Clase 11

Lógica de predicados, variables, cuantificadores, dominio y negación

11.1 Introducción

En las últimas décadas, ha aumentado considerablemente el interés de la informática por la aplicación de la lógica a la programación. De hecho, ha aparecido un nuevo paradigma de programación (la programación declarativa) cuyos fundamentos teóricos se basan en los desarrollos de la lógica de predicados que pretendían alcanzar sistemas de demostración automática de teoremas.

La lógica de predicados o lógica de primer orden surge de la necesidad de analizar las relaciones existentes entre los elementos de dos o más proposiciones simples o atómicas. Esta afirmación se puede comprender más claramente cuando de manera intuitiva y no formal establecemos una conclusión que, aunque válida no se puede comprobar a través de los elementos establecidos en la lógica proposicional.

11.2 Lógica de predicados

Estudia las frases declarativas con mayor grado de detalle considerando la estructura interna de las proposiciones. Se tomarán como elemento básico los objetos y las relaciones entre dichos objetos. Es decir, se distingue:

- Que se afirma (predicado o relación)
- De quien se afirma (objeto)

Ejemplo 1 **Lógica proposicional**

P: Juana es hermana de Agustín

Q: Agustín es padre de Alejandra

S: A los hermanos de los padres se les nombre tíos

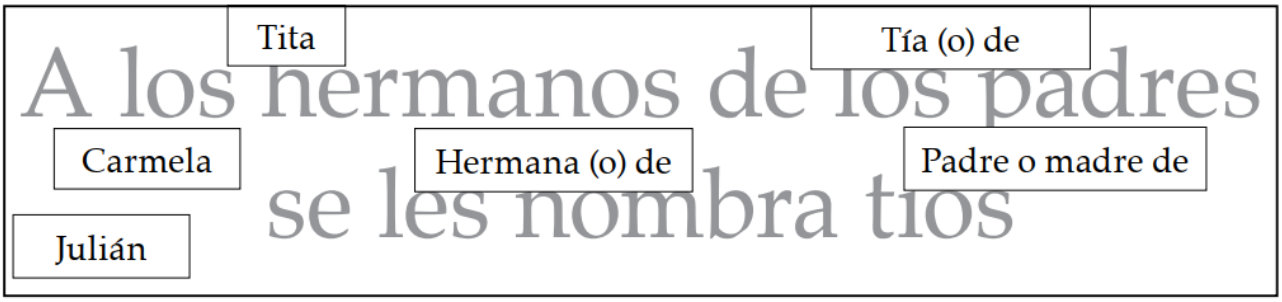
____

∴ R: Juana es tía de Alejandra

La afirmación Tita es tía de Carmela es correcta, dadas las premisas establecidas. Sin embargo, su comprobación es imposible a partir de las reglas de inferencia conocidas en la lógica proposicional. La afirmación Tita es tía de Carmela hace referencia a la relación existente entre dos sujetos que aparecen dentro de las premisas de dicho argumento.
Es como si tuviéramos la necesidad de cortar en pedazos cada una de las

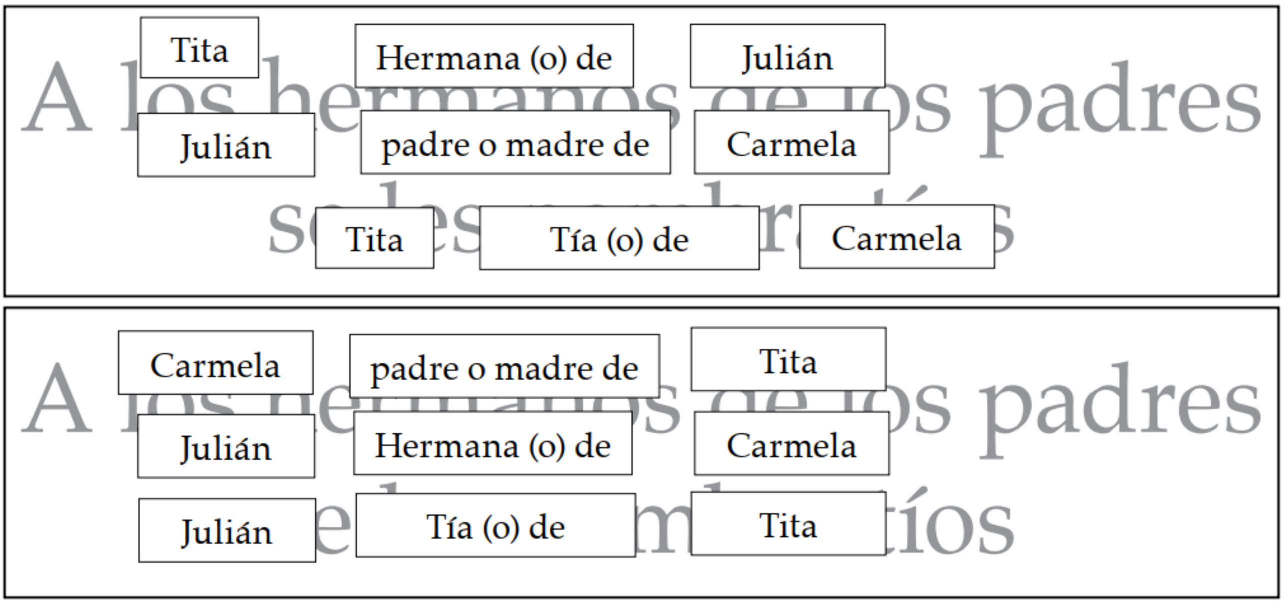
proposiciones, para que a partir de dichos pedazos pudiéramos construir la conclusión (figura 1).

Figura 1



De manera que al tener como recortes a las proposiciones simples es fácil entender las relaciones entre ellos; incluso si las relaciones entre los sujetos cambiaran sería sencillo obtener una conclusión sobre este asunto familiar (figura 2).

Figura 2



La lógica proposicional carece de herramientas para manejar estos fraccionamientos. Usualmente es muy sencillo "fraccionar" correctamente una proposición simple a partir de dos preguntas: ¿qué se afirma? y ¿de quién se afirma?
En la pregunta ¿de quién se afirma? es fácil comprender que hacemos alusión a lo que en gramática se conoce como sujeto; mientras que en ¿qué se afirma? es el predicado de la oración.
Existen predicados unarios y binarios; el primero es cuando se está relatando una cualidad o un atributo sobre una sola persona.

Ejemplo 2 **Predicado unario.**

P: Pedro es carpintero.

¿Qué se afirma? Que es carpintero. ¿Quién? Pedro. De manera que en este caso no hay una relación con otro sujeto u objeto como en los ejemplos de las relaciones familiares.

Los predicados binarios se caracterizan por enfatizar la relación existente entre dos sujetos.

Ejemplo 3: **Predicado binario.**

P: Pedro es el carpintero de Ramón.

¿Qué se afirma? Que es carpintero. ¿Quién? Pedro. De manera que en este caso no hay una relación con otro sujeto u objeto como en los ejemplos de las relaciones familiares.

Los predicados binarios se caracterizan por enfatizar la relación existente entre dos sujetos.

Ejemplo 4: **Predicado binario.**

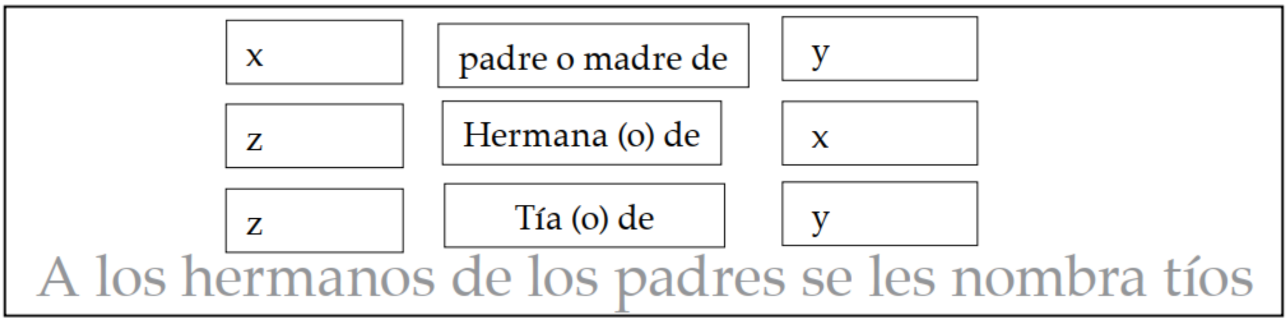
P: Pedro es el carpintero de Ramón.

¿Qué se afirma? Que es carpintero. ¿Quién? Pedro ¿De quién es carpintero Pedro? De Ramón. De manera que en este caso si hay una relación entre dos sujetos.

11.3 Variables

Una variable, como su nombre lo indica, es una característica, una magnitud, un atributo o una cosa que varía de un objeto a otro. Regularmente se denotan con las últimas letras del alfabeto escritas en minúsculas.
En el caso del ejemplo de la figura 3 se puede ver que no importa el nombre de los sujetos; si la relación entre ellos permanece, la conclusión continúa siendo la misma.
De manera que Julián, Tita y Carmela son una particularización de un caso general al que se podría llamar: x, y, z.

Figura 3



Porque no importa el nombre; si la relación se mantiene, la conclusión también. Así x es igual a Tita, María, Samuel…, la cuestión es que sea quien fuere, si "x" es padre de "y" y "z" es hermano de "x", entonces "z" siempre será tía de "y".
Es fácil identificar a las variables en estas oraciones, regularmente son los sujetos u objetos de los que se dice algo.

11.4 Predicado, función o relación

El predicado es la respuesta a la pregunta ¿qué se afirma de un sujeto u objeto? o ¿cuál es la relación entre dos sujetos u objetos? Se denota regularmente
con una letra mayúscula; posterior a la letra mayúscula se incluye un paréntesis para indicar la variable o variables de las que se está estableciendo dicha afirmación, de esta forma se está indicando cuál es la relación, función o predicado de la proposición.

Ejemplo 1 **Predicado.**

P: "x" es hermana de "z".

¿Qué se afirma? o ¿cuál es la relación existente entre los objetos o sujetos?
Respuesta: es hermana de…, de manera que al predicado lo nombraremos como H.
¿Quién o quiénes son los sujetos u objetos de los que se hace dicha afirmación?
Son las variables "x" y "z".
La simbolización de la relación existente entre estas variables se simbolizaría en lógica de primer orden como:

H(x, z)
La cual se lee como "x" es hermana de "z".

En el caso de los predicados unarios, solo se incluiría una variable o un sujeto en particular.

Ejemplo 2 **Predicado unario.**

P: "x" es carpintero.
¿Qué se afirma? o ¿cuál es la relación existente entre los objetos o sujetos?
Respuesta: es carpintero, al cual denotaremos como C.
¿Quién o quiénes son los sujetos u objetos de los que se hace dicha afirmación?
Es la variable "x"
La simbolización de este predicado se simbolizaría en lógica de primer orden como:

C(x)
La cual se lee como "x" es carpintero.

Nota: cuando el enunciado o la proposición hace alusión a un nombre u un objeto en particular y no a una variable, entonces se incluye como tal.

Ejemplo 3 **Particularización.**

P: Juan es tío de María.
Se simboliza como T (j, m).
Donde:

T= es tío de
j = Juan
m= María

11.5 Cuantificadores

a) Cuantificador universal: se les considera como tal a todas aquellas frases que incluyen "Todos" o "Ninguno".

Ejemplo 1 **Cuantificador universal.**

P: Todos los pingüinos son negros.
Q: Ningún informático lleva clases de piano.
R: Todos los números x que son pares también son enteros.
El cuantificador universal se denota por el símbolo ∀ , acompañado de la variable o variables en cuestión. Es decir, si la variable es x se denota $\forall_x$.

b) Cuantificador existencial: son todas aquellas frases que incluyen la idea de "Algunos".

Ejemplo 2 **Cuantificador existencial.**

P: Algunos pingüinos son negros.
Q: Existen algunos informáticos que llevan clases de piano.
R: Algunos números “x” que son pares también son enteros.
El cuantificador existencial se denota por el símbolo ∃ , acompañado de la variable o variables en cuestión, es decir si la variable es x se denota $\exists_x$.

11.6 Simbolización de proposiciones

Al igual que en lógica proposicional, la lógica de primer orden incluye los conectivos lógicos que ya se conocen y se simbolizan de la manera en que se explicó en clases anteriores.

Al iniciar en la simbolización de proposiciones es necesario conocer el concepto de dominio.

11.6.1 Dominio

Definición

Es el conjunto de partida de una función; es decir, aquellos valores para los cuales una función esta definida. Regularmente se denota con la letra **D**.

Ejemplo 1 **Dominio**

P: Algunos pingüinos son negros.

D=Pingüinos, dado que este es el conjunto de partida sobre el que se está haciendo una afirmación.

Q: Existen algunos informáticos que llevan clases de piano.

D=Informáticos.

R: Algunos números x que son pares también son enteros.

D=Números enteros.

Ahora bien, en lógica de predicados es importante identificar el conectivo lógico de la oración, porque no viene claramente definido como en el caso de lógica proposicional, sino hay que distinguirlo de entre las posibles opciones surgidas en el momento.

Ejemplo 2 **Elegir conectivo lógico.**

P: Todo entero par es divisible entre dos.

1. ¿Qué se afirma?

   Que, **SI** es entero par, **ENTONCES** es divisible entre dos.
2. ¿De quién se afirma?

   De todo entero par.
3. ¿Existe cuantificador? ¿Cuál sería?

   Cuantificador universal.
4. ¿Cuál es el dominio? (¿para qué números está definida esta afirmación?).

   D=Números enteros.

De manera que la variable es cualquier entero al que llamaremos "x". P significa número par. D significa divisible entre dos.
Primero se hace referencia al cuantificador universal que acompaña esta oración y a la variable entero par (x). La simbolización de esta proposición iniciaría con: $\forall_x$.

Después, el conectivo lógico que une esta proposición es una implicación entre dos funciones:
1. "x" entero par.
2. "x" divisible entre dos.

De manera que "x es entero par"; se escribiría en términos de función como P(x) y "x es divisible entre dos" como D(x).

Juntando todos estos elementos, el enunciado: “Todo entero par es divisible entre dos”, quedaría simbolizado como:

$$\forall_x[P(x)\rightarrow D(x)]$$

Donde:

D=Números enteros.
$x \in D$ (el símbolo $\in$, significa pertenece, así la expresión se lee "x pertenece al dominio").
P: es par.
D: es divisible entre dos.

La información que está enunciada en el párrafo anterior (después de la palabra donde) es sumamente necesario agregarla, de esta forma cualquier lector es capaz de comprender lo que la simbología de lógica de predicados significa. **La simbolización sin esta información se encuentra incompleta**.
Para simbolizar en lógica de predicados es importante identificar tanto las variables directas como las variables indirectas.

Ejemplo 3: **Variables indirectas.**

P: Todo entero par es divisible entre otro número entero (no estamos calificando la veracidad de esta afirmación, sino solo ejemplificando su simbolización).

1. ¿Qué se afirma?
   Que, **SI** es entero par, **ENTONCES** es divisible entre otro número entero.
2. ¿De quién se afirma?
   De todo entero par.
3. ¿Hay alguna variable que, aunque no sea sujeto es un objeto indirecto sobre el que se afirma algo?
   Sí, otro número entero es una variable indirecta.
4. ¿Existe cuantificador para el sujeto de este enunciado? ¿Cuál sería?
   Cuantificador universal.
5. ¿Existe un cuantificador para la variable indirecta de este enunciado? ¿Cuál sería?
   Cuantificador universal.
6. ¿Cuál es el dominio, tanto de la variable directa como de la indirecta? (para qué números está definida esta afirmación).
   D=Números enteros.

De manera que la variable "x" es cualquier entero par; y la variable otro número entero será llamada "y". La expresión: “Todo entero par es divisible entre otro número entero”, se simboliza como sigue.

$$\forall_x\forall_y\ [P(x)\rightarrow D(x,y)]$$

Donde:

D=Números enteros.

$x \in D$ y $y \in D$
P: es par.
D: es divisible entre.

Ejemplo 4 **Significado de fórmulas.**

Establecer los significados de las dos fórmulas siguientes, en las que P, H, T denotan las relaciones "padre de", "hermana de" y "tía paterna de" respectivamente.

1. $\forall_x \forall_y \forall_z [(P(y,x) \wedge H(z,y)) \rightarrow T(z,x)]$
Para todo "x", "y" y "z", si "y" es padre de "x" y "z" es hermana de "y", entonces "z" es tía paterna de "x".

2. $\forall_x \forall_z [T(z,x) \rightarrow \exists y\ (P(y,x) \wedge H(z,y))]$
Para todo "x" y "z", si "z" es tía paterna de "x" entonces "y" es padre de alguna "x" y "z" es hermana de "y".

Ejemplo 5 **Simbolización de enunciados.**

a) Si por el contrario tuviéramos que simbolizar algunos enunciados para un argumento, el ejercicio sería como sigue:

Argumento:

P_1: Juan es el padre de José. Premisa

P_2: Pedro es hermano de Juan. Premisa

P_3: El hermano del padre de una persona es tío de esta. Premisa

----

$\therefore$ C: Pedro es tío de José. Conclusión

Sea P el predicado "padre de", H el predicado "hermano de" y T el predicado "tío de".

1) Definimos el dominio D =conjunto de seres humanos.

El argumento simbolizado en lógica de predicados sería el siguiente:

P_1: P(Juan, José). Premisa

P_2: H(Pedro, Juan). Premisa

P_3: $\forall_x \forall_y \forall_z [(P(x,y) \wedge H(z,x)) \rightarrow T(z,y)]$ Premisa

----

C: T(Pedro, José).

b) Representar cada uno de los enunciados siguientes en el cálculo de predicados.

1. El papá de cada ser humano es uno de sus familiares.
$\forall_x \forall_y [P(y,x) \rightarrow F(y,x)]$

Donde:

D =conjunto de seres humanos.
P: Es padre de.
F: Es familiar de.

2. Todo el que aprecie a Jorge escogerá a Pedro para su partido.
$\forall_x [A(x, \text{Jorge}) \rightarrow E(x, \text{Pedro})]$

Donde:

D =conjunto de seres humanos.
A: Aprecia a
E: Escogerá a alguien para su partido.

Nota: Es importante la definición del dominio (D) para no caer en confusiones. Ya que de dicha definición depende en gran medida la simbolización.

Ejemplo 6: **Definición del dominio.**

Proposición: Todas las águilas vuelan.

Si definimos al dominio como águilas (D =águilas), entonces su simbolización quedaría: $\forall_x (V(x))$, donde V=vuela.
En cambio, si elegimos al dominio como animales (D=animales), entonces su simbolización quedaría: $\forall_x (A(x) \rightarrow V(x))$, donde A=águila y V=vuela.

11.6.2 Negación de cuantificadores

En lógica de predicados la negación sobre un cuantificador universal se escribe a través del cuantificador existencial y se niega su alcance.

Ejemplo 1: Negación del universal (NU)

P_1: Todo adolescente se siente incomprendido.

Su negación sería decir "No todos los adolescentes se sienten incomprendidos", que sería lo mismo que decir "EXISTE algún adolescente que no se siente incomprendido".

De manera que:

Donde:

D=Seres humanos.
$x \in D$

A= es adolescente.
I= se siente incomprendido.

Generalizando se puede decir que la negación de un cuantificador universal (NU) corresponde a la negación de la función, acompañada de un cuantificador existencial.

$$\neg\forall_x[A(x)] = \exists_x[\neg(A(x))]$$

La negación de un cuantificador existencial (NE), siguiendo esta misma lógica, quedaría como sigue:

$$\neg\exists_x[A(x)] = \forall_x[\neg(A(x))]$$

11.7 Cálculo deductivo

El cálculo deductivo, básicamente, consiste en deducir una conclusión a partir de las premisas dadas o establecidas, usando para ello las reglas de inferencia o de equivalencia conocidas en la lógica. En el caso de la lógica de primer orden es necesario eliminar los cuantificadores para poder aplicar las reglas y, posteriormente si es necesario, volverlos a incluir; para ello, existen algunas reglas conocidas como reglas de los cuantificadores que se muestran a continuación.

Reglas de los cuantificadores

11.7.1 Particularización del universal

Cuando algo es válido para todos los elementos del dominio (o sea que hace uso de un cuantificador universal) es posible particularizarlo; es decir, nombrar un elemento particular del dominio.

Ejemplo 1 **Particularización del universal.**

$$\forall_x\ [D(x)]$$

Donde:

D=Números pares.
$x \in D$
D: es divisible entre dos (se entiende por divisible cuando el resultado de la división es un número entero).

2 es un número par, luego $2 \in D$ y es un caso particular, por lo tanto: [D(2)]. Como se observa, en este caso se ha quitado el cuantificador universal y la variable x se ha sustituido por un caso específico.

La regla de la particularización del universal indica que:

$$\forall_x\ [P(x)]$$

$\therefore$ P(d) donde $d \in D$ y es un caso particular.

11.7.2 Generalización del universal

Cuando una afirmación proviene de un cuantificador universal y se ha particularizado es posible regresar al cuantificador universal. A esta regla se le conoce como la generalización del universal. **Para hacer uso de esta regla, es muy importante tener la certeza de que la afirmación original proviene de un cuantificador universal**. De otra forma esta regla no se puede aplicar.

Ejemplo 1 **Generalización del universal.**

4 es divisible entre dos. 4 pertenece al dominio (D)de los números pares y sabemos que todos los números pares son divisibles entre dos. Por lo tanto, a partir de este caso particular se puede generalizar.

La regla de la generalización del particular es la siguiente:

P (d) donde d $\in$ D y es un caso particular

$\therefore \forall_x [P(x)]$

Advertencia: Aplicarla siempre que se tenga la certeza de que la afirmación proviene de una universalización.

11.7.3 Particularización del universal

Cuando algo es válido para algunos elementos del dominio (o sea que hace uso de un cuantificador existencial) es posible particularizarlo; es decir, nombrar un elemento particular del dominio que cumpla con la regla descrita. **Es muy importante asegurarse de que el elemento específico que se está indicando como caso particular cumpla con la regla**.

Ejemplo 1 **Particularización del universal.**

$\exists_x [D(x)]$

Donde:

D=Números pares.
x $\in$ D
D: es divisible entre 8.

2 es un número par, luego 2 $\in$ D, pero dos no es divisible entre 8, entonces 2 no es un caso particular de la afirmación dada.
Se elige entonces al 16, luego 16 $\in$ D y cumple con la condición de ser divisible entre 8, por lo tanto 16 puede ser un caso particular de la afirmación.

La regla de la particularización de un existencial es la siguiente:

$$\exists_x [P(x)]$$

$$\therefore P(d) \text{ donde } d \in D \text{ y es un caso particular de la función descrita}$$

11.7.4 Generalización del existencial.

Cuando tienes un caso específico que cumpla con una función, puedes hacer uso de un existencial que te indique que al menos existe un caso que cumple con esa función en específico.

Ejemplo 1 Generalización del existencial.

$$[D(2)]$$

Donde:

D=Números pares.
$2 \in D$
D: es divisible entre dos (se entiende como divisible cuando el resultado de la división es un número entero).

x es un número par, luego $x \in D$ y es una función válida decir que: $[D(x)]$. Como se observa en este caso, se puede afirmar la existencia de un determinado x, tal que $x \in D$.

La regla de la existencialización del particular indica que:

$$[P(d)]$$

$$\therefore \exists_x P(x) \text{ donde } d \in D$$

11.7.5 Equivalencias de cuantificadores

Al igual que en la lógica proposicional, los cuantificadores tienen ciertas reglas de equivalencia. A continuación, se muestran las más utilizadas:

E1) $Q\chi[A(x)] \vee B(y) \equiv Q\chi[A(x) \vee B(y)]$
E2) $Q\chi[A(x)] \wedge B(y) \equiv Q\chi[A(x) \wedge B(y)]$
E3) $Q\chi[A(x)] \vee Qz\ [B(z)] \equiv Q\chi Qz[A(x) \vee B(z)]$
E4) $\forall\chi[A(x)] \wedge \forall\chi\ [C(x)] \equiv \forall\chi[A(x) \wedge C(x)]$
E5) $\forall\chi[A(x)] \vee \forall\chi\ [C(x)] \equiv \forall\chi[A(x) \vee C(x)]$
E6) $\exists\chi[A(x)] \wedge \exists\chi\ [C(x)] \equiv \exists\chi[A(x) \wedge C(x)]$
E7) $\exists\chi[A(x)] \vee \exists\chi\ [C(x)] \equiv \exists\chi[A(x) \vee C(x)]$
Donde $Q \equiv \forall$ ó $\exists$

11.8 Cálculo deductivo en lógica de predicados

En lógica de predicados, al igual que en la lógica proposicional, las reglas de los cuantificadores, las reglas de inferencia y de equivalencia lógica, sirven para deducir formalmente una conclusión a partir de una serie de premisas.

El primer paso es simbolizar las proposiciones tal y como se explica en el apartado 11.6 de este material; el siguiente paso consiste en eliminar los cuantificadores de la función (utilizando las reglas de los cuantificadores); posteriormente, aplicar las reglas de equivalencia o de inferencia conocidas y, finalmente, incluir los cuantificadores necesarios para llegar a la conclusión (utilizando las reglas de los cuantificadores).

Ejemplo 1 **Cálculo deductivo.**

Se tienen las siguientes hipótesis:

1) Todos aman a Microsoft o a Apple.
2) Lina no ama a Microsoft.

∴ Lina ama a Apple

Primer paso: Simbolizar las hipótesis y la conclusión.

1) $\forall \chi[M(x) \vee A(x)]$

2) $[\neg M(j)]$ / $\therefore A(j)$

Donde:

D=Personas
$x \in D$
j: Lina $\in$D
M: Ama a Microsoft.
A: Ama a Apple.

Segundo paso: Eliminar los cuantificadores de la función.

1) $\forall_x [M(x) \vee A(x)]$

2) $[\neg M(j)$ / $\therefore A(j)$

3) $M(j) \vee A(j)$ Particularización del universal, 1 ($x \leftarrow j$) [Esto significa que ocupaste la regla de particularización del universal para la premisa 1 y que particularizaste a la variable x como j].

Tercer paso: aplicar las reglas de inferencia o equivalencia.

1) $\forall_x [M(x) \vee A(x)]$
2) $[\neg M(j)]$ / $\therefore A(j)$
3) $M(j) \vee A(j)$ Particularización del universal, 1 ($x \leftarrow j$)
4) $A(j)$ TP, 3,4