¿Cómo definir v.a. discretas sin $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$?

Simplemente asigna probabilidades a borelianos $\subset \mathbb{R}$.

* los conjuntos $(-\infty, b]$ generan a todos los borelianos

Basta con definir

$$\mathbb{P}(X \in (-\infty, b]) = \mathbb{P}(X \leq b) = F(b)$$ → Función distribución

e.g. $\mathbb{P}(X \in (a,b]) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)$

Para v.a. discretas es '<u>más sencillo</u>' definir

$$\mathbb{P}(X = x) = f(x)$$ → función de probabilidad

El soporte de X es $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

Ejemplo: variable Bernoulli(p) , Ber(p)

parámetro $p \in [0,1]$

soporte $\{0,1\}$ → alternativa $\{-1,1\}$

Modela: éxito o fracaso de un experimento; respuesta positiva (1) o negativa (0) a una pregunta

función probabilidad:

$f(0) = 1-p$

$f(1) = p$

$f(x) = 0 \quad x \notin \{0,1\}$

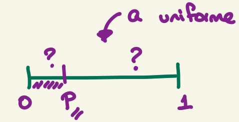
* parámetro p mide la probabidad de éxito

Simulación Ber(p)

a=runif(0,1)

if $a < p \rightarrow 1$

$a > p \rightarrow 0$



$$\mathbb{P}(\underset{a}{\text{simulación}} < p) = p$$

$$\mathbb{P}(\underset{a}{\text{simulación}} > p) = 1-p$$

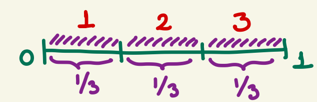
Simulación de X uniforme en el conjunto $\{1,2,3\}$

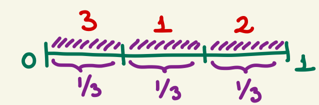
a=runif(0,1)

if $0 < a < 1/3 \rightarrow X=1$

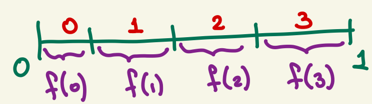
$1/3 < a < 2/3 \rightarrow X=2$

$2/3 < a < 3 \rightarrow X=3$





$X \sim \text{Bin}(3, 1/2)$



$0 < a < f(0) \rightarrow X=0$

$f(0) < a < f(0)+f(1) \rightarrow X=1$

$\rightarrow X=2$

$\ldots\ldots < a < 1 \rightarrow X=3$

Binomial $Bin(n,p)$

Parámetros: $n \geq 1$ tiene que ser entero
$p \in [0,1]$

Soporte de la variable: $\{0,1,2,\dots,n\}$

¿Qué modela?

Hacer n experimentos (son idénticos e independientes)
hay un evento que se considera éxito y ocurre con probabilidad p.

Y cuenta el número de éxitos ← $Bin(n,p)$

Función de probabilidad: $X \sim Bin(n,p)$
$x \in Soporte(X)$

$$f(x) = \mathbb{P}(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

combinaciones posibles del orden de éxitos y fracasos

prob. x éxitos

prob $n-x$ fracasos

multiplicación porque son experimentos independientes.

Geométrica $Geo(p)$

Parámetros: $p \in (0,1]$

Soporte de la variable: $\{0,1,2,\dots\}$ ← cantidad infinita!

¿Qué modela?

Hacer experimentos indefinidamente (son idénticos e independientes)
hay un evento que se considera éxito y ocurre con probabilidad p.

Cuenta el número de fracasos antes de obtener el primer éxito ← $Geo(p)$

*Notemos que se realizan $\underbrace{Geo(p)}_{x}+1$ experimientos

Función de probabilidad: $X \sim Geo(p)$
$x \in Soporte(X)$

$$f(x) = \mathbb{P}(X=x) = p\,(1-p)^x$$

último experimento tiene éxito

los x primeros experimentos fracasan

multiplicación porque son experimentos independientes.

Binomial Negativa

Parámetros: $r \geq 1$ entero
$p \in (0,1]$

Soporte de la variable: $\{0,1,2,\dots\}$ ← números enteros no-negativos

¿Qué modela?

Hacer experimentos indefinidamente (son idénticos e independientes) hay un evento que se considera éxito y ocurre con probabilidad p.

Cuenta el número de fracasos antes de obtener el r-ésimo éxito ← $BN(r,p)$

* Notemos que se realizan $\overbrace{BN(r,p)}^{x} + r$ experimientos

Función de probabilidad: $X \sim BN(r,p)$

$x \in Soporte(X)$

$$f(x) = \mathbb{P}(X=x) = \binom{x+r-1}{x} \underbrace{p^r (1-p)^x}$$

combinaciones de los x fracasos y $r-1$ éxitos
último experimento debe ser éxito

mismas ideas que $Bin(n,p)$ y $Geo(p)$

Hipergeométrica

Parámetros: $n \geq 1$ (población) entero
$1 \leq m \leq n$
$1 \leq k \leq n$

Soporte de la variable: El mínimo de m y k : $m \wedge k$
$\{0,1,2,\dots m \wedge k\}$

¿Qué modela?

Dentro de una población de n individuos, se divide la población en indiv. Tipo 1 e indiv Tipo 2

individuos Tipo 1 $= m$ #indiv. Tipo 2 $= n-m$

Tomamos muestra de k individuos (sin reemplazo)

Cuenta #indiv Tipo 1 en la muestra ← $HG(n,m,k)$

Función de probabilidad: $X \sim HG(n,m,k)$

escoger sólo x tipo 1 de los m que hay

escoger el resto de la muestra dentro grupo tipo 2.

$$\mathbb{P}(X=x) = \frac{\binom{m}{x} \cdot \binom{n-m}{k-x}}{\binom{n}{k}}$$

→ casos posibles de escoger muestra sin reemplazo