Clase 1

Números reales

1.1 Introducción

E1 sistema de los números reales de los cuales ahora disponemos, es el resultado de una enorme cantidad de reflexión por parte del hombre.

Los enteros positivos, es decir: 1, 2, 3, … pueden encontrarse desde el comienzo de nuestra civilización. Los enteros tan grandes como 100000 se usaban en Egipto en fechas tan tempranas como es 300 A.C. (por supuesto, sin usar aún los símbolos del sistema decimal).

Los antiguos egipcios y babilonios desarrollaron una aritmética con los enteros positivos con los cuales podían efectuarse las operaciones de adición y multiplicación, aunque la división no se desarrollaba aún por completo.

Estos antiguos pueblos usaron ciertas fracciones, tenemos pues, que los números racionales aparecieron también en una temprana etapa de nuestra civilización.

Los Babilonios fueron los que más éxito tuvieron en el desarrollo de la aritmética y el álgebra porque tenían una notación para los números muy superior a la de los egipcios. Esta notación es, en principio, análoga a nuestro sistema decimal, excepto por el hecho de que su base es 60 en lugar de 10.

Nuestro sistema decimal con los números llamados arábigos fue inventado por los hindúes e introducido en Europa occidental en el siglo XII a través de las traducciones de textos árabes. Sin embargo, la aceptación generalizada de esta notación demoró mucho en llegar. La espera fue aún mayor para la aceptación de los números negativos, incluso hasta finales del siglo XVI se descartaban las raíces negativas de las ecuaciones.

En esta clase daremos una introducción a los fundamentos teóricos sobre los que se asienta el conjunto numérico sobre el cuál trabajaremos a lo largo de la materia, el de los números reales.

1.2 Los números reales

Llamaremos **números reales** al conjunto de elementos denotado con la letra $\mathbb{R}$, tal que cumplen un conjunto de condiciones, que agruparemos en lo que se conoce como “axiomas de cuerpo”, “axiomas de orden” y el “axioma de completitud”.

Para ponernos un poco en contexto definamos, brevemente, los conceptos de axioma, cuerpo y orden.

Un **axioma** es una proposición o enunciado tan evidente que se considera que no requiere demostración, y se usa como punto de partida para demostrar teoremas. Por ejemplo, en geometría, un axioma es que "toda recta consta de infinitos puntos".

Un **cuerpo** es una estructura algebraica para la cual están definidas las operaciones llamadas adición y multiplicación y cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva (de la multiplicación respecto de la adición). Además, se cumple que existe un elemento denominado inverso aditivo, un inverso multiplicativo, un elemento neutro para la adición y otro para la multiplicación, los cuales permiten efectuar las operaciones de sustracción y división (exceptuando la división por el neutro multiplicativo). Estas propiedades, como bien conocemos, son propias de la aritmética de los números reales.

El **orden**, en matemática, es una relación entre dos elementos de un conjunto que cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Comúnmente entendemos a la relación de orden entre dos elementos como aquella que nos permite distinguir cuando esos dos elementos son iguales, o bien cuando uno se antepone a otro (o es menor que otro).

Ahora veamos estos conceptos más en detalle, definiendo los axiomas de cuerpo y los axiomas de orden que cumplen los números reales.

1.2.1 Los axiomas de cuerpo

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales implica la existencia de dos operaciones binarias, llamadas suma y multiplicación tales que, para cada par de números reales x e y, la suma:

$$x + y$$

y el producto:

$$x \cdot y$$

son [1]números reales determinados unívocamente por los valores de x e y, satisfaciendo los siguientes axiomas:

Axioma 1. Leyes Conmutativas

Para la suma:

$$x + y = y + x$$

Para el producto:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Axioma 2. Leyes Asociativas

Para la suma:

[1] Decimos que los números reales son cerrados para la suma y la multiplicación, pues el resultado de aplicar cualquiera de dichas operaciones a dos números reales, devuelve siempre otro número real.

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

Para el producto:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Axioma 3. Ley distributiva del producto respecto a la suma

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Axioma 4. Existencia de elementos neutros

Existen dos números reales distintos, que se indican por 0 y 1 tales que para cada número real x se tiene:

$$0 + x = x + 0 = x$$

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

Axioma 5. Existencia de opuesto aditivo (o negativo)

Para cada número real x existe un número real y tal que

$$x + y = y + x = 0$$

Por ejemplo, para $x = 8{,}5$ existe $y = -8{,}5$ tal que

$$x + y = 8{,}5 + (-8{,}5) = 8{,}5 - 8{,}5 = 0$$

Observación: este axioma está estrechamente relacionado con la operación resta.

Axioma 6. Existencia del opuesto multiplicativo (o recíproco)

Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real y tal que

$$x \cdot y = y \cdot x = 1$$

Ejemplo, para $x = 2$, existe $y = \frac{1}{2}$, tal que

$$x \cdot y = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Observación: este axioma está estrechamente relacionado con la operación división.

1.2.2 Los axiomas de orden

Para definir los axiomas de orden en los números reales consideraremos el subconjunto $\mathbb{R}^+$, llamado conjunto de los números reales positivos, tal que:

Axioma 7.

Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces tanto $x + y$ como $x \cdot y$ pertenecen a $\mathbb{R}^+$.

Axioma 8.

Para todo número real $x \neq 0$, entonces:

O bien $x \in \mathbb{R}^+$

O bien $-x \in \mathbb{R}^+$

Pero no se pueden cumplir ambas condiciones simultáneamente.

Ejemplo[2]:

$$7 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{pero} \quad -7 \notin \mathbb{R}^+$$

Axioma 9.

El elemento neutro para la suma no pertenece al conjunto de los reales positivos, es decir:

$$\mathbf{0} \notin \mathbb{R}^+$$

Con estos axiomas establecidos, se pueden definir los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$, llamados respectivamente menor que, mayor que, igual o menor que, e igual o mayor que.

Por lo tanto, se tiene $x > 0$ si y sólo si x es positivo. Si $x < 0$ se dice que x es negativo.

De los axiomas de orden se pueden deducir todas las reglas usuales de cálculo con desigualdades, tales como la propiedad transitiva, es decir:

$$\text{Si } a < b \text{ y } b < c \Rightarrow a < c$$

1.2.3 El axioma de completitud

El axioma de completitud es uno de los axiomas más famosos del álgebra, pues, aunque es relativamente simple, sus implicancias pueden ser bastante complejas.

Para comprenderlo mejor debemos definir primero los conceptos de cota superior y cota inferior, así como los de supremo e ínfimo, de subconjunto dado de $\mathbb{R}$.

Cota superior de un conjunto A

Definición

Llamamos cota superior de un conjunto A contenido en $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, a todo número $k \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq k$, para todo $x \in A$.

Es decir, k es un número que es mayor o igual que cualquiera de los elementos de A. Cualquier número que cumpla esto se denomina cota superior de A.

[2] El símbolo $\in$ expresa la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto, con lo cual, $a \in B$ se lee "el elemento a pertenece al conjunto B". En tanto que el símbolo $\notin$ expresa la no pertenencia.

Cuando un conjunto A tiene alguna cota superior, decimos que A es *acotado superiormente*.

Por ejemplo, dado el subconjunto

$$A = \{x\ tal\ que\ 1 < x \leq 4, con\ x \in \mathbb{R}\}$$

Dicho conjunto A es acotado superiormente, pues cualquier número mayor o igual a 4 es cota superior del conjunto, incluso 4 lo es, por la definición de cota superior.

Supremo de un conjunto A

Si A está acotado superiormente, a la menor de sus cotas superiores se la denomina supremo de A, y se usa la notación sup(A).

Es decir, es el menor número real tal que cualquier número del conjunto A es menor o igual que dicho número.

Para el ejemplo anterior sup(A)=4.

Ahora definiremos los conceptos de cota inferior e ínfimo, que, como se podrán imaginar, son análogos a los anteriores, pero desde el lado inferior del conjunto.

Cota inferior de un conjunto A

Definición

Llamamos cota inferior de un conjunto A contenido en $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, a todo número $k \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq k$, para todo $x \in A$.

Es decir, k es un número que es menor o igual que cualquiera de los elementos de A. Cualquier número que cumpla esto se denomina cota inferior de A.

Cuando un conjunto A tiene alguna cota inferior, decimos que A es *acotado inferiormente*.

Por ejemplo, siguiendo con el ejemplo del subconjunto

$$A = \{x\ tal\ que\ 1 < x \leq 4, con\ x \in \mathbb{R}\}$$

Dicho conjunto A es acotado inferiormente, pues cualquier número menor o igual a 1 es cota inferior del conjunto, incluso 1 lo es.

Ínfimo de un conjunto A

Si A está acotado inferiormente, a la mayor de sus cotas inferiores se la denomina ínfimo de A, y se usa la notación inf(A).

Es decir, es el mayor número real tal que cualquier número del conjunto A es mayor o igual que dicho número.

Para el ejemplo anterior inf(A)=1.

Por último, hacemos notar que el supremo o el ínfimo de un conjunto pueden ser o no ser elementos de dicho conjunto.

Ahora continuamos con la definición del **axioma de completitud**.

Axioma 10. Completitud de los números reales

Todo subconjunto S de $\mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente, posee extremo superior, esto es, existe un número real $k \in \mathbb{R}$ tal que $k = sup(S)$.

Esta propiedad es esencial y característica para el cuerpo de los números reales, y le da la característica de ser "completo", ya que hay otros cuerpos que no satisfacen el axioma, como el cuerpo de los números racionales.

Otras propiedades de los números reales

- Los números reales son cerrados para la suma, la resta, la multiplicación, la división y la potencia con exponente entero.
- Los números reales son abiertos para la potencia con exponente fraccionario, pues da lugar a la operación radicación, cuya aplicación a números negativos puede dar por resultado un número complejo.
- Los números reales son densos, es decir, entre dos números reales cualesquiera hay infinidad de números reales.
- Los números reales son continuos, es decir, no hay "huecos" en la recta numérica de los números reales (ampliaremos más adelante).
- La cantidad de números reales es infinita.
- Los números reales están compuestos por la unión de los números racionales con los números irracionales.