Clase 5

Sistemas de ecuaciones

5.1 Introducción

A finales del verano de 1949 Wassily Leontief, profesor de Harvard, introdujo cuidadosamente la última de sus tarjetas perforadas en la nueva computadora de la universidad, la Mark II. Las tarjetas contenían información acerca de la economía de Estados Unidos, y representaban un resumen de más de 250000 piezas de información producidas por la oficina encargada de las estadísticas laborales en Estados Unidos después de dos años de trabajo intenso.

Leontief había dividido la economía de Estados Unidos en 500 “sectores”, tales como la industria del carbón, la industria automotriz, las comunicaciones, etc. Para cada sector, escribió una ecuación lineal que describía la forma en que dicho sector distribuía sus salidas hacia otros sectores de la economía. Debido a que la Mark II, una de las computadoras más grandes de la época, no podía manejar el sistema resultante de 500 ecuaciones y 500 incógnitas, Leontief había condensado el problema en un sistema de 42 ecuaciones y 42 incógnitas.

La programación de la computadora Mark II para las 42 ecuaciones de Leontief requirió varios meses de esfuerzo, y él estaba ansioso por ver cuánto tiempo le tomaría a la máquina resolver el problema. La Mark II zumbó y destelló durante 56 horas hasta que finalmente produjo una solución.

Leontief, quien recibió el Premio Nobel de Economía en 1973, abrió la puerta a una nueva era en el modelado matemático. Sus esfuerzos desplegados en Harvard en 1949 marcaron uno de los primeros usos significativos de las computadoras para analizar lo que entonces era un modelo matemático a gran escala.

Desde entonces, los investigadores de muchos otros campos han empleado computadoras, en muchos casos valiéndose de matrices, para analizar modelos matemáticos. Debido a las masivas cantidades de datos involucrados, por lo general, los modelos son lineales; esto es, se describen mediante sistemas de ecuaciones lineales.

La importancia del álgebra lineal para las aplicaciones se ha elevado en proporción directa al aumento del poder de las computadoras, cada nueva generación de equipo y programas de cómputo dispara una demanda de capacidades aún mayores.

Los sistemas de ecuaciones lineales se encuentran en el corazón del álgebra lineal, y en esta clase se introducirán algunos de los conceptos centrales del álgebra lineal de una manera simple y concreta.

5.2 Clasificación de sistemas de ecuaciones

En realidad, los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar por diversos motivos, es decir, atendiendo a diversas propiedades de los mismos.

Por un lado, se puede hacer referencia a la clasificación según el grado de las ecuaciones.

Tendríamos entonces:

- **Sistema de ecuaciones lineales**: si todas las ecuaciones son lineales.
- **Sistema de ecuaciones no lineales**: si no todas las ecuaciones son lineales.

De estos dos tipos de sistemas, nosotros estaremos tratando en esta clase, y en general en esta materia, los sistemas de ecuaciones lineales.

Por otro lado, también se pueden clasificar los sistemas según el número de ecuaciones o de incógnitas que tengan, es decir, podríamos hablar entonces de:

- Sistemas de dos ecuaciones.
- Sistemas de tres ecuaciones.
- etc...

O bien de:

- Sistemas de dos incógnitas.
- Sistemas de tres incógnitas.
- etc...

En estos casos, es común referirse a un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas, o bien de tres ecuaciones con dos incógnitas, o bien de 4 ecuaciones con 2 incógnitas, o bien de 2 ecuaciones con 3 incógnitas, etc.

Por otro lado, también será común referirse a un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas, como un sistema de *m x n*; pues la matriz correspondiente a dicho sistema tendría esa dimensión.

Finalmente, se pueden clasificar los sistemas según la existencia o no de soluciones y, en el primer caso, el número de ellas. Pero las características de dicha clasificación se tratarán al final de esta clase.

5.3 Ecuación lineal

Definición de ecuación lineal

Una ecuación lineal en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una ecuación que puede escribirse de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

donde b y los coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$ son números reales o complejos, por lo general conocidos. En esta materia trabajaremos principalmente con coeficientes en los números reales. El subíndice n puede ser cualquier entero positivo.

Se utiliza la palabra lineal porque la gráfica de la ecuación anterior es una línea recta. Además, el exponente de todas las variables es 1, razón por la cual no se hace explícito.

Una gran cantidad de los problemas que se presentan en las ciencias naturales y exactas, ciencias sociales, así como en ingeniería y en ciencias físicas, tienen que ver con ecuaciones que relacionan a conjuntos de variables.

En muchas aplicaciones se nos dan b y las constantes $a_1, a_2, ..., a_n$ y se nos dice que debemos determinar los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, denominados incógnitas, que satisfacen la ecuación.

5.3.1 Solución de una ecuación lineal

Una solución de una ecuación lineal *(1)* es una sucesión de n números $s_1, s_2, ..., s_n$ que tienen la propiedad de satisfacer que, cuando $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ se sustituyen en $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, el resultado es igual a b.

Es decir, se satisface que:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

Ejemplo 1

Dada la siguiente ecuación lineal

$$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$$

El conjunto de valores, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = -4$ es una solución de la ecuación lineal, pues:

$$6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = -13$$

En particular, esta no es la única solución para la ecuación lineal dada, ya que $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -7$ también lo es. (verificarlo).

5.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Generalizando el concepto de ecuación lineal, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ - al que podemos llamar simplemente sistema de ecuaciones - es un conjunto de m ecuaciones lineales, cada una con n incógnitas.

Un sistema lineal puede representarse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{2}$$

En donde las a_{ij} son constantes conocidas, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Dados los valores de $b_1, b_2, \dots, b_n$, queremos determinar los valores de $x_1, x_2, \dots, x_n$ que satisfagan cada ecuación del sistema.

5.4.1 Solución de un sistema de ecuaciones lineales

Una solución del sistema de ecuaciones (2) es una sucesión de n números $s_1, s_2, \dots, s_n$, que tiene la propiedad de que cada ecuación en (2) se satisface cuando $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ se sustituyen en (2).

Ejemplo 2

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{gathered}$$

Entonces una solución del sistema es:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 3$$

Pues,

$$\begin{gathered} 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 6 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 14 \\ 3 \cdot 1 + (-2) - 3 = -2 \end{gathered}$$

¿Será única esta solución? ¿Habrá más soluciones posibles? Bueno, a estas preguntas comenzaremos a dar respuesta al final de esta clase y durante la clase siguiente.

5.5 Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

La ecuación matricial *Ax = b*

Una idea fundamental en el álgebra lineal es visualizar un sistema de ecuaciones como el producto de una matriz y un vector (matriz columna).

Habíamos representado de manera general a un sistema de ecuaciones con la siguiente notación:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \qquad (2)$$

La siguiente definición permitirá expresar el sistema de ecuaciones de manera matricial.

Definición

Si A es una matriz de $m \times n$ con los coeficientes del sistema de ecuaciones y sea x una matriz columna, o vector, con las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces el producto de A y x, denotado por Ax, es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Este producto matricial, nos da por resultado la combinación lineal entre coeficientes y las variables del sistema de ecuaciones, es decir:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{array}$$

En el desarrollo anterior "faltaron" los valores a la derecha de la igualdad, también denominados términos independientes, es decir los valores de b. Cuando incorporamos dichos valores hablamos del sistema **Ax=b**, representado por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Es así que la ecuación matricial Ax = b representa por completo al sistema de ecuaciones lineales (2).

Ejemplo 3

Para el sistema de ecuaciones del ejemplo anterior:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{gathered}$$

La ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada del sistema

En base a la ecuación matricial del sistema anterior, denominaremos matriz aumentada (o ampliada) del sistema a la matriz a la matriz conformada por la matriz A y la matriz columna b, es decir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

Para el sistema que estamos utilizando de ejemplo, la matriz aumentada del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Notar que la columna 1 corresponde a los coeficientes de x_1, la columna 2 corresponde a los coeficientes de x_2, la columna 3 corresponde a los coeficientes de x_3 y la última columna corresponde a los términos independientes de cada ecuación.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Además, las filas podrían intercambiarse de lugar y la matriz seguiría correspondiendo al mismo sistema de ecuaciones (sería equivalente a cambiar el orden en que se presentan las ecuaciones), sin embargo, las columnas no pueden intercambiarse de lugar.

El siguiente teorema con respecto a esta matriz aumentada nos proporciona una herramienta poderosa para adquirir una mejor percepción de los problemas en álgebra lineal:

Teorema

La matriz aumentada del sistema tiene el mismo conjunto solución que la ecuación matricial Ax = b, la cual a su vez tiene el mismo conjunto solución que el sistema de ecuaciones correspondiente.

Utilizaremos este resultado en la próxima clase, cuando desarrollemos métodos matriciales de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

5.6 Existencias de soluciones

En el primer apartado de esta clase nos quedó pendiente la clasificación de sistemas de ecuaciones según la existencia o no de soluciones, y en tal caso, de la cantidad de las mismas. Para esta clasificación, vuelve a cobrar importancia el concepto de rango de una matriz.

Los sistemas de ecuaciones lineales, atendiendo a su número de soluciones, se clasifican en:

- **Compatible cuando el sistema tiene alguna solución**: La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sea compatible es que el rango de la matriz A sea igual al rango de la matriz aumentada.
  - Si la solución es única, el sistema es **compatible determinado**: Si el valor de los rangos coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
  - Si hay infinitas soluciones, el sistema es **compatible indeterminado**: Si el valor de los rangos es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.
- **Incompatible, cuando el sistema no tiene solución**: Si, por el contrario, el valor de los rangos de la matriz A y la matriz aumentada no coinciden, el sistema es incompatible.