Clase 9

Reglas de Inferencia y sustitución

9.1 Introducción

Una regla lógica, o regla de inferencia (deductiva), es una forma valida de razonamiento que es empleada para inferir deductivamente ciertos enunciados a partir de otros. El hecho de que en la historia de la lógica se ha destacado algunas formas validas de razonamiento como reglas lógicas obedece a razones diversas. La simplicidad, su carácter particularmente evidente, su uso en argumentaciones de la vida cotidiana y en demostraciones matemáticas, y, además, el hecho de representar propiedades básicas de las expresiones lógicas (y, por lo tanto, estar entre los principios básicos de sistemas lógicos) se cuentan entre estas razones. Son reglas de permisión en el sentido de que permiten la afirmación de la conclusión a partir de las premisas.

En este sentido, y tal como se adelantó al final de la clase pasada, utilizaremos las reglas de inferencia y de sustitución para ayudarnos a determinar cuándo un argumento es válido, y cuándo no lo es.

9.2 Principales reglas de inferencia

Definición

Al conjunto de razonamientos válidos más elementales se les llama Reglas de Inferencia. Las reglas de inferencia son esquemas básicos de inferencia deductiva que se suelen escribir poniendo cada premisa en una línea y la conclusión en otra línea al final. Toda regla, como toda inferencia deductiva, tiene que estar basada en la implicación de la conclusión a partir de las premisas.

Veremos algunas de las reglas de inferencia más utilizadas y luego explicaremos cada una de ellas con más detalle y con ejemplos.

Tabla de reglas de inferencia

Regla de inferencia	Implicación lógica asociada	Nombre
$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	Modus Ponens (MP)
$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \qquad} \\ \therefore \neg p \end{array}$	$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$	Modus Tollens (MT)
$\begin{array}{l} \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore p \vee q \end{array}$	$p \to (p \vee q)$	Adición disyuntiva
$\begin{array}{l} p \\ \underline{q \qquad\quad} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$	$p \wedge q \to p \wedge q$	Combinación conjuntiva
$\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore p \end{array}$	$(p \wedge q) \to p$	Simplificación conjuntiva
$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$	Silogismo Hipotético (SH)
$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \to p$	Silogismo Disyuntivo (SD)

9.2.1 Regla de inferencia Modus Ponens (MP)

También llamada “modus ponendo ponens” (del latín: "el modo que, al afirmar, afirma") esta regla de inferencia es un tipo de argumento válido que cuando una premisa es un condicional y la otra es el antecedente, para inferir el consecuente. La misma regla se aplica si el antecedente o el consecuente es una preposición simple o compuesta.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

Ejemplos

I) "Si Ariel estudia para Analista de Sistemas, entonces cursara Análisis matemático. Ariel estudia para Analista de Sistemas. Luego, Ariel cursara Análisis matemático."

Considerando

p: "Ariel estudia para Analista de Sistemas"

q: "Ariel cursara Análisis Matemático"

Su esquema de argumento es:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore q \end{array}$$

Y su forma simbólica:

$$(p \rightarrow q),\ p \vdash q$$

El argumento es válido, pues corresponde a un MP.

II) "Si José no aprueba matemática I, no cursara matemática II. José no aprueba matemática I. Luego, José no cursara matemática II.

Siendo

p: "José aprueba matemática I"

q:" José cursara matemática II"

Su esquema de argumento es:

$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow \neg q \\ \underline{\neg p \qquad\quad} \\ \therefore \neg q \end{array}$$

Y su forma simbólica lineal:

$$(\neg p \rightarrow \neg q),\ \neg p \vdash \neg q$$

Observación: en este ejemplo se cumple la regla MP, pero con las proposiciones compuestas $\neg p$ y $\neg q$.

El argumento es válido, pues corresponde a un MP.

III) La regla modus ponens nos permite determinar que cada uno de los siguientes argumentos son válidos (sin necesidad de realizar la tabla de verdad del argumento y verificar que es una tautología):

a) $\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to \neg q} \\ \therefore \neg q \end{array}$ b) $\begin{array}{l} \neg p \to q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore q \end{array}$ c) $\begin{array}{l} p \wedge q \to r \\ \underline{p \wedge q} \\ \therefore r \end{array}$ d) $\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q \wedge r} \\ \therefore q \wedge r \end{array}$

9.2.2 Regla de inferencia Modus Tollens (MT)

También llamada "modus tollendo tollens" (del latín: "el modo que, al negar, niega") esta regla de inferencia es un tipo de argumento válido que se aplica cuando una premisa es un condicional y la otra es la negación del consecuente, para inferir la negación del antecedente.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Ejemplos

Las deducciones siguientes ejemplifican el uso del modus tollens.

i) "Si tiene luz propia, entonces el astro es una estrella. El astro no es una estrella. Por lo tanto, no tiene luz propia"

Sean:

p: "Tiene luz propia"

q: "El astro es una estrella"

El argumento se simboliza de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

O bien de manera lineal:

$$(p \rightarrow q),\ \neg q \vdash \neg p$$

Luego, el argumento es válido, pues corresponde a un MT.

ii) “Si la memoria de la PC no es la correcta, el análisis de la base de datos no se podrá realizar. Pero se pudo realizar el análisis de la base de datos. Luego, la memoria de la PC es la correcta.”

Sean

p: “La memoria de la PC es correcta”

r: “El análisis de la base de dato se puede realizar”

La forma del razonamiento es:

$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow \neg r \\ \underline{r \qquad\qquad} \\ \therefore p \end{array}$$

Que coincide con la estructura válida del Modus Tollens, por lo tanto, el argumento es válido.

iii) Los argumentos siguientes también se corresponden con la regla MT, por lo tanto, son válidos:

a) $\begin{array}{l} q \\ \underline{p \rightarrow \neg q} \\ \therefore \neg p \end{array}$ b) $\begin{array}{l} \neg p \rightarrow q \\ \underline{\neg q \qquad\quad} \\ \therefore p \end{array}$ c) $\begin{array}{l} p \wedge q \rightarrow r \\ \underline{\neg r \qquad\qquad} \\ \therefore \neg(p \wedge q) \end{array}$ d) $\begin{array}{l} \neg(q \vee r) \\ \underline{p \rightarrow q \vee r} \\ \therefore \neg p \end{array}$

9.2.3 Regla de adición disyuntiva (AD)

La regla de inferencia de la adición disyuntiva expresa el hecho que si se tiene una proposición que es cierta, entonces la disyunción entre aquella proposición y otra cualquiera ha de ser también cierta.

En forma simbólica de *regla de adición* sería:

$$\begin{array}{l} \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore p \vee q \end{array}$$

O bien $p \vdash (p \vee q)$

Por supuesto, también es válido

$$\frac{p}{\therefore q \lor p}$$

Por la propiedad conmutativa de la disyunción.

Puesto que se ha dado p como una de las premisas, se sabe que, si $\boldsymbol{p}$ es cierta, ha de ser $\boldsymbol{p \lor q}$ también una proposición cierta; y esto es precisamente lo que se entiende por una deducción lógica válida, es decir, un argumento válido.

Ejemplos

Si, como premisa cierta, se tiene que:

"p: Daniela aprobó el parcial de Matemática Discreta"

Entonces se puede concluir a las siguientes proposiciones que son ciertas:

"Daniela aprobó el parcial de Matemática Discreta o el parcial de Análisis"

"Daniela aprobó el parcial de Matemática Discreta o el final de Álgebra"

"Daniela aprobó el parcial de Matemática Discreta o el parcial de Álgebra",

En todos estos ejemplos una proposición es cierta y esto es todo lo que se necesita saber para que una disyunción sea cierta.

En forma simbólica, si se tiene la proposición p, se puede concluir:

$p \lor q$, o bien $p \lor r$, o bien $s \lor p$, o bien $t \lor p$

Independientemente de cuáles sean las proposiciones q, r, s, t.

ii) Los siguientes ejemplos de argumentos siguen la estructura de la regla de adición disyuntiva y, por lo tanto, son argumentos válidos:

a) $\frac{q}{\therefore q \lor \neg r}$ b) $\frac{\neg r}{\therefore p \lor \neg r}$ c) $\frac{p \to \neg q}{\therefore (p \to \neg q) \lor q}$ d) $\frac{p \land \neg q}{\therefore (p \land \neg q) \lor s}$

9.2.4 Regla de combinación conjuntiva (CC)

Esta regla que permite afirmar que, de dos premisas verdaderas, se deduce la conjunción de ellas como conclusión verdadera, dando como resultado un argumento válido. Se denomina regla de combinación conjuntiva o de conjunción.

De manera simbólica la regla se puede representar:

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q \qquad\qquad} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

O bien, de manera simbólica lineal:

$$p, q \vdash (p \wedge q)$$

El orden de las premisas es indiferente, y también en la conclusión se puede alternar el orden de la conjunción por la propiedad conmutativa de la conjunción.

Ejemplos

i) Dadas dos proposiciones como premisas,

p: "El número atómico del hidrogeno es 1"

q: "El numero atómico del helio es 2."

Una conclusión, que determinaría un argumento válido, podría ser:

"El número atómico del hidrogeno es 1 y del helio es 2"

Simbólicamente:

$$p, q \vdash (p \wedge q)$$

o bien

"El número atómico del helio es 2 y del hidrogeno es 1"

Simbólicamente:

$$p, q \vdash (q \wedge p)$$

ii) Los siguientes argumentos son válidos, pues su estructura corresponde a la regla de combinación conjuntiva (aplicada a proposiciones compuestas):

a) $$\begin{array}{l} q \wedge r \\ \underline{p \wedge q} \\ \therefore\ q \wedge r \wedge p \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} \neg p \\ \underline{\neg q} \\ \therefore \neg p \wedge \neg q \end{array}$$

c) $$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \underline{\neg r} \\ \therefore p \wedge q \wedge \neg r \end{array}$$

d) $$\begin{array}{l} q \vee \neg r \\ \underline{p \rightarrow q} \\ \therefore (q \vee \neg r) \wedge (p \rightarrow q) \end{array}$$

9.2.5 Regla de simplificación de la conjunción (SC)

Esta regla permite deducir, a partir de una conjunción en la premisa, cualquiera de las proposiciones que conforman la conjunción en las premisas, manteniendo un argumento válido.

En forma simbólica la regla de simplificación de la conjunción es:

$$\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore p \end{array}$$

O bien, en forma de su expresión simbólica lineal:

$$p \wedge q \vdash p$$

Ejemplos

i) Si se tiene una premisa que dice:

“El numero 2 es par y primo”.

De esta premisa se pueden deducir dos proposiciones como conclusión.

Una conclusión podría ser: “p: El numero 2 es par”.

La otra conclusión podría ser: “q: El numero 2 es primo”.

Obteniendo, respectivamente:

$$\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore p \end{array} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore q \end{array}$$

Si la premisa es cierta, cada una de las conclusiones es también cierta. Por lo tanto, ambos argumentos son válidos.

ii) Los siguientes argumentos son válidos, pues concuerdan con una regla de simplificación de la conjunción, aplicada a proposiciones compuestas:

a) $\dfrac{p \wedge (q \rightarrow r)}{\therefore q \rightarrow r}$ b) $\dfrac{(p \vee q) \wedge r}{\therefore p \vee q}$ c) $\dfrac{\neg p \wedge \neg q}{\therefore \neg p}$ d) $\dfrac{p \wedge \neg q}{\therefore \neg q}$

9.2.6 Regla de silogismo hipotético (SH)

A partir de dos fórmulas condicionales verdaderas, donde el consecuente de la primera es el antecedente de la segunda, se obtiene como conclusión verdadera un condicional formado por el antecedente de la primera y el consecuente de la segunda.

En forma simbólica:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Su expresión lineal sería:

$$p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

Ejemplos

i) Sea el siguiente razonamiento:

“3 es mayor que 2 si 4 es mayor que 3. Además 4 es mayor que 2 si 3 es mayor que 2. Luego, si 4 es mayor que 3 entonces 4 es mayor que 2.”

Para identificar si un razonamiento es valido es necesario analizar cada premisa y la conclusión, ver las proposiciones simples que la componen y así deducir la relación que las vincula.

Sean las premisas,

“Si 4 es mayor que 3, entonces 3 es mayor que 2”;

“Si 3 es mayor que 2, entonces 4 es mayor que 2”,

y la conclusión:

"Si 4 es mayor que 3, entonces 4 es mayor que 2".

Para expresar simbólicamente el argumento, sean las proposiciones simples:

p: "4 es mayor que 3"

q: "3 es mayor que 2"

r: "4 es mayor que 2"

Luego, la expresión simbólica del argumento es:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

Fórmula que coincide con la estructura del SH. Por lo tanto, es un argumento válido.

ii) Los siguientes argumentos, reflejan la regla del silogismo hipotético, y por lo tanto corresponden a argumentos válidos. Obsérvese que algunos de los antecedentes y consecuentes son proposiciones compuestas. La estructura, sin embargo, es la correspondiente al SH.

a) $\begin{array}{l} \neg p \to \neg q \\ \underline{\neg q \to \neg r} \\ \therefore \neg p \to \neg r \end{array}$ b) $\begin{array}{l} \neg p \to q \lor r \\ \underline{q \lor r \to \neg t} \\ \therefore \neg p \to \neg t \end{array}$ c) $\begin{array}{l} s \to t \\ \underline{t \to r \lor q} \\ \therefore s \to r \lor q \end{array}$ d) $\begin{array}{l} (q \lor r) \to s \\ \underline{s \to p} \\ \therefore (q \lor r) \to p \end{array}$

9.2.7 Regla de silogismo disyuntivo (SD)

Esta regla dice que si una premisa es una disyunción y la otra es la negación de una de las proposiciones que conforman la (no importa cuál sea la proposición negada, la derecha o la izquierda), se deduce la conclusión que afirma la otra proposición. Simbólicamente, el silogismo disyuntivo se puede expresar:

$$\begin{array}{l} p \lor q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore q \end{array}$$

O bien, su expresión simbólica lineal:

$$p \lor q, \neg p \vdash q$$

Ejemplos

i) "Esta sustancia contiene hidrógeno o contiene oxígeno. Esta sustancia no contiene oxígeno. Luego, esta sustancia contiene hidrógeno".

Considerando las proposiciones:

p: "Esta sustancia contiene hidrógeno"

q: "Esta sustancia contiene oxígeno"

La forma simbólica de este razonamiento es:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p \quad} \\ \therefore q \end{array}$$

Es decir, coincide exactamente con la estructura de un silogismo disyuntivo y, por lo tanto, el argumento es válido.

ii) Los siguientes argumentos resultan ser válidos, tras notar que la estructura corresponde a un silogismo disyuntivo, en el cual las proposiciones que conforman la disyunción son proposiciones compuestas:

a) $\begin{array}{l} (p \to q) \vee \neg r \\ \underline{r \qquad\qquad\quad} \\ \therefore p \to q \end{array}$ b) $\begin{array}{l} \neg p \vee t \\ \underline{\neg t \qquad} \\ \therefore \neg p \end{array}$ c) $\begin{array}{l} (p \wedge q) \vee s \\ \underline{\neg s \qquad\qquad} \\ \therefore (p \wedge q) \end{array}$ d) $\begin{array}{l} \neg q \vee \neg r \\ \underline{\neg(\neg q) \quad} \\ \therefore \neg r \end{array}$

9.3 Reglas de manipulación y sustitución

Las reglas de reemplazo, manipulación o reglas de sustitución3 son reglas de transformación que pueden ser aplicadas a un segmento particular de una expresión.

Mientras que una regla de inferencia se aplica siempre a una expresión lógica general, comúnmente para determinar si un argumento es válido, una regla de reemplazo puede ser aplicada solamente a un segmento particular, a modo de manipulación de la expresión.

En la clase 7 se han introducido las principales reglas de sustitución, en dicha oportunidad mencionadas como leyes lógicas. Por esta razón no las volveré a definir aquí, los remito al material de dicha clase, sin embargo si voy a enumerar dichas reglas.

Las reglas de sustitución que analizamos en la clase 7 son:

- Doble negación o involución
- Idempotencia o tautología
- Conmutatividad
- Asociatividad
- Distributividad
- Las Leyes de De Morgan
- La implicación
- La negación de la implicación

Vamos a agregar, a este listado, algunas reglas de sustitución adicionales.

9.3.1 Transposición

En la lógica proposicional, la transposición es una regla de reemplazo válida que permite que se cambie el antecedente con el consecuente de una sentencia condicional en una prueba lógica si ellos también son ambos negados.

Es la inferencia de que la verdad de que "A implica B" implica la verdad de que "No B implica no A", y viceversa.

Notemos que está muy relacionada con la regla de inferencia de modus tollens.

Simbólicamente la regla se expresa así:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

Es decir, la expresión $p \rightarrow q$ se puede reemplazar por $\neg q \rightarrow \neg p$ y viceversa.

Ejemplo

Sean

p: entreno

q: juego al fútbol

La proposición

Si entreno, juego al fútbol

Es equivalente a lo proposición:

Si no juego al fútbol, no entreno.

Esta equivalencia se puede comprender analizando el hecho de que en caso que “entreno” sea verdadero implica que “juego al fútbol” es verdadero; por lo tanto, si en la segunda proposición estoy afirmando que "no juego al fútbol", la única posibilidad es que "no entreno".

9.3.2 Bicondicional o equivalencia

El valor de verdad de un bicondicional "*p si y solo si q*" es verdadero cuando ambas proposiciones (p y q) tienen el mismo valor de verdad, es decir, ambas son verdaderas o falsas simultáneamente; de lo contrario, es falso.

Se tiene así que la afirmación "*p si y solo si q*" es lógicamente equivalente al par de afirmaciones "*Si p, entonces q*", y "*si q, entonces p*".

Escrito de manera simbólica:

$$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

No hay demasiada explicación adicional respecto a esta sustitución, de hecho, se podría entender como una definición de la doble implicación en base a la implicación.

Según esta regla, la proposición:

"Apruebo si y solo si estudié"

Es equivalente a la conjunción:

"Apruebo si estudié" y "Estudié si apruebo"

9.3.4 Introducción de la negación

La introducción de la negación establece que, si un antecedente determinado implica tanto el consecuente y como su negación o complemento, el antecedente es una contradicción.

Simbólicamente:

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg p$$

Ejemplo

Las proposiciones

"Si estudio, apruebo lengua"

"Si estudio, no apruebo lengua"

Son equivalentes a la proposición

"No estudio"

Pues apruebo lengua y no apruebo lengua no pueden no pueden ocurrir al mismo tiempo pues se caería en una contradicción.

9.4 Análisis de la validez de un argumento

Con los contenidos de esta clase, y las previas, tenemos unas cuantas herramientas para analizar si un argumento es válido o si no lo es; lo cual, como venimos estableciendo desde las primeras clases, es uno de los objetivos de la lógica. Es decir, determinar si un esquema de argumento, o un razonamiento deductivo, es válido.

Recordemos que, en última instancia, siempre tenemos la posibilidad de realizar la tabla de verdad de un argumento y en caso de resultar una tautología el argumento será válido, caso contrario será inválido.

Sin embargo, con la combinación entre las reglas de inferencia y las de sustitución podremos, en muchos casos, determinar la validez de un argumento sin necesidad de realizar la tabla de verdad, sino verificando si corresponden a inferencias lógicas válidas.

Por ejemplo, analicemos el siguiente esquema de argumento:

$$\begin{array}{l} p \wedge (r \vee \neg q) \\ \underline{\neg(q \rightarrow p)} \\ \therefore \neg(\neg p \vee \neg r) \end{array}$$

Aplicando ***propiedad distributiva*** a $p \wedge (r \vee \neg q)$ tenemos:

$$p \wedge (r \vee \neg q)$$

$$(p \wedge r) \vee (p \wedge \neg q)$$

Luego aplicamos la regla de sustitución de la ***implicación*** $(q \rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg q \vee p)$ y obtenemos:

$$(p \wedge r) \vee (q \rightarrow p)$$

Vemos que $(q \rightarrow p)$ coincide con la negación de la segunda premisa.

En la conclusión podemos aplicar la ***Ley de De Morgan***, obteniendo:

$$\neg(\neg p \vee \neg r)$$

$$p \wedge r$$

Finalmente, el esquema de argumento nos queda equivalente a:

$$\begin{array}{l} (p \wedge r) \vee (q \rightarrow p) \\ \underline{\neg(q \rightarrow p)} \\ \therefore p \wedge r \end{array}$$

Cuya estructura se corresponde a un silogismo disyuntivo. Con lo cual **el argumento es válido**.

Es decir, tras aplicar reglas de sustitución válidas hemos llegado a una forma de argumento válido conocida, el silogismo disyuntivo. También podríamos haber llegado a otra forma de argumento válida, o bien determinar que es inválido por contradecir algunas de estas formas.

De todos modos, no siempre nos “daremos cuenta” de manera sencilla que sustituciones aplicar, o bien lo haremos y no llegaremos a alguna de las formas válidas. En ese caso siempre queda la opción de plantear la tabla de verdad.