Clase 13

Algebra vectorial en el espacio tridimensional

13.1 Introducción

Los vectores son un objeto muy útil para la geometría del espacio. En esta clase, partiendo de lo que ya se vio acerca de vectores en el plano, se contemplan las herramientas necesarias para la geometría tridimensional.

Trabajaremos primero recordando ciertos conceptos necesarios para trabajar en este tema.

Luego se estudian los vectores geométricamente, y a través de sus operaciones, también de forma geométrica, se llegará a la parametrización de una recta de manera vectorial y a la definición de la operación "producto vectorial".

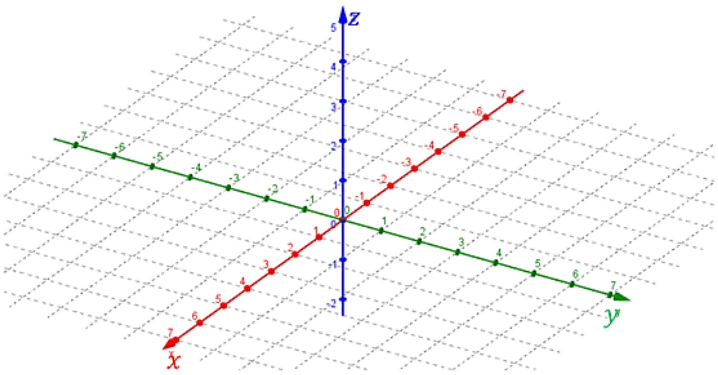
13.2 El espacio tridimensional

En las tres dimensiones, o el espacio tridimensional, también llamado R^3, se construye un sistema de coordenadas rectangulares utilizando tres ejes mutuamente perpendiculares. El punto en el cual estos ejes se intersecan se denomina ***origen***.

El sistema de referencia consta de la siguiente terna de ejes perpendiculares entre sí:

- eje x (eje de abscisas, en rojo)
- eje y (eje de ordenadas, en verde)
- eje z (eje de cotas, en azul)

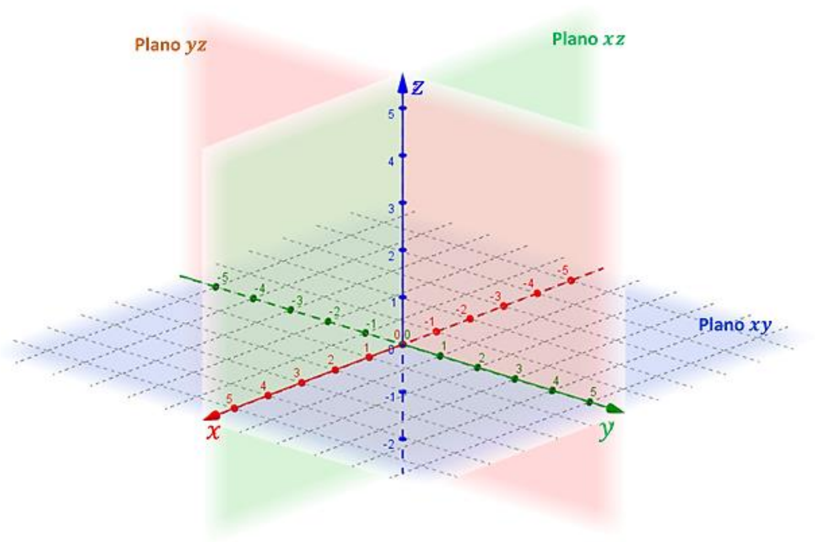
los cuales se cortan en el punto O (origen de coordenadas).



Por otro lado, podemos identificar tres planos conformados por los ejes cartesianos.

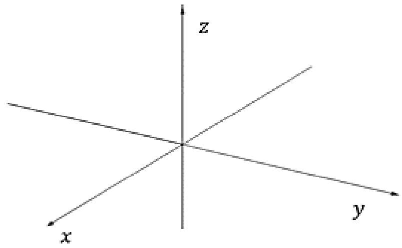
- el plano xy (en azul)
- el plano xz (en verde)
- el plano yz (en rojo)

En el siguiente esquema se observan dichos planos.

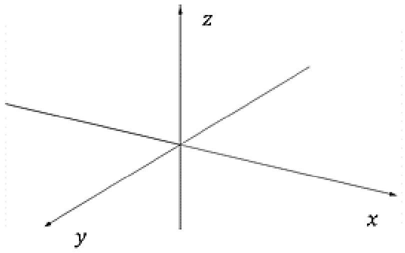


Estos planos se conocen como planos coordenados. El nombre del plano xy proviene de que este plano contiene al eje x y al eje y. En forma análoga se derivan los nombres de los otros dos planos.

Se puede demostrar que hay dos formas diferentes de armar un sistema de referencia con tres ejes perpendiculares. Una de esas formas se conoce con el nombre de terna derecha (que es la que usamos nosotros) y la otra como terna izquierda. Se muestran a continuación.



Terna derecha



Terna izquierda

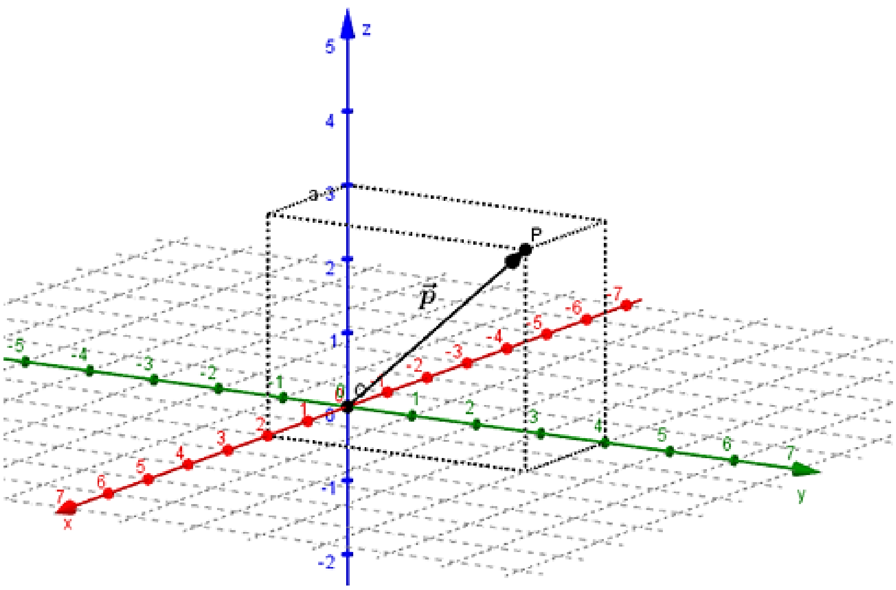
13.3 Vectores en R^3

Como ya hemos visto este tema previamente, solamente haremos una mención del mismo.

Queda establecido un sistema de coordenadas donde todo punto de R3 se define mediante una terna ordenada de números reales (x,y,z), y tiene asociado un vector p que va desde el origen hasta el punto (x,y,z).

Ejemplo 1

En el siguiente esquema graficamos al punto (2,4,3) y su vector p correspondiente.



Se ha tomado la misma escala sobre cada uno de los ejes. Pero es posible tomar una escala diferente para cada eje. En ese caso el vector cambiará su forma, pero esa variación se hará más visible al graficar otras superficies geométricas.

Observación: como ya hemos visto en clases anteriores, una buena herramienta online para graficar vectores, superficies y cuerpos en 3D es el geogebra 3d: [Calculadora 3D - GeoGebra]

13.4 Expresión canónica de un vector

Definición de Versor

Un versor, o vector unitario, es un vector de módulo uno.

En particular, para R3, se denominan versores cartesianos a los siguientes:

$$\hat{\imath} = (1,0,0)$$

$$\hat{\jmath} = (1,0,0)$$

$$\hat{k} = (1,0,0)$$

Estos versores están asociados con las direcciones de los ejes coordenados cartesianos x, y, z, respectivamente.

Los versores cartesianos permiten expresar analíticamente los vectores por medio de sus componentes cartesianas, lo cual se denomina la "**Expresión canónica de un vector**".

Ejemplo 2

La expresión canónica del vector $v = (1,-2,3)$ es

$$v = 1\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

13.5 Ecuación vectorial de una recta en R³

Dados un vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ y un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, nos proponemos hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto P_0 y es paralela al vector v.

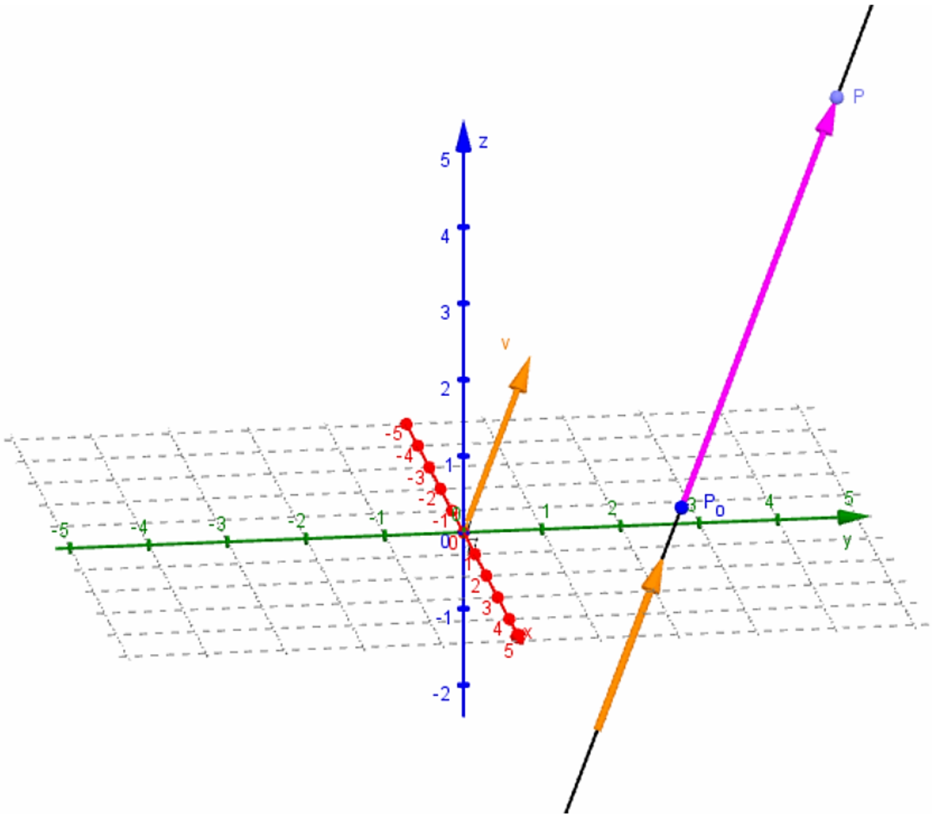
Definición

La ecuación vectorial que nos permite calcular cualquier punto $P = (x, y, z)$ de la recta r, que pasa por un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a un vector $v = (v_1, v_2, v_3)$, es la siguiente:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(v_1, v_2, v_3)$$

$$con\ \alpha \in \mathbb{R}$$

El esquema de la recta y el vector v se representa en la siguiente figura.



Esto se comprenderá mejor con un ejemplo.

Ejemplo 3

Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (3,2,1) y que tenga la dirección del vector (-4,-1,-1).

Siguiendo la definición anterior, tenemos que los puntos de la recta siguen la siguiente ecuación:

$(x, y, z) = (3, 2, 1) + \alpha(-4, -1, -1) \qquad con\ \alpha \in \mathbb{R}$

Entonces, para cada valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ se obtiene un punto de la recta. Por ejemplo, si

$$\alpha = -1$$

Se obtiene el punto:

$$(x, y, z) = (3, 2, 1) + (-1) \cdot (-4, -1, -1)$$

$$(x, y, z) = (7,3,2)$$

Es decir, el punto (7,3,2) pertenece a la recta que pasa por (3,2,1) y es paralela al vector (-4,-1,-1).

Observación: Se puede notar la similitud de la ecuación vectorial con la ecuación explícita de una recta en R², es decir:

$$y = \ ax + b$$

En donde a, que es la pendiente, sería el vector v, que da la dirección en R³, y b, que es la ordenada al origen, es el punto P_0 por el que pasa la recta en R³.

13.5 El producto vectorial

El producto vectorial es una operación que solo se aplica en R3, sin embargo, tiene tantas aplicaciones en distintas áreas que se vuelve muy importantes. Entre otras aplicaciones, se utiliza bastante en la física, al momento de trabajar con interacciones entre campos magnéticos y campos eléctricos, fundamentales para el principio de inducción electromagnética que hace posible, entre otras cosas, contar con suministro de energía eléctrica en nuestros hogares.

Definición

El producto vectorial entre dos vectores $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ se denota por $a\ \boldsymbol{x}\ b$ y se define como:

$$a\ \boldsymbol{x}\ b = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\boldsymbol{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{k}$$

O bien

$$a\ \boldsymbol{x}\ b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -a_1 b_3 + a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

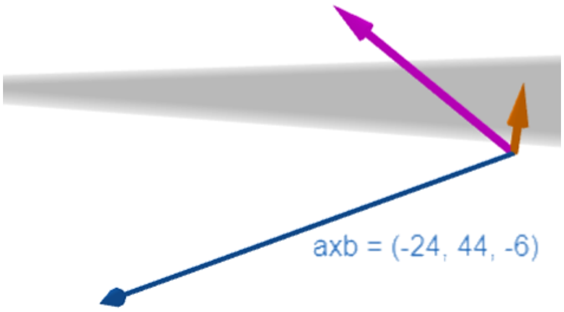
Ambas expresiones son equivalentes, solo que la primera está expresada con los versores i, j, k.

Ejemplo 4

Sean a=(-1, 0, 4) y b=(9, 6, 8). Calcular a x b

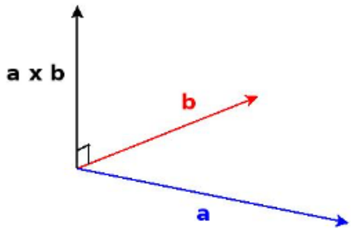
$$a\ x\ b\ = (0 \cdot 8 - 4 \cdot 6, -(-1) \cdot 8 + 4 \cdot 9, -1 \cdot 6 - 0 \cdot 9) = (-24, 44, -6)$$

A continuación, observamos los vectores a (naranja), b (fucsia) y el resultado de axb (azul); graficados en geogebra:

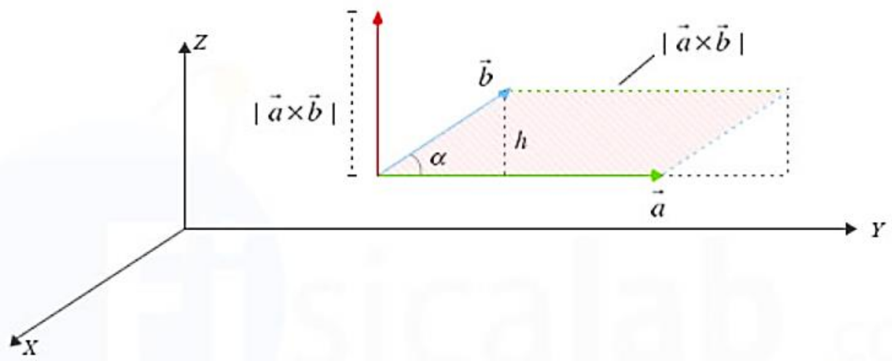


Propiedades del producto vectorial

- El producto vectorial de dos vectores es siempre perpendicular al plano que conforman dichos vectores. Gráficamente:



- Si dos vectores son paralelos, el producto vectorial entre ellos es cero.
- La norma del producto vectorial entre dos vectores es igual al área del paralelogramo obtenido a partir de dichos vectores. Tal como se muestra a continuación:



- La dirección del vector resultante del producto vectorial entre dos vectores se puede obtener mediante lo que se conoce como la "regla de la mano derecha" (ver video subido al aula virtual).

Con esto concluimos la clase de esta semana. La próxima, y última, clase, trabajaremos sobre algunas superficies características del espacio tridimensional.