Clase 3

Matrices

3.1 Introducción

En álgebra muchas veces requerimos resolver sistemas de ecuaciones con más de una ecuación y varias incógnitas, si bien hay métodos que se suelen trabajar en el nivel secundario tales como los de sustitución e igualación, sería útil contar con algún mecanismo que nos facilite el trabajo con grandes sistemas de ecuaciones. Asimismo, este mecanismo nos permitiría resolver los sistemas mediante algoritmos de programación, o bien podríamos utilizar esta idea para trabajar con un conjunto de datos y realizar operaciones con los mismos de manera estructurada, independientemente de que pertenezcan o no a un sistema de ecuaciones.

En esta clase definiremos un objeto, llamado matriz, que nos permite hacer precisamente eso: trabajar con una gran cantidad de datos ordenados y realizar operaciones con los mismos, o bien con otros conjuntos de datos. Esto nos permitirá, en nuestro caso, escribir sistemas lineales de una manera compacta que facilite cierta automatización, dándonos un procedimiento rápido y eficaz para determinar las soluciones.

Uno de los tantos ejemplos de aplicación de matrices son los motores de búsqueda para localización y recuperación de información en internet. Estos motores utilizan matrices para seguir el rastro de las ubicaciones en donde se encuentra la información, el tipo de información que se halla en cada ubicación, las palabras clave que aparecen en ellas, e incluso la manera en que los sitios Web se vinculan entre sí con otros. En gran medida, la eficacia de Google estriba en la manera en que se utilizan las matrices para determinar cuáles sitios están referenciados en otros sitios[1].

Es así que el uso de matrices, además de proporcionarnos la oportunidad de contar con una notación conveniente, en nuestro caso nos permitirá resolver sistemas de ecuaciones lineales y otros problemas de manera rápida y eficiente, desarrollando operaciones sobre las matrices y trabajando con ellas de acuerdo con las reglas que cumplen.

3.2 Matrices

Definición: Matriz

Una matriz es un arreglo bidimensional y rectangular de números reales (o complejos). Dichos números se denominan elementos de la matriz y están ordenados en filas y columnas.

---

[1] D'Andrea, C. (2020). EL ÁLGEBRA LINEAL DETRÁS DE LOS BUSCADORES DE INTERNET. Revista de Educación Matemática, Volumen (35), páginas 23 – 38. http://www.ub.edu/arcades/2012_09_25_escrito_google.pdf

Las matrices se denominan comúnmente con letra imprenta mayúscula.

Si una matriz **A** tiene **m filas** (renglones) horizontales y **n columnas** verticales diremos que la matriz **A** es de mxn. La dimensión de una matriz es el número de filas y el número de columnas, y se denota mxn.

Los elementos individuales de una matriz A de mxn, se denotan a menudo por a_{ij}, donde i es el número de fila en donde se encuentra el elemento y j es el número de columna.

Tal como se muestra a continuación.

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \leftarrow \text{fila (renglón) } i \\ \uparrow \text{columna } j & \end{array}$$

Es así que, por ejemplo, a_{11} es el elemento que se encuentra en la fila 1, columna 1, y el elemento a_{mn} es el elemento de la fila m, columna n.

3.2.1 Matrices cuadradas

Si la cantidad de filas de una matriz A es igual a la cantidad de columnas de dicha matriz, es decir, si m = n, decimos que la matriz A es **cuadrada de orden n**. Además, decimos que los elementos $a_{11}; a_{22}; a_{33}; \dots; a_{nn}$ forman la **diagonal principal** de la matriz.

Por ejemplo, la siguiente matriz A es cuadrada de orden 3:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 10 \\ 8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

La diagonal principal de la matriz está compuesta por los elementos a_{jj}, es decir:

$$A = 4, 2, 7$$

Ahora analicemos ejemplos de matrices de distinto tipo:

Sean

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&4\\2&-3\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&0&1\\3&-1&2\end{bmatrix},\qquad E=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix},\qquad F=\begin{bmatrix}-1&0&2\end{bmatrix}.$$

Las matrices B y D son cuadradas de orden 2 y 3 respectivamente.

La matriz A es de 2x3. A las matrices de este tipo se las llama **rectangulares**. *Aclaración: en realidad, toda matriz sería rectangular.*

La matriz E es de 1x1 y, si bien cumple con la definición de matriz, en la práctica no tiene demasiadas aplicaciones, sería el equivalente a un número real.

La matriz C es de 3x1 y está formada por una única columna.

La matriz F es de 1x3 y está formada por una única fila.

3.2.2 Matriz fila y matriz columna

A las matrices de nx1 o 1xn, tales como las matrices C y F del ejemplo anterior se las denomina matriz columna y matriz fila respectivamente.

Las matrices de nx1 constan de una única columna, por ejemplo:

$$C=[c_{11}\ \vdots\ c_{n1}\,]$$

Y las matrices de 1xn constan de una única columna, por ejemplo:

$$D=[d_{11}\ \cdots\ d_{1n}\,]$$

A este tipo de matrices también se las denomina **vectores**. Se dice que la matriz C es un **vector columna** y la matriz F es un **vector fila**.

A partir de la clase 7 analizaremos los vectores con mayor detalle.

3.2.3 Matriz nula

Una matriz de mxn para la cual todos sus elementos son iguales a cero se denomina matriz nula. La llamaremos 0_{mxn} o simplemente 0 si dentro del contexto se sobreentiende cuál es su dimensión.

Ejemplos de matrices nulas:

$$0_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0_{3x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.4 Matriz identidad

La matriz cuadrada I de nxn cuyas entradas en la diagonal son todas igual a uno, y el resto de los valores de la matriz son iguales a cero, es la **matriz identidad de orden n.**

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, la matriz identidad I_3, de orden 3, es:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.5 Matriz diagonal

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$, en donde cada término fuera de la diagonal principal es igual a cero, es decir, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, es una matriz diagonal.

Ejemplos:

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

G y H son matrices diagonales.

3.2.6 Matrices triangular superior y triangular inferior

Una matriz **triangular superior** es una matriz cuadrada para la cual los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.

Es decir,

Una matriz $A = [a_{ij}]$ se denomina triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$

En general, una matriz triangular superior es de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior
(Los elementos que están debajo de la diagonal principal son cero.)

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -9 & 18 & -4 \\ 0 & 14 & 20 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Análogamente, una matriz **triangular inferior** es una matriz cuadrada para la cual los elementos por encima de la diagonal principal son cero.

Es decir,

Una matriz $A = [a_{ij}]$ se denomina triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior
(Los elementos que están arriba de la diagonal principal son cero.)

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 11 & 0 & 0 \\ 7 & 31 & -3 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

3.2.7 La transpuesta de una matriz

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de m × n, la matriz $A^T = [a^T{}_{ij}]$ de n × m, donde:

$$a^T{}_{ij} = a_{ji}$$

Se denomina la matriz transpuesta de A.

En consecuencia, los elementos de cada columna de A^T son los elementos correspondientes en la fila de A.

O bien, dicho de una manera más simple, las filas de A pasan a ser las columnas de A^T.

Ejemplos

Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Entonces las matrices transpuestas correspondientes son

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad D^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad E^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Algunas aclaraciones:

- *La matriz transpuesta se denota con el superíndice T.*
- *La transpuesta de una matriz transpuesta es la matriz "original". Es decir,* $(A^T)^T = A$.
- *Se puede entender que las filas de A pasan a ser las columnas de A^T, o bien que las columnas de A pasan a ser las filas de A^T.*

3.2.8 Matriz simétrica

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ es simétrica si $A^T = A$.

Es decir, A es simétrica si es una matriz cuadrada para la cual $a_{ij} = a_{ji}$.

Si la matriz A es simétrica, los elementos de A son simétricos respecto de la diagonal principal de A.

Ejemplo, las siguientes matrices A e I_3, son simétricas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Operaciones con matrices

En este apartado de la clase vamos a definir y dar ejemplos sobre las siguientes operaciones entre matrices: suma, resta y multiplicación.

3.3.1 Suma de matrices

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de m × n, la suma de $A + B$ da por resultado una matriz $C = [c_{ij}]$ de m × n, definida de la siguiente manera:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (i \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

Es decir, C se obtiene sumando los elementos correspondientes de A y B.

Por correspondiente nos referimos a igual fila e igual columna, es decir, se suman los elementos de igual posición en cada matriz y se obtiene el de la posición correspondiente en la matriz C.

Ejemplo

Sean las siguientes matrices A y B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la suma A+B es:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 4+(-4) \\ 2+1 & -1+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Resta de matrices

La resta de matrices es similar a la suma, solo que, en lugar de sumar los elementos correspondientes, se restan.

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de m × n, la resta de $A - B$ da por resultado una matriz $C = [c_{ij}]$ de m × n, definida de la siguiente manera:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad (i \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Observación: *la suma y la resta de matrices A y B sólo se define cuando A y B tienen el mismo número de filas (renglones) y el mismo número de columnas; es decir, sólo cuando A y B son del mismo tamaño.*

Ejemplo

Sean A y B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

La resta A-B es:

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-2 & 3+1 & -5-3 \\ 4-3 & 2-5 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

3.3.3 Multiplicación por un escalar

Cuando nos referimos a un escalar nos estamos definiendo a un número real.

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de m × n y r es un número real, la multiplicación de A por r, $r \cdot A$, es la matriz $B = [b_{ij}]$ de m × n, donde:

$$b_{ij} = r \cdot a_{ij} \qquad (i \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Es decir, B se obtiene multiplicando cada elemento de A por r.

Ejemplo

Sea el escalar $r = -3$ y la matriz A definida como

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Entonces, el producto $(-3) \cdot A$ es:

$$(-3) \cdot A = (-3) \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -3 & -12 \\ 0 & -9 & -30 \end{bmatrix}$$

$$(-3) \cdot A = \begin{bmatrix} -15 & -3 & -12 \\ 0 & -9 & -30 \end{bmatrix}$$

Observación: Si A y B son matrices de m × n, podemos escribir la resta A-B como la suma de A y la matriz B multiplicada por -1. Es decir, A-B=A +(−1).B

3.3.4 Multiplicación de matrices

Para definir de manera más prolija la multiplicación de matrices primero veamos la definición de producto interior o producto punto entre una matriz fila y una matriz columna.

Producto interior

El producto interior $A \cdot B$ entre una **matriz fila** A de $1xn$ y una **matriz columna** B de $nx1$ es la suma de los productos de los valores correspondientes.

En decir, si A y B son:

$$A = [a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}\ ] \qquad\qquad B = [b_{11}\ b_{21}\ \vdots\ b_{n1}\ ]$$

Entonces el producto interior $A \cdot B$ es:

$$A \cdot B = a_{11} \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{12} + \cdots + a_{n1} \cdot b_{1n}$$

El resultado del producto interior es un número real.

Ejemplo

Si A y B son:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces el producto interior $A \cdot B$ es -20, pues:

$$A \cdot B = 5 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 + 8 \cdot 0 + 3 \cdot 1$$

$$A \cdot B = -20$$

Ahora sí, podemos definir el producto entre matrices con mayor facilidad, pues veremos que el producto interno se aplica en esta operación.

Producto de dos matrices

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de **m × p**, y $B = [b_{ij}]$ es una matriz de **p × n**, el producto de A y B, que se denota mediante $A \cdot B$, es la matriz $C = [c_{ij}]$ de **m×n**, definida como:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

La definición anterior nos indica que el elemento ij de la matriz producto $C = A \cdot B$ es el producto interior de la fila i de la matriz A con la columna j de la matriz B.

Tal como se muestra a continuación:

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \mathrm{fil}_i(A) \\ \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp}
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & & & \mathrm{col}_j(B) & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
\vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathrm{fil}_i(A) \cdot \mathrm{col}_j(B) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}
$$

Ejemplo

$$
A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & 17 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}
$$

$$
A \cdot B = \begin{bmatrix} 7.2 + (-2).(-5) + 4.6 & 7.0 + (-2).1 + 4.(-3) \\ 9.2 + 17.(-5) + 3.6 & 9.0 + 17.1 + 3.(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & -14 \\ -49 & 8 \end{bmatrix}
$$

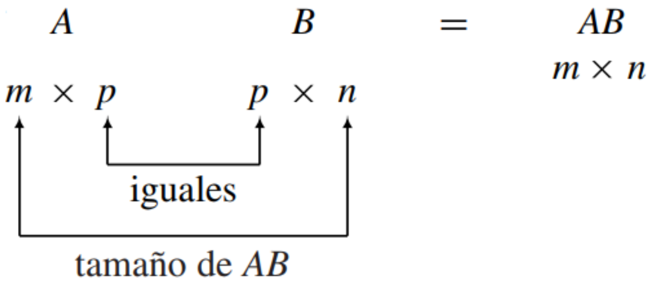
$$
C = \begin{bmatrix} 48 & -14 \\ -49 & 8 \end{bmatrix}
$$

Algunas observaciones:

- La multiplicación solo está definida para los casos en los cuales la cantidad de columnas de la primera matriz es igual a la cantidad de filas de la segunda matriz en la multiplicación, es decir, una matriz de A dimensión mxp se podría multiplicar con otra B de tamaño con pxn.
- La dimensión de la matriz resultante es mxn siguiendo el ejemplo del punto anterior, es decir, la cantidad de filas es igual a la cantidad de filas de la

primera matriz en la multiplicación y la cantidad de columnas es igual a la cantidad de columnas de la segunda matriz de la multiplicación.

Estos puntos se visualizan en el siguiente esquema:



3.4 Independencia lineal en una matriz

Una de las características que nos interesarán sobre una matriz es si todas sus filas son linealmente dependientes entre sí, o si, por el contrario, no lo son, es decir, que alguna fila es linealmente dependiente del resto.

Sea una matriz A de mxn, llamemos $F_1, F_2, F_3, \dots, F_m$ a sus filas. Diremos que la matriz es linealmente independiente si para fila F_j de la matriz no existen números reales $r_1, r_2, r_3, \dots, r_i$ (no todos iguales a cero) tales que:

$$F_j = r_1 \cdot F_1 + r_2 \cdot F_2 + r_3 \cdot F_3 + \cdots + r_i \cdot F_i \qquad 1 \le i \le m, \ \ i \ne j$$

Es decir, que ninguna fila F_j pueda escribirse como una combinación lineal de otras filas (sumas de las otras filas multiplicadas por algún número real).

En caso contrario diremos que la matriz A no es linealmente independiente; o bien que es linealmente dependiente.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

En la matriz A se cumple que la fila 3 es combinación lineal de las filas 1 y 2, pues:

$$F_3 = F_2 - 2 \cdot F_1$$

Veamos que esto es así:

$$F_3 = [5 \ -3 \ 1 \ 0\,] - 2 \cdot [2 \ -1 \ 3 \ 4\,]$$

$$F_3 = [5 - 4 \ \ -3 + 2 \ 1 - 6 \ 0 - 8\,]$$

$$F_3 = [1 \ -1 \ -5 \ -8\,]$$

Así pues, podemos decir que la fila 3 es combinación lineal de las otras dos filas, y la matriz A no es linealmente independiente.

Observaciones:

- *Este concepto nos será útil al momento de resolver sistemas de ecuaciones y analizar los conjuntos de soluciones posibles.*
- *En las clases siguientes veremos métodos prácticos para determinar si una matriz es linealmente independiente.*
- *Otra definición de matriz linealmente independiente es que no existan valores reales $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$ (no todos iguales a cero) tales que*

  $$r_1 \cdot F_1 + r_2 \cdot F_2 + r_3 \cdot F_3 + \cdots + r_m \cdot F_m = 0$$

  Pues si esto fuese así implicaría que al menos una de las filas es combinación lineal de otras filas.

3.4.1 Rango de una matriz

El rango de una matriz es el número máximo de filas linealmente independientes.

Normalmente el rango de la matriz A se denota como rang(A).

En el ejemplo anterior el rango de la matriz A es rang(A)=2, pues las filas 1 y 2 conforman un sistema linealmente independiente, la fila 3 no entraría pues es combinación lineal de las otras.

Teorema. El rango del sistema de filas de una matriz es igual a su rango del sistema de columnas.

Por lo tanto, el rango de una matriz es el rango de su sistema de filas o bien de su sistema de columnas, sin embargo, nosotros generalmente trabajaremos con métodos que operan sobre las filas de la matriz.

Observación:

- *Una matriz A de mxn puede tener, como máximo, rango igual al menor valor entre m y n. Por ejemplo, una matriz de 5x7 puede tener, como máximo, rango 5. Esto surge a partir del teorema anterior.*
- *La única matriz que tiene rango cero es la matriz nula. Toda otra matriz tiene rango mayor o igual a 1.*