Clase 6

T. de Rouché-Frobenius. Método de Gauss. Cálculo de la matriz inversa

6.1 Introducción

Siglos antes de Cristo ya se resolvían ciertos problemas que hoy formularíamos como un sistema lineal de 2 por 2, o 3 por 3, aunque se utilizaban procedimientos propios para cada problema. Según Grcar, el primer uso demostrado del método de eliminación de Gauss aparece el s. III a.C. en China, desde donde se transfirió a Babilonia y Grecia. Por ejemplo, se usa en la solución del problema 19 en el libro I de la *Aritmética* de **Diofanto**. Desde entonces ha aparecido en varias fuentes, como en el libro *Aryabhata* que escribió el hindú *Aryabhatiya* en el s. V d.C.

Isaac Newton fue quien presentó por primera vez el método en su formulación moderna, aunque no lo quiso publicar. Entre 1650 y 1750 hay 35 fuentes sólo en Inglaterra en las que aparece descrito el método. La mayoría de los libros de álgebra del s. XVIII apuntaban que el método fue inventado por Newton (el método de Newton para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas). Por ejemplo, Hammond en su «*The elements of algebra*,» en 1752, nos presenta «El método para resolver problemas que contienen cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas» de Newton (*The Method of resolving Questions, which contain four Equations, and four unknown Quantities*).

¿Por qué el método de eliminación de incógnitas se popularizó con **Gauss**? Para Grcar, todo nuevo método necesita un problema que resolver. Gauss lo utilizó en el marco del método de mínimos cuadrados, de gran utilidad en la resolución de múltiples problemas prácticos, como por ejemplo la determinación de las órbitas astronómicas, Gauss lo aplicó al asteroide Ceres, o en geodesia y cartografía.

Desde Gauss hasta la llegada de los ordenadores, el método se publicó una docena de veces, según Grcar. Destaca **Myrick Hascall Doolittle**, calculista manual que llegó a resolver sistemas de 41 ecuaciones con 41 incógnitas, a mano, con el método de eliminación entre 1873 y 1911. Los cálculos a mano son largos, por ejemplo, **Alan Turing** en 1946 necesitó dos semanas para resolver un sistema de 18 ecuaciones y 18 incógnitas. Doolittle ya indica en 1878 que es necesario mecanizar el procedimiento de eliminación y a partir de 1890 empezó a usar una máquina para calcular sumas. El primer algoritmo pensado para una máquina lo desarrolló **André-Louis Cholesky**, geodésico militar, durante la I Guerra Mundial, para resolver problemas de mínimos cuadrados (cuyas matrices de coeficientes son simétricas y definidas positivas). **Prescott Crout**, profesor de matemáticas en el MIT (Massachusetts Institute of Technology) aplicó el método de eliminación a problemas de ingeniería eléctrica en 1941. Su algoritmo fue el último publicado pensado sólo para hacer cálculos a mano.

El uso de matrices en la resolución de sistemas lineales es muy moderno. Las matrices se inventaron en matemáticas (álgebra abstracta, entonces) por Eisenstein (1852), Cayley (1858), Laguerre (1867), Frobenius (1878) y Sylvester (1881), con objeto de entender la teoría de determinantes, formas cuadráticas, y sus aplicaciones en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Fuera de la matemática abstracta, las matrices no fueron usadas hasta que Heisenberg las utilizó para su mecánica cuántica matricial en 1925. Prácticamente todas las presentaciones de métodos de resolución de sistemas lineales obviaban el uso de matrices. Salvo contadísimas excepciones, como Otto Toeplitz, que usó matrices triangulares de dimensión infinita, o Tadeusz Banachiewicz, que calculó la órbita de Plutón antes de su descubrimiento.

Quizás la primera presentación de la eliminación de Gauss utilizando matrices es del genial **John Von Neumann** y su colaborador **Herman Goldstine** en 1947. Más aún, su presentación incluía la estimación de los errores en el cálculo de la inversa de matrices, el concepto de número de condición (ratio entre los valores singulares de mayor y menos módulo). Este trabajo marca el nacimiento del álgebra lineal numérica como actualmente.

El método de eliminación recibió el apelativo de «método de eliminación de Gauss» a partir de la II Guerra Mundial, quizás en referencia a unas citas de Chauvenet (1868) "elimination of unknown quantities from the normal equations . . . according to Gauss," y Liagre (1879) «élimination des inconnues entre les équations du minimum (équations normales)" mediante "les coefficients auxiliaires de Gauss." Von Neumann (1947) aparentemente es el último gran matemático que habló del método de eliminación (como harían Lacroix o el propio Gauss) sin hacer una referencia al método como «eliminación de Gauss.»

En cuanto a Eugène Rouché (1832 –1910) fue un matemático francés, profesor de esta ciencia en el liceo *Charlemagne* y posteriormente en la *École Centrale.* Rouché es conocido, sobre todo, por el **Teorema de Rouché** de análisis complejo sobre funciones holomorfas publicado en 1862.

Otro de sus resultados más conocidos es el **teorema de Rouché-Frobenius** que, como veremos a continuación, relaciona los rangos de las matrices de **coeficientes** y **ampliada** de la representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales con el tipo de soluciones de éste.

Este último teorema apareció, primero, en un artículo de dos páginas en 1875 (*Sur la discussion des equations du premier degré*) y después, en 1890, fue publicada una versión más completa en el *Journal de l'École Polytechnique*.

Sin embargo, el matemático coetáneo **Georges Fontené** (1848-1923) reclamó la autoría de la demostración. Más tarde, en 1905, el matemático alemán **Ferdinand Georg Frobenius** (1849-1917) acreditó la autoría tanto a Rouché como a Fontené.

Actualmente, en el habla hispana, el teorema se conoce como *Teorema de Rouché-Frobenius*. En Rusia se conoce como *Teorema de Kronecker-Capelli*; en Italia, como *Teorema de Rocuhé-Frobenius*; y, en Francia, como *Teorema de Rouché-Fontené*.

6.2 Método de Gauss

El **método de Gauss** es una generalización del **método de reducción**, que utilizamos para eliminar una incógnita en los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Consiste en la aplicación sucesiva del **método de reducción**, utilizando los **criterios de equivalencia** de sistemas, para transformar la **matriz ampliada con los términos independientes** (A') en una **matriz triangular**, de modo que cada fila (ecuación) tenga una incógnita menos que la inmediatamente anterior. Se obtiene así un sistema, que llamaremos **escalonado**, tal que la última ecuación tiene una única incógnita, la penúltima dos incógnitas, la antepenúltima tres incógnitas, ..., y la primera todas las incógnitas.

Para resolver sistemas de ecuaciones por el método de Gauss, seguiremos los siguientes pasos

Paso 1: obtenemos un sistema equivalente escalonado reducido

Paso 2: Una vez obtenido el sistema escalonado iremos de abajo hacia arriba obteniendo las soluciones

Las **transformaciones** que podemos realizar en dicha matriz para transformar el sistema inicial en otro **equivalente** son las siguientes:

- Multiplicar o dividir una fila por un número real distinto de cero.
- Sumarle o restarle a una fila otra fila.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un número distinto de cero.
- Cambiar el orden de las filas.
- Cambiar el orden de las columnas que corresponden a las incógnitas del sistema, teniendo en cuenta los cambios realizados a la hora de escribir el nuevo sistema equivalente. Es decir: si, por ejemplo, la 2ª columna corresponde a la incógnita $\mathbf{x_1}$ y la tercera a la incógnita $\mathbf{x_3}$, y cambiamos el orden de las columnas, ahora la 2ª columna corresponde a la incógnita $\mathbf{x_3}$ y la tercera a la incógnita $\mathbf{x_2}$.
- Eliminar filas proporcionales o que sean combinación lineal de otras.

- Eliminar filas nulas **(0 0 0 … 0)**.

Después de realizar las **transformaciones** que se consideren pertinentes, se obtendrá un **sistema escalonado**. Suponiendo que hubiésemos eliminado, si las hubiera, las filas nulas **(0 0 0 … 0)**, que corresponden a ecuaciones del tipo **0 = 0**, el **sistema equivalente** tendría ahora **k ecuaciones lineales** con **n incógnitas**. Analizando el sistema resultante, podemos efectuar su discusión del siguiente modo:

- Si alguna de las ecuaciones es del tipo **0 = b** (siendo **b** distinto de cero), el sistema es **incompatible** y no tiene solución.
- Si no hay ecuaciones del tipo **0 = b**, y además **k = n**, es decir, el número de ecuaciones del sistema equivalente es igual al número de incógnitas, el sistema es **compatible determinado** y, por lo tanto, tiene una única solución.
- Si no hay ecuaciones del tipo **0 = b** y **k < n**, es decir, el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, el sistema es **compatible indeterminado** y, en consecuencia, tiene infinitas soluciones. En este caso, tenemos que separar las incógnitas **principales** de las **no principales**. Pero, **¿cuáles son las incógnitas principales?** Se puede dar el siguiente criterio: Si el sistema es escalonado y tiene **k ecuaciones**, las **k primeras incógnitas** serán las **principales** y las **n - k** restantes serán las **no principales** que pasaremos al segundo miembro como **parámetros**.

Por ejemplo:

Clasificación de los sistemas de ecuaciones	El sistema equivalente escalonado (triangular) nos quedara con esta estructura	Numero de soluciones
Sistema compatible determinado	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_3 = 3 \end{cases}$	Solución única
Sistema compatible indeterminado	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$	Infinitas soluciones
Sistema incompatible	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 0 = 3 \end{cases}$	No tiene solución

Ejemplo 1
Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_2 = -4 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 & (2) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & (3) \end{cases}$$

Armamos la matriz aumentada del sistema de ecuaciones

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \end{array}\right)$$

$$F_3 - \frac{3}{2}F_2 \rightarrow F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Volvemos al sistema de ecuaciones ya que redujimos la matriz aumentada a una forma triangular

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 & (1) \\ 2x_2 - 2x_3 = 6 & (2) \\ -x_3 = 1 & (3) \end{cases}$$

De la ecuación (3) del sistema encontramos el valor de la variable "z".

$$-x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = -1$$

Reemplazando el valor de la variable "z" en la ecuación (2), encontramos el valor de la variable "y".

$$2x_2 - 2x_3 = 6 \Rightarrow 2x_2 - 2.(-1) = 6$$

$$2x_2 + 2 = 6 \Rightarrow 2x_2 = 6 - 2$$

$$2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{2}$$

$$x_2 = 2$$

Reemplazamos los valores de "z" e "y" en la ecuación (1), encontramos el valor de la variable "x".

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \Rightarrow x_1 - 2 + 3(-1) = -4$$

$$x_1 - 5 = -4$$

$$x_1 = 1$$

Por lo tanto, x_1=1, x_2=2 y x_3=-1. Y el conjunto solución sería: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 & (1) \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 & (2) \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -3 & (3) \end{cases}$$

Armamos la matriz aumentada del sistema de ecuaciones

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & -3 \end{array}\right) F_2 - (-3)F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 22 \\ 4 & 4 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

$$F_3 - 4F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 22 \\ 0 & -4 & -8 & -23 \end{array}\right) F_3 - (-1)F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Volvemos al sistema de ecuaciones ya que redujimos la matriz aumentada.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 & (1) \\ 4x_2 + 8x_3 = 22 & (2) \\ 0 = -1 & (3) \end{cases}$$

Considerando que 0≠1, se considera al sistema como **incompatible**, no tiene solución.

6.3 Teorema de Rouche-Frobenius

En álgebra lineal, este teorema permite calcular el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en función del rango de la matriz de coeficientes, del rango de la matriz ampliada asociada al sistema y del número de incógnitas que posea el sistema.

Definición

Sean ***A*** la matriz de coeficientes y A' la matriz ampliada del sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si **r** y **r´** son el rango de ***A*** y A', respectivamente:

El sistema es compatible si los rangos coinciden ***r=r´***. Además, si ***r=n***, el sistema es compatible determinado; es decir, tiene solución única.

Si el sistema es compatible, ***r = r'***, pero ***r < n***, el sistema es compatible indeterminado; es decir, tiene una infinidad de soluciones.

El sistema es incompatible si los rangos son distintos ***r ≠ r'***, es decir, el sistema no tiene solución.

Ejemplo 1

Considere el sistema de ecuaciones. En caso de que sea posible, resuélvelo.

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$$

Formamos una matriz de coeficientes y calculamos su rango

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango mayor a 1, pues

$$|2| = 2 \neq 0$$

Tiene rango mayor a 2, porque

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Tiene rango mayor a 3, porque

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

No es posible calcular si tiene rango mayor a 4 porque no es una matriz de 4x4. Por lo tanto, r(A)=3

Ahora formamos la matriz ampliada y calculamos su rango.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Como al calcular su determinante…

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

El rango de la matriz ampliada es r(A')=3

Aplicando el teorema de Rouché–Frobenius, el sistema es compatible determinado.

r(A)=3 r(A')=3 n=3

Considerando que la fila 4 de la matriz ampliada es una combinación lineal de los otros tres, tendríamos que el numero de incógnitas es 3.

Formamos la matriz ampliada y comenzamos a resolver el sistema utilizando el método de Gauss.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right) F_2 - \left(-\frac{1}{2}\right) F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$$F_3 - \left(-\frac{1}{2}\right) F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 1 & -3/2 & 2 & 9 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right) F_4 - F_1 \to F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 1 & -3/2 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$F_3 - (-3)F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \end{array}\right) F_4 - (-2)F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$F_4 - F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Volvemos al sistema de ecuaciones ya que redujimos la matriz aumentada.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 & (1) \\ 0x_1 + 1/2x_2 + 0x_3 = -1 & (2) \\ x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 6 & (3) \\ 0x_2 + 0x_3 = 0 & (4) \end{cases}$$

La ecuación (4) se elimina. De la ecuación (3) del sistema encontramos el valor de la variable "z".

$$2x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 3$$

Al tener el coeficiente 0 (cero) en la variable "z" al reemplazar el valor de la variable "z" en la ecuación nos va a dar cero. Por lo tanto

$$\frac{1}{2}x_2 + 0x_3 = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}x_2 = -1$$

$$x_2 = -2$$

Por último, reemplazamos los valores de "z" e "y" en la ecuación (1), encontraremos el valor de la variable "x".

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \Rightarrow 2x - (-2) - 2.3 = -2$$

$$2x_1 - 4 = -2$$

$$x_1 = 1$$

Por lo tanto, x_1=1, x_2=-2 y x_3=3. Y el conjunto solución sería: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

6.4 Aplicación a la matriz inversa

En la clase 4 hemos definido y repasado las principales propiedades de la matriz inversa.

Recordemos que una matriz A de n x n es **no singular (o invertible)** si y solo si existe una matriz A^{-1} de n x n (denominada la matriz inversa de A), tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Es decir, la multiplicación de una matriz por su inversa es igual a la matriz identidad, cuyos elementos de la diagonal son iguales a uno y el resto de sus elementos son iguales a cero.

Si dicha matriz no existe se dice que la matriz A es **singular (o no invertible)**.

*Además, en dicha clase, vimos una condición necesaria y suficiente para que una matriz A de n x n tenga inversa: que su **determinante sea distinto de cero**.*

En esta sección nos concentraremos en el cálculo de la matriz inversa de una matriz dada.

Por lo tanto, antes de aplicar el método para el cálculo de la inversa de una matriz, deberemos calcular su determinante, y verificar que dicho **determinante sea distinto de cero**.

6.4.1 Fundamentación del método

Ahora explicaremos los fundamentos de un método práctico para determinar A^{-1}.

Si A es una matriz dada de n × n, estamos buscando una matriz A^{-1} de n × n tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

(recordar que una de las propiedades que vimos es que si se cumple $A \cdot A^{-1} = I_n$, entonces se cumple $A^{-1} \cdot A = I_n$, y viceversa)

El método se basa en aplicar la eliminación de Gauss-Jordan al cálculo de la matriz inversa, y se fundamenta en lo siguiente:

Sea

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Y sea

$$\mathrm{I_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Si llamamos $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ a las columnas de A^{-1}
- Si llamamos $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ a las columnas de I_n

Entonces, hallar la matriz inversa de A, es equivalente a resolver n sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{b_j} = \mathrm{i_j} \qquad \text{con} \qquad 1 \leq j \leq n$$

Por ejemplo, sea la siguiente matriz cuyo determinante es -82, distinto de cero, y por lo tanto es invertible:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Buscamos A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Tal que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analizando un poco más en detalle esta ecuación, encontraremos que la multiplicación de A por cada columna de la matriz inversa, nos debe dar la columna correspondiente de la matriz identidad. Con lo cual se deben cumplir las siguientes tres ecuaciones:

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Luego, tenemos tres sistemas de ecuaciones, en donde cada matriz expandida sobre la cual aplicaríamos el método de eliminación de Gauss – Jordan para calcular cada columna de la matriz inversa, nos queda de la siguiente manera:

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 1 \\ -5 & 3 & 4 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 0 \\ -5 & 3 & 4 & \vdots & 1 \\ 3 & 2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 0 \\ -5 & 3 & 4 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & -1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$

Si bien podríamos aplicar eliminación de Gauss a estas matrices, el método se simplifica resolviendo únicamente la matriz expandida en donde incorporamos la matriz identidad completa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 4 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.4.2 Cálculo de la matriz inversa por eliminación de Gauss – Jordan

Dada una matriz A de nxn, invertible, el método para calcular su inversa mediante eliminación de Gauss - Jordan consiste en plantear la siguiente matriz ampliada:

$$\mathrm{A} \ \vdots \ \mathrm{I_n}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Y aplicar el método de eliminación de Gauss – Jordan hasta que del lado izquierdo (es decir donde inicialmente se encuentra la matriz A) obtengamos la matriz identidad.

Una vez logrado esto, del lado derecho tendremos la matriz inversa. Es decir, llegaremos a:

$$\mathrm{I_n} \ \vdots \ \mathrm{A^{-1}}$$

Ejemplo

Vamos a continuar el ejemplo de la sección anterior, es decir, hallar la inversa de:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -5 & 3 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Planteamos $\mathrm{A}\ \vdots\ \mathrm{I_n}$ y luego aplicamos eliminación de Gauss Jordan hasta que del lado izquierdo obtengamos la matriz identidad.

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ -5 & 3 & 4 & \vdots & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 19 & \vdots & 5 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad F_2 = F_2 - \frac{-5}{1}F_1 = F_2 + 5F_1$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 19 & \vdots & 5 & 1 & 0\\ 0 & 8 & -10 & \vdots & -3 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad F_3 = F_3 - \frac{3}{1}F_1 = F_3 - 3F_1$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 19 & \vdots & 5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{82}{7} & \vdots & \frac{19}{7} & \frac{8}{7} & 1\end{bmatrix} \quad F_3 = F_3 - \frac{8}{-7}F_2 = F_3 + \frac{8}{7}F_2$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 19 & \vdots & 5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{19}{82} & \frac{8}{82} & \frac{7}{82}\end{bmatrix} \quad F_3 = \frac{7}{82}F_3 \quad \text{(hacemos 1 elemento de la tercera fila de la izquierda)}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 0 & \vdots & \frac{49}{82} & -\frac{70}{82} & -\frac{133}{82}\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{19}{82} & \frac{8}{82} & \frac{7}{82}\end{bmatrix} \quad F_2 = F_2 - \frac{19}{1}F_3 = F_2 - 19F_3$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{-7}{82} & \frac{10}{82} & \frac{19}{82}\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{19}{82} & \frac{8}{82} & \frac{7}{82}\end{bmatrix} \quad F_2 = \frac{1}{-7}F_2 \quad \text{(hacemos 1 elemento de la segunda fila de la izquierda)}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & \vdots & \frac{34}{41} & \frac{10}{41} & \frac{19}{41}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{-7}{82} & \frac{5}{41} & \frac{19}{82}\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{19}{82} & \frac{8}{82} & \frac{7}{82}\end{bmatrix} \quad F_1 = F_1 - \frac{-2}{1}F_2 = F_1 + 2F_2$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{11}{82} & \frac{-2}{41} & \frac{17}{82}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{-7}{82} & \frac{5}{41} & \frac{19}{82}\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{19}{82} & \frac{8}{82} & \frac{7}{82}\end{bmatrix} \quad F_1 = F_1 - \frac{3}{1}F_3 = F_1 - 3F_3$$

De esa manera llegamos a obtener la identidad del lado izquierdo.

Y, del lado derecho, obtenemos la matriz inversa de A, es decir:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{82} & \frac{-2}{41} & \frac{17}{82} \\ \frac{-7}{82} & \frac{5}{41} & \frac{19}{82} \\ \frac{19}{82} & \frac{8}{82} & \frac{7}{82} \end{bmatrix}$$

Por supuesto, deberíamos verificar que la matriz hallada sea correcta, es decir, realizar la multiplicación:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{11}{82} & \frac{-2}{41} & \frac{17}{82} \\ \frac{-7}{82} & \frac{5}{41} & \frac{19}{82} \\ \frac{19}{82} & \frac{8}{82} & \frac{7}{82} \end{bmatrix}$$

Y verificar que dicha multiplicación es igual a la matriz identidad (realizarlo).

Con esto bastaría para asegurar que hemos hallado de manera correcta la inversa de A.

Observaciones:

- *Si no calculamos el determinante para establecer si la inversa existe, nos daremos cuenta de que la no existencia de dicha matriz inversa si se da el caso en que durante la eliminación obtengamos alguna fila de la matriz de la izquierda con todos sus elementos iguales a cero.*
- *Observar que en los métodos usamos fracciones en lugar de redondear los decimales. Al utilizar fracciones podemos eliminar el error de redondeo. Dicho error puede llevar a que la matriz resultante difiera bastante de la buscada.*

6.4.3 Sistemas de ecuaciones lineales e inversas

Ahora que sabemos cómo calcular la matriz inversa, tendremos a disposición otro método para resolución de sistemas de ecuaciones lineales (además de la eliminación de Gauss).

Si A es una matriz de n × n, entonces el sistema lineal **A·x = b** es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Supongamos que A es no singular. Entonces A^{-1} existe y podemos multiplicar ambos lados de **A·x = b** por $\mathbf{A^{-1}}$ para obtener:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A^{-1}} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{I_n \cdot x = A^{-1} \cdot b}$$

$$\mathbf{x = A^{-1} \cdot b}$$

Es decir, los valores de las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ se pueden obtener directamente multiplicando la matriz inversa por la matriz de términos independientes.

Este método es útil para los casos en que la matriz A no cambia frecuentemente, pero si lo hacen los términos independientes, de esa manera realizamos el cálculo por única vez de la matriz inversa, y luego cada sistema de ecuaciones se resuelve mediante una multiplicación (en lugar de aplicar eliminación gaussiana en cada caso).

Ejemplo

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Como vemos, la matriz A es la misma en ambos casos, lo que cambian son los términos independientes y la solución x_1, x_2, x_3 en cada caso.

Como ya hemos calculado la inversa, ahora podemos aplicar que:

$$\boldsymbol{x = A^{-1} b}$$

Entonces resolvemos en cada caso:

1) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{82} & \frac{-2}{41} & \frac{17}{82} \\ \frac{-7}{82} & \frac{5}{41} & \frac{19}{82} \\ \frac{19}{82} & \frac{8}{82} & \frac{7}{82} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{41} \\ \frac{30}{41} \\ -\frac{17}{41} \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{82} & \frac{-2}{41} & \frac{17}{82} \\ \frac{-7}{82} & \frac{5}{41} & \frac{19}{82} \\ \frac{19}{82} & \frac{8}{82} & \frac{7}{82} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{213}{164} \\ \frac{103}{164} \\ \frac{25}{164} \end{bmatrix}$

Finalmente, podríamos verificar en cada caso que, efectivamente, $A \cdot x = b$, es decir, que los valores de x hallados verifican las ecuaciones (verificarlo).