Clase 5

Lógica proposicional. Simbolización. Enunciados y conectivas.

4.1 Introducción

Cuando nos servimos del lenguaje cotidiano para enunciar hechos o describir situaciones, lo hacemos de diversas formas: a través de preguntas, dando órdenes, expresando deseos o haciendo afirmaciones.

Para definir objetos o elementos matemáticos y demostrar propiedades, definiciones o teoremas, sin embargo, es necesario un lenguaje preciso. La Lógica Simbólica colabora en la construcción de este tipo de lenguaje y nos será de gran ayuda, entre otras cosas para formalizar adecuadamente la teoría de conjuntos.

Esta disciplina se ocupa de enunciados u oraciones que son, o verdaderos o falsos, a los que llamaremos "proposiciones". Por ejemplo, ante la expresión "Juan paga sus impuestos", es posible decir si es verdadero o falso. Mientras que, en una interrogación, una exclamación o una orden, no tiene sentido preguntarse si estas expresiones son verdaderas o falsas.

La lógica ayuda a razonar en forma válida acerca de cosas trascendentes y abstractas, aporta claridad y economía en el pensamiento y permite eliminar ambigüedades en el lenguaje ordinario.

4.2 Lógica Proposicional

Definición: La lógica proposicional, es la parte de la lógica que se basa en proposiciones, las cuales pueden ser **simples o compuestas**.
- Una proposición es **simple** cuando no incluye dentro de sí a ninguna otra proposición.
- Una proposición es **compuesta** cuando surge de la combinación de proposiciones simples.

Ejemplos:

5 es impar	Proposición simple.
5 es primo e impar	Proposición compuesta
Hubo elecciones y eligieron diputados	Proposición compuesta
Si salgo temprano, te paso a buscar	Proposición compuesta

4.2.1 Notación y conectivos

Las proposiciones se denotan con letras minúsculas, por ejemplo, p, q, r, s, …..
Se puede operar con proposiciones, y según sean las operaciones, se utilizan ciertos símbolos, llamados **conectivos lógicos.**

El siguiente cuadro muestra, los distintos conectivos que se estudiarán, las operaciones asociadas a ellos y su significado:

CONECTIVO	OPERACIÓN ASOCIADA	SIGNIFICADO
$\sim$	Negación	No p, o, no es cierto p
$\wedge$	Conjunción	p y q
$\vee$	Disyunción	p y q (sentido incluyendo)
$\Rightarrow$	Implicación o Condicional	Si p, entonces q. O bien p implica q
$\Leftrightarrow$	Doble Implicación o Bicondicional	p si y solo si q
$\triangle$	Diferencia Simétrica o Disyunción en Sentido Excluyente	p o q (sentido excluyente)

4.3 Operaciones proposicionales

Dada una o dos proposiciones, cuyos valores de verdad se conocen, se trata de caracterizar la proposición a través de su valor de verdad.

4.3.1 Negación

La proposición "No hay reactivación económica", es una proposición compuesta que consiste en la negación de la proposición simple "Hay reactivación económica".

Negación de una proposición p, es la proposición "no p", y se escribe: ~p; la ley que la define es la siguiente: **La negación de un enunciado verdadero es falso, y la negación de un enunciado falso es verdadero.**

Esto puede expresarse mediante la tabla de verdad siguiente:

p	~p
V	F
F	V

Ejemplo 1

p: 8 es un número par V
~p: 8 no es un número par F

Ejemplo 2

p: $4 + 4 = 7$ F
~p: $4 + 4 \neq 7$ V

4.3.2 Conjunción

La proposición "El empleo disminuye y los impuestos aumentan", es una proposición compuesta que consiste en la conjunción de las proposiciones simples "el empleo disminuye" y "los impuestos aumentan". La letra "y" es el conectivo que une ambas proposiciones.

Conjunción de dos proposiciones p, q es la proposición compuesta “p y q”, se escribe $p \wedge q$, su tabla de valores de verdad es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Se puede observar que, de acuerdo a la tabla de valores de verdad, solamente es verdadero el primer enunciado.

La conjunción es verdadera cuando todas las proposiciones asociadas a ella son verdaderas y falsa en los casos restantes.

Ejemplo 3

Dado los enunciados siguientes:

i) San Pedro es un departamento de Jujuy y Metán es un departamento de Salta.

ii) San Pedro es un departamento de Jujuy y Metán es un departamento de Córdoba

iii) San Pedro es un departamento de Salta y Metán es un departamento de Salta.

iv) San Pedro es un departamento de Salta y Metán es un departamento de Córdoba.

El primero de los enunciados corresponde a una proposición verdadera ya que las dos proposiciones simples intervinientes son verdaderas.

Los enunciados ii) y iii) son falsos, ya que una proposición simple es verdadera y la otra es falsa.

La proposición compuesta iv) es falsa ya que las dos proposiciones simples son falsas.

Ejemplo 4

Sean las proposiciones simples:

p: Juan deposita sus ahorros en el banco; q: Juan compra con sus ahorros dólares

La conjunción entre estas dos proposiciones es:

$p \wedge q$: Juan deposita sus ahorros en el banco y compra con sus ahorros dólares.

La proposición resultante es falsa, ya que no pueden darse la veracidad de las dos situaciones a la vez.

4.3.3 Disyunción

La disyunción de dos proposiciones p, q, es la proposición compuesta "p o q", y se escribe **p** $\vee$ **q**.

Dado que la letra "o" en nuestro lenguaje es ambigua, pueden distinguirse dos clases diferentes de disyunción: disyunción inclusiva y disyunción exclusiva.

• La **disyunción inclusiva** es verdadera cuando es verdadera por lo menos una de las proposiciones intervinientes, y es falsa cuando ambas lo son simultáneamente. Se simboliza p $\vee$ p y su tabla de verdad es:

p	q	p $\vee$ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 5

Sean las proposiciones simples:

p: mañana de 8 a 12 horas asistiré al curso de matemática

q: mañana de 8 a 12 horas visitaré a un amigo

Entonces, la disyunción excluyente es: p V q: mañana de 8 a 12 horas asistiré al curso de matemática o visitaré a un amigo.

Esta proposición tiene el sentido de excluir la posibilidad de que se den ambas alternativas simultáneamente.

4.3.3 Implicación o condicional

La implicación o condicional de las proposiciones p, q, es la proposición compuesta:
p $\Rightarrow$ q, que se lee "si p entonces q".
La proposición p, precedida por la palabra "si" se denomina **antecedente o hipótesis** y la proposición q, precedida por la palabra "entonces", **consecuente o tesis**.
En la implicación no siempre el consecuente se deduce lógicamente del antecedente, pero, cuando ello ocurre, la implicación se denomina formal.

La implicación, es falsa, cuando de un antecedente verdadero se deduce un consecuente falso, y es verdadera en los casos restantes. La tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo 6

Sean las proposiciones simples:
p: Pedro aprueba el examen q: Pedro le presta sus apuntes a Juan
La implicación es "Si Pedro aprueba el examen entonces presta sus apuntes a Juan".

Interesa inducir la verdad o falsedad de la implicación, en término de la verdad o falsedad de las proposiciones p y q. La proposición compuesta $p \Rightarrow q$ puede pensarse como un compromiso, condicionado por p; y se puede asociar su verdad al cumplimiento del compromiso. Es obvio que, si p es F, es decir si Pedro no aprueba el examen, queda liberada del compromiso; y preste o no sus apuntes la proposición será verdadera.
Es decir si p es F, la implicación es verdadera.

Si p es verdadero, en cuyo caso, aprueba el examen, y q es falso, es decir, Pedro no presta el apunte, el compromiso no se cumple, y la implicación es falsa. Si p y q son verdaderos, la implicación es verdadera.

Otras formas de escribir un condicional

Es común en nuestro lenguaje, que la palabra "entonces" no figure y en su lugar se coloque una coma, como, por ejemplo:

"Si viajamos en avión, sacaremos los pasajes con anticipación".
En otras proposiciones, el orden del antecedente y del consecuente puede estar invertido, como en la proposición; "Sale, si lo vienen a buscar", donde el antecedente es "Lo vienen a buscar", y el consecuente es "Sale".

La palabra "cuando" reemplaza a menudo al "si", como en la proposición "Cuando hay tormentas eléctricas, se interrumpen las comunicaciones telefónicas", cuyo significado equivale a "Si hay tormentas, se interrumpen las comunicaciones telefónicas".

4.3.3 Doble implicación, bicondicional o equivalencia

La equivalencia o bicondicional de las proposiciones p y q es la proposición compuesta: $p \Leftrightarrow q$ que se lee "p si y sólo si q".

Como su nombre lo indica, el bicondicional no es otra cosa que el condicional doble: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Por lo tanto, la tabla de verdad correspondiente al bicondicional se obtiene al realizar las operaciones lógicas indicadas:

p	**q**	**$p \Rightarrow q$**	**$q \Rightarrow p$**	**$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Ejemplo 7

Sean las proposiciones simples:

p: El triángulo ABC es isósceles q: El triángulo ABC tiene dos lados iguales

El bicondicional es: $p \Leftrightarrow q$: El triángulo ABC es isósceles sí y sólo sí tiene dos lados iguales.

Cuando el bicondicional $p \Leftrightarrow q$ es verdadero, suele decirse, que p es condición necesaria y suficiente para q, o bien, q es condición necesaria y suficiente para p.