Clase 12

Autovalores, Autovectores y Diagonalización

12.1 Introducción

Los autovalores se emplean en diversas áreas de la matemática, en la resolución de problemas hidrodinámicos, mecánicos, físicos de ingeniería eléctrica y nuclear, etc.

Aparentemente, los autovalores tuvieron su origen en el estudio de las formas cuádricas y en el desarrollo de la mecánica celeste.

Se han encontrado manuscritos en donde el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), aproximadamente en 1740 los usaba en forma implícita para describir geométricamente las formas cuadráticas en tres variables que responden a la forma $F(x ; y ; z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$.

Veinte años más tarde el matemático francés Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), dio una versión más explícita sobre la resolución de las ecuaciones diferenciales estudiada por Euler, al hallar la solución de un sistema de seis ecuaciones diferenciales que representaban los movimientos planetarios conocidos hasta ese momento; deduciendo una ecuación polinómica de sexto grado cuyas raíces eran los autovalores asociados a una matriz de orden 6x6 que correspondía a la matriz de los coeficientes de dicho sistema.

En 1820 , Cauchy empleó los autovalores para determinar los ejes principales de una forma cuádrica con "n" variables, haciendo extensivo su uso a la mecánica celeste tal cual lo había hecho Lagrange

12.2 Autovalores asociados a una transformación lineal

Dado el Espacio Vectorial (**V ; + ; R ; .**) y el operador lineal **T : V → V ,** en algunas ocasiones interesa encontrar un vector **no nulo x** tal que **T(x)** y el vector **x** mantengan la misma dirección, por lo tanto debe existir un número real **λ** tal que : **T(x) = λ.x.**

Definición

Sea un operador lineal **T,** definido en un Espacio Vectorial **(V ; + ; R ; .),** el escalar **λ** recibe el nombre de **autovalor** asociado a la Transformación Lineal **T,** si existe algún vector no nulo **x** perteneciente a **V** tal que **T(x) =λ .x.**

12.3 Autovalor asociado a una matriz

Dada una matriz cuadrada **A** de orden **n**, a veces interesa encontrar los vectores no nulos **x** tales que, **A.x** y los vectores **x** mantengan la misma dirección, es decir, que resulten paralelos.

Definición

Sea **A** una matriz cuadrada de orden **n,** el escalar **λ** recibe el nombre de autovalor asociado a la matriz **A,** si existe algún vector no nulo de orden **nx1** tal que **A.x = λ .x**

Teniendo en cuenta el concepto de matriz asociada a una transformación lineal, se puede unificar las dos definiciones anteriores:

Definición

Sea **T** un operador lineal, definido en un E.V. (**V ; + ; R ; .),** y **A** la matriz asociada a una transformación lineal; el escalar **λ** recibe el nombre de autovalor asociado a la T.L. **T,** si existe algún vector **x** no nulo perteneciente a **V** tal que **T(x) = A.x = λ .x**

Si **A.x = λ.x,** el autovector **x no es único,** pues cualquier otro vector múltiplo de él, también es un autovector asociado al mismo autovalor, pues si **y = α . x** (con **α** real no nulo), resulta:
A.y = A.(**α . x**) = **α .** (**A.x**) = **. α** (**λ .x**) =**λ .** (**α .x**) =**λ .y**

Ejemplo 1

Sean A=$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, u=$\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$, y v=$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. ¿Son u y v autovectores de A?

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = 4u$$

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Entonces u es un autovector correspondiente a un valor propio (-4), pero v no es un vector propio de A porque Av no es un múltiplo de v.

Ejemplo 2

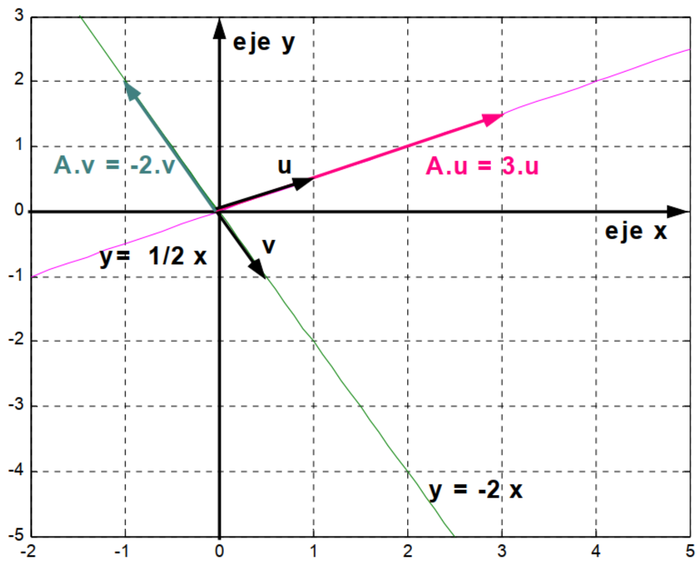
Dada la matriz A=$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ es fácil comprobar si los vectores u=(2;1) y v=(1;-2) son autovectores de A

$$Au = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3u$$

$$Av = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -2v$$

Los vectores **u** y **v** determinan la dirección de dos rectas r_1 y r_2 respectivamente, que pasan por el origen.

Geométricamente, **A.x** es la T.L. que dilata a **cualquier vector u** de r_1 en un factor λ =3 , en tanto que los vectores **v** a lo largo de r_2 se reflejan respecto al origen de coordenadas y luego sufren un dilatamiento en un factor λ = 2.



12.4 Calculo de autovalores y autovectores.

Al operar matricialmente con la ecuación **A.x = λ .x** se obtiene un sistema homogéneo. En efecto:

A.x = **λ .x**	Sumando en ambos miembros el opuesto de **λ .x**
A.x + (- **λ .x**) = **0**	Sacando factor común **x :**

(A -λ .I**).x** = **0 (I)** Expresión matricial de un sistema homogéneo.

Como los sistemas homogéneos siempre poseen solución y por definición el vector **x** es no nulo, el sistema **(I)** es compatible indeterminado pues debe admitir otras soluciones además de la trivial, por lo tanto el **determinante de la matriz de los coeficientes debe ser nulo**.

Definición 1

La ecuación | **A** - **λ** **.**I | = 0 recibe el nombre de **ecuación característica** y los valores de **λ** , no todos nulos, que la satisfacen son los autovalores. El polinomio que se obtiene en el primer miembro de la ecuación se denomina **polinomio característico.**

Definición 2

Dada una matriz cuadrada **A** de orden **n**, la suma de las multiplicidades algebraicas de sus autovalores asociados es **n**.

De la **Definición 6** se deduce que, una matriz cuadrada **A** de orden **n** no necesariamente tiene **n** autovalores asociados distintos, es decir, si representan a los autovalores **distintos** de A con i = 1 ; 2 ; ...; m puede ser **m** ≤ **n.**

Ejemplo

La matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es de orden 4 y posee 2 autovalores distintos.

En efecto:

Los autovalores asociados a la matriz A se obtienen resolviendo la ecuación característica | **A** - **λ** **.**I | **= 0**

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Se calcula el valor del determinante, obteniendo $|A| = (2-\lambda)^3 . (1-\lambda)$. Luego, los valores de **λ** que anulan al determinante de la matriz A son **λ = 2** y **λ = 1**

Se observa que el número de autovalores distintos es m =2. La multiplicidad algebraica de **λ** = 2 es triple y la de **λ** =1 es simple; sin embargo, la suma de dichas multiplicidades es coincidente con el orden de la matriz A dada. El autovalor **λ** = 2 aparece tres veces, indicando de este modo su multiplicidad algebraica.

Cada autovalor, al ser reemplazado en el sistema homogéneo **(I)**, da origen a una familia de vectores, los autovectores buscados, la que se designa con la expresión **S λ =** {**x** / **A. x** = λ **.x**}.

Teorema 1

Si **λ** es un autovalor asociado a una matriz **A** cuadrada de orden n, entonces

$\mathbf{S_\lambda}$ **=** {**x**/ **A. x** =**λ.x**} es un subespacio de $\mathbf{R^n}$**.**

Definición

$\mathbf{S_\lambda}$ recibe el nombre de **subespacio característico** de **A** correspondiente al autovalor **λ**. El par ordenado **(λ; x**) recibe el nombre de **par característico** siendo **x** un representante del subespacio característico hallado para el respectivo **λ**.

Los pares característicos tienen una interpretación geométrica particular en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$:

- si **λ >** 1, el vector **x** sufre una dilatación o desplazamiento.
- si 0 **< λ <** 1, el vector **x** sufre una contracción.
- si **λ <** 0, el vector **x** sufre una inversión en el sentido, pero mantiene la dirección.

12.5 Diagonalización

En muchos casos, la información vector propio-valor propio contenida dentro de una matriz *A* puede representarse mediante una útil factorización de la forma $A = PDP^{-1}$. En esta ocasión, la factorización permite calcular rápidamente A^k para valores grandes de *k*, una idea fundamental en varias aplicaciones del álgebra lineal.

En la factorización, la *D* significa *diagonal.* El cálculo de las potencias de una *D* de este tipo es trivial.

Ejemplo 1

Si D=$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, entonces D^2=$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$ y

$D^3=DD^2=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix}$

En general, $D^k=\begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$ para $k \geq 1$

Si $A=PDP^{-1}$ para alguna P invertible y una diagonal D, entonces A^k también es fácil de calcular, como se muestra en siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Sea $A=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre una formula para A^k, dado que $A=PDP^{-1}$, donde

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } D=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

De la forma estándar para el inverso de una matriz de 2x2 se obtiene

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces, por la asociatividad de la multiplicación de matrices.

$$A^2=(PDP^{-1})(PDP^{-1})=PD\underbrace{(P^{-1}-P)}_{I}DP^{-1}=PDDP^{-1}=PD^2P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

De nuevo, $A^3=(PDP^{-1})A^2=(PD\underbrace{P^{-1})P}_{I}D^2P^{-1}=PDD^2P^{-1}=PD^3P^{-1}$

En general, para $k \geq 1$,

$$A^k=PD^kP^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2.5^k - 3^k & 5^k - 3^k \\ 2.3^k - 2.5^k & 2.3^k - 5^k \end{bmatrix}$$

Se dice que una matriz cuadrada *A* es **diagonalizable** si *A* es semejante a una matriz diagonal, esto es, si *A* = *PDP*-1 para alguna matriz *P* invertible y alguna matriz diagonal *D*. El siguiente teorema proporciona una caracterización de las matrices diagonalizables e indica la forma de estructurar una factorización adecuada.

Teorema de la diagonalización

Una matriz A de n × n es diagonalizable si, y sólo si, A tiene n vectores propios linealmente independientes.
De hecho, A = PDP-1, con D como una matriz diagonal, si, y sólo si, las columnas de P son n vectores propios de A linealmente independientes. En este caso, las entradas diagonales de D son valores propios de A que corresponden, respectivamente, a los vectores propios de P.

En otras palabras, *A* es diagonalizable si, y sólo si, hay suficientes vectores propios para formar una base de R*n*. A una base de este tipo se le denomina **base de vectores propios**.

12.5.1 Diagonalización de matrices

Ejemplo 1

Diagonalize la siguiente matriz, si es posible.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es, encuentre una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A=PDP^{-1}$

Se requieren cuatro pasos para implementar la descripción del teorema de la diagonalización.

Paso 1. Encontrar los valores propios de A. En el presente caso, resulta que la ecuación característica contiene un polinomio cubico al cual se puede factorizar:

$$0=\det(A-\lambda I)=-\lambda^3-3\lambda^2+4=-(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

Los autovalores son **λ=1** y **λ=-2**

Paso 2. Encontrar tres autovalores propios de A linealmente independiente. Se necesitan tres vectores porque *A* es una matriz de 3 × 3. Éste es el paso crítico. Si falla, entonces el teorema 5 postula que *A* no puede diagonalizarse. El método de la sección 12.3 produce una base para cada espacio propio:

$$\text{Base para } \boldsymbol{\lambda=1}\text{: } v_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\text{Base para } \boldsymbol{\lambda=-2}\text{: } v_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} \text{ y } v_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que (v_1, v_2 , v_3) es un conjunto linealmente independiente.

Paso 3. ***Estructurar P a partir de los vectores del paso 2.*** El orden de los vectores no tiene importancia. Al usar el orden elegido en el paso 2, forma

$$P = [\ v_1\ v_2\ v_3\ ]=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Paso 4. Estructurar D a partir de los valores propios correspondientes. En este paso, resulta esencial que el orden de los valores propios corresponda al orden elegido para las columnas de *P*. Utilice el valor propio λ = -2 dos veces, una para cada uno de los vectores propios correspondientes a λ = -2:

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

Es recomendable comprobar que P y D realmente funcionen. Para evitar calcular P^{-1}, simplemente verifique si AP = PD. Esto equivale a $A = PDP^{-1}$ cuando P es invertible. (Sin embargo, ¡compruebe que P sea invertible!) Se calcula

$$AP=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\-3 & -5 & -3\\3 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\-1 & -2 & 0\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$PD=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Diagonalice la siguiente matriz, si es posible.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de A resulta ser exactamente la misma que la del ejemplo anterior.

$$0=\det(A-\lambda I)=-\lambda^3-3\lambda^2+4=-(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

Los autovectores son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$. Sin embargo, al buscar los vectores propios, se encuentra que cada uno de los espacios propios tiene sólo una dimensión:

$$\text{Base para } \boldsymbol{\lambda=1}\text{: } v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Base para } \boldsymbol{\lambda=-2}\text{: } v_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No existen otros autovalores, y cada autovector de *A* es un múltiplo ya sea de $\mathbf{v}_1$ o de $\mathbf{v}_2$. Por lo tanto, es imposible construir una base de R^3 usando autovectores de *A*.

De acuerdo con el teorema de la diagonalizacion, *A no* es diagonalizable

Teorema sobre condición suficiente para que una matriz sea diagonizable.

Una matriz de $n \times n$ con n autovalores distintos es diagonalizable.

Ejemplo 3

Determine si la siguiente matriz es diagonizable.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz es triangular, sus autovalores son, evidentemente, 5, 0 y -2. Puesto que A es una matriz de 3×3 con tres valores propios distintos, A es diagonalizable.