Clase 14

Corrección y completitud

14.1 Introducción

En la evolución de la lógica y la matemática llegó un momento en el cual a los científicos no les basto con mostrar que una serie de premisas y conclusiones eran verdaderas, o que las premisas verdaderas tenían como consecuencia una conclusión verdadera. Sino que se comenzaron a cuestionar acerca de si la validez de un argumento se podía deducir a partir de reglas formales de inferencia lógica o axiomas matemáticos. Esto es particularmente útil en informática, pues tal afirmación nos permitiría deducir la conclusión a partir de las premisas siguiendo un conjunto de reglas perfectamente definidas.

El teorema de completitud de Gödel es un importante teorema de la lógica matemática y fue demostrado por primera vez por Kurt Gödel en 1929. Dicho teorema viene a responder el cuestionamiento respecto a una deducción formal para cualquier argumento. Acerca de esto trataremos brevemente en esta clase.

Kurt Gödel junto a Albert Einstein

Por otro lado, Gödel también planteó los teoremas de la incompletitud, los cuales inspiraron a personas de la talla de John Von Neumann, quien creó el modelo de arquitectura en el que se basan las computadoras actuales y Alan Turing, el creador del test que lleva su nombre y de la computadora que descifró los códigos nazis.

Los teoremas de Gödel resultaron invaluables para la ciencia de la informática, pues suponían el reconocimiento de que hay cosas que se pueden y otras que no se pueden demostrar, lo cual marcó un límite a lo que las computadoras pueden resolver, evitando la pérdida de tiempo tratando de hacer lo imposible.

Para algunos filósofos, los teoremas demuestran que la mente humana tiene ciertas cualidades especiales que no pueden ser imitadas por las computadoras.

Comenzaremos la clase con la definición de dos tipos de maneras de deducir un argumento, una es la deducción sintáctica y otra es la deducción semántica.

14.2 Deducción sintáctica

La deducción consiste en la extracción de una conclusión a partir de las premisas. Pero esta extracción puede hacerse siguiendo dos criterios.

El criterio sintáctico es el que aplicamos cuando deducimos la validez o no de un argumento, aplicando las reglas de la lógica y justificando cada paso.

Bajo tal criterio el problema de la deducción es el problema de la derivación formal. Dado argumento cualquiera, el modo sintáctico de resolverlo consiste tratar de obtener la conclusión deseada, por aplicación de reglas de inferencia, y a partir de las premisas, pero sin tener en cuenta el valor de verdad de éstas. Así, por ejemplo, el argumento:

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{p \to q} \\ \boldsymbol{r \to \neg q} \\ \hline \therefore \boldsymbol{r \to \neg p} \end{array}$$

Se resolvería aplicando reglas de inferencia o equivalencias, de la siguiente manera:

Aplicamos la equivalencia del condicional

$$\boldsymbol{p \to q \equiv \neg p \lor q}$$

Por lo tanto, ahora tenemos como premisas:

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{\neg p \lor q} \\ \boldsymbol{r \to \neg q} \end{array}$$

Si suponemos que se cumple r, tal como indica la conclusión (r→¬p), entonces tendríamos por la segunda premisa que se cumple ¬q.

Nos queda, entonces, en caso de cumplirse r, lo siguiente:

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{\neg p \lor q} \\ \boldsymbol{\neg q} \end{array}$$

Aplicando silogismo disyuntivo se deduce de lo anterior

$$\neg p$$

Por lo tanto:

$$r \to \neg p$$

Es decir, de las premisas se deduce la conclusión.

Observación: También podríamos haber aplicado Modus Tollens en lugar de la equivalencia del condicional.

Pero la deducción también se puede enfocar con un criterio semántico, que es el que introduciremos brevemente en esta clase.

14.2 Deducción semántica

El fundamento de este criterio es que, si la deducción es correcta, no es posible, por definición, que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

Este tipo de deducción se aplica cuando determinamos la validez o no de un argumento, pero sin aplicar todas las reglas de inferencia lógica, o sin justificar todos los pasos que permiten la deducción. Sin embargo, no por eso es incorrecta.

Para lograr este tipo de deducción, es común intentar añadir a las premisas la hipótesis de la falsedad de la conclusión y buscar un contraejemplo o contramodelo, esto es, una interpretación que satisfaga las exigencias del tal conjunto de enunciados (haciendo así compatible la verdad de las premisas con la falsedad de la conclusión).

El hallazgo del contraejemplo demostraría que el argumento es inválido.

Pero también puede suceder que la búsqueda termine ante una contradicción, en cuyo caso el problema de deducir la conclusión del argumento a partir de las premisas iniciales queda resuelto, con lo cual el argumento sería válido.

Vamos a analizar el argumento anterior:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{p \to q} \\ \underline{\boldsymbol{r \to \neg q}} \\ \therefore \boldsymbol{r \to \neg p} \end{array}$$

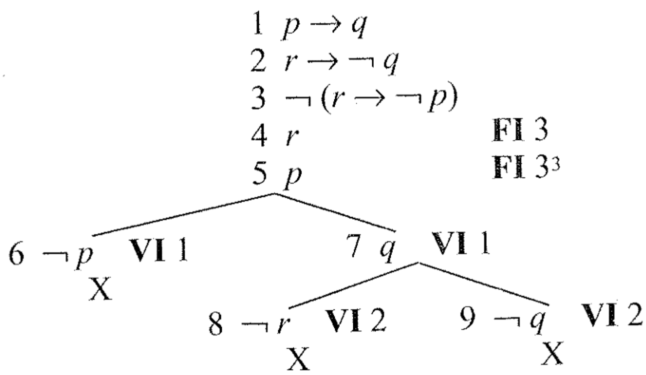
Lo haremos desde la perspectiva de la deducción semántica, aplicando el concepto de contraejemplo. Para esto agregaremos a las premisas la negación de la conclusión, es decir, veremos si es posible que se cumplan las premisas al mismo tiempo que no se cumpla la conclusión.

Estaremos suponiendo entonces la verdad de las premisas $p \to q$ y $r \to \neg q$, mientras que agregaremos la premisa $\neg(r \to \neg p)$, la cual también suponemos verdadera. Si llegamos a una contradicción significa que las tres premisas no pueden ser verdaderas a la vez y cómo la única que está en cuestionamiento es la negación de la conclusión, esta sería falsa, con lo cual la conclusión sería verdadera, haciendo válido al argumento.

Tendríamos estas tres premisas:

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{p \to q} \\ \boldsymbol{r \to \neg q} \\ \neg(\boldsymbol{r \to \neg p}) \end{array}$$

De acuerdo a estas consideraciones el análisis semántico del argumento se puede representar de la siguiente manera:



En donde,

FI: falsedad de la implicación, representa que $\neg(\boldsymbol{r} \to \neg \boldsymbol{p})$ es equivalente a $\boldsymbol{r}$ o $\boldsymbol{p}$.

VI: verdad de la implicación, representa que $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ es equivalente a $\neg \boldsymbol{p}$ o $\boldsymbol{q}$, y $\boldsymbol{r} \rightarrow \neg \boldsymbol{q}$ es equivalente a $\neg \boldsymbol{r}$ o $\neg \boldsymbol{q}$.

El esquema se denomina “tabla semántica del argumento”.

Las líneas que se bifurcan son los distintos resultados según estás opciones mencionadas de la verdad de la implicación.

En la trayectoria que va de las premisas 1 a 6, hay contradicción entre 5 y 6; en la trayectoria que va de las premisas 1-5 a 7 y 8, hay contradicción entre las premisas 4 y 8; finalmente en la trayectoria que va de las premisas 1-5 a 7 y 9, hay contradicción entre estas dos últimas.

Toda trayectoria termina en contradicción. Por tanto, la negación de la conclusión es falsa, es decir, la conclusión es verdadera cuando las premisas lo son. Esto significa que el argumento analizado es correcto.

Si en alguno de los caminos nos hubiese dado, aunque sea una posibilidad que no sea contradicción, entonces el argumento sería inválido, porque representaría que la verdad de las premisas y la falsedad de la conclusión pueden ocurrir a la vez.

También podríamos decir que:

- La deducción semántica se trata de justificar que la veracidad de las hipótesis implica la veracidad de la conclusión.
- Mientras que la deducción sintáctica se trata de dar una demostración mediante las reglas formales de la lógica, que llegue a la conclusión a partir de las hipótesis, a través de pasos debidamente justificados.

Estas dos formas de deducción son equivalentes, y esto se puede asegurar gracias a dos teoremas muy importantes tanto en lógica como en matemática.

14.4 Corrección y completitud

Antes de enunciar los teoremas correspondientes vamos a simbolizar una deducción semántica de la siguiente manera:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \models C$$

Además, recordemos que la deducción sintáctica se simboliza de la siguiente manera:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash C$$

14.4.1 Teorema de corrección, para la lógica de predicados

Para todos los argumentos (formulados en algún lenguaje de la lógica de predicados), si $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash C$ entonces $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \models C$.

Es decir, si un argumento se puede deducir de manera sintáctica, se puede deducir de manera semántica.

14.4.1 Teorema de completitud de Gödel, para la lógica de predicados

Para todos los argumentos (formulados en algún lenguaje de la lógica de predicados), si $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \models C$ entonces $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash C$.

Es decir, si un argumento se puede deducir de manera semántica, se puede deducir de manera sintáctica.

O, dicho de otra manera, en una lógica de primer orden, toda fórmula que es válida en un sentido lógico es demostrable, en donde la palabra "demostrable" significa que existe una deducción formal de la fórmula, en el caso de la lógica de predicados, por reglas de inferencia.

Estos dos teoremas nos indican que ambas formas de deducir son equivalentes y en cierta manera nos autoriza a combinar ambas técnicas, que es lo que usualmente hacemos.

Ejemplo

Tomemos el siguiente argumento, lo vamos a trabajar en lenguaje coloquial para que se comprenda mejor el concepto que estamos trabajando, es decir, la diferencia entre los dos tipos de deducción:

i) Los números primos son aquellos que tienen exactamente dos divisores en los números naturales.

ii) Todo número es divisible por 1 y por sí mismo.

iii) Todos los números pares son divisibles por 2.

iv) Por lo tanto, no existe un número primo par mayor que 2.

Deducción semántica

Supongamos que existe un número primo par mayor que 2 y que, además, se cumplen todas las premisas, es decir, son verdaderas:

i) Los números primos son aquellos que tienen exactamente dos divisores en los números naturales.

ii) Todo número es divisible por 1 y por sí mismo.

iii) Todos los números pares son divisibles por 2.

iv) Existe un número primo par mayor que 2.

Esta última premisa es la negación de la conclusión.

En este caso, si suponemos que existe un número par primo mayor que dos, dicho número par tiene como divisor natural al 1, a si mismo (premisa ii) y al dos (premisa iii).

Por lo tanto, dicho número primo tiene 3 divisores en los naturales, lo cual entra en contradicción con la primera premisa.

Luego, no es posible que exista un número primo mayor que 2, con lo cual la conclusión es verdadera a premisas verdaderas.

Deducción sintáctica

En este caso vamos a partir de la verdad de las premisas y llegaremos a la verdad de la conclusión, a partir de deducciones lógicas:

i) Los números primos son aquellos que tienen exactamente dos divisores en los números naturales.

ii) Todo número es divisible por 1 y por sí mismo.

iii) Todos los números pares son divisibles por 2.

Sea x cualquier número par mayor que 2:

Por la premisa iii) x es divisible por 2.

Por la premisa ii) x es divisible por 1 y por x.

Luego x tiene 3 divisores, x no tiene exactamente 2 divisores.

Por la premisa i) entonces x no es un número primo (pues si lo fuese tendría exactamente dos divisores, es decir, por Modus Tollens)

Por lo tanto, ningún número par mayor que 2 es primo.

Con lo cual queda demostrada la conclusión, a partir de las premisas.

Con esto llegamos al final de la clase. Quiero dejar en claro que este tema es complejo y daría para unas cuántas clases más, pero la idea en general es presentar estas dos maneras de deducir una conclusión, que en lógica proposicional y de predicados ambas maneras son válidas, y que incluso es común utilizarlas de manera indistinta y combinada.

Esta es la última clase de la cursada de Lógica, espero que la materia les haya resultado útil e interesante y desde ya agradezco sus comentarios, así como los avisos acerca de los errores que pudiera haber en los apuntes, los cuales me ayudan a continuar mejorando.