Clase 11

Transformaciones geométricas

11.1 Introducción

En la clase anterior trabajamos con transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ y sus correspondientes matrices asociadas. De manera geométrica, es conveniente representar a los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como puntos en el plano y en el espacio respectivamente.

Esta clase está enfocada, en principio, a concluir con algunas definiciones sobre transformaciones lineales y, luego, a presentar algunas propiedades interesantes que surgen de aplicar ciertas transformaciones lineales a los puntos en el plano, a las que denominaremos "transformaciones geométricas".

Para facilitar el estudio de las transformaciones geométricas, trabajaremos principalmente con transformaciones matriciales, es decir, multiplicando una matriz por un conjunto de vectores para analizar cuál es la transformación geométrica que se aplica a dichos vectores.

11.2 Matriz asociada a una transformación lineal

La idea con la matriz de una transformación lineal es que, en lugar de aplicar T(v) de la manera tradicional, lo que haremos es aplicar la transformación, pero multiplicando la matriz de la transformación por el vector v.

Definición

Sea T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, y esa v un vector de R^n, entonces existe una única matriz A de mxn tal que

$$T(v) = Av$$

Si $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces la matriz A se define como

$$A = [T(e_1)\, T(e_2) \dots T(e_n)]$$

Dicha matriz se denomina ***matriz canónica asociada a T***.

Es decir, las transformaciones lineales de los vectores de la base canónica son las columnas de la matriz de la transformación A.

Ejemplo 1

Sea T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una TL definida por:

$$T((x,y,z)) = (x+y, y-z, x+z)$$

Determinar la matriz canónica asociada a T y calcular T((-2,5,3)) utilizando dicha matriz.

Resolución

Necesitamos conocer las transformaciones para la base canónica.

La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$S = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$$

Entonces calculamos las transformaciones para los vectores de la base S, es decir aplicamos $T((x,y,z)) = (x+y, y-z, x+z)$

$T(1,0,0) = (1,0,1)$

$T(0,1,0) = (1,1,0)$

$T(0,0,1) = (0,-1,1)$

Ahora armamos la matriz A, con los vectores $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ y $T(0,0,1)$ como columnas de dicha matriz, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz A es la matriz de la transformación. Ahora podemos calcular $T(v)$ para cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ realizando la multiplicación Av.

$$T(v) = Av$$

En particular, para el vector (-2,5,3) hacemos (vector lo representamos como columna para la multiplicación por A):

$$T\big((-2{,}5{,}3)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Sea T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una TL, tal que para la base canónica de $\mathbb{R}^2$,

$$S = \{(1{,}0); (0{,}1)\}$$

Se cumple que:

T((1,0))=(-2,4,3)

T((0,1))=(1,-7,0)

Hallar la matriz de la transformación lineal y calcular determinar T(x,y).

Resolución

En este caso la resolución es bastante más directa, pues ya tenemos las trasformaciones de la base canónica.

Entonces armamos la matriz de la transformación A poniendo los vectores

T((1,0))=(-2,4,3)

T((0,1))=(1,-7,0)

Como columnas de dicha matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, podemos hallar T((x,y)), es decir, la definición de la transformación, realizando la multiplicación $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + y \\ 4x - 7y \\ 3x \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos que:

T((x,y))=(-2x+y, 4x-7y 3x)

Como se podrá observar la utilización de una matriz para definir una transformación lineal es uno de los casos en donde la aplicación de las matrices facilita el procedimiento, o al menos lo hace un poco más ordenado.

Es más, en este último ejemplo no tuvimos que calcular ningún coeficiente para hallar la transformación lineal, como si lo tuvimos que hacer en el ejemplo 5, simplemente armamos la matriz de la transformación y luego realizamos una multiplicación.

11.3 Teorema fundamental de las transformaciones lineales

Teorema

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n en un espacio vectorial W. Además, sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces, si x es cualquier vector en V, $T(x)$ queda completamente determinada por $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$.

Lo que nos está indicando este teorema, además, es que, si conocemos las transformaciones de los vectores de una base del espacio de salida, tenemos determinada de manera única la transformación; es decir, no hay dos transformaciones que cumplan dichas condiciones.

Esto nos resulta particularmente útil al momento de determinar las matrices asociadas a una transformación, pues según este teorema podemos afirmar que la matriz asociada canónica es única.

Ejemplo 3

Sea T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una TL, tal que para la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1\}$$

Conocemos sus imágenes a través de T:

$$T(1,0,0) = (1,3,-2)$$

$$T(0,1,0) = (0,-4,1)$$

$$T(0,0,1) = (2,7,5)$$

Entonces, por el teorema, sabemos que T es la única transformación lineal que cumple dichos valores para las imágenes de los vectores de S. Además, la matriz canónica asociada también es única y es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

De manera que $T(x) = Ax$

11.4 Núcleo e imagen de una transformación lineal

Definición

Sea T: V → W una transformación lineal. El núcleo, o Nu(T), es el subconjunto de V que consta de todos los vectores v tales que T(v) = 0_W.

Es decir, son todos los vectores de V tales que su imagen a través de T es el vector nulo de W.

Ejemplo 4

Sea T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una TL, tal que T(x,y,z)=(x+2, z).

Entonces para calcular el núcleo de T planteamos

$$T(x, y, z) = 0$$

$$(x + 2, z) = 0$$

Por lo tanto

$$x = -2$$

$$z = 0$$

$$\text{"y"}\ es\ variable\ libre$$

Por lo tanto el núcleo de T son los vectores (x,y,z) tales que $\boldsymbol{x}$ es -2, $\boldsymbol{z}$ es 0 e $\boldsymbol{y}$ no tiene restricciones. De manera simbólica:

$$Nu(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ tal\ que\ x = -2 \wedge\ z = 0\}$$

11.5 Transformaciones matriciales

Algunas definiciones previas

Recordemos que una transformación T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una regla que asigna a cada vector v en $\mathbb{R}^n$ un vector T(v) en $\mathbb{R}^m$. El conjunto Rn se llama **dominio** de T, y Rm se llama **codominio**.

Es así que la notación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ indica que el **dominio** de T es $\mathbb{R}^n$ y el **codominio** de T es $\mathbb{R}^m$. Para cada v ∈ $\mathbb{R}^n$, T(v) se denomina la **imagen** de v a través de T. Tal como se representa en la siguiente figura.

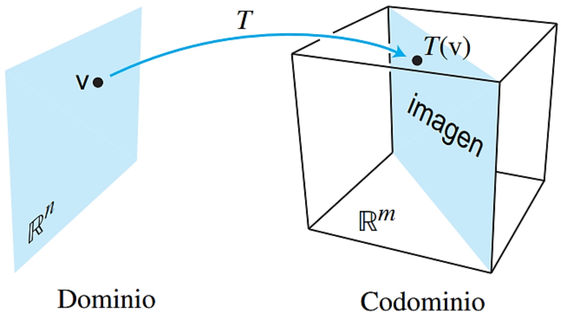


FIGURA: Dominio, codominio e imagen de $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Ahora bien, la clase pasada vimos que cada transformación lineal tiene al menos una matriz asociada (una única matriz canónica asociada). La utilización de la multiplicación por matrices es clave para entender muchas ideas del álgebra lineal y cómo se modifica el dominio a través de una transformación lineal.

Es así que en esta clase nos centraremos en mapeos asociados con la multiplicación de matrices.

Definición

Para cada v en $\mathbb{R}^n$, T(v) se puede expresar como Av, donde A es una matriz de $m \times n$.

Tales transformaciones se denominan "transformaciones matriciales" y se pueden denotar mediante v → Av.

Observar que el dominio de T es $\mathbb{R}^n$, siendo n la cantidad de columnas de A y el codominio de T es $\mathbb{R}^m$, siendo m la cantidad de columnas de A. Además, cada imagen T(x) es de la forma Av.

Teorema: Toda transformación matricial es una transformación lineal.

El teorema anterior es importante y nos permite afirmar que cualquier multiplicación de una matriz por un vector es equivalente a la aplicación, sobre dicho vector, de una transformación lineal.

Ejemplo 5

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Podemos definir la transformación matricial v → Av, cuyo dominio es $\mathbb{R}^2$ y cuyo codominio es $\mathbb{R}^3$. Es decir, es equivalente a una transformación lineal $\mathrm{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, siendo $T(v) = Av$.

Si tenemos el vector $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, entonces:

$$T(u) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Esto es, la imagen del vector u a través de T es $T(u) = (5, 1, -9)$.

Tal como trabajamos en la clase pasada, si quisiésemos calcular la definición de T(x), para cualquier vector $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, hacemos:

$$T(v) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\mathrm{T}(x_1,\ x_2) = (\ x_1 - 3x_2\ ,\ 3x_1 + 5x_2\ , -x_1 + 7x_2)$$

11.6 Transformaciones geométricas

Esta equivalencia entre transformaciones lineales y transformaciones matriciales sirve para reforzar la idea de que una matriz es algo que transforma vectores en otros vectores. Hay, por lo tanto, una serie de transformaciones características que son interesantes desde el punto de vista de la transformación geométrica que producen sobre los vectores.

A continuación, veremos algunos ejemplos de transformaciones de este estilo, seguidos por una tabla con algunas transformaciones geométricas características.

11.6.1 Transformación de proyección

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ entonces la transformación x → Ax proyecta puntos de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $x_1 x_2$. Pues:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Es decir, de un vector de 3 componentes, nos quedamos con las dos primeras, y el tercer componente se hace cero. Esto es equivalente a que el vector pierde su altura, o su coordenada en el eje vertical, como se muestra en la siguiente figura, en la cual los puntos negros se transforman en los puntos azules luego de aplicarles la transformación.

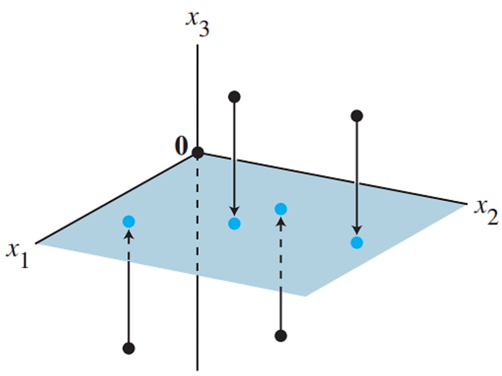


FIGURA
Una transformación de proyección.

De manera análoga, la matriz B proyecta sobre el plano x_2x_3:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y la matriz C proyecta sobre el plano x_1x_3:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.6.2 Transformación de trasquilado

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces la transformación $\mathrm{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ax$ se llama transformación de trasquilado. Aplicada a un área de un cuadrado, la transformación deforma al cuadrado como si su parte superior fuese "empujada" hacia la derecha, mientras que su base se mantiene fija.

Por ejemplo, en el cuadrado de la siguiente figura el punto u=(0,2) se transforma en T(u)=(6, 2). En tanto que el punto v=(2,2) se transforma en T(v)=(8,2). Y así con todos los puntos del cuadrado de la izquierda, obteniendo la figura de la derecha al aplicar la transformación T.

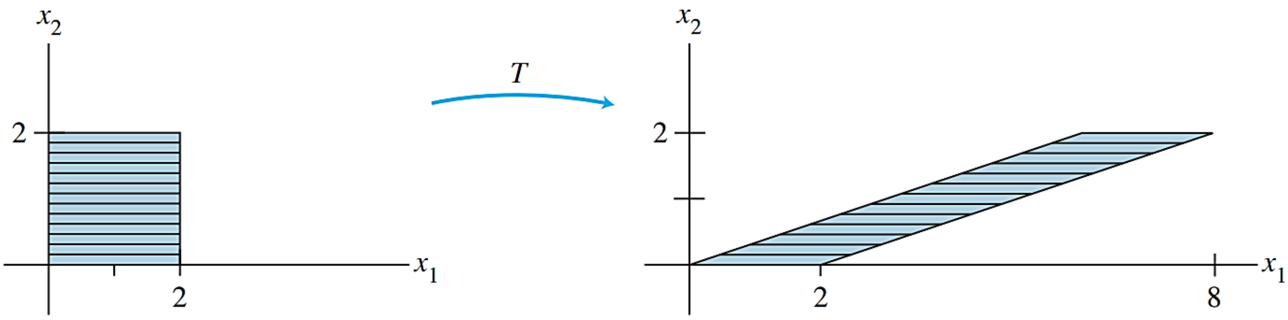


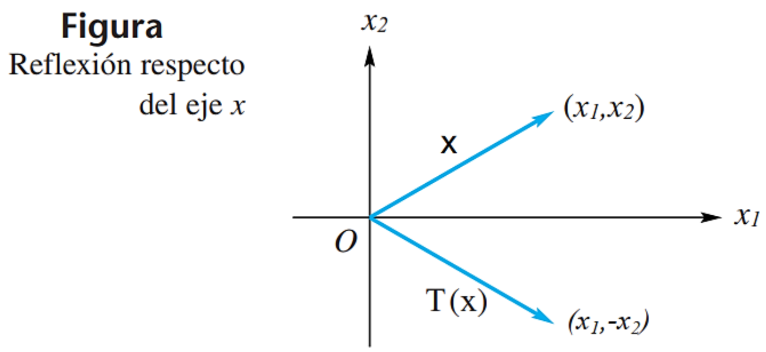
FIGURA Una transformación de trasquilado.

11.6.3 Reflexión respecto a un eje

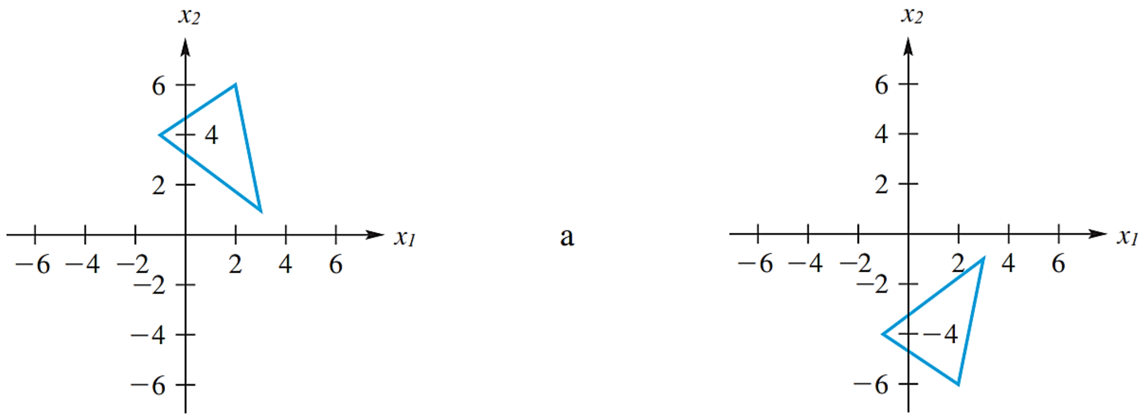
Sea $\mathrm{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación matricial definida por $T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$ produce una reflexión respecto al eje x_1, pues:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

El efecto geométrico es el que se muestra en la siguiente figura:



Aplicada a una figura geométrica, en particular a un triángulo, la transformación produce el siguiente resultado:



Análogamente, la siguiente transformación produce una reflexión sobre el eje x_2

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

11.6.3 Dilatación y contracción

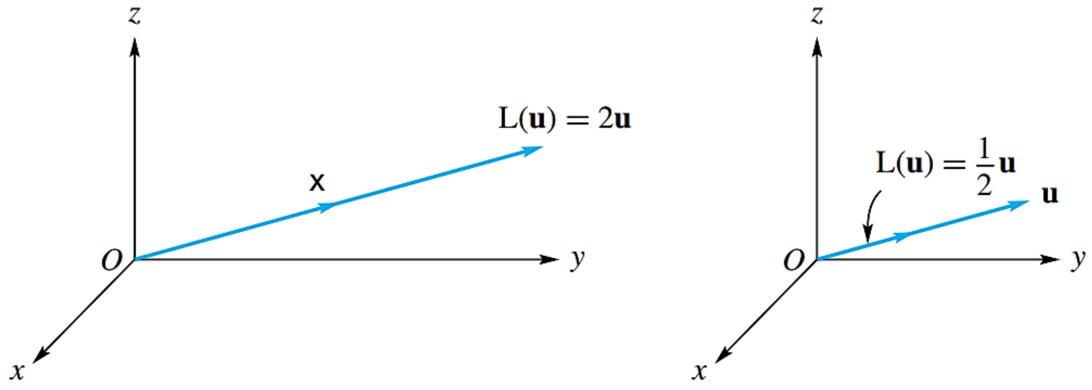
Sea $\mathrm{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación matricial definida por $T(x) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \cdot x$, donde r es un número real produce una dilatación si $r > 1$ o una contracción si $0 < r < 1$.

En efecto, T(x) es equivalente a r·u.

De manera similar, podemos definir la transformación de contracción o dilatación en $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$T(x) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \cdot x$$

En la siguiente figura vemos la transformación aplicada a un vector genérico u. A la izquierda una dilatación, con r = 2, y a la derecha una contracción, con r=1/2.



(a) Dilatación: $r > 1$ (b) Contracción: $0 < r < 1$

11.6.4 Rotación

La transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$ produce una **rotación de un ángulo de 90°** en sentido antihorario.

Por ejemplo, sean los vectores $u = (4\,,1), v = (2\,,3)$ y $u + v = (6\,,4)$

Entonces:

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

En efecto, la aplicación de T transforma el paralelogramo determinado por el origen, u, v y $(u + v)$ en otro determinado por el origen, $T(u)$, $T(v)$ y T$(u + v)$; cuya característica es ser una rotación antihoraria de 90°, tal como se muestra en la siguiente figura:

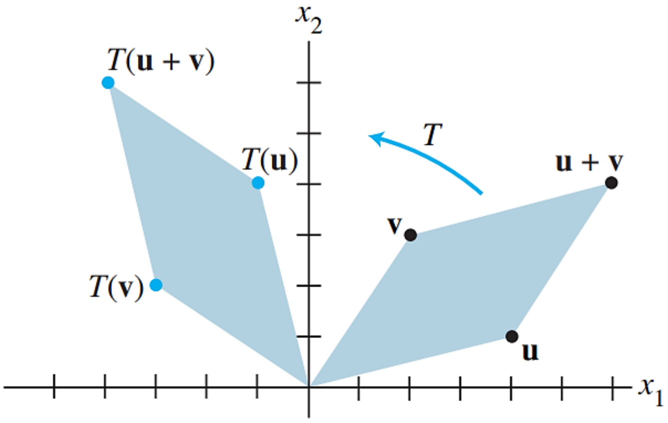


FIGURA Una transformación rotación.

De manera similar, la siguiente matriz produce una **rotación de 180°** antihoraria:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Y la siguiente matriz produce una **rotación de 270°** antihoraria:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En el siguiente anexo dejo varias tablas compilando transformaciones características.

Anexo: Tabla con transformaciones características

TABLA 1 Reflexiones

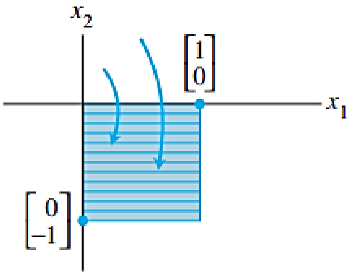
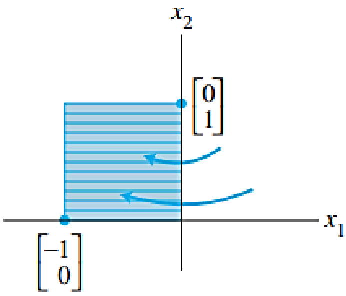
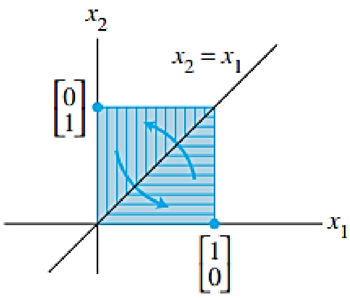
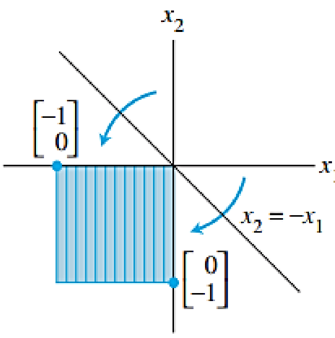
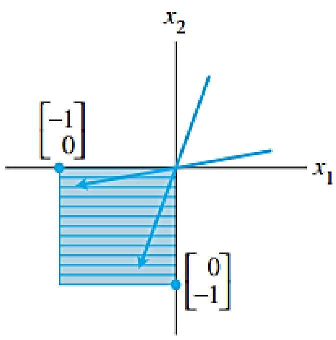
Transformación	Imagen del cuadrado unitario	Matriz estándar
Reflexión a través del eje x_1		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexión a través del eje x_2		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexión a través de la recta $x_2 = x_1$		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Reflexión a través de la recta $x_2 = -x_1$		$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
Reflexión a través del origen		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

TABLA 2 Contracciones y expansiones

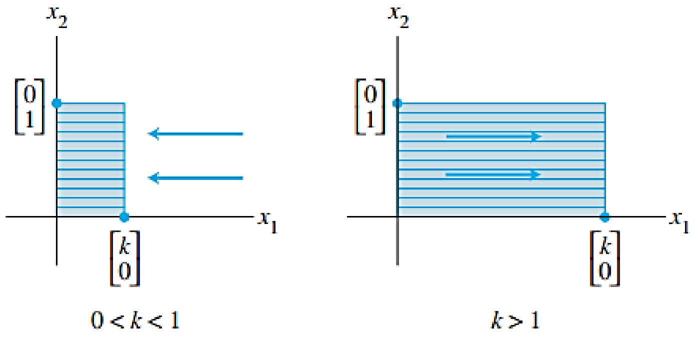
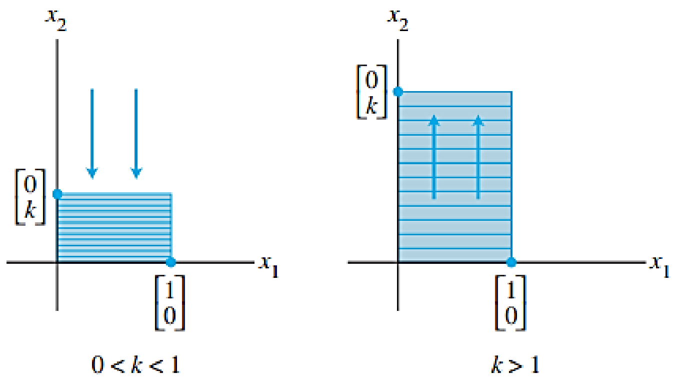
Transformación	Imagen del cuadrado unitario	Matriz estándar
Contracción y expansión horizontales		$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Contracción y expansión verticales		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

TABLA 3 Trasquilados

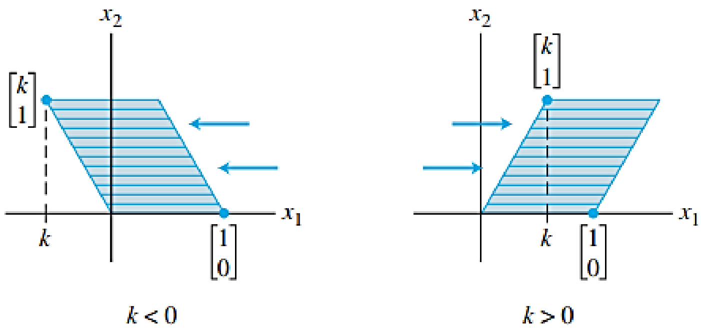
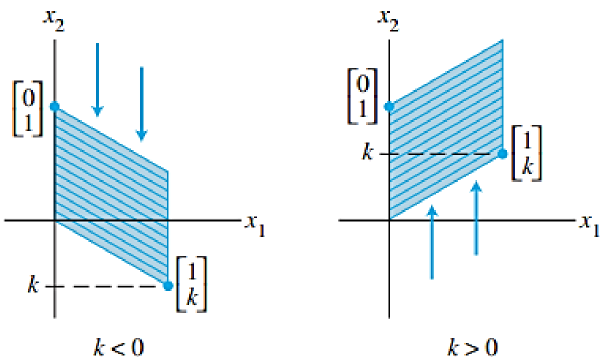
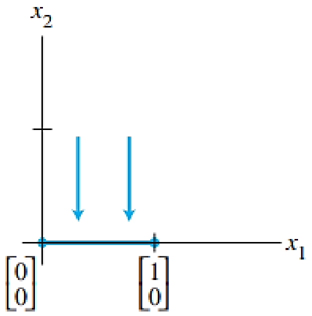
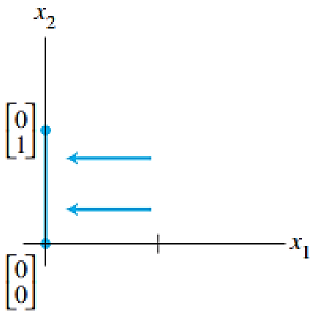
Transformación	Imagen del cuadrado unitario	Matriz estándar
Trasquilado horizontal		$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Trasquilado vertical		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

TABLA 4 Proyecciones

Transformación	Imagen del cuadrado unitario	Matriz estándar
Proyección sobre el eje x_1		$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$
Proyección sobre el eje x_2		$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$