Clase 8

Operaciones con vectores, norma, proyecciones y espacios vectoriales

8.1 Introducción

Las nociones de vectores están implícitamente contenidas en las reglas de composición de las fuerzas y de las velocidades, conocidas hacía el fin del siglo XVII.

Es en relación con la representación geométrica de los números llamados imaginario, como las operaciones vectoriales se encuentran por primera vez implícitamente realizadas, sin que el concepto de vector este aún claramente definido. Fue mucho más tarde, y gracias al desarrollo de la geometría moderna y de la mecánica, cuando la noción de vector y de operaciones vectoriales se concretó.

El alemán Grassman, en 1844, por métodos geométricos introdujo formalmente las bases del cálculo vectorial (suma, producto escalar y vectorial.

El inglés Hamilton, por cálculos algebraicos, llegó a las mismas conclusiones que Grassman; empleó por primera vez los términos escalar y vectorial.

Hacia el final del siglo XIX, el empleo de los vectores se generalizó a toda la física. Bajo la influencia de los ingleses Hamilton Stokes, Maxwell y Heaviside, y del americano Gibbs (quien utilizó la notación del punto para el producto escalar y del x para el producto vectorial), se amplió el cálculo vectorial, introduciendo nociones más complejas, como los operadores vectoriales: gradiente, divergencia y rotacional.

8.2 Operaciones con vectores

8.2.1 Adición de vectores

Sean

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Dos vectores en R^n. La suma de los vectores u y v es el vector

$$\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

y se denota como u+v

Ejemplo

Si $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, son vectores en R^3, entonces

$$u + v = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -2+3 \\ 3+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma

Si u, v y w son vectores cualesquiera.

- Asociativa: (u + v) + w = u + (v + w)
- Conmutativa: u + v = v + u
- Existe elemento neutro O tal que: u + O = O + u = u

  O se llama vector nulo.
- Para cada vector u existe -u tal que:

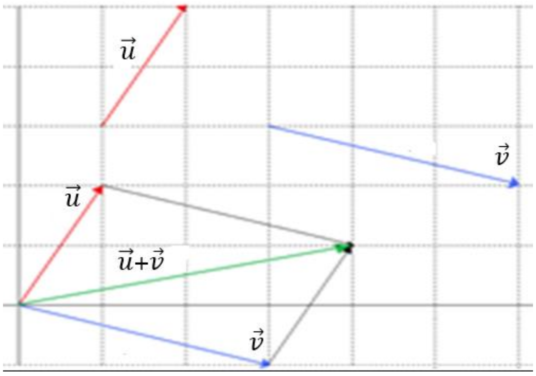
  u + (-u) = (-u) + u = O

  -u es el vector opuesto de u.

8.2.2 Suma grafica de vectores en forma grafica

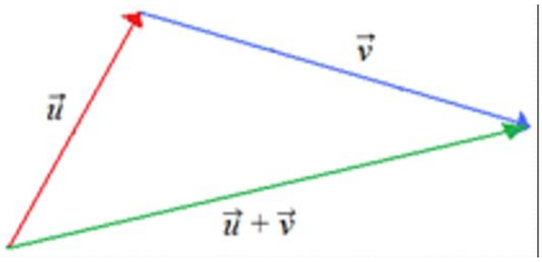
Método del paralelogramo

Se forma el paralelogramo con lados u y v haciendo coincidir los puntos orígenes de ambos vectores. El vector suma es la diagonal del paralelogramo y tiene origen en el punto origen de u y v.



Método de la poligonal

Para realizar la suma u+v se hace coincidir el externo de u con el punto de origen de v y se traza un vector desde el punto de origen de u hasta el extremo v, este nuevo vector es el vector suma de u con v.



8.2.3 Múltiplo escalar

Si $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_3 \end{bmatrix}$ es un vector con R^n y c es un escalar, el multiplo escalar de cu de u por c es el vector $\begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \vdots \\ cu_3 \end{bmatrix}$

Ejemplo

Si $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un vector con R^4 y c=-2, entonces

$$cu = (-2)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Las propiedades de suma de vectores y multiplicación por un escalar satisfacen las siguientes propiedades.

8.2.4 Producto punto

A continuación, definiremos el concepto de longitud de un vector R^n, generalizando la idea correspondiente en R^2.

La longitud (llamada magnitud o norma) del vector $(u = u_1, u_2, \dots, u_n)$ en R^n es

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Asimismo, definimos la distancia entre el punto $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ y el origen mediante. La distancia entre los puntos $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ se define entonces como la longitud del vector $u - v$, donde

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $v = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

En consecuencia, esta distancia está dada por

$$\|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_2 - v_2)^2}$$

Ejemplo

Sea $u = (2, 3, 2, -1)$ y $v = (4, 2, 1, 3)$. Entonces

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{18}$$

$$\|v\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{30}$$

La distancia entre los puntos $(2, 3, 2, -1)$ y $(4, 2, 1, 3)$ es la longitud del vector u-v. de esta manera.

$$\|u - v\| = \sqrt{(2-4)^2 + (3-2)^2 + (2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{22}$$

Las ecuaciones resultantes se pueden deducir con facilidad con dos aplicaciones del teorema de Pitágoras.

8.2.5 Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores es un producto entre vectores que tiene por resultado un escalar (un número real). Existen dos formas para calcularlo:

Sean los vectores $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Sea α el ángulo que forman u y v (definido como el menor de los dos ángulos que forman los vectores. Por lo tanto, $0° \leq \alpha \leq 180°$)

Producto escalar de u y v, que se representa como u.v:

$$u.v = |u|.|v|.\cos(\alpha)$$

$$u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2$$

Estas dos formas de calcular el producto escalar permiten, entre otras cosas, calcular el ángulo que forman dos vectores.

Ejemplo

$$u = (1,3) y\ v = (2, -4)$$

El producto escalar de u y v será:

$$u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2 = 1.2 + 3.(-4) = -10$$

Por otro lado

$\|u\| = \sqrt{10}$

$\|v\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$u.v = |u|.|v|.\cos(\alpha) = \sqrt{10}.2\sqrt{5}.\cos(\alpha)$

Por lo tanto: $\cos(\alpha) = \frac{-10}{\sqrt{10}.2\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = 135°$

Propiedades del producto escalar

- El producto escalar de u consigo mismo:

$$(u.u) \geq 0 \quad y \quad (u.u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

- Conmutativa

$$u.v = v.u$$

- Distributiva del producto con respecto de la suma:

$$(u + v).w = u.w + v.w$$

- Asociativa en el producto por un escalar

$$c.(u.v) = (c.u).v = u.(c.v)$$

8.2.5 Producto escalar y ortogonalidad

Si dos vectores son ortogonales (o perpendiculares), el ángulo formado entre ellos es 90°.

$0 \leq \theta \leq 180°$, $\cos\theta = \frac{u.v}{|u|.|v|} \Rightarrow u.v = |u|.|v|.\cos\theta$

Si $\theta = 90°$ entonces $u.v = |u|.|v|.\cos(90) = 0$

Por lo tanto, si u y v son ortogonales $u.v = 0$

Recíprocamente, si $u.v = 0 \quad \Rightarrow u\ y\ v\ son\ ortogonales$

8.2.6 Producto vectorial

El producto vectorial de un vector u y v, denotado como u X v, es un vector r tal que…

$$u\ X\ v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2.v_3 - v_2.u_3)i + (u_3.v_1 - v_3.u_1)j + (u_1.v_2 - v_1.u_2)k$$

Donde

- u y v son los vectores a los cuales se aplica el producto vectorial cuyas componentes con u_1, u_2, u_3 y v_1, v_2, v_3 respectivamente.
- i, j, k son vectores unitarios (su modulo es 1) en los sentidos de los ejes x, y z respectivamente.

Ejemplo

Sea u=(2,4,-5) y v=(-3,-2,1)

$$u\ X\ v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (4.1 - (-2).(-5))i + \big((-5).(-3) - 1.2\big)j + (2.(-2) - (-3).4)k$$

$$u\ X\ v = -6i + 13j + 8k$$

Modulo del producto vectorial

$$|u\ X\ v| = |u||v|.\sin\theta$$

Donde θ es el angulo formado entre u y v.

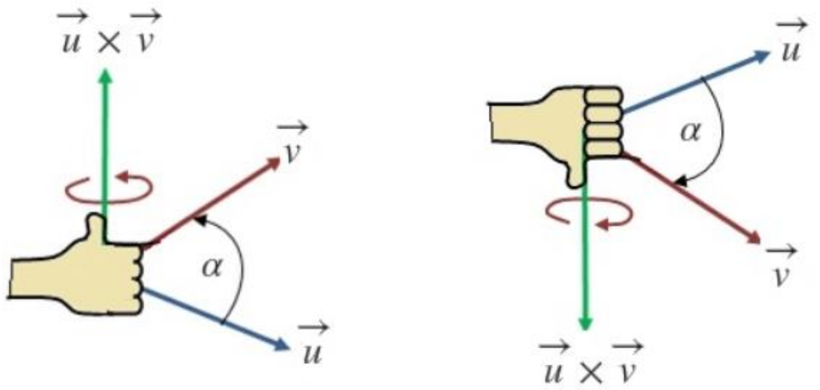
Dirección del producto vectorial

Es perpendicular al plano que de definen ambos vectores

Sentido del producto vectorial

La mejor regla para definir el sentido del producto vectorial, que no da lugar a confusión es la regla de la mano derecha.

Para realizar esta regla pon la mano derecha apuntando con los dedos en el mismo sentido del vector u y cierra la mano dirigiendo tus dedos hacia el vector v por el camino mas corto (ángulo mas pequeño). El pulgar determinara el sentido del producto vectorial.



Esta regla se utiliza cuando tenemos los vectores representados gráficamente. Si calculamos las componentes del vector resultante del producto vectorial, la componente z nos dará el sentido del vector.

Producto vectorial y paralelismo

Si u y v son paralelos, tienen igual dirección y el angulo formado por ellos es $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$.

$|u\ X\ v| = |u||v|.\sin 0° \rightarrow |u\ X\ v| = 0$

$|u\ X\ v| = |u||v|.\sin 180° \rightarrow |u\ X\ v| = 0$

Por lo tanto: Si u y v son paralelos entonces $|u\ X\ v| = 0$

Recíprocamente: Si $|u\ X\ v| = 0$ entonces u y v son paralelos.

$$u//v \Leftrightarrow |u\ X\ v| = 0$$

Propiedades del producto vectorial

Si u, v y w son vectores en R^3 y c es un escalar:

- u X v = -(u X v)
- u X u = 0
- 0 X u = 0
- u X (v + w) = u X v + u X w
- (u + v) X w = u X w + v X w
- c (u X v) = (c.u) X v = u X (cv)

8.2.7 Producto Mixto

El producto mixto es una operación entre tres vectores que combina el producto escalar con el producto vectorial para obtener un resultado escalar.

Se llama producto mixto entre los vectores u, v y w al numero real o escalar denotado por u.(v X w)

Siendo $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$

$$u.(v\ X\ w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Sea $u = (2, 4, -5)$, $v = (-3, -2, 1)$ y $w = (1, -2, -3)$

$$u.(v\ X\ w) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -43$$

Interpretación geométrica del Producto Mixto

El valor absoluto del producto mixto entre los vectores u, v y w mide el área del paralelepípedo determinado por u, v y w

Ejemplo

Calculamos el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores

$u = (2, 4, -5)$, $v = (-3, -2, 1)$ y $w = (1, -2, -3)$

$$u.(v\,X\,w) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -43$$

Volumen $V = u.(v\,X\,w) \rightarrow V = |-43| \rightarrow V = 43\,u.v$

8.3 Espacio vectorial

Definición

Un espacio vectorial es un conjunto ***V***, no vacío, de objetos llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por escalares (números reales), sujetas a los diez axiomas[1] (o reglas) que se enlistan a continuación. Los axiomas deben ser válidos para todos los vectores ***u, v*** *y* ***w*** en ***V*** y todos los escalares ***c*** y ***d***.

1. La suma de **u** y **v**, denotada mediante **u** + **v**, está en ***V***.
2. **u** + **v** = **v** + **u** (propiedad conmutativa de la suma)
3. (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**) (propiedad asociativa de la suma)
4. Existe un vector cero (**0**) en ***V*** tal que **u** + **0** = **u** (elemento neutro para la suma)
5. Para cada **u** en ***V***, existe un vector **−u** en ***V*** tal que **u** + **(−u)** = **0** (inverso aditivo)
6. El múltiplo escalar de **u** por **c**, denotado mediante **c·u**, o **cu**, está en ***V***
7. **c**(**u** + **v**) = **cu** + **cv** (propiedad distributiva de la multiplicación de un escalar respecto a la suma de dos vectores)
8. (**c** + **d**)**u** = **cu** + **du** (propiedad distributiva de la multiplicación de un vector respecto a la suma de dos escalares)
9. **c**(**du**) = (**cd**)**u**
10. 1**u** = **u**

[1] Un axioma es una expresión que se acepta más allá de la ausencia de una demostración de su postulado, es decir, que no precisa demostración.

Mediante estos axiomas, es posible demostrar que el vector cero del axioma 4 es único, y que el vector −u, también llamado el negativo de u, del axioma 5 es único para cada u en ***V***.

Por otro lado, también es posible demostrar que, para cada u en ***V*** y para cualquier escalar c:

$$0\mathbf{u} = 0$$

$$c\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{-u} = (-1)\mathbf{u}$$

Es decir, un espacio vectorial es un conjunto de vectores, pero no cualquier conjunto de vectores, sino que debe cumplir los axiomas del 1 al 10. Aunque pudiera parecer complicado que se cumplan todos los axiomas al mismo tiempo, en realidad hay métodos sencillos para asegurarnos la construcción de conjuntos de vectores que sean espacios vectoriales.

Cada vector está formado por componentes, o elementos. En nuestro caso, estudiaremos en particular los vectores de 2 elementos y de 3 elementos, siendo dichos elementos números reales. Sin embargo, se pueden definir vectores de *n* elementos.

Si bien la clase pasada definimos la suma de vectores y tratamos la multiplicación por escalares al analizar cuándo dos vectores son paralelos, volveremos a recordar dichas operaciones mencionadas en los axiomas.

8.3.1 Espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$

Al conjunto de todos los vectores de 2 componentes lo denominaremos $\mathbb{R}^2$, de igual modo, al conjunto de todos los vectores de 3 componentes lo denominaremos $\mathbb{R}^3$.

En general, al conjunto de todos los vectores de n elementos lo denominaremos $\mathbb{R}^n$.

Si consideramos al conjunto $\mathbb{R}^n$ junto con las operaciones de suma vectorial y multiplicación por un escalar definidas previamente, es posible demostrar el siguiente teorema.

Teorema

El conjunto $\mathbb{R}^n$, de todos los vectores de n componentes, con $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, cumple con los axiomas de espacio vectorial con las operaciones suma de vectores y multiplicación por un escalar y, por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ **es un espacio vectorial**.

Dos ejemplos de espacios vectoriales son:

- $\mathbb{R}^2$, es decir, todos los vectores de 2 componentes, o bien todos los vectores del plano.
- $\mathbb{R}^3$, es decir, todos los vectores de 3 componentes, o bien todos los vectores del espacio.

8.3.2 Subespacios vectoriales

Al analizar la estructura de un espacio vectorial, es conveniente tener un nombre para un subconjunto de un espacio vectorial que, a su vez, sea un espacio vectorial. A dicho subconjunto lo llamaremos **subespacio vectorial**.

Para que un subconjunto W de un espacio vectorial V sea un subespacio vectorial, será necesario verificar sólo tres de los diez axiomas de espacios vectoriales. El resto quedarán satisfechos de manera automática.

Definición

Un subespacio de un espacio vectorial *V* es un subconjunto ***W*** de *V* que tiene tres propiedades:

a) El vector cero de *V* está en ***W***.

b) ***W*** es cerrado bajo la suma de vectores. Esto es, para cada **u** y **v** en ***W***, la suma **u** + **v** está en ***W***.

c) ***W*** es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Esto es, para cada **u** en ***W*** y cada escalar **c**, el vector ***cu*** está en ***W***.

Observaciones:

- Las propiedades (a), (b) y (c) garantizan que un subespacio W de V es en sí mismo un espacio vectorial. Todo subespacio es un espacio vectorial. **<u>A partir de aquí cuando se mencione espacio vectorial se puede interpretar también como subespacio vectorial.</u>**
- Todo espacio vectorial es un subespacio (de sí mismo o posiblemente de espacios mayores).
- El conjunto que consta de únicamente el vector cero en un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, llamado subespacio cero y que se escribe como $\{0\}$.

Ejemplo 3

El subconjunto, llamémoslo V_1, de todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ cuya segunda componente es cero, y primer componente es cualquier número real, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Dicho subconjunto se puede escribir como:

W={(x,0) tal que x$\in \mathbb{R}$}

Es decir, la primera componente es cualquier número real y la segunda componente es cero.

Geométricamente dichos vectores son todos aquellos que se encuentran proyectados sobre el eje horizontal x, es decir.

Veamos que cumplen las tres propiedades que hacen que sea un subespacio:

a) El vector cero de $\mathbb{R}^2$ está en ***W***, pues (x,0)=(0,0) cuando x=0.

b) ***W*** es cerrado bajo la suma de vectores. Pues para cada **u**=(x_1,0) y **v**=(x_2,0) en ***W***, la suma **u** + **v** = (x_1+x_2, 0) está en ***W***.

c) ***W*** es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Esto es, para cada **u**=(x_1,0) en ***W*** y cada escalar **c**, el vector ***cu***=(cx_1,0) está en ***W***.

Ejemplo 4

El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que sus primeras y segundas componentes sean mayores a cero **no es un subespacio vectorial**, pues el vector cero no estaría incluido.

Ejemplo 5

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ que pertenezcan a una línea que no pase por el origen **no es un subespacio vectorial**, pues no está incluido el vector cero.

Observación: el único subespacio vectorial real que tiene un número finito de vectores, es el espacio cuyo único vector es 0. Todos los demás tienen una cantidad infinita de vectores, que se pueden obtener aplicando la suma, multiplicación por escalar o alguna combinación de dichas operaciones.

8.4 Combinación lineal de vectores

Si bien prácticamente todos los espacios vectoriales tienen una infinita cantidad de vectores, en esta sección mostraremos que casi todo espacio o subespacio vectorial V que estudiaremos posee un conjunto con un número finito de vectores que describen por completo al espacio V; esto es, cada vector en V puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores en tal conjunto.

Definición. Combinación lineal de vectores

Sean $v_1, v_2, ..., v_k$ vectores en un espacio vectorial V. Un vector v en V es una combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_k$ si

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k$$

Para ciertos números reales $c_1, c_2, ..., c_k$

Ejemplo 6

Sean $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (0, -2)$ y $v_3 = (4, 5)$, entonces el vector

$$v_4 = -2v_1 + 7v_2 + (-2)v_3$$

$$v_4 = -2(1, -1) + 7(0, -2) + (-2)(4, 5)$$

$$v_4 = (-2 - 8, 2 - 14 - 10)$$

$$v_4 = (-10, -22)$$

v_4 es una combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3

8.4.1 Independencia lineal de vectores

Los vectores $v_1, v_2, ..., v_k$ en un espacio vectorial V son linealmente independientes si la única manera para que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Es que las constantes $c_1, c_2, ..., c_k$ sean todas iguales a cero.

En caso contrario se dice que los vectores son linealmente dependientes.

En otras palabras, $v_1, v_2, ..., v_k$, son linealmente independientes si la única combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_k$ que da como resultado el vector cero es aquella en la que todos los coeficientes son cero.

Otra forma de verlo es que los vectores $v_1, v_2, ..., v_k$ son linealmente independientes si ninguno es una combinación lineal de los otros.

Ejemplo 7

Analicemos si los vectores $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (0, -2)$ y $v_3 = (4, 5)$ son linealmente independientes.

Planteemos la ecuación **(1)** con estos vectores:

$$c_1(1, -1) + c_2(0, -2) + c_3(4,5) = 0$$

$$(c_1 + 4c_3, -c_1 - 2c_2 + 5c_3) = (0, 0)$$

Entonces tenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} c_1 + 4c_3 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases}$$

Despejamos de la primera ecuación:

$$c_1 = -4c_3$$

Luego reemplazamos este valor de c_1 y despejamos en la segunda ecuación:

$$-(-4c_3) - 2c_2 + 5c_3 = 0$$

$$c_2 = \frac{9}{2}c_3$$

Tenemos entonces que es un sistema compatible indeterminado, con infinitas soluciones, en donde en este caso el parámetro es c_3.

Si proponemos $c_3 = 1$, entonces $c_1 = -4$ y $c_2 = \frac{9}{2}$

Verifiquemos entonces en **(1)**

$$c_1(1,-1) + c_2(0,-2) + c_3(4,5)$$

$$-4(1,-1) + \frac{9}{2}(0,-2) + 1(4,5)$$

$$(-4+4, 4-9+5)$$

$$(0,0)$$

Efectivamente, hemos hallado valores de los coeficientes, no todos iguales a cero, tales que una combinación lineal de los vectores es cero. Por lo tanto, los vectores $v_1 = (1,-1)$, $v_2 = (0,-2)$ y $v_3 = (4,5)$ no son linealmente independientes.

Ejemplo 8

Analicemos si los vectores $v_1 = (1,-1,4)$, $v_2 = (3,0,-2)$ son linealmente independientes.

$$c_1(1,-1,4) + c_2(3,0,-2) = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ -c_1 = 0 \\ 4c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos que

$$c_1 = 0$$

Luego, de cualquiera de las ecuaciones restantes tenemos que

$$c_2 = 0$$

Por lo tanto, la única manera en que la ecuación (1) se cumpla en este caso es que los coeficientes c_1 y c_2 sean cero.

Entonces, los vectores $v_1 = (1,-1,4)\ y\ v_2 = (3,0,-2)$ son linealmente independientes entre sí.

IMPORTANTE

Otra manera de verificar si un conjunto de vectores es o no linealmente independiente es armar la matriz cuyas filas sean los vectores en cuestión y aplicar eliminación de Gauss. Si alguna de las filas se hace completamente cero, entonces los vectores **no** son linealmente independientes. Caso contrario lo son.

8.4.2 Generador de un espacio vectorial

Si S = $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, entonces el subconjunto W de todos los vectores que son combinaciones lineales de los vectores en S se denota como

W=gen S o W=gen $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$

Se lee "W es el subconjunto generado por S" o bien "W es el subconjunto generado por $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$", o bien "S genera a W".

Además, se cumple que el subconjunto W generado por S es un subespacio vectorial.

Ejemplo 9

Recordemos el subespacio V_1 de los vectores cuya segunda componente es cero, y cuya primera componente es cualquier número real.

De acuerdo a la definición anterior podemos decir que S={(1,0)} es un conjunto generador de V_1, pues cualquier vector de V_1 es combinación lineal de los vectores de S, es decir:

$$V_1=\{c(1,0)\}$$

$$V_1=\{(c,0)\}$$

Cumple con la definición del subespacio, la primera componente es c (cualquier número real) y la segunda componente es cero.

Ejemplo 10

El subconjunto $S = \{(-2, 0, 3);\ (1,1,1)\}$ es generador de:

$$W = \{c(-2, 0, 3) + d(1,1,1)\}$$

Recordemos que c y d son cualquier número real.

Por ejemplo, si c=8 y d=-11, obtendremos un vector v_1 perteneciente a W.

$$v_1 = 8(-2, 0, 3) - 11(1,1,1) = (-27, -11, 13)$$

8.5 Base de un espacio vectorial

Definición

Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ en un espacio vectorial *V* forman una base para *V* si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generan a *V*

b) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son linealmente independientes.

Es así que, podríamos interpretar a una base como a un conjunto generador en el que no "sobra" ningún vector, ningún vector está de más o es redundante.

Ejemplo 11

Previamente vimos que los vectores $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (0, -2)$ y $v_3 = (4, 5)$ no son linealmente independientes, por lo tanto, no pueden ser una base de algún espacio vectorial.

Tomemos solamente los vectores $v_1 = (1, -1)\ y\ v_2 = (0, -2)$

En este caso, si planteamos la igualdad a cero de la combinación lineal:

$$c_1(1, -1) + c_2(0, -2) = 0$$

$$(c_1, -c_1 - 2c_2) = 0$$

Solo se cumple si $c_1 = 0$, y por la segunda ecuación $-c_1 - 2c_2 = 0$ tenemos que también debe ser $c_2 = 0$.

Con lo cual los vectores $(1, -1)\ y\ (0, -2)$ son linealmente independientes.

Por lo tanto, estos vectores forman una base del subespacio vectorial W al cual generan, W=gen{$(1, -1), ($,-2)}.

Es decir, los vectores de W son de la forma:

$$(c_1, -c_1 - 2c_2) \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Teorema

Si S = $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es una base para un espacio vectorial *V*, entonces cada vector en *V* se puede escribir de una y sólo una forma como combinación lineal de los vectores en S.

Ejemplo 12

Para el subespacio W=gen{$(1, -1), (0, -2)$} del ejemplo anterior, los vectores son de la forma $(c_1, -c_1 - 2c_2)$.

Si reemplazamos $c_1 = 10$ y $c_2 = -5$, entonces tenemos el vector (10, 0). El teorema nos dice que esos son los únicos valores de c_1 y c_2 que nos permiten generar al vector (10, 0) en la base S=$\{(1, -1), (0, -2)\}$.

8.6 Dimensión de un espacio vectorial

La dimensión de un espacio vectorial no nulo *V* es el número de vectores en una base para *V*. Con frecuencia escribimos dim(V) para la dimensión de V.

Propiedades

- Como el conjunto {0} es linealmente dependiente, es natural decir que el espacio vectorial {0} tiene dimensión cero.
- La dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2; la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3; y en general, la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n.
- Por lo anterior podemos asegurar que cualquier conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ que tenga más de tres vectores (como el del **ejemplo 7**) no es una base de $\mathbb{R}^2$, pues debe tener exactamente 2 vectores. De manera equivalente para una base de $\mathbb{R}^3$, debe tener exactamente tres vectores.

Ejemplo 13

Sea *W* el subespacio generado por $S = \{(1, -1, 4);\ (3, 0, -2)\}$ **(ejemplo 8)**

- Como S es linealmente independiente y genera a W, S es una base de W.
- S tiene dos elementos (los vectores $(1, -1, 4)\ y\ (3, 0, -2)$)
- Por lo tanto, dim(*W*)=2.