Clase 9

Producto escalar, proyección ortogonal y distancias

9.1 Introducción

En esta clase definiremos los conceptos algebraicos y geométricos de longitud, distancia y perpendicularidad. Si bien los dos primeros conceptos ya fueron trabajados de manera geométrica en la clase 7 para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, aquí se definen en términos del producto escalar de dos vectores.

Estos conceptos proporcionan potentes herramientas geométricas y algebraicas para resolver muchos problemas aplicados, como ser cuando se estudian los problemas con condiciones de contorno, como las condiciones en la atmósfera, las nubes de bajo nivel o las lluvias. Asimismo, es bastante conocido que el producto escalar entre una fuerza y el desplazamiento da por resultado el trabajo realizado por dicha fuerza.

En estos y muchos otros casos la inclusión de un producto escalar en la formulación facilitará la resolución del problema, pues relaciona la norma de los dos vectores con el ángulo que forman, permitiendo calcular la proyección de un vector sobre otro.

9.2 Producto escalar

El producto escalar, también llamado producto punto o producto interior, entre dos vectores a y b, de dimensión n, se denota $a \cdot b$ y su resultado es un escalar, es decir, un número real en nuestro caso.

Según el enfoque que se adopte se pueden aplicar dos definiciones del producto escalar que son equivalentes, dan el mismo resultado. Veremos las dos definiciones pues son útiles para los conceptos que queremos tratar en esta clase.

9.2.1 Definición matricial del producto escalar

El producto escalar, también llamado producto punto o producto interior, de dos vectores a y b de dimensión n se denota $a \cdot b$ y es la suma de los productos de las componentes correspondientes.

En consecuencia, si:

$$a = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$$

$$b = (b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$$

Entonces

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

Ejemplo 1

$$u = (1, -2, 3)$$

$$v = (2, 3, -2)$$

El producto escalar $u \cdot v$ es:

$$u \cdot v = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-2)$$

Por lo tanto:

$$u \cdot v = -10$$

Ejemplo 2

Sean $a = (x, 2, 3)$ y $b = (4, 1, 2)$, hallar el valor de x si se sabe que $a \cdot b = -4$

Solución

$$a \cdot b = 4x + 2 + 6$$

$$-4 = 4x + 8$$

$$-12 = 4x$$

$$-3 = x$$

Por lo tanto, $x = -3$

Observación: recordemos que ya definimos el producto interior en la clase 3, cuando definimos multiplicación de matrices. Así pues, el producto escalar, o interior, entre dos vectores a y b es igual a la multiplicación de matrices entre una matriz fila con los componentes del vector a y una matriz columna con los componentes del vector b.

Es decir, si representamos a los vectores a y b como las matrices:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Entonces el producto escalar $a \cdot b$ es la multiplicación de las matrices, es decir:

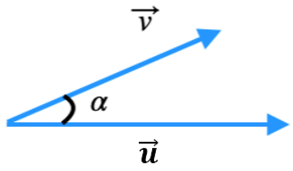
$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

9.2.2 Definición geométrica del producto escalar

El producto escalar de dos vectores, según su definición geométrica, es la multiplicación de sus normas por el coseno del ángulo que forman ambos vectores. Es decir, dados dos vectores v y u:

$$v \cdot u = \|v\| \cdot \|u\| \cdot \cos(\alpha)$$

Siendo α el ángulo que forman los vectores v y u, tal como se muestra en la siguiente imagen:

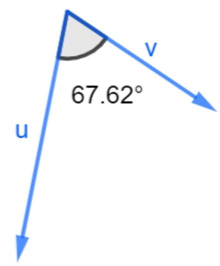


Recordemos que a la norma o módulo de un vector $u = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ *la definimos en la clase 7, y es:*

$$\|u\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

Ejemplo

Sean $u = (-1,\ -5)$ y $v = (3, -2)$, y el ángulo entre los vectores es 67,62°, tal como se muestra en la siguiente imagen:



La norma del vector u es:

$$\|u\| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$

La norma del vector v es:

$$\|v\| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

Entonces:

$$u \cdot v = \sqrt{26} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos(67{,}62)$$

$$u \cdot v \cong 7$$

El símbolo $\cong$ representa la relación “aproximado”. Esto es así porque tanto las normas, cómo el coseno e incluso el ángulo, son valores aproximados.

Calculemos la norma de los vectores con la definición matricial:

$$u \cdot v = (-1, -5) \cdot (3, -2)$$

$$u \cdot v = (-1) \cdot 3 + (-5) \cdot (-2)$$

$$u \cdot v = 7$$

Como vemos, ambas definiciones coinciden, si bien en la mayoría de los casos la definición matricial es la exacta, pues acarrea menos error.

9.2.3 Propiedades del producto escalar

Dados los vectores u, v, w $\in \mathbb{R}^n$ y c $\in \mathbb{R}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades con respecto a la operación producto escalar:

1) $v \cdot 0 = 0$
2) $v \cdot u = u \cdot v$
3) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
4) $(cv) \cdot u = c(v \cdot u)$
5) $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0\, si, y\, sólo\, si, u = 0$

Además, de la definición geométrica del producto escalar podemos obtener el siguiente resultado.

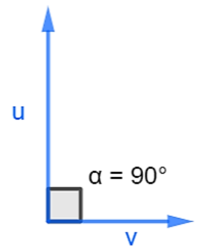
Propiedad

Dados dos vectores u y v, ninguno nulo, los vectores son perpendiculares entre sí, si y solo si su producto escalar es cero.

Esta propiedad se demuestra en base a que el producto escalar entre dos vectores no nulos es igual a cero si y solo si el $\cos(\alpha) = 0$, dado que las normas de vectores no nulos son distintas de cero; y además el coseno de un ángulo es cero si y solo si dicho ángulo es de 90°.

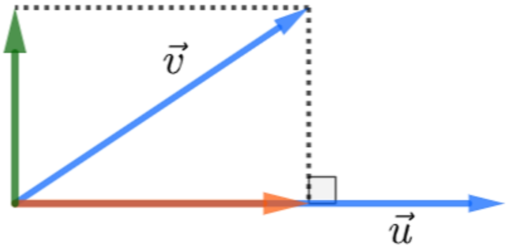
$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$u \cdot v = 0 \iff \cos(\alpha) = 0 \iff \alpha = 90°$$



9.3 Proyección ortogonal

Dados dos vectores v y u de $\mathbb{R}^n$, distintos de cero, se plantea la situación de descomponer al vector v en la suma de dos vectores, uno múltiplo de u, o proyectado sobre u, y otro perpendicular a u. Es decir, se desea descomponer al vector v en los vectores que se indican en verde y en naranja en la siguiente imagen:

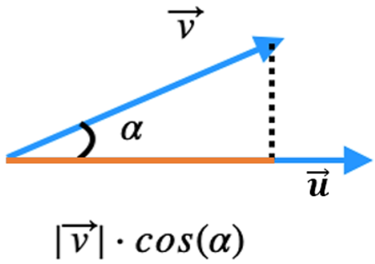


Al vector naranja se lo denomina la ***proyección ortogonal*** de v sobre u, pues si observamos surge justamente de proyectar de manera perpendicular al vector v sobre el vector u.

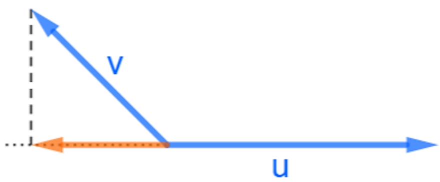
El producto escalar se relaciona de manera casi directa con la proyección ortogonal de un vector v en la dirección de otro vector u.

Aplicando el producto escalar podemos obtener un valor numérico que es la coordenada en la dirección de u de la proyección ortogonal del vector v.

Esto es así porque si α es el ángulo entre v y u, la proyección ortogonal de v sobre u surge de $\|v\| \cdot \cos(\alpha)$, tal como se muestra en la siguiente imagen:



Esta proyección ortogonal es una cantidad escalar con signo (dependiendo del coseno del ángulo). En el ejemplo siguiente el signo de la proyección sería negativo:

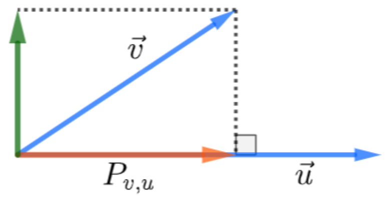


Finalmente, podemos definir la proyección ortogonal de un vector sobre otro, en función del producto escalar entre dichos vectores, teniendo en cuenta que el producto escalar entre los dos vectores es $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$ y la proyección ortogonal de v sobre u es $\|v\| \cdot \cos(\alpha)$. Es decir, habría que "cancelar" la norma de u, dividiendo el producto escalar por dicha norma.

Definición

La proyección ortogonal de un vector v sobre otro vector u, ambos distintos de cero, es:

$$P_{v,u} = \frac{u \cdot v}{\|u\|}$$



Ejemplo

Sean $v = (3,\ 2)$ y $u = (5, 0)$, y además el ángulo entre v y u.

$$u \cdot v = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 15$$

La norma de u

$$\|u\| = \sqrt{(5)^2 + (0)^2} = 5$$

Luego

$$P_{v,u} = \frac{15}{5} = 3$$

Observación: con esta definición de proyección ortogonal no es necesario conocer el ángulo entre los dos vectores, pues se puede utilizar la definición matricial de producto escalar. Por supuesto, también se podría haber calculado la proyección mediante $\|v\| \cdot cos(\alpha)$ (en caso de conocer el ángulo) aunque esta forma de cálculo sería, en general, menos exacta, por la naturaleza irracional del coseno.

9.4 Norma de un vector mediante producto escalar

Si v es un vector de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, entonces la norma o longitud de v es el escalar positivo $\|v\|$ definido en función del producto escalar de la siguiente manera:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Además, según esta definición:

$$\|v\|^2 = v \cdot v$$

Es decir, la norma de un vector v es la raíz cuadrada del producto escalar de v con sí mismo, $v \cdot v$.

Ejemplo:

Sean $v = (-7,\ 4)$, entonces $v \cdot v = (-7) \cdot (-7) + 4 \cdot 4 = 65$, por lo tanto:

$$\|v\| = \sqrt{(-7) \cdot (-7) + 4 \cdot 4} = \sqrt{65}$$

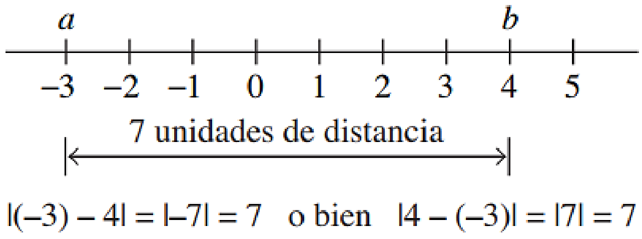
$$\|v\| = \sqrt{65}$$

y

$$\|v\|^2 = 65$$

9.5 Distancia entre dos vectores y entre dos puntos

Ahora tenemos la capacidad de describir qué tan cercano es un vector a otro. Recordemos que, si a y b son números reales, la distancia sobre la recta numérica entre a y b es el número |a − b|.



Esta definición de distancia en $\mathbb{R}$ tiene su análogo directo en $\mathbb{R}^n$.

Definición

Para u y v en $\mathbb{R}^n$, la distancia entre u y v, escrita como $dist(u,v)$, es la longitud del vector $u - v$. Esto es,

$$dist(u,v) = \|u - v\|$$

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, esta definición de distancia coincide con las fórmulas usuales para la distancia euclidiana entre dos puntos, tal como vimos en la clase 7.

Ejemplo

Encontrar la distancia entre los vectores $u = (7, 1)$ y $v = (3, 2)$

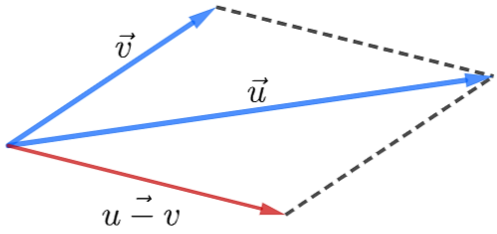
$$u - v = (4, -1)$$

$$\|u - v\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2}$$

$$\|u - v\| = \sqrt{17} \cong 4{,}123$$

Por lo tanto, la distancia entre u y v es aproximadamente 4,123.

Los vectores u, v y $u - v$ se muestran en la siguiente figura. Cuando se suma el vector $u - v$ a v, el resultado es u. Observe que el paralelogramo de la figura muestra que la distancia de v a u es la misma que la longitud del vector de $u - v$.

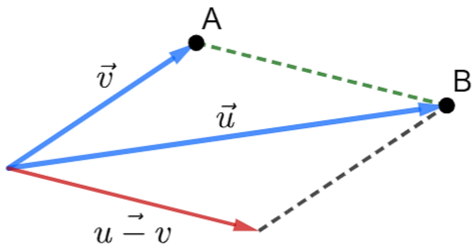


9.5.1 Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos es igual a la longitud del segmento que los une.

Del gráfico anterior se puede deducir que la distancia entre dos puntos es igual a la distancia entre los dos vectores definidos por dichos puntos.

Es decir, en el siguiente gráfico, la distancia entre los puntos A y B es igual a la longitud del segmento verde, que a su vez es igual a la norma del vector $u - v$.



Esto es así pues el vector v es equivalente al punto A y el vector u es equivalente al punto B, es decir, sus coordenadas coinciden respectivamente. Recordemos que esto fue establecido en la clase 7, a cada punto le corresponde el vector con inicio en el origen y final en dicho punto.

Definición

Sean dos puntos $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, entonces la distancia entre A y B es igual a la norma de los vectores asociados a dichos puntos, es decir:

$$dist(A, B) = \|A - B\|$$

Observación: en los cálculos es lo mismo la distancia entre dos puntos que entre dos vectores, aunque conceptualmente no es igual.

Ejemplo

Calcular la distancia entre los puntos $A = (3, -2, 9)$ y B= $(5, 0, -1)$

$$dist(A, B) = \|(3, -2, 9) - (5, 0, -1)\|$$

$$dist(A, B) = \|(-2, -2, 10)\|$$

$$dist(A, B) = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 10^2}$$

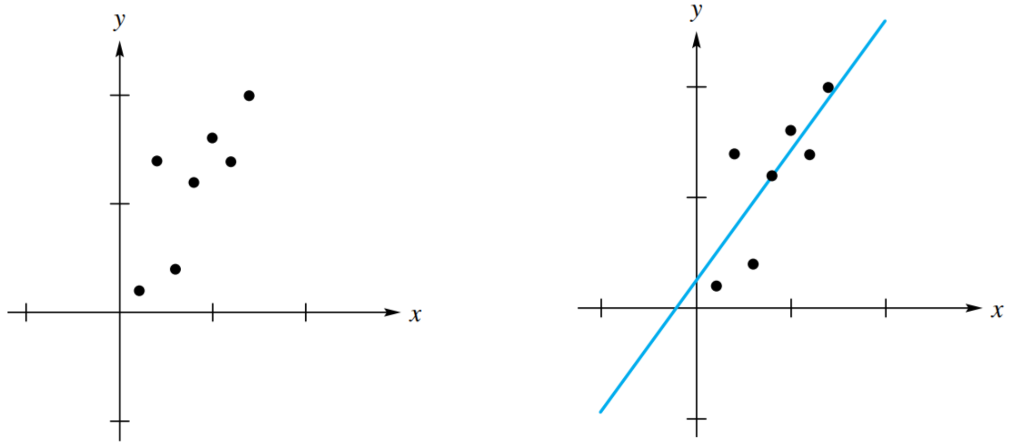
$$dist(A, B) = \sqrt{108} \cong 10{,}392$$

9.6 Aplicaciones de los espacios vectoriales

A continuación, finalizando esta clase, vamos a hacer un breve repaso *conceptual* por algunas de las aplicaciones que nos facilita el estudio de los espacios vectoriales y las matrices.

Ajuste por mínimos cuadrados

La recolección y análisis de datos es un problema que surge con frecuencia en las ciencias exactas, la ingeniería, la economía y las ciencias sociales. Al graficar varios datos, se obtiene un resultado semejante al que se muestra en la figura de la izquierda:



El problema consiste en trazar la línea recta que "mejor se ajuste" a los datos dados. Esa recta aparece en la figura de la derecha.

La técnica para resolver este problema se llama método de los mínimos cuadrados.

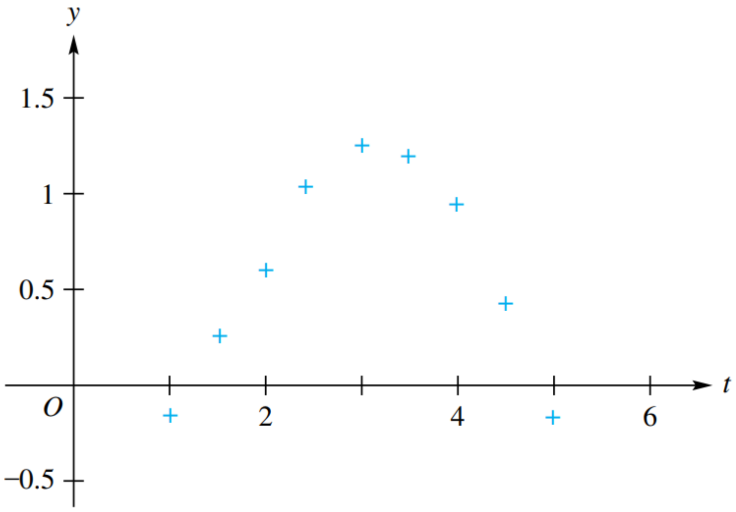
Ajuste polinomial por mínimos cuadrados

El método para obtener el ajuste lineal por mínimos cuadrados para un conjunto dado de puntos, puede generalizarse con facilidad para resolver el problema de determinar un polinomio de grado dado que "mejor se ajuste" a los datos proporcionados.

Por ejemplo, los siguientes datos muestran los contaminantes atmosféricos y_i (respecto de cierta norma de calidad del aire) en intervalos de media hora, t_i.

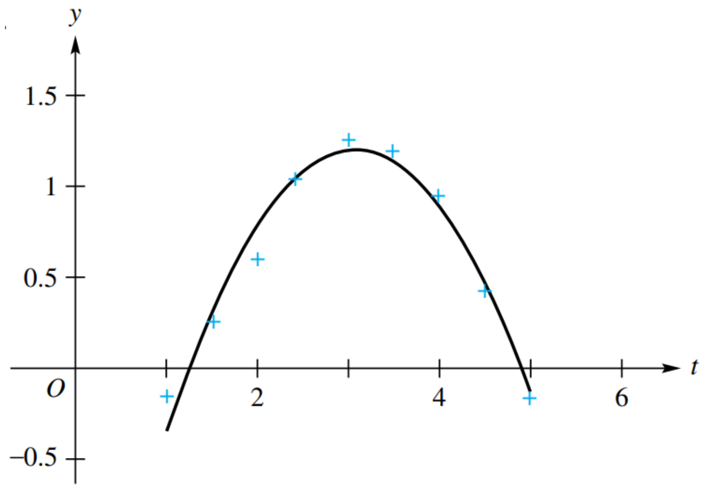
t_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y_i	−0.15	0.24	0.68	1.04	1.21	1.15	0.86	0.41	−0.08

La siguiente figura muestra una gráfica de los puntos:



Es notorio que un polinomio cuadrático de la forma $y = a_2t^2 + a_1t + a_0$ podría ser un buen modelo que se ajuste a los datos.

Tras aplicar el método de cuadrados mínimos obtenemos los coeficientes del polinomio, que producen la siguiente gráfica:



Codificación de errores y códigos de Hamming

Pueden utilizarse técnicas de álgebra lineal para desarrollar códigos binarios de corrección de errores en la transmisión de la información. Es esencial el papel que desempeñan las matrices, espacios vectoriales y conceptos asociados en la construcción de algunos códigos sencillos en el área de teoría de códigos.

El código de Hamming es un código detector y corrector de errores a partir de matrices, que lleva el nombre de su inventor, Richard Hamming. En los datos codificados en Hamming se pueden detectar errores en un bit y corregirlos.

El desarrollo de estas aplicaciones es un tema bastante amplio que excede los contenidos de esta materia, para quienes deseen profundizar en ellas, se adjuntará información adicional en el aula.