Clase 1

Conjuntos Numéricos

1.1 Introducción

La antigüedad de la matemática se remonta a más de dos mil años. Su estudio comenzó como simples actos de contar por parte del ser humano prehistórico. Luego con la agricultura, las monumentales construcciones y el comercio, los sistemas de numeración se ampliaron y los cálculos se volvieron más complejos.

En esta clase estudiaremos los diversos conjuntos numéricos que aplicamos en nuestra vida cotidiana. Asimismo, haremos una introducción a la resolución de ecuaciones y a la manipulación de expresiones algebraicas. Esto nos servirá a la vez de repaso de contenidos generales en matemática y de contenidos necesarios para la materia. Dejaremos de lado el conjunto de los números imaginarios, por no ser necesario para los contenidos de las clases siguientes.

Inicialmente el ser humano utilizó lo que hoy conocemos como los números naturales, cuyo nombre proviene de que su invención se dio de manera natural, posteriormente la ampliación de los diferentes conjuntos numéricos surgió frente a la necesidad de resolver situaciones prácticas relacionadas con la vida diaria, la economía, la construcción, la astronomía, la física, etc. Llegando a ser parte fundamental de la matemática y, por lo tanto, de otras áreas del conocimiento tales como la informática.

1.2 Los números naturales

Al conjunto de los números Naturales los simbolizamos con la letra $\mathbb{N}$.

Su notación como conjunto de elementos, es la siguiente:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

Es decir, los números naturales son aquellos que sirven para contar la cantidad de elementos de un conjunto no vacío, o dicho de otra manera, son los números positivos, sin parte decimal, mayores o iguales a 1.

Por último, nosotros consideraremos al cero como un número entero, y cuando se lo incluya en el conjunto de los naturales se lo aclarará indicando $\mathbb{N}_0$, lo cual equivale a:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

1.2.1 Propiedades de los números naturales

Suma

La suma es una operación cerrada en los números naturales, es decir, la suma de dos números naturales da como resultado otro número natural.

- La suma verifica la Propiedad Conmutativa:

$$a + b = b + a$$

- La suma verifica la Propiedad Asociativa.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

- Existencia de Elemento Neutro para la suma (en $\mathbb{N}_0$)

$$\exists\ 0 \in \mathbb{N}_0\ tal\ que\ \forall\ a \in \mathbb{N}_0:$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

- La suma verifica la Propiedad Cancelativa.

$$a + b = a + c\ \rightarrow b = c \qquad \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}_0$$

Resta

La resta es la operación que representa la diferencia entre dos números. No es una operación cerrada en los naturales puesto que la diferencia entre dos números naturales no siempre da como resultado un número natural. Sólo se obtiene un número natural si el minuendo es mayor que el sustraendo.

- La resta no verifica la propiedad conmutativa ni la asociativa.
- Si verifica la propiedad cancelativa, esto es:

$$a - b = a - c\ \rightarrow b = c \qquad \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}_0$$

Multiplicación o producto

Definición:

$$\forall\ n, m \in \mathbb{N}_0: \qquad m \cdot n = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n\ veces}$$

$$n\ y\ m\ se\ denominan\ \boldsymbol{factores}\ y\ la\ operación\ multiplicación\ también\ es\ conocida$$

$$como\ \boldsymbol{producto}.$$

Propiedades de la multiplicación:

- La operación producto es cerrada en $\mathbb{N}_0$, es decir:

$$\forall\ n, m \in \mathbb{N}_0:\ m \cdot n \in \mathbb{N}_0$$

- Propiedad Conmutativa

- Existencia de Elemento neutro para la multiplicación (el 1).

$$\exists\ 1 \epsilon\ \mathbb{N}_0\ tal\ que:$$

$$1\ \cdot a = a \cdot 1 = a \qquad \forall\ a\ \epsilon\ \mathbb{N}_0$$

- $\mathbb{N}_0$ Verifica la existencia de Elemento nulo para la multiplicación:

$$\exists\ 0 \epsilon\ \mathbb{N}_0\ \ tal\ que:$$

$$0\ \cdot a = a \cdot 0 = 0 \qquad \forall\ a\ \epsilon\ \mathbb{N}_0$$

- Se verifica la Propiedad Asociativa.
- Se verifica la Propiedad distributiva del producto respecto a la suma o resta.

Definición

Se llama múltiplo de un número natural n al producto de n por cualquier número natural.

División o Cociente

Definición

$$\forall\ n, m, q\ \epsilon\ \mathbb{N}_0, n \neq 0: \qquad m{:}\,n = q\ \leftrightarrow m = n \cdot q$$

Es decir, m dividido n es igual a q si y solo si m es igual a n por q. Siendo n distinto de cero. No está definida la división por cero.

m se denomina dividendo, n divisor y q cociente.

- La operación división no es cerrada en $\mathbb{N}_0$, pues puede dar como resultado un número no natural.
- Para que la operación sea cerrada en el conjunto de los números naturales, el dividendo debe ser múltiplo del divisor.
- La división no verifica la Propiedad Asociativa.
- La división no verifica la Propiedad Conmutativa.
- La división verifica la propiedad distributiva con respecto a la suma, pero sólo a derecha, es decir:

$$(n +\ m - t){:}\,p = n{:}\,p + m{:}\,p - t{:}\,p$$

- No está definida la división por cero.

1.3 Los Números enteros

El conjunto de los Números Enteros y se lo simboliza con la letra $\mathbb{Z}$. Está formado por el conjunto de los números Naturales a los que también se lo llama el conjunto de los enteros positivos $(\mathbb{Z}^+)$, el cero y un nuevo conjunto llamado los Enteros Negativos $(\mathbb{Z}^-)$. Es decir:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

- Propiedad de la existencia de un opuesto:

$$\forall\, a \in \mathbb{Z}\ \exists -a \in \mathbb{Z}\ tal\ que:$$

$$a + (-a) = 0$$

Suma

- La suma es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$, es decir, la suma de dos números enteros da como resultado otro número entero.
- Se verifica la Propiedad Conmutativa.
- Se verifica la Propiedad asociativa.
- Existencia de elemento neutro para la suma (el cero).

Resta

- En este caso, la resta es una operación cerrada en los números enteros, pues está contemplado que el resultado sea un entero negativo:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Z} \ \rightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$

- Restar dos números es equivalente a sumar el opuesto, es decir:

$$a - b = a + (-b) \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$$

- La resta no verifica la Propiedad Conmutativa.
- La resta no verifica la Propiedad Asociativa.
- La resta verifica la Propiedad Cancelativa.

Multiplicación o Producto

- El producto es cerrado en $\mathbb{Z}$, es decir, el producto de dos números enteros da como resultado otro número entero.
- Verifica la Propiedad Conmutativa.
- Verifica la existencia de Elemento Neutro para la multiplicación (el 1), es decir:

$$\exists\ 1 \in \mathbb{Z}\ tal\ que:$$

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a \qquad \forall\, a \in \mathbb{Z}$$

- Verifica la Propiedad Distributiva con respecto a la suma y a la resta.

- Verifica la existencia de Elemento nulo para la multiplicación:

$$\exists\ 0 \epsilon\ \mathbb{Z}\ tal\ que:$$

$$0\ \cdot a = a \cdot 0 = 0 \qquad \forall\ a\ \epsilon\ \mathbb{Z}$$

División

- La división no es cerrada en $\mathbb{Z}$, pues el resultado puede ser un número racional (no entero).
- Las propiedades son equivalentes a las de los naturales, es decir:
    - La división no verifica la Propiedad Asociativa.
    - La división no verifica la Propiedad Conmutativa.
    - La división verifica la propiedad distributiva con respecto a la suma, pero sólo a derecha, es decir:

$$(n + \ m - t): p = n: p + m: p - t: p$$

1.3 Los Números Racionales

Al conjunto de los números racionales se lo identifica con la letra $\mathbb{Q}$.

El conjunto de los números racionales es aquel compuesto por los números que se pueden representar como fracción, es decir de la forma:

$$\frac{p}{q} \qquad con\ p, q \epsilon\ \mathbb{Z}; \quad q \neq 0$$

En donde a p se lo llama numerador y a q denominador de la fracción.

Algunas características de los números racionales:

- La línea fraccionaria es equivalente a la operación división.
- Observando la definición vemos rápidamente que los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ están incluidos en los racionales, pues son el caso particular en el cual $q = 1$, o bien p sea múltiplo de q.
- Los números $\frac{p}{q}\ y\ \frac{r}{s}$ se dicen equivalentes si su equivalente decimal es el mismo, es decir $p: q\ =\ r: s$. En ese caso podemos escribir que $\frac{p}{q} =\ \frac{r}{s}$

Suma y resta

- La suma y la resta son cerradas en los números racionales.
- Dados los números racionales $\frac{p}{q}\ y\ \frac{r}{s}$ podemos obtener la suma y la resta fraccionaria, entre ellos, de la siguiente manera:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s}$$

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s - r \cdot q}{q \cdot s}$$

Multiplicación y división

- Ambas operaciones son cerradas en los números racionales.
- Para todo número racional $\frac{p}{q}$ existe el número $\frac{q}{p}$ tal que:

  $$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$$

  Dichos números son, entre sí, inversos multiplicativos.
- Dados los números racionales $\frac{p}{q}\ y\ \frac{r}{s}$ podemos obtener la multiplicación y la división entre ellos de la siguiente manera:

  $$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$$

  $$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s}{q \cdot q}$$
- Del punto anterior observamos que dividir por una fracción es equivalente a multiplicar por el inverso multiplicativo del divisor.

1.4 Los números irracionales

El conjunto de números irracionales se lo denomina $\mathbb{I}$. Está formado por todos los números que no se pueden escribir como fracción y cuya característica es que su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Algunos números irracionales "famosos" son"

$$\sqrt{2}, \pi, \varphi. e$$

Todos ellos, como dijimos, tienen la característica de que su parte decimal continúa indefinidamente, por lo que las expresiones anteriores son su forma exacta y si los queremos escribir como decimal deberemos truncarlos o redondearlos. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} \cong 1{,}4142$$

El símbolo $\cong$ significa "aproximadamente igual".

- *Los números irracionales no son cerrados para ninguna operación, pues su resultado puede dar un número racional.*

1.5 Los números reales

Llegamos a la conclusión de los conjuntos numéricos, al menos los abarcados en esta clase. El conjunto de los números reales se representa con la letra $\mathbb{R}$ y no representa un nuevo conjunto en si mismo, sino que es la unión del conjunto de los racionales con el de los irracionales.

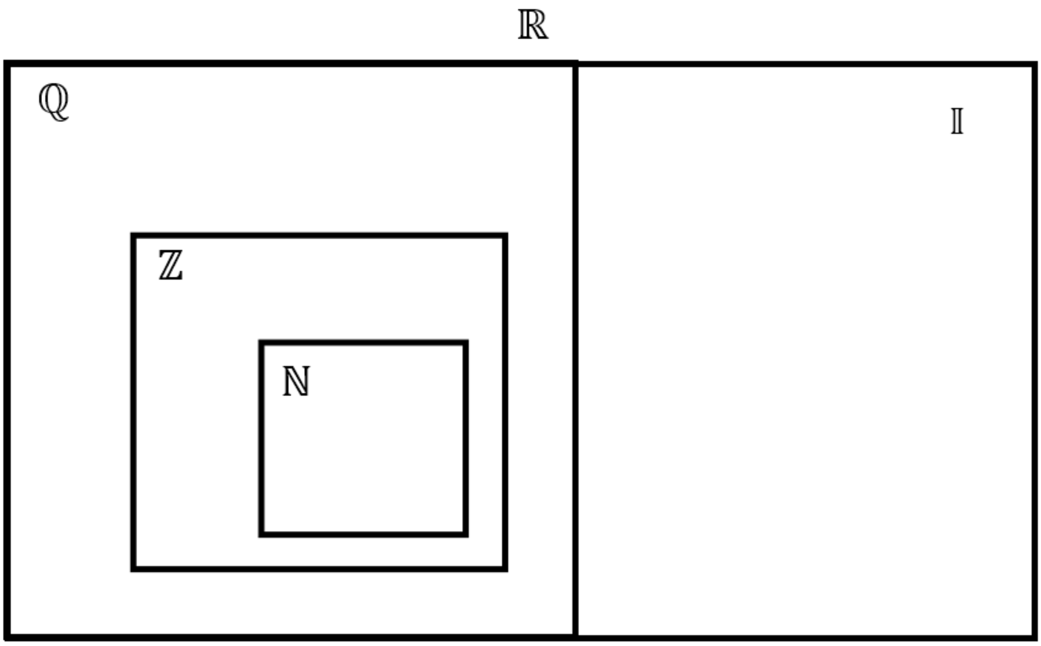
Es decir, incluye a todos los números vistos hasta este punto.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q}\ U\ \mathbb{I}$$

El conjunto de los números reales conserva todas las propiedades de los conjuntos anteriores y es cerrado para las cuatro operaciones básicas.

Esquema de los conjuntos numéricos

Finalmente podemos realizar un esquema gráfico que represente al conjunto de los números reales:

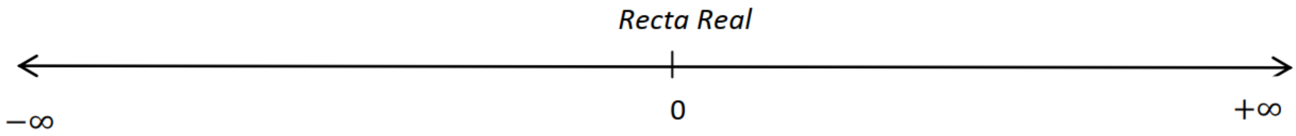


El tamaño de los conjuntos no es representativo de la cantidad de elementos, todos los conjuntos tienen una infinita cantidad de elementos.

1.5.1 Intervalos en los números reales

Se define una recta denominada recta numérica de los números reales, para la cual a cada punto de la recta le corresponde un número real. La recta abarca desde el infinito negativo $(-\infty)$ hasta el infinito positivo $(+\infty)$, sin embargo, en ella se suele representar el intervalo de números según requiera la situación.

En general, la representamos así:



En particular podemos representar cualquier intervalo, manteniendo siempre la escala elegida (por ejemplo, si 1 cm representa 2 unidades, hay que mantenerlo en esa recta).

1.5.2 Orden en los números reales

Si a y b son números reales diremos que:

- a es menor que b si (b-a) es positivo, y lo escribimos:

$$a < b$$

- a es menor o igual que b si (b-a) es positivo o cero, y lo escribimos:

$$a \leq b$$

- a es mayor que b si (b-a) es negativo, y lo escribimos:

$$a > b$$

- a es mayor o igual que b si (b-a) es negativo o cero, y lo escribimos:

$$a \geq b$$

Es evidente que en la recta numérica un número menor que otro se ubica más hacia la izquierda.

Propiedades de las desigualdades:

- *Propiedad Transitiva*: Si $a < b \;\; y \, b < c \;\Rightarrow a < c$.
- *Propiedad Aditiva*: Si $a < b \;\; y \, c < d \;\Rightarrow a + c < b + d$.
- Si $a < b \;\; y \;\; k$ es cualquier número real $\Rightarrow a + k \; < b + k$.
- Si $a < b \, y \, k \in \mathbb{R}^{+} \Rightarrow a.k < b.k$.
- Si $a < b \, y \, k \in \mathbb{R}^{-} \Rightarrow a.k > b.k$.

1.5.3 Intervalos en los números reales

Los subconjuntos de números dentro del conjunto de los números reales se pueden representar en la recta numérica, pero es más común representarlos como intervalos utilizando los símbolos paréntesis o corchetes, según sean abiertos, cerrados, o una combinación de ambos casos.

Sean $a \in \mathbb{R}$ $y\, b \in \mathbb{R}$

- *Intervalo Abierto*: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$
- *Intervalo Cerrado*: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
- *Intervalos Semiabierto*: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$
- *Intervalos no acotados o semirrecta*: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$, $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$

Ejemplos

- El intervalo de todos los números reales entre -10,5 y 127 (incluyendo el -10,5 pero sin incluir el 127) es:

  (-10,5 ; 127]

- El intervalo entre 10 y infinito positivo, incluyendo el 10 es:

  [10; ∞)

- El intervalo entre infinito negativo (o menos infinito) y el -8,5; sin incluir el -8,5 es:

  (-∞; -8,5)

- También se puede aclarar que el intervalo es solo de números naturales, enteros, racionales o irracionales. Por ejemplo, el intervalo de números enteros entre -25 y 83 inclusive en ambos extremos es:

  $$x \in \mathbb{Z}: x \in [-25; 83]$$

- Notar que el símbolo de separación de los extremos del intervalo es un punto y coma. Esto es para no confundir con la coma decimal.

Con esto finalizamos el apunte sobre conjuntos numéricos, complementaremos la clase con algunos ejercicios y ejemplos de resolución de operaciones aritméticas y manipulación de expresiones algebraicas.

En todas las clases habrá foros de consultas por cualquier duda que quede sobre el tema.