \quad f(x) = \operatorname{sen} 10x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Exercício 6.15 *Escrever o Teorema de Parseval para a série de Fourier do Exercício 6.14 (a).*

Exercício 6.16 *Escrever o Teorema de Parseval para a série de Fourier do Exercício 6.14 (b).*

Exercício 6.17 *Mostrar que no Exercício 6.14 (a) se tem $\sigma_n^2 = O(n^{-1})$, $n \to \infty$.*

Exercício 6.18 *Mostrar que no Exercício 6.14 (b) se tem $\sigma_n^2 = O(n^{-3})$, $n \to \infty$.*

6.4 Aplicação à equação de calor, equação de onda e equação de Laplace

Equação de calor

Voltamos agora ao PVIVF

$$\begin{aligned} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < l, \\ & u(x,0) = f(x), && 0 < x < l, \\ & u(0,t) = u(l,t) = 0. && t > 0. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Vimos na Secção 6.2 que a função

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / l^2}$$

é uma solução do PVF

$$\begin{aligned} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < l, \\ & u(0,t) = u(l,t) = 0. && t > 0, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam as constantes c_1, c_2, ... Tal conduziu-nos a questionar se é possível determinar constantes c_1, c_2, ... por forma a ter-se

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad 0 < x < l.$$

Ora, tal como vimos na Secção 6.3, a resposta é afirmativa. De facto, escolhendo

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

então a série de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

converge para $f(x)$ se f for contínua no ponto x. Portanto,

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / l^2} \tag{6.40}$$

é a solução pretendida de (6.39).

Nota Na realidade, a solução (6.40) não pode ser vista como a solução de (6.39) até que justifiquemos de forma rigorosa todo o processo limite envolvido. Em particular, temos que verificar que a função $u(x,t)$ definida por (6.40) tem derivadas parciais em ordem a x e a t, e que $u(x,t)$ verifica a equação de calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$. Não é necessariamente verdade que uma soma infinita de soluções de uma equação diferencial linear seja ainda uma solução. De facto, uma soma infinita de soluções de uma dada equação diferencial pode nem sequer ser diferenciável. No entanto, no caso de (6.40) é possível mostrar (ver Exercício 6.20) que $u(x,t)$ tem derivadas parciais em ordem a x e a t de qualquer ordem, e que $u(x,t)$ satisfaz o PVIVF (6.39).

Exemplo 6.34 *Uma barra de alumínio ($\alpha^2 = 0.86$ cm^2/s) com 10 cm de comprimento é aquecida até ter uma temperatura uniforme de 100 ^oC. No instante inicial, $t = 0$, os extremos da barra são mergulhados num banho de gelo a 0 ^oC, sendo mantidos a essa temperatura. Supondo que não existe qualquer transferência de calor através das paredes laterais da barra, determinar a distribuição de temperatura da barra em qualquer instante de tempo $t > 0$.*

Solução. *Seja $u(x,t)$ a temperatura da barra no ponto de abcissa x no instante t. Esta função satisfaz o seguinte PVIVF*

$$\begin{array}{ll} u_t = 0.86\, u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 10, \\ u(x,0) = 100, & 0 < x < 10, \\ u(0,t) = u(10,t) = 0. & t > 0. \end{array} \tag{6.41}$$

A solução de (6.41) é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, e^{-0.86\, n^2 \pi^2 t / 100},$$

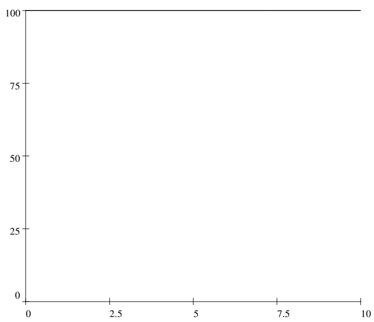
onde

$$c_n = \frac{1}{5} \int_0^{10} 100 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{10}\, dx = \frac{200}{n\pi}(1 - \cos n\pi).$$

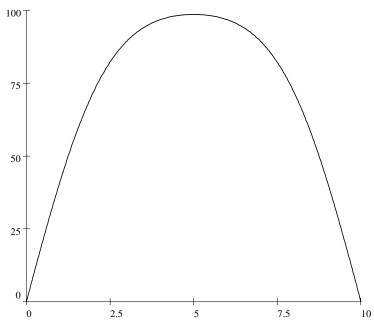
Uma vez que c_n é nulo quando n é par e $c_n = 400/n\pi$ quando n é ímpar, tem-se

$$u(x,t) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x/10}{2n-1}\, e^{-0.86\,(2n-1)^2\pi^2 t\,/\,100},$$

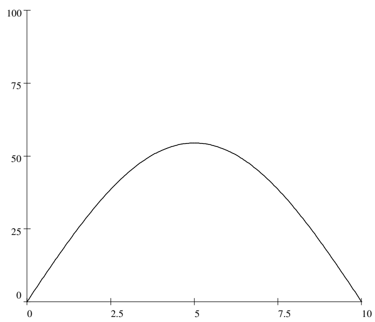
cuja representação gráfica é



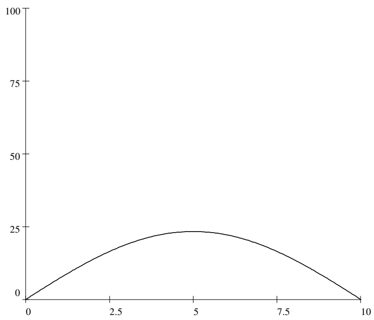
$u(x,0)$ *(exato)*



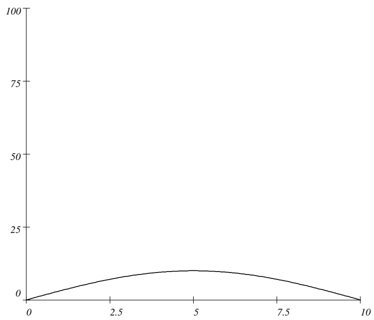
$u(x,2)$



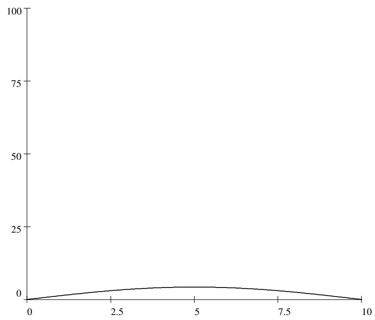
$u(x,10)$



$u(x,20)$



$u(x,30)$



$u(x,40)$

Exemplo 6.35 *Considere-se uma barra de metal fina de comprimento l e difusividade térmica α^2, cujas faces e extremos estão isolados por forma a não existir passagem de calor através deles. Seja $f(x)$ a distribuição inicial da temperatura ao longo da barra. Determinar a distribuição de temperatura para qualquer instante posterior t.*

Solução. *Seja $u(x,t)$ a temperatura da barra no ponto de abcissa x no instante t. Esta função satisfaz o seguinte PVIVF*

$$\begin{aligned} &u_t = \alpha^2\, u_{xx}, && t>0,\ 0<x<l, \\ &u(x,0) = f(x), && 0<x<l, \\ &u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0. && t>0. \end{aligned} \tag{6.42}$$

A solução de (6.42) é obtida em dois passos. Primeiro, determinamos uma família de soluções $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ para o PVF

$$u_t = \alpha^2\, u_{xx}, \qquad u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0. \tag{6.43}$$

Depois, determinamos constantes $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots$ tais que

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, u_n(x,t)$$

satisfaça a condição inicial $u(x,0) = f(x)$*.*

Passo 1: Seja $u(x,t) = X(x)T(t)$*. Então*

$$u_t = X\,T', \qquad u_{xx} = X''\,T,$$

pelo que $u(x,t)$ *é uma solução de* $u_t = \alpha^2\,u_{xx}$ *se*

$$X\,T' = \alpha^2 X''\,T,$$

ou seja

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T}.$$

Tal como vimos na Secção 6.2, a equação precedente implica que

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad T' + \lambda\alpha^2 T = 0,$$

para algum valor da constante λ*. Além disso, as condições de fronteira*

$$0 = u_x(0,t) = X'(0)T(t) \qquad e \qquad 0 = u_x(l,t) = X'(l)T(t)$$

implicam que $X'(0) = X'(l) = 0$*. Portanto,* $u(x,t) = X(x)T(t)$ *é uma solução de (6.43) se*

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \tag{6.44}$$

e

$$T' + \lambda\alpha^2 T = 0. \tag{6.45}$$

De momento a constante λ *é arbitrária. No entanto, o PVF (6.44) tem solução não trivial* $X(x)$ *somente se (ver Exercício 5.1 na página 243)* $\lambda = n^2\pi^2/l^2$*,* $n = 0, 1, 2, \ldots,$ *e nesse caso*

$$X(x) = X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Por outro lado, a equação (6.45) implica que

$$T(t) = e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t\,/\,l^2}.$$

Assim,

$$u_n(x,t) = \cos\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t\,/\,l^2}$$

é uma solução de (6.43) para todo n *não negativo.*

Passo 2: Note-se que a combinação linear

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t\,/\,l^2}$$

é uma solução (formal) de (6.43) qualquer que seja a escolha feita para as constantes c_0*,* c_1*,* c_2*,* $\ldots$ *. O seu valor inicial é*

$$u(x,0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Assim sendo, para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$ devemos escolher as constantes c_0, c_1, c_2, ... por forma a ter-se

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l.$$

Por outras palavras, devemos desenvolver f como uma série de Fourier em cossenos no intervalo $0 < x < l$. Ora, esta é a situação a que se refere o Teorema 6.4, pelo que

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

A solução de (6.42) é então

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]\cos\frac{n\pi x}{l}\,e^{-\alpha^2 n^2\pi^2 t\,/\,l^2}.$$

Note-se que da expressão precedente resulta que a situação de equilíbrio estacionário é atingida para a temperatura

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx,$$

a qual corresponde ao "valor médio" da distribuição inicial de temperatura na barra.

Equação de onda

Consideramos agora o PVIVF

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < l, \\ &u(x,0) = f(x), && 0 < x < l, \\ &u_t(x,0) = g(x), && 0 < x < l, \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0. && t > 0, \end{aligned} \tag{6.46}$$

que carateriza a propagação de ondas em vários meios, bem como a vibração elástica de uma corda mecânica. Este problema também pode ser resolvido usando o método de separação de variáveis. Neste caso, determinaremos (a) soluções $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ do problema de valores de fronteira

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < l, \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0. && t > 0, \end{aligned} \tag{6.47}$$

e (b) a solução de (6.46) escolhendo uma combinação linear apropriada das funções $u_n(x,t)$.

(a) Seja $u(x,t) = X(x)T(t)$. Tem-se

$$u_{tt} = X\,T'', \qquad u_{xx} = X''\,T,$$

pelo que $u(x,t) = X(x)T(t)$ é uma solução da equação de onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ sempre que $X\,T'' = c^2 X''\,T$, ou seja,

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}. \tag{6.48}$$

Uma vez que o primeiro membro de (6.48) só depende de t, enquando que o segundo membro só depende de x, tem-se

$$\frac{T''}{c^2T} = -\lambda = \frac{X''}{X},$$

para algum valor da constante λ. Por sua vez, as condições de fronteira

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \qquad \text{e} \qquad 0 = u(l,t) = X(l)T(t)$$

implicam que $X(0) = X(l) = 0$. Assim, $u(x,t)$ é uma solução de (6.47) se

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \tag{6.49}$$

e

$$T'' + \lambda c^2 T = 0. \tag{6.50}$$

Para já a constante λ é arbitrária. No entanto, como já vimos, o PVF (6.49) tem solução não trivial $X(x)$ somente se $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/l^2$, $n = 1, 2, \ldots$, e, nesse caso,

$$X(x) = X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Por outro lado, a equação (6.50) implica que

$$T(t) = T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}.$$

Portanto,

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left(a_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

é uma solução não trivial de (6.47) para todo o inteiro positivo n, e para cada par de constantes a_n, b_n.

(b) A combinação linear

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left(a_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

verifica formalmente o problema de valores de fronteira (6.47) e as condições iniciais

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}, \qquad u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Portanto, para satisfazer as condições iniciais $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$, devemos escolher as constantes a_n e b_n de tal forma que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}, \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

no intervalo $0 < x < l$. Ou seja, temos de desenvolver as funções $f(x)$ e $g(x)$ em séries de Fourier de senos no intervalo $0 < x < l$. Ora, esta é a situação a que se refere o Teorema 6.4, pelo que

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

Por simplicidade, consideraremos apenas o caso em que $g(x) = 0$, ou seja, inicialmente a corda tem velocidade nula. Nesse caso, o deslocamento da corda $u(x,t)$ em qualquer instante de tempo $t > 0$ é dado por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}, \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{6.51}$$

Justificação da solução. Não é possível mostrar de forma direta, tal como fizemos no caso da equação de calor, que a função $u(x,t)$ definida por (6.51) é uma solução da equação de onda. De facto, não é possível mostrar diretamente que a série infinita (6.51) tem derivadas parciais em ordem a t e a x. Por exemplo, calculando u_t de modo formal obtém-se

$$u_t = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}\,a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}$$

e devido à presença do fator n esta série pode não convergir. Existe, no entanto, uma forma alternativa de provar a validade da solução (6.51). Tal permitirá, simultaneamente, compreender melhor a estrutura da solução $u(x,t)$. Comecemos por notar que

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x-ct) + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right].$$

Assim, podemos escrever (6.51) como

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x-ct) + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right], \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{6.52}$$

Seja agora $F(x)$ a extensão periódica par de $f(x)$ no intervalo $-l < x < l$, isto é,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < l, \\ -f(-x), & -l < x < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad F(x+2l) = F(x).$$

Pode mostrar-se que a série de Fourier de F é

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}, \qquad c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

pelo que

$$F(x-ct) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x-ct) \qquad \text{e} \qquad F(x+ct) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x+ct).$$

Assim sendo, podemos escrever $u(x,t)$ [cf. (6.52)] na forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x-ct) + F(x+ct)\right], \tag{6.53}$$

bastando agora mostrar que $u(x,t)$ verifica a equação de onda se $f(x)$ tiver duas derivadas contínuas. De facto, se $f(x)$ tiver duas derivadas contínuas, então $F(x)$ também tem, pelo que

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}F(x-ct)+\frac{\partial}{\partial t}F(x+ct)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}(x-ct)\ \left.\frac{dF}{du}\right|_{u=x-ct}+\frac{\partial}{\partial t}(x+ct)\ \left.\frac{dF}{du}\right|_{u=x+ct}\right] \\ &= \frac{c}{2}\left(\left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x+ct}-\left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x-ct}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= \frac{c}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x+ct}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x-ct}\right)\right] \\ &= \frac{c^2}{2}\left(\left.\frac{d^2F(u)}{du^2}\right|_{u=x+ct}+\left.\frac{d^2F(u)}{du^2}\right|_{u=x-ct}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}F(x-ct)+\frac{\partial}{\partial x}F(x+ct)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-ct)\ \left.\frac{dF}{du}\right|_{u=x-ct}+\frac{\partial}{\partial x}(x+ct)\ \left.\frac{dF}{du}\right|_{u=x+ct}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x+ct}-\left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x-ct}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x+ct}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x-ct}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\left.\frac{d^2F(u)}{du^2}\right|_{u=x+ct}+\left.\frac{d^2F(u)}{du^2}\right|_{u=x-ct}\right). \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados em $u_{tt}=c^2u_{xx}$ resulta uma identidade, conforme requerido.

A equação (6.53) tem a seguinte interpretação. Se traçarmos o gráfico da função $y=F(x-ct)$ para um valor fixo t, vemos que é igual ao gráfico de $y=F(x)$, exceto o facto de estar transladado para a direita de uma distância ct, conforme se mostra na figura seguinte.

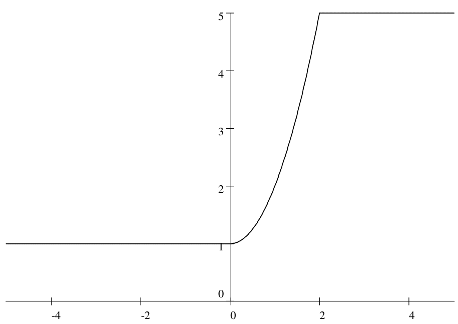


Gráfico de $y=F(x)$

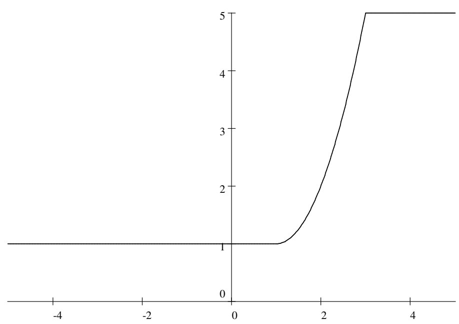


Gráfico de $y=F(x-1)$

J. Figueiredo, C. Ribeiro – 2013

Portanto, $f(x-ct)$ é uma onda que viaja com velocidade c na direcção positiva do eixo dos xx. De forma análoga, $F(x+ct)$ é uma onda que se desloca com velocidade c na direcção negativa do eixo dos xx. O número c representa a velocidade com que a "perturbação" se propaga ao longo da corda vibrante. Se a perturbação se dá num ponto x_0, então será sentida num ponto x após um tempo $t=(x-x_0)/c$. Portanto, a equação de onda carateriza a propagação de ondas num meio em que as perturbações (ou sinais) se deslocam com velocidade finita.

Exemplo 6.36 *Determinar a solução do PVIVF*

$$\begin{array}{ll} u_{tt}=c^2u_{xx}, & t>0,\ 0<x<2\pi, \\ u(x,0)=\cos x-1, & 0<x<2\pi, \\ u_t(x,0)=0, & 0<x<2\pi, \\ u(0,t)=u(2\pi,t)=0. & t>0. \end{array}$$

Solução. *Neste caso $u(x,t)$ é dado por*

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cos\frac{nct}{2}, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos x-1)\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx.$$

Portanto,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx.$$

Ora,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos x\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}+x\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}-x\right)\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n+2}{2}\right)x+\operatorname{sen}\left(\frac{n-2}{2}\right)x\right]dx \\ &= \frac{2n}{n^2-4}\left(1-\cos n\pi\right)\end{aligned}$$

e

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx=\frac{2}{n}\left(1-\cos n\pi\right),$$

pelo que

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{n}{n^2-4}\left(1-\cos n\pi\right)-\frac{1}{n}\left(1-\cos n\pi\right)\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{n}{n^2-4}-\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos n\pi\right).\end{aligned}$$

Assim, $a_n=0$ se n é par e

$$a_{2n+1}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{2n+1}{(2n+1)^2-4}-\frac{1}{2n+1}\right), \quad n=0,1,2,\ldots$$

Tem-se, finalmente,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)\frac{x}{2}\cos(2n+1)\frac{ct}{2} \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{(2n+1)^2-4} - \frac{1}{2n+1}\right)\operatorname{sen}(2n+1)\frac{x}{2}\cos(2n+1)\frac{ct}{2}. \end{aligned}$$

Equação de Laplace

Consideramos agora a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{6.54}$$

Existem dois tipos de problemas de valores de fronteira relacionados com a equação (6.54): o problema de Dirichlet e o problema de Neumann. No problema de Dirichlet queremos determinar uma função $u(x,y)$ que satisfaça a equação de Laplace num domínio D e que assuma determinados valores na fronteira de D. No problema de Neumann, queremos determinar uma função $u(x,y)$ que satisfaça a equação de Laplace num domínio D, devendo as respetivas derivadas na direcção normal a D assumir determinados valores. Caso o domínio seja um retângulo, qualquer um dos problemas pode ser resolvido usando o método de separação de variáveis.

Exemplo 6.37 *Determinar uma função $u(x,y)$ que satisfaça a equação de Laplace no retângulo $0<x<a$, $0<y<b$ e que verifique as seguintes condições de fronteira*

$$\begin{aligned} u(x,0) = 0, &\quad u(x,b) = 0, \\ u(0,y) = 0, &\quad u(a,y) = f(y). \end{aligned}$$

Solução. *Este problema de Dirichlet é resolvido em dois passos. Primeiro determinamos funções $u_n(x,t) = X_n(x)Y_n(y)$ que satisfaçam o problema de valores de fronteira*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, \quad u(0,y) = 0. \tag{6.55}$$

Depois determinamos o valor das constantes c_n de tal forma que a combinação linear

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, u_n(x,y)$$

satisfaça a condição de fronteira $u(a,y) = f(y)$.
Passo 1: Seja $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Resulta $u_{xx} = X''\,Y$ e $u_{yy} = X\,Y''$, pelo que $u(x,y) = X(x)Y(y)$ é solução da equação de Laplace se $X''Y + Y''X = 0$, ou seja,

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X}.$$

Como o primeiro membro só depende de y, enquanto que o segundo membro só depende de x, então deverá ter-se

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda$$

para algum valor da constante λ*. Temos ainda as condições de fronteira*

$$u(x,0) = X(x)Y(0) = 0, \quad 0 < x < a,$$
$$u(x,b) = X(x)Y(b) = 0, \quad 0 < x < a,$$
$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0, \quad 0 < y < b,$$

que implicam

$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0, \quad X(0) = 0.$$

Portanto, $u(x,y) = X(x)Y(y)$ *é uma solução de (6.55) se*

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0, \tag{6.56}$$

e

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = 0. \tag{6.57}$$

Para já a constante λ *é arbitrária. No entanto, o PVF (6.56) tem solução não trivial* $Y(y)$ *apenas se* $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/b^2$*, tendo-se*

$$Y(y) = Y_n(y) = \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.58}$$

Por sua vez, a equação $X'' - (n^2\pi^2/b^2)X = 0$ *implica que*

$$X(x) = X_n(x) = c_1 \cosh\frac{n\pi x}{b} + c_2 \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b},$$

sendo que a condição $X(0) = 0$ *implica que* $c_1 = 0$*. Então*

$$u_n(x,y) = \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}$$

é uma solução do PVF (6.55) qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$*.*
Passo 2: A função

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}$$

é uma solução (formal) de (6.55) qualquer que seja a escolha das constantes c_1, c_2, $\ldots$, *tendo-se*

$$u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}.$$

Então, as constantes c_1, c_2, $\ldots$, *devem ser tais que*

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}, \quad 0 < y < b,$$

isto é,

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{c}_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}, \quad 0 < y < b,$$

onde

$$\widetilde{c}_n = c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}.$$

Ou seja, temos de desenvolver $f(y)$ como uma série de Fourier de senos no intervalo $0 < y < b$. Facilmente se comprova que

$$\widetilde{c}_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dy \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{2}{b\operatorname{senh}\dfrac{n\pi a}{b}}\int_0^b f(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dy, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 6.38 *Determinar uma função $u(x,y)$ que verifique a equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, satisfazendo as condições de fronteira:*

$$\begin{aligned} u_y(x,0) &= 0, \qquad u_y(x,b) = 0,\\ u_x(0,y) &= 0, \quad u_x(a,y) = f(y). \end{aligned}$$

Solução. *Novamente, tentamos resolver este problema em dois passos. Primeiro, determinaremos funções $u_n(x,t) = X_n(x)Y_n(y)$ que satisfaçam o PVF*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,b) = 0, \quad u_x(0,y) = 0. \tag{6.59}$$

Depois, tentaremos determinar constantes c_n tais que a combinação linear

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, u_n(x,y)$$

satisfaça a condição de fronteira $u_x(a,y) = f(y)$.
Passo 1: Tal como no exemplo precedente, e dado a equação diferencial ser a mesma, tem-se

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda$$

para algum valor da constante λ. As condições de fronteira

$$\begin{aligned} u_y(x,0) &= X(x)Y'(0) = 0, \quad 0 < x < a,\\ u_y(x,b) &= X(x)Y'(b) = 0, \quad 0 < x < a,\\ u_x(0,y) &= X'(0)Y(y) = 0, \quad 0 < y < b, \end{aligned}$$

implicam que

$$Y'(0) = 0, \quad Y'(b) = 0, \quad X'(0) = 0.$$

Portanto, $u(x,y) = X(x)Y(y)$ é uma solução de (6.59) se

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y'(b) = 0 \tag{6.60}$$

e

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0. \tag{6.61}$$

O problema (6.60) tem solução não trivial se e só se $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/b^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, tendo-se, neste caso,

$$Y(y) = Y_n(y) = \cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Por sua vez, a equação (6.61) implica que $X(x)$ é proporcional a $\cosh n\pi x/b$ (porquê?). Assim,

$$u_n(x,y) = \cosh\frac{n\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

é uma solução do PVF (6.59) qualquer que seja $n \in \mathbb{N}_0$.
Passo 2: A função

$$u(x,y) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cosh\frac{n\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

é uma solução (formal) de (6.59) qualquer que seja a escolha das constantes $c_0,\ c_1,\ \ldots$. Tem-se,

$$u_x(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

pelo que as constantes $c_1,\ c_2,\ \ldots$ devem ser tais que

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\cos\frac{n\pi y}{b} \quad 0 < y < b,$$

ou, equivalentemente,

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{c}_n \cos\frac{n\pi y}{b} \quad 0 < y < b, \tag{6.62}$$

com

$$\widetilde{c}_n = \frac{n\pi}{b} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}.$$

Assim, desenvolvendo a função $f(y)$ em série de Fourier de cossenos no intervalo $0 < y < b$, resulta

$$f(y) = \frac{1}{b}\int_0^b f(y)\,dy + \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^b f(y)\cos\frac{n\pi y}{b}\,dy\right]\cos\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.63}$$

Uma vez que há um termo constante em (6.63) que não existe em (6.62), é necessário assumir que

$$\int_0^b f(y)\,dy = 0$$

para que este problema de Neumann tenha solução. Se esta condição for satisfeita, então,

$$\widetilde{c}_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\cos\frac{n\pi y}{b}\,dy \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{2}{b\operatorname{senh} n\pi a/b}\int_0^b f(y)\cos\frac{n\pi y}{b}\,dy, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note-se que a constante c_0 permanece arbitrária, e por isso a solução $u(x,y)$ fica determinada a menos de uma constante aditiva. Esta é uma propriedade de todos os problemas de Neumann.

Exercícios sobre aplicação à equação de calor, equação de onda e equação de Laplace

Exercício 6.19 *Os extremos $x = 0$ e $x = 10$ de uma barra de alumínio ($\alpha^2 = 0.86$) são mantidos a $10\,^oC$, enquanto que a sua superfície se encontra isolada. Determinar uma expressão para a distribuição de temperatura na barra ao longo do tempo $u(x,t)$ caso se tenha inicialmente:*

(a) $u(x,0) = 70, \quad 0 < x < 10;$ $\qquad$ (b) $u(x,0) = 70\cos x, \quad 0 < x < 10;$

(c) $u(x,0) = \begin{cases} 10x, & 0 < x < 5 \\ 10\,(10-x)\,, & 5 \le x < 10 \end{cases};$ $\qquad$ (d) $u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 3 \\ 65, & 3 \le x < 10 \end{cases}.$

Exercício 6.20 *Verificar que a função $u(x,t)$ definida por (6.40) satisfaz a equação de calor. Sugestão: Usar o critério da razão (ou Critério D'Alembert) para mostar que a série infinita (6.40) converge, podendo assim ser diferenciada termo a termo relativamente a t e a x.*

Exercício 6.21 *Determinar a solução do PVIVF*

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 3, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 3, \\ u(0,t) = u(3,t) = 0. & t > 0. \end{array} \qquad u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \\ 3-x & 2 < x < 3 \end{cases}.$$

Exercício 6.22 *A equação de onda em duas dimensões é $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$. Determine soluções desta equação usando o método de separação de variáveis.*

Exercício 6.23 *Determinar a solução do seguinte PVF: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, satisfazendo as condições de fronteira*

$$\begin{array}{ll} u(x,0) = 0, & u(x,b) = 0, \\ u(a,y) = 0, & u(0,y) = f(y). \end{array}$$

6.5 Exercícios de revisão do Capítulo 6

Exercício 6.24 *Usar o método de separação de variáveis para determinar a solução dos seguintes problemas.*

(a) $u_t = u_y, \quad u(0,y) = e^y + e^{-2y};$ $\qquad$ (b) $u_t = u_y + u, \quad u(0,y) = 2e^{-y} - e^{2y}.$

Exercício 6.25 *Averiguar se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir cada uma das EDPs seguintes por pares de EDOs. Em caso afirmativo, determinar essas equações.*

(a) $tu_{tt} + u_x = 0;$ $\qquad$ (b) $tu_{xx} + xu_t = 0;$

(c) $u_{xx} + (x-y)u_{yy} = 0;$ $\qquad$ (d) $u_{xx} + 2u_{xt} + u_t = 0.$

Exercício 6.26 *Determinar a solução do seguinte PVIVF.*

$$\begin{array}{ll} u_t = 1.14\,u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 2, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}\pi x/2 + 3\operatorname{sen}5\pi x/2, & 0 < x < 2, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0. & t > 0. \end{array}$$

Exercício 6.27 *Determinar a série de Fourier de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad |x| < 1; \qquad (b) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 1, \\ 3, & 1 \le x < 2, \end{cases} \quad |x| < 2.$$

Exercício 6.28 *Determine a série de Fourier, envolvendo apenas cossenos, de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \le 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \end{cases}, \quad 0 < x < 2; \qquad (b) \quad f(x) = \cos^2 x, \quad 0 < x < \pi.$$

Exercício 6.29 *Determinar a série de Fourier, envolvendo apenas senos, de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < a, \\ a, & a \le x < 2a, \end{cases}, \quad 0 < x < 2a; \qquad (b) \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < l/2, \\ l - x, & l/2 \le x < l, \end{cases}, \quad 0 < x < l.$$

Exercício 6.30 *Os extremos e as faces de uma barra de cobre ($\alpha^2 = 1$) de comprimento 2 estão isolados relativamente ao exterior por forma a não passar calor através deles. Determinar uma expressão para a distribuição de temperatura na barra ao longo do tempo, $u(x,t)$, caso se tenha inicialmente $u(x,0) = 70 \operatorname{sen} \pi x$, $0 < x < 2$.*

Exercício 6.31 *Determinar a solução do problema*

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 1, \\ u_t(x,0) = 1, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. & t > 0. \end{array}$$

Exercício 6.32 *Uma corda com 10 cm de comprimento (quando não sujeita a tensão) encontra-se fixa nos extremos, sendo levantada no ponto médio até uma altura de 1 cm e largada depois. Descrever o movimento da corda (que obedece à equação de onda) considerando $c^2 = 1$.*

Exercício 6.33 *Determinar a solução do seguinte PVF: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, satisfazendo as condições de fronteira*

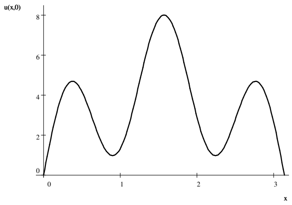
$$\begin{array}{ll} u(0,y) = 0, & u(a,y) = 0, \\ u(x,b) = 0, & u(x,0) = f(x). \end{array}$$

6.6 Soluções dos exercícios do Capítulo 6

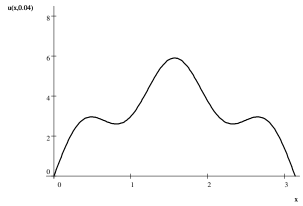
6.1. (a) $u(t,y) = e^{2(t+y)} + e^{-3(t+y)}$; (b) $u(x,y) = e^{-5x-4y} + 2e^{-7x-6y} - 14e^{13x+14y}$;

(c) $v(x,t) = 10x^4t^2 + 9x^{-6}t^{-3}$; (d) $w(t,z) = e^{-z^3+2z-1}e^{2t} + e^{-z^3-2z+3}e^{-2t}$.

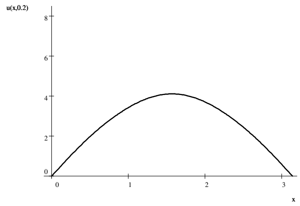
6.2. $u(x,t) = 5\,\text{sen}\,x\,e^{-t} + 3\,\text{sen}\,5x\,e^{-25t}$, $0 \leq x \leq \pi$.



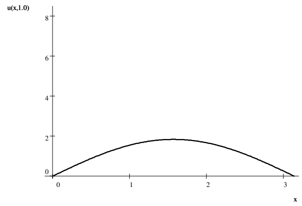
$u(x,0)$



$u(x,0.04)$

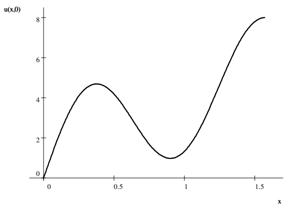


$u(x,0.2)$

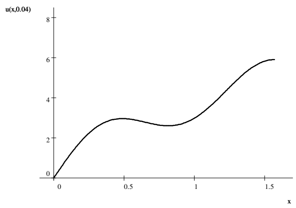


$u(x,1.0)$

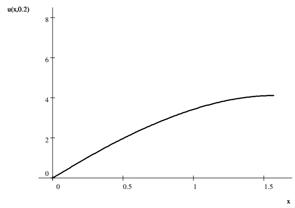
6.3. $u(x,t) = 5\,\text{sen}\,x\,e^{-t} + 3\,\text{sen}\,5x\,e^{-25t}$, $0 \leq x \leq \pi/2$.



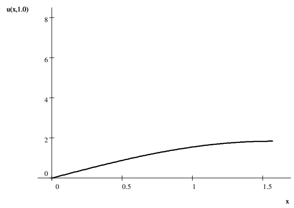
$u(x,0)$



$u(x,0.04)$



$u(x,0.2)$



$u(x,1.0)$

6.4. (a) $X'' - \mu X = 0$, $Y'' - (\mu + \lambda)Y = 0$, $T' - \lambda\alpha^2 T = 0$;

(b) $u(x,y,t) = \text{sen}\,n\pi x/a\ \text{sen}\,n\pi y/b\ e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 (b^2+a^2)t\,/\,a^2 b^2}$.

6.5. (a) $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\text{sen}\,\pi x}{1} + \dfrac{\text{sen}\,3\pi x}{3} + \dfrac{\text{sen}\,5\pi x}{5} + \dots\right)$;

(b) $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\text{sen}\,\pi x}{1} - \dfrac{\text{sen}\,2\pi x}{2} + \dfrac{\text{sen}\,3\pi x}{3} \pm \dots\right)$;

(c) $f(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[\text{sen}\,\dfrac{n\pi}{2}\cos\dfrac{n\pi x}{2} + (1 - \cos\dfrac{n\pi}{2})\,\text{sen}\,\dfrac{n\pi x}{2}\right]$;

(d) $f(x) = \dfrac{e^l - 1}{2l} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^l(-1)^n - 1}{l^2 + n^2\pi^2}\left(l\cos\dfrac{n\pi x}{l} - n\pi\,\text{sen}\,\dfrac{n\pi x}{l}\right)$;

(e) $f(x) = \dfrac{e^l}{l} + 2l\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^l(-1)^n - 1}{l^2 + n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi x}{l}$; (f) $f(x) = \dfrac{3}{4}\,\text{sen}\,x - \dfrac{1}{4}\,\text{sen}\,3x$.

6.6. $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$.

6.8. (a) $f(x) = \dfrac{3a}{4} + \dfrac{4a}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\pi/2 - 1}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2a}$; (b) $f(x) = \dfrac{e-1}{e} + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - \cos n\pi/e}{1 + n^2\pi^2}\cos n\pi x$;

(c) $f(x) = \dfrac{l}{4} + \dfrac{2l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[2\cos n\pi/2 - 1 - (-1)^n\right]\cos\dfrac{n\pi x}{l}$.

6.9. (a) $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \left[\cos n\pi/2 - (-1)^n\right] \operatorname{sen} n\pi x/2$; (b) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$.

6.10. (a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos 2x}{1-2^2} + \dfrac{\cos 4x}{1-4^2} + \ldots\right)$, $0 < x < 1$;

(b) $\cos x = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{2\operatorname{sen} 2x}{2^2-1} + \dfrac{4\operatorname{sen} 4x}{4^2-1} + \ldots\right)$, $0 < x < 1$;

(c) Não. Argumento 1: A série de Fourier de $f(x) = \operatorname{sen} x$ no intervalo $-\pi < x < \pi$ é única, sendo $f(x) = \operatorname{sen} x$. Argumento 2 : A série de Fourier de uma função ímpar (como $\operatorname{sen} x$) é uma série que envolve apenas senos.

6.12. $x^2 = \dfrac{4l^2}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\left(1 - \cos\dfrac{n\pi x}{l}\right) = \dfrac{l^2}{3} + \dfrac{4l^2}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos\dfrac{n\pi x}{l}$.

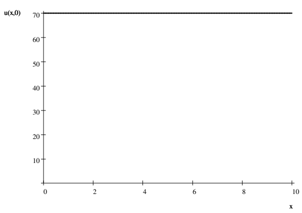
6.13. O máximo é atingido na vizinhança de $x = \pm\pi$ (pontos de descontinuidade da extensão periódica de $f(x)$), mais concretamente em $x = \pm\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi$, tendo-se $\lim_{n\to\infty} f_n(\frac{n-1}{n}\pi) = 3.703$ e $\lim_{n\to\infty}\left[f_n(\frac{n-1}{n}\pi) - f(\frac{n-1}{n}\pi)\right] \approx 0.56 \approx 0.09\ |f(\pi^-) - f(\pi^+)|$.

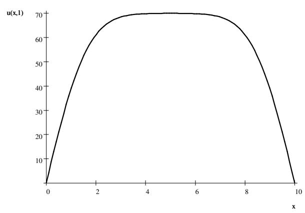
6.14. (a) $\sigma_n^2 = \dfrac{2}{\pi^2} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{[(-1)^k - 1]^2}{n^2}$; (b) $\sigma_n^2 = 8 \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$; (c) $\sigma_n^2 = 0$ para $n \geq 10$.

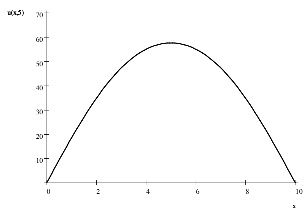
6.15. $\dfrac{\pi^2}{8} = 1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots = 1 + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{25} + \ldots$

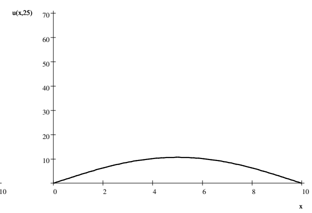
6.16. $\dfrac{\pi^4}{90} = 1 + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \ldots = 1 + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{81} + \ldots$

6.19. (a) $u(x,t) = \dfrac{280}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x/10}{2n-1}\, e^{-0.86(2n-1)^2\pi^2 t\,/\,100}$;

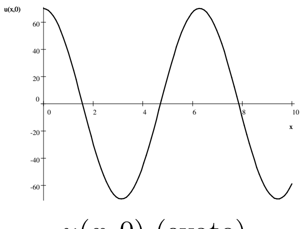

$u(x,0)$ (exato)

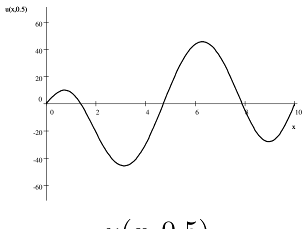

$u(x,1)$

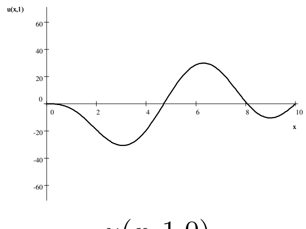

$u(x,5)$

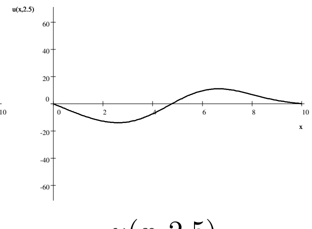

$u(x,25)$

(b) $u(x,t) = 140\pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\dfrac{1-(-1)^n\cos 10}{n^2\pi^2 - 100} \operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{10}\, e^{-0.86 n^2\pi^2 t\,/\,100}$;

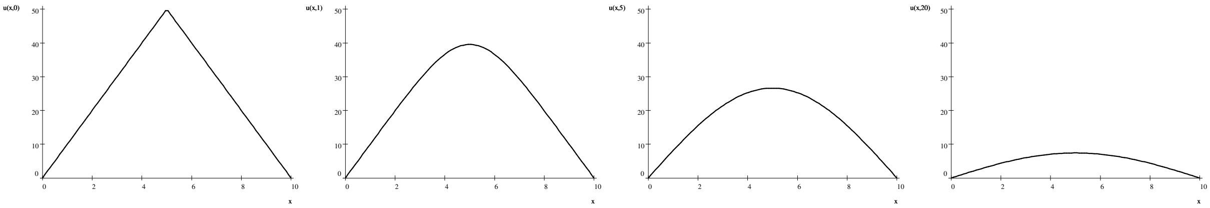

$u(x,0)$ (exato)


$u(x,0.5)$


$u(x,1.0)$

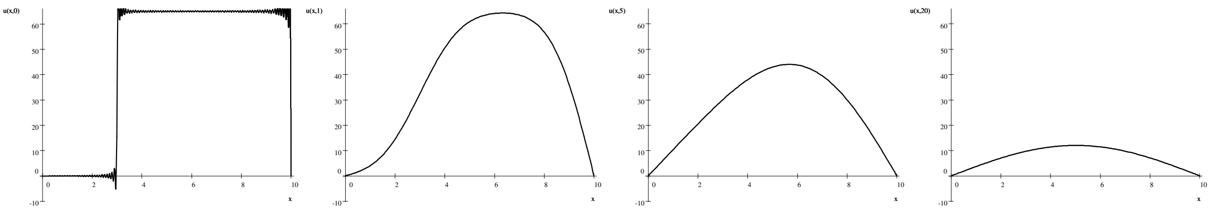

$u(x,2.5)$

(c) $u(x,t) = \dfrac{400}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n\pi/2}{n^2} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{10}\, e^{-0.86 n^2 \pi^2 t\,/\,100}$;



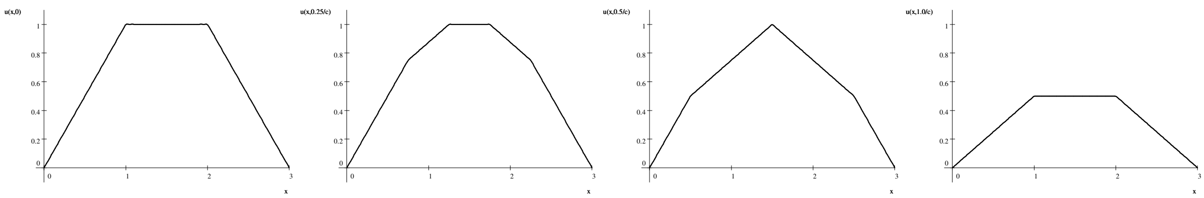
$u(x,0)$ $u(x,1)$ $u(x,5)$ $u(x,20)$

(d) $u(x,t) = \dfrac{130}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 3n\pi/10 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{10}\, e^{-0.86 n^2 \pi^2 t\,/\,100}$.

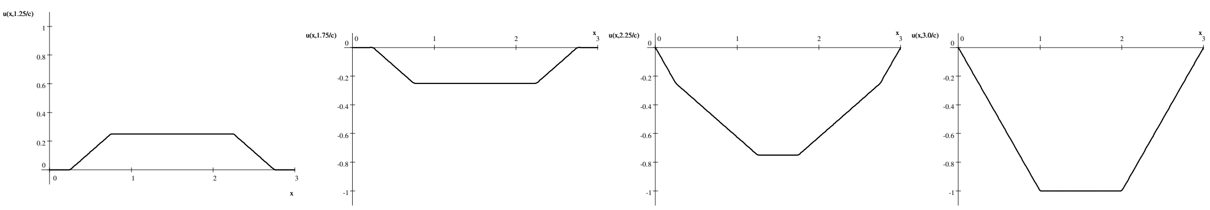


$u(x,0)$ $u(x,1)$ $u(x,5)$ $u(x,20)$

6.21. $u(x,t) = \dfrac{6}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \left(\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{3} + \operatorname{sen} \dfrac{2n\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{3} \cos \dfrac{n\pi ct}{3}$.



$u(x,0)$ $u(x,0.25/c)$ $u(x,0.5/c)$ $u(x,1.0/c)$



$u(x,1.25/c)$ $u(x,1.75/c)$ $u(x,2.25/c)$ $u(x,3.0/c)$

6.22. $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$; $X(x) = a_1 \cos \mu x + b_1 \operatorname{sen} \mu x$;

$Y(y) = a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\, y + b_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\, y$; $T(t) = a_3 \cos \lambda ct + b_3 \operatorname{sen} \lambda ct$.

6.23. $u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \dfrac{n\pi(x-a)}{b} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi y}{b}$, $c_n = \dfrac{-2}{b \operatorname{senh} n\pi a/b} \displaystyle\int_0^b f(y) \operatorname{sen} \dfrac{n\pi y}{b}\, dy$.

6.24. (a) $u(t,y) = e^{t+y} + e^{-2(t+y)}$; (b) $u(t,y) = 2e^{-y} - 3e^{3t+2y}$.

6.25. (a) $u(x,t) = X(x)T(t)$; $X' + \lambda X = 0$, $tT'' - \lambda T = 0$;

(b) $u(x,t) = X(x)T(t)$; $X'' - \lambda x X = 0$, $T' + \lambda t T = 0$;

(c) Não é possível devido ao termo $x - y$; (d) Não é possível devido ao termo u_{xt}.

6.26. $u(x,t) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2} e^{-1.14\pi^2 t/4} + 3\operatorname{sen}\dfrac{5\pi x}{2} e^{-(1.14)25\pi^2 t/4}$.

6.27. (a) $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x$;

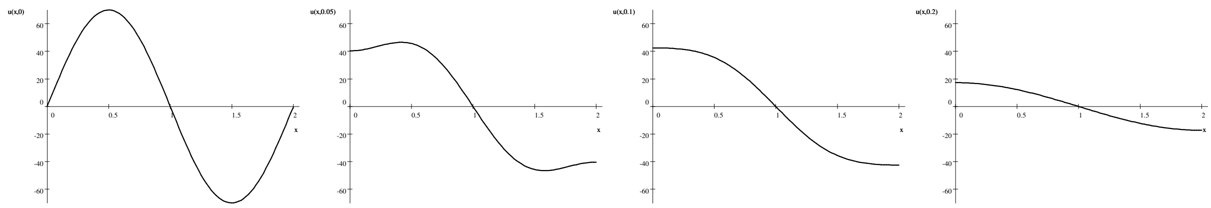
(b) $f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2} - \dfrac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{2} + \dfrac{(-1)^n}{2n}\operatorname{sen} n\pi x\right]$.

6.28. (a) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$.

6.29. (a) $f(x) = \dfrac{2a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[2\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2} - (-1)^n n\pi\right]\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{2a}$;

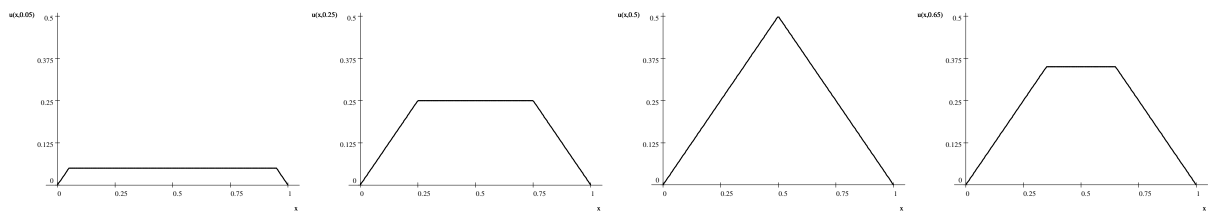
(b) $f(x) = \dfrac{4l}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\,\pi x}{l}$.

6.30. $u(x,t) = -\dfrac{560}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2-4}\cos\dfrac{(2n-1)\,\pi x}{2} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t\,/\,4}$.



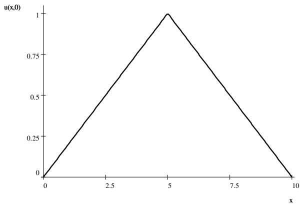
$u(x,0)$ $u(x,0.05)$ $u(x,0.1)$ $u(x,0.5)$

6.31. $u(x,t) = \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}(2n-1)\pi x\ \operatorname{sen}(2n-1)\pi t$.

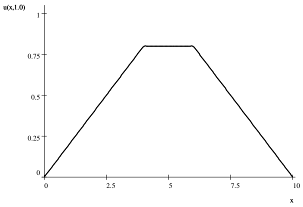


$u(x,0.05)$ $u(x,0.25)$ $u(x,0.5)$ $u(x,0.65)$

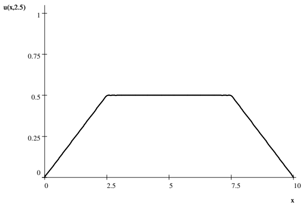
6.32. $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n\pi/2}{n^2} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{10} \cos \dfrac{n\pi t}{10}.$



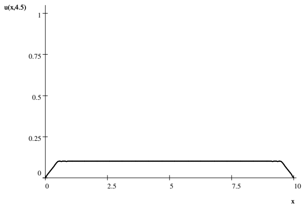
$u(x,0)$



$u(x,1.0)$



$u(x,2.5)$



$u(x,4.5)$

6.33. $u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \dfrac{n\pi(y-b)}{a}$, $c_n = \dfrac{-2}{a \operatorname{senh} n\pi b/a} \displaystyle\int_0^a f(x) \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{a}\, dx.$