Clase 13

Lenguajes de primer orden: interpretaciones, satisfacción y verdad. Lógica de Predicados de primer orden.

13.1 Introducción

Una **lógica de primer orden**, también llamada **lógica predicativa**, **lógica de predicados** o **cálculo de predicados**, es un sistema formal diseñado para estudiar la inferencia en los lenguajes de primer orden. Los lenguajes de primer orden son, a su vez, lenguajes formales con cuantificadores que alcanzan solo a variables de individuo, y con predicados y funciones cuyos argumentos son solo constantes o variables de individuo.

La lógica de primer orden tiene un poder expresivo superior al de la lógica proposicional, ya que tiene los lenguajes mas potentes para la representación del conocimiento en teoría de la computación, carece de imprecisiones y posee una forma clara de representación basada en la forma y no en el contenido. Formaliza hechos o proposiciones acerca del mundo obteniendo formulas lógicas. Para ello, considera dos niveles de abstracción, que dan lugar al lenguaje proposicional y al predicativo.

El lenguaje proposicional formaliza las proposiciones teniendo en cuenta solo las posibles conexiones entre ellas; sin embargo, el lenguaje predicativo además de tener en cuenta dichas conexiones, considera los sujetos o individuos que aparecen en las proposiciones, las propiedades o características que les afecten y las posibles relaciones entre ellos.

13.2 Interpretaciones o estructuras

Las estructuras suministran el diccionario para traducir del lenguaje formal al lenguaje común; por ello, en algunas ocasiones se les denominan interpretaciones. Sin embargo, en este curso se considera solo el nombre de estructura, ya que es posible que la palabra interpretación se use en un concepto distinto en un curso más adelante.

La estructura para un lenguaje de primer orden expresa.

- A que colección de objetos se refiere el símbolo de cuantificador universal.
- Que denotan los otros parámetros (los símbolos de función y de predicado)

Formalmente, una estructura U para el lenguaje dado de primer orden es una función cuyo dominio es el conjunto de parámetros, pues:

- U le asigna al símbolo de cuantificador () un conjunto no vacio () llamado el universo (o dominio) de U.
- U le asigna a cada símbolo de predicado P de n argumentos una relación n-aria P^U, es decir, P es un conjunto de n-adas de elementos del universo.
- U le asigna a cada símbolo de constante c un elemento de c^U del universo ().
- U le asigna a cada símbolo de función f de n argumentos una operación n-aria f^U sobre (), es decir, f^U:() ->().

La idea es que U le asigna significado a los parámetros. ∀ significa "para todo objeto de $|U|$". El símbolo c es para nombrar al punto c^U. La fórmula atómica $Pt_1 \ldots t_n$, significa que la n-ada de puntos nombrados por $t_1, \ldots, t_n$, está en relación P^U.

Notese que se requiere que el universo (u) sea no vacío. Obsérvese también que f^U deberá tener la totalidad de (u)n como su dominio, pues no se ha hecho ningún comentario sobre las funciones parcialmente definidas.

Ejemplo

1. Considérese el lenguaje de la teoría de conjuntos, cuyo único parámetro, además de ∀, es ϵ. Tómese la estructura U con:

$|U|$= El conjunto de los números naturales.

$\in^U$= El conjunto de los pares (m,n) tal que m<n.

Notese que para este caso se traduce ∈ como "es menor que", esto de acuerdo con la construcción de los números naturales como conjuntos. En presencia de una estructura, es posible traducir enunciados del lenguaje formal al lenguaje común y tratar de decir si estas traducciones son verdaderas o falsas. El enunciado en lenguaje de primer orden.

$\exists x \forall y \neg y \in x$,

mas formalmente, $(\neg\forall v_1(\neg\forall v_2(\neg\in v_2 v_1)$, con la traducción propia de la teoría de conjuntos afirma la existencia de un conjunto vacio, pero se traduce con U como:

Existe un número natural tal que ningún número natural es menor que él.

Esto es verdad, por lo tanto, se dice que $\forall x \forall y \neg y \in x$ es verdadero en U o que U es un **modelo** del enunciado. Por otro lado, U no es modelo del axioma del par

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y),$$

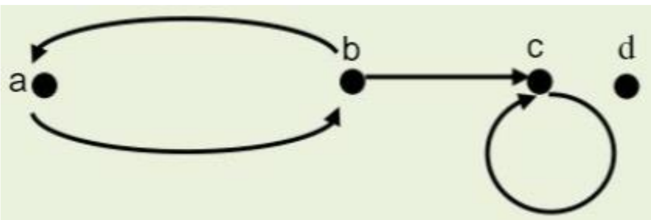
Pues la traducción de este enunciado con U es falsa, pues no hay ningún número natural m tal que para cada n,

$$n < m \, si \, n = 1$$

2. Considérese que el lenguaje tiene únicamente los parámetros ∀ y un símbolo de predicado de dos argumentos E, y una estructura finita B con un universo $|B|$ que consiste en un conjunto de cuatro objetos distintos $\{a, b, c, d\}$. Supóngase que la relación binaria E^B es el siguiente conjunto de pares:

$E^B = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, c)\}$

Entonces se puede describir B como la grafica dirigida cuyo conjunto de vértices es el universo $\{a, b, c, d\}$



En este contexto se interpreta Exy como si la grafica tuviera una arista del vértice x al vértice y. Así se considera una gráfica dirigida.

Considere el enunciado $\exists x \forall y \neg y E x$. Con la estructura B se puede traducir como sigue:

Existe un vértice tal que, para todo vértice, ninguna arista va del último al primero.

Leer el enunciado en lenguaje común es un poco más difícil de leer que la versión en símbolos.

Este enunciado se encuentra dentro de la estructura B debido a que ninguna arista apunta al vértice d.

13.3 Satisfacción

En los ejemplos anteriores fue intuitivamente claro que ciertos enunciados del lenguaje formal eran verdaderos en la estructura y otros eran falsos. Sin embargo, es necesaria una definición matemática precisa de "σ es verdadero en U". De ahí que se deba expresar en términos matemáticos sin emplear traducciones al lenguaje común o a algún idioma ni criterio supuestos para afirmar que algunos enunciados son verdaderos mientras y otros son falsos (si se piensa que se tiene tal criterio, póngase a prueba con el enunciado "Este enunciado es falso". Este es un ejemplo del lenguaje común de un enunciado que no puede afirmar como verdad o mentira, ya que, al otorgarle el valor de verdadero, él mismo asegura se falsedad, lo cual suena como una inconsistencia o contradicción). En otras palabras, se requiere tomar el concepto informal "σ es verdadero en U" y hacerlo parte de las matemáticas.

Con el objetivo de definir "σ es verdadero en U",

$$\models \mathrm{U}\, \sigma$$

Para enunciados σ y estructuras U, primero se define un concepto mas general relativo a las fórmulas:

- φ es una fórmula del lenguaje.
- U es una estructura para el lenguaje

- s: V→ $|U|$ es una función del conjunto V de todas las variables, en el universo de $|U|$ de U.

Ahora se define que significa que U satisfaga φ con s:

$$\models_{U} \varphi[s].$$

Definición

$\models_{U} \varphi[s]$ si la traducción de φ determinada por U, donde la variable x se traduce como s(x) en cualquier lugar en que ocurra libre es verdadera.

La definición formal de satisfacción procede de la siguiente forma para cada tipo de elemento en el lenguaje:

13.3.1 Términos

Se define la extensión

$$\bar{s}: T \rightarrow |U|,$$

una función del conjunto T de todos los términos, en el universo de U. La idea es que $\bar{s}(t)$ debe ser elemento del universo U que se nombra mediante el termino t. Asi $\bar{s}$ se define por recursión como sigue:

1. Para cada variable x, $\bar{s}(x) = s(x)$.

2. Para cada símbolo de constante c, $\bar{s}(c) = c^{U}$.

3. Si $t_1, \dots, t_n$ son términos y f es un símbolo de función de n argumentos, entonces

$\bar{s}(f t_1 \dots t_n) = f^{U}(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))$.

Este último puede verse por ejemplo con n=1, con el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\bar{s}"] \arrow[d, "F_f"'] & {|U|} \arrow[d, "f^U"] \\ T \arrow[r, "\bar{s}"] & {|U|} \end{tikzcd}$$

La existencia de una única extensión $\bar{s}$ de s se sigue del teorema de la recursión que se dio en la unidad pasada, se considera también algo que se discutirá mas adelante, relacionado con que los términos tienen descomposiciones únicas. Debe notarse que $\bar{s}$ depende tanto de s como de U.

13.3.2 Formulas atómicas

Las fórmulas atómicas se definieron explícitamente, no de manera inductiva. Por lo tanto, la definición de satisfacción de las fórmulas atómicas es también explicita y no recursiva.

1. $\models_U = t_1 t_2[s]$ sii $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$.

Entonces, = significa =, Nótese que = es un símbolo lógico, no un parámetro sujeto a interpretación.

2. Para un parámetro de predicado P de n argumentos,

$$\models_U \; Pt_1 \dots t_n[s] \text{ sii } (\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in P^U.$$

13.3.3 Otras fórmulas

Las fórmulas que se definen por inducción tienen, en consecuencia, una definición de satisfacción por recursión.

1. Para formulas atómicas, la definición es la del punto II.

2. $\models_U \neg\varphi[s]$ sii $\not\models_U \varphi[s]$.

3. $\models_U (\varphi \to \psi)[s]$ sii $\not\models_U \varphi[s]$, o $\models_U \psi[s]$, o ambos (esto no es más que la asociación usual de verdad para →). En otras palabras, si U satisface a φ con s, entonces U satisface a ψ con s.

4. $\models_U \forall x\, \varphi[s]$ sii para todo $d \in |U|$, se tiene:

$$\vDash_U \ [s(x|d)].$$

Donde $[s(x|d)]$ es la función exactamente como s, excepto que en la variable x, toma el valor d. Dicho de otra forma:

$$s(x|d)(y) = \begin{cases} s(y), & si\ y \neq x \\ d, & si\ y = x \end{cases}$$

Entonces ∀ significa “para todos los objetos de $|U|$”.

Puede revisarse de nuevo la definición informal que se presento y su formalización. Con lo que se puede apreciar que la definición de satisfacción es una aplicación del teorema de recursión y que las fórmulas tienen descomposiciones únicas. Así es posible poner esta definición en términos de funciones, como se hizo en la unidad 1, para que se vea de manera mas directa como se aplica el teorema de recursión.

1. Considerar un U fijo.

2. Definir una función h que extiende a una función h definida en las fórmulas atómicas, tal que para cualquier formula $\varphi, \bar{h}(\varphi)$ es un conjunto de funciones de V en $|U|$.

3. Se define

$$\vDash_U \ \varphi[s] \text{ sii } s \in \bar{h}(\varphi).$$

Se puede escribir en detalle la definición explicita de h y las clausulas que determinan de manera única su extensión h para entender esta definición sobre la extencion. Una forma alternativa es considerar que $h(\varphi)$ es un conjunto de funciones en el conjunto de aquellas variables que ocurren libres en φ.

Aunque todo lo anteriormente dicho es lo mas cercano a la intuición, resulta un poco difícil de entender si se continúa trabajando solo en el nivel abstracto de un lenguaje, por lo que se presentan algunos ejemplos para aterrizar estos conceptos.

Ejemplo

Supóngase que el lenguaje cuenta con los parámetros ∀, P (símbolo de predicado de dos argumentos), f (símbolo de un argumento) y c (símbolo de constante). Sea U la estructura para este lenguaje definida como sigue:

$|U| = \mathbb{N}$, el conjunto de todos los números naturales.

$P^U =$ el conjunto de pares (m,n) tales que m≤n.

f^U= la función sucesor S.

c^U= 0.

De acuerdo con los conocimientos y omitiendo que U es en realidad una función, es posible describir sus componentes:

U=$(\mathbb{N}; \leq, S, 0)$

Tal notación no tiene ambigüedad cuando el contexto aclara exactamente que componentes van con que parámetros. Cada una de las siguientes afirmaciones es consecuencia de la definición donde se dan las condiciones que se deben cumplir para U.

Sea $s: V \to \mathbb{N}$ la función para la cual $s(v_1) = 0, s(v_2) = 1, \dots$

1. $\bar{s}(ffv_3) = S(S(2)) = 4$ y $\bar{s}(fv_1) = S(0) = 1$

2. $\bar{s}(c) = 0$ y $\bar{s}(ffc) = 2$; sin usar s.

3. $\vDash_U Pcfv_1[s]$. Al traducirse al lenguaje común, resulta en un enunciado verdadero "0≤1". Mas formalmente esto es porque:

$$\left(\bar{s}(c), \bar{s}(fv_1)\right) = (0,1) \in P^U$$

4. $\vDash_U \ \forall v_1 P c v_1$. La traducción al lenguaje común es "0 es menor o igual que cualquier numero natural". Se debe verificar formalmente que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\vDash_U \ Pcv_1[s(v_1|n)]$$

que se reduce a $(0, n) \in P^U$, es decir, 0≤n.

5. $\nvDash_U \ \forall v_1 P v_2 v_1[s]$ porque existe un numero natural m, tal que

$\nvDash_U \ \forall v_1 P v_2 v_1[s(v_1|n)]$;

es decir, $(s(v_2), m) \notin P^U$, puesto que $s(v_2) = 1$. Se puede tomar m=0, para comprobarlo. Hay que recordar la definición de $[s(v_1|n)]$ y de P^U.

De esta forma se planea, de manera formalizada y apoyada de la concepción informal, lo que significa que una estructura satisfaga una formula de lenguaje. Teniendo en cuenta que dada una formula es muy importante la asignación que se hace del conjunto de todas las variables al universo, se puede ver que si se cambiara la asignación s en el ejemplo, podría cambiarse el significado de los enunciados y el valor de verdad de las fórmulas.

13.4 Definición de verdad para enunciados y definición de modelo

Cuando se quiere saber si la estructura U satisface o no una fórmula φ con s, es necesaria toda la (cantidad infinita de) información que se tiene con s. Lo que importa son los valores de la función s en (la cantidad finita de) variables que ocurren libres en φ. En particular, si φ es un enunciado, entonces s no importa en absoluto. Sobre esto el siguiente teorema.

Teorema

Si s_1 y s_2 son funciones de V en $|U|$ que coinciden en todas las variables que ocurren libres (si las hay) en la fórmula φ, entonces:

$$\vDash_U \ \varphi[s_1] \text{ sii } \vDash_U \ \varphi[s_2]$$

Demostración

Como la satisfacción se definió por recursión, la demostración se hará con inducción. Se considera la estructura U fija. Se probará por inducción que cada fórmula φ tiene la propiedad de que siempre que dos funciones s_1, s_2 coinciden en las variables libres de φ, U satisface φ con s_1 si U satisface φ con s_2. Para esto se plantean los posibles casos de la fórmula.

Caso 1. $\varphi = Pt_1 \ldots t_n$ es atómica. Entonces, en φ cualquier variable ocurre libre. Por lo tanto, s_1 y s_2 coinciden en todas las variables en cada t_i. De esto sigue que $\overline{s_1}(t_i) = \overline{s_2}(t_i)$ para cada i, esto es en cierta forma directo por cómo se definen las extensiones, pero se puede dar la demostración formal por inducción entre t_i. Entonces se tiene que U satisface $Pt_1 \dots t_n$ con s_1 si U satisface $Pt_1 \dots t_n$ con s_2.

Casos 2 y 3. $\varphi\ es\ \neg\alpha\ o\ \alpha \to \beta$. Esto se sigue inmediatamente de la hipótesis de inducción.

Caso 4. $\varphi = \forall\psi$. Las variables libres en φ son aquellas libres en ψ con excepción de x. Por lo tanto, para cualquier d en $|U|$, $s_1(x|d)$ y $s_2(x|d)$ coinciden en todas las variables libres de ψ. Por hipótesis de inducción, U satisface con $s_1(x|d)$ si U satisface con $s_2(x|d)$. A partir de esto y de la definición de satisfacción, se puede ver que U satisface $\forall x\psi$ con s_1 si U satisface $\forall x\psi$ con s_2.

La prueba anterior consiste en revisar la definición de satisfacción y observar qué información dada por s se utilizó realmente. Hay un hecho análogo referente a las estructuras que se da sin demostración:

Proposición

Si U y B coinciden en todos los parámetros que ocurren en φ, entonces $\vDash_U\ \varphi[s]$ sii $\vDash_B\ \varphi[s]$.

Justificado con teorema antes expuesto, se representa la siguiente notación:

Notación

Si φ es una formula tal que todas las variables que ocurren libres en φ están incluidas entre $v_1, \dots, v_k$. Entonces, para elementos $a_1, \dots, a_k$ de $|U|$,

$$\vDash_U\ \varphi[(a_1, \dots, a_k)]$$

significa que U satisface φ con cualquier función $s: V \to |U|$ para la cual $s(v_i) = a_i$, 1≤i≤k. Usando el ejemplo #(estructura), en el que U=$(\mathbb{N}; \leq, S, 0)$, se tiene que $\vDash_U \forall v_2 P v_1 v_2 [[0]]$, pero $\nvDash_U \forall v_2 P v_1 v_2 [[3]]$.

Corolario (del teorema)

Para un enunciado σ se tienen dos opciones:

a) U satisface σ con toda función $s: V \rightarrow |U|$.

b) U no satisface σ con cualquier función s de V en $|U|$.

Con base en este corolario se presenta la siguiente definición.

Definición

Si se cumple la alternativa a) del corolario, se dice que σ es verdadero en U, $\vDash_U \sigma$ o que U es un modelo de σ. De cumplirse la alternativa b), se tiene que σ es falso en U, solo ocurre una de estas dos opciones dado que $|U|$ es no vacio. U es un modelo de un conjunto $\sum$ de enunciados sii U es un modelo de otros los elementos de $\sum$.

Ejemplo

Si R es el campo de los reales, $(\mathbb{R}; 0,1, +,\cdot)$, existen enunciados validos en uno y falsos en el otro. Por ejemplo, el enunciado $\exists x(x \cdot x) = 1 + 1$ es falso en el campo de los racionales, pues $\sqrt{2}$ es un numero irracional y es cierto en el campo de los reales.

En este punto se debe tener dominado el concepto de satisfacción para comprender como la estructura es la que da el valor de verdad a un enunciado. Si se tiene algún problema en comprender esta situación, se necesita revisar una vez mas las definiciones de satisfacción pensando en un contexto especifico. El primer problema es la notación usada.

La notación que se presento es de cierta forma apropiada para adaptarse a las nociones que ya se tienen, por ejemplo, se tiene que:

a) $\vDash_U (\alpha \wedge \beta)[s]\ sii\ \vDash_U \alpha[s]\ y\ \vDash_U \beta[s]$, de manera similar para V y $\leftrightarrow$.

b) $\vDash_U \exists x\, \alpha[s]$ sii hay algún $d \in |U|$ con la propiedad de $\vDash_U \alpha[s(x|d)]$.