Clase 2

Potenciación, radicación y polinomios

2.1 Introducción

La potenciación, así como también otras operaciones en matemática surgen de una necesidad de abreviación de cálculos, una comparación sencilla es la abreviación de una suma reiterada a multiplicación.

De igual forma en cuanto a que es una operación matemática, posee una operación inversa, la cual es la radicación, que en esta ocasión vamos a trabajar la operación y su inversa, así como también sus propiedades.

Por otro lado, trataremos, a modo de repaso, el concepto de polinomios y los principales métodos para hallar sus raíces.

2.2 Potenciación

La Potencia enésima de un número a, a^n , es el producto de ***n*** factores iguales ***a*** a. El número ***a*** $\in \mathbb{R}$ y es la base de la potencia, el número ***n*** $\in \mathbb{Z}$ y es el exponente.

$$a^{\mathrm{n}} = \underbrace{a.a.a \ldots a}_{n\ veces}$$

2.2.1 Propiedades de la potenciación

$\forall a, b \in \mathbb{R}\ a \neq 0, b \neq 0\ \wedge m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0, n \neq 0$:

Potencia de Exponente Cero

$a^0 = 1$ *"Todo Número elevado a la cero es uno"*

Potencia de Exponente 1

$a^1 = a$ *"Todo Número elevado a la uno es uno"*

Potencia de Exponente Negativo

"Todo Número real elevado a un exponente negativo es igual al inverso multiplicativo del número, elevado al exponente positivo"

Es decir:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}}$$

En general:

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}}$$

Producto y Cociente de Potencias de Igual Base

"El producto de Potencias de Igual Base es igual a otra potencia con la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes respectivos"

Es decir,

$$a^n . a^m = a^{n+m}$$

"El cociente de Potencias de Igual Base es igual a otra potencia con la misma base cuyo exponente es la resta de los exponentes respectivos"

Es decir,

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

o bien

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Potencia de Otra Potencia

"La potencia de otra potencia de base a es igual a la potencia de la misma base elevada al producto de ambos exponentes"

$$(a^n)^m = a^{n.m}$$

Distributiva de la Potencia respecto a la Multiplicación y División

"La potencia de una multiplicación es igual al producto de las potencias de cada factor elevado al mismo exponente"

Es decir,

$$(a.b)^n = a^n . b^n$$

"La potencia de una división es igual al cociente entre las potencias del dividendo y del divisor elevados al mismo exponente"

Es decir,

$$(a:b)^n = a^n : b^n \ \ o\ bien\ \ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

2.3 Radicación

Dado un número **n** natural y un número **a** real, se define la raíz n-ésima de **a**, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, al único número real **b**, tal que $b^n = a$.

$$\forall a \epsilon \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1: \quad para\ n\ impar: \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$
$$para\ n\ par: \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a\ con\ a \geq 0$$

No está definida la radicación de índice par de números negativos.

Cuando el índice es impar la radicación está definida para todos los números reales, y tienen el mismo signo que el radicando.

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad ; \quad \sqrt[5]{32} = 2 \quad ; \quad \sqrt[3]{-27} = -3 \quad ; \quad \sqrt[5]{-32} = -2$$

Cuando el índice es par la radicación está definida solo para los radicandos positivos. Por ejemplo, si queremos hallar el número que elevado al cuadrado sea igual a 16 tendremos dos soluciones: 4 y -4. Para distinguir entre ellas, utilizaremos una notación diferente para cada una. Esto es, escribiremos

$$\sqrt{16} = 4 \quad ; \quad -\sqrt{16} = -4 \quad y \quad \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Considerando como raíz cuadrada de un número positivo a la solución positiva.

2.3.1 Propiedades de la radicación

$\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \wedge m, n \, \epsilon \, \mathbb{N}$

Simplificación

Se puede simplificar índice con exponente cuando la base de la potencia es no negativa, por lo tanto: Si $a \geq 0$, entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$

Si n es impar $\sqrt[n]{a^n} = a$ Si n es par $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

En consecuencia, también existe la ***Ampliación***: Consiste en multiplicar el índice de la raíz y el exponente del radicando por uno mismo número distinto de cero, el resultado no varía.

Propiedad Distributiva

La radicación es distributiva respecto de la multiplicación y división, siempre que existen las raíces de dos factores que intervienen.

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad con\ b \neq 0$$

- La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de los factores.
- La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente entre raíces n-ésimas del dividendo y del divisor. La radicación **no es distributiva respecto de la adición y sustracción**.

Raíz de otra Raíz

La raíz n-ésima de la raíz m-ésima de un número es igual a la raíz (n.m)-ésima de dicho número.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

Potencia de una Raíz

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

2.3.1 Radicación como potencia de exponente fraccionario

Cuando definimos potencia indicamos que el exponente debe ser un número entero. Sin embargo, como vimos en el párrafo anterior, es posible realizar potencias con exponente fraccionario, en cuyo caso nos encontraremos con la definición de raíz de un número.

Por ejemplo, tomemos el caso:

$$3^{1/2}$$

Si multiplicamos dicho número por sí mismo, es decir:

$$3^{1/2} \cdot 3^{1/2}$$

Y aplicamos la propiedad de multiplicación de potencia de igual base, tenemos que:

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$$

Es decir, $3^{\frac{1}{2}}$ es el número tal que multiplicado por sí mismo es 3, y ese número es el que conocemos como $\sqrt{3}$.

Cómo regla general en la relación entre exponente fraccionario y radicación, tenemos que:

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$con\ a \in \mathbb{R};\ m, n \in \mathbb{N};\ n \neq 0$$

$$a\ positivo\ si\ n\ es\ par$$

2.4 Polinomios

Un polinomio en una variable es una expresión algebraica entera de la forma:

$$P(x) = \ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Donde:

$a_0, a_1, \dots, a_n$ se llaman coeficientes

"x" es la variable.

"a_0" es el término independiente de x

"a_n" es el coeficiente principal de x

$P(x)$ denota un polinomio en la variable "x"

Si $a_n \neq 0$ decimos que el grado[1] del polinomio es "n"

2.5 Raíces y cálculos de raíces de un polinomio

Las raíces de un polinomio de una variable x son los valores de x para los cuales el polinomio vale cero. Es decir:

Un polinomio P(x) tiene una raíz "r" si y solo si P(r)=0

El teorema fundamental del álgebra

Este teorema, demostrado por Gauss en 1799, establece que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, contando las raíces de repetidas, es decir, de multiplicidad mayor a 1.

¿Qué significa esto de las multiplicidades?

Bueno, que, si en un polinomio de grado 3 todas sus raíces son distintas, entonces tendrá exactamente 3 raíces distintas, ni más, ni menos.

Pero puede ocurrir que algunas raíces estén "repetidas" (lo cual equivale a que en la factorización del polinomio dicha raíz figure más de una vez).

En ese caso, por ejemplo, nuestro polinomio de grado 3 tendrá una raíz de multiplicidad 1 y otra raíz de multiplicidad 2. En total la suma de las multiplicidades es 3, igual al grado del polinomio.

---

[1] Es el grado del término de mayor grado del polinomio.

2.5.1 Métodos para calcular las raíces de un polinomio

Si es de grado 1

Bastará con despejar la incógnita "x".

Para $P(x) = ax + b$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Si es de grado 2

Para $P(x) = ax^2 + bx + c$. Resolvemos aplicando la ecuación de Bhaskara.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \quad o \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \end{cases}$$

Ejemplo: Hallar las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x + 3$.

$$2x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.2.3}}{2.2} \quad o \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{1}}{4} = \dfrac{-5 + 1}{4} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-5 - \sqrt{1}}{4} = \dfrac{-5 - 1}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Si es bicuadrada

Se trata de un polinomio de grado 4 "incompleto", con solo los términos de los grados 4, 2 y 0. Es decir, tiene la forma: $ax^4 + bx^2 + cx = 0$. Esta ecuación se puede trasformar en una de segundo grado mediante el cambio de variable:

$$y = x^2$$

Resolveremos la de 2° grado resultante y desharemos el cambio para encontrar las soluciones de la variable inicial.

Ejemplo: Hallar las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0,$$

hacemos el cambio:

$$x^2 = y \Rightarrow y^2 - 13y - 36 = 0$$

$$y^2 - 13y + 36 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4.1.36}}{2.1} \quad o \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{13 + \sqrt{25}}{2} = \dfrac{13 + 5}{2} = 9 \\ x_2 = \dfrac{13 - \sqrt{25}}{2} = \dfrac{13 - 5}{2} = 4 \end{cases}$$

Buscamos ahora los valores que corresponden a la variable original para cada una de las soluciones obtenidas.

- $y = 9 \Rightarrow x^2 - 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$
- $y = 4 \Rightarrow x^2 - 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

Por lo tanto, las raíces del polinomio son: x=9, x=4, x=-3, x=3, x=-2, y x=2

Si es de grado mayor que 2, no bicuadrada

Es este caso, la regla de Ruffini será útil para encontrar las raíces enteras del polinomio.

Para aplicar la regla de Ruffini primero debemos conocer al menos una raíz del polinomio, y por cada vez que apliquemos la regla deberemos conocer una "nueva" raíz (puede ser la misma raíz que aparece dos o más veces en la factorización del polinomio, lo cual se relaciona con la multiplicidad de la raíz).

Una forma de hallar las posibles raíces es mediante el conocido teorema de Gauss para las raíces racionales.

El teorema de Gauss para las raíces racionales

El teorema de Gauss, indica una restricción para las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros:

Sea un polinomio cuyo término independiente y coeficiente principal son a_0 y a_n respectivamente, entonces las posibles raíces racionales del polinomio las podemos obtener de la forma:

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{\{divisores\ del\ término\ independiente\}}{\{divisores\ del\ coeficiente\ principal\}}$$

Ejemplo

Hallar las raíces del polinomio

$$\boldsymbol{P(x) = 9x^3 - 18x^2 - 2x + 4}$$

El término independiente es 4, por lo tanto, sus divisores positivos son $\{1, 2, 4\}$.

El coeficiente principal es 9, por lo tanto, su único divisor positivo es $\{1, 3, 9\}$.

Luego, las posibles raíces según el teorema de Gauss son:

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{\{1, 2, 4\}}{\{1, 3, 9\}}$$

Es decir, las combinaciones de la división son:

$$\frac{p}{q} = \{\pm 1;\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{1}{9};\ \pm 2;\ \pm\frac{2}{3};\pm\frac{2}{9};\ \pm 4;\ \pm\frac{4}{3};\ \pm\frac{4}{9}\}$$

Iremos probando cada una de estas <u>posibles</u> raíces para ver si en algún caso el resultado de evaluar el polinomio da cero, en cuyo caso, se tratará de una raíz.

Si probamos con todos los valores, reemplazando el valor de x, obtenemos que solamente x=2 es raíz del polinomio. Los otros valores no son.

Entonces nos faltan 2 raíces, pues nuestro polinomio es de grado 3.

Para continuar en la búsqueda de las raíces aplicaremos la regla de Ruffini.

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un método para dividir un polinomio por otro de la forma (x-r).

En el caso en que r sea raíz del polinomio dividendo, el resto obtenido será igual a cero.

Además, el método nos permite obtener el polinomio resultante de la división, específicamente los coeficientes de dicho polinomio.

Es de gran utilidad ya que para grado mayor que 2 no disponemos de fórmulas, al menos no sencillas, para poder obtener las raíces de polinomios.

Cada vez que hacemos una tabla a partir de los coeficientes del polinomio, obtenemos una raíz y los coeficientes de un polinomio de un grado menor (un polinomio que divide al propio polinomio). De este modo, podemos ir reduciendo el grado del polinomio hasta llegar a uno de segundo grado cuyas raíces sabemos calcular rápidamente por la fórmula de Bhaskara.

Aplicación del método

1) Identificamos los coeficientes de cada término, en el caso del ejemplo los coeficientes son los indicados en rojo (recordar tener en cuenta el signo de cada coeficiente):

$$\mathbf{9}x^3 - \mathbf{18}x^2 - \mathbf{2}x + \mathbf{4}$$

2) Trazamos dos líneas perpendiculares de esta forma:

3) Colocamos los coeficientes ordenados por su el exponente correspondiente de mayor o menor:

Exponente -> **3 2 1 0**

$$\begin{array}{c|cccc} & 9 & -18 & -2 & 4 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Aclaración: en este caso no fue necesario, pero en el caso de que el coeficiente para algún exponente no se encuentre en el polinomio (por ejemplo, que no se encuentre la variable x al cuadrado, x^2) completaríamos ese lugar con cero.

4) Ahora a la izquierda de la línea vertical colocamos la raíz hallada:

$$\begin{array}{c|cccc} & 9 & -18 & -2 & 4 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

5) Bajamos el coeficiente correspondiente al mayor grado, en este caso el 9:

$$\begin{array}{c|cccc} & 9 & -18 & -2 & 4 \\ 2 & \downarrow & & & \\ \hline & 9 & & & \end{array}$$

6) <u>Se multiplica</u> ese número por la raíz. El resultado se coloca en la celda de la segunda fila y segunda columna (en este caso debajo del -18):

$$\begin{array}{c|cccc} & 9 & -18 & -2 & 4 \\ 2 & & 18 & & \\ \hline & 9 & & & \end{array}$$

7) <u>Se suma</u> el número que recién colocamos con el superior, en este caso:

-18 +18 = 0

$$\begin{array}{c|cccc} & 9 & -18 & -2 & 4 \\ & & + & & \\ 2 & & 18 & & \\ \hline & 9 & 0 & & \end{array}$$

8) Se vuelven a repetir los pasos hasta llegar al término independiente, en este caso sería sumar 4 con -4:

	9	-18	-2	4
2		18	0	-4
	9	0	-2	0

El último número, resaltado en azul, es el resto de la división que realiza la regla de Ruffini, y siempre que usemos una raíz para el método dicho resto será cero.

Los números sombreados en verde son los coeficientes del polinomio resultante de la división del polinomio original por (x-2). El polinomio se arma con los exponentes ordenados de mayor a menor, teniendo en cuenta que el último cero no cuenta como exponente, pues es el resto:

	9	-18	-2	4
2		18	0	-4
	9	0	-2	0
Exponente ->	**2**	**1**	**0**	

Hallando las raíces de dicho polinomio hallaremos las dos raíces que nos faltan.

El polinomio es:

$$Q(x) = 9x^2 + 0x - 2$$

$$Q(x) = 9x^2 - 2$$

Ahora tenemos un polinomio de grado 2, cuyas raíces podemos obtener por Bhaskara, aunque en este caso podemos obtener las raíces por simple despeje.

Planteamos la igualdad a cero para hallar las raíces y despejamos:

$$9x^2 - 2 = 0$$

$$9x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{9}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{9}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Nota: El $\pm$ proviene de que existen dos valores que elevados al cuadrado dan $\frac{2}{9}$, los cuales son $\sqrt{\frac{2}{9}}$ y $-\sqrt{\frac{2}{9}}$, pues todo número elevado al cuadrado es positivo.

Así pues, las tres raíces del polinomio son:

$$\{2; \frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{\sqrt{2}}{3}\}$$

Con esto finalizamos el apunte sobre exponentes enteros, polinomios y cálculo de raíces, complementaremos la clase con algunos ejercicios y ejemplos de resolución.

En todas las clases habrá foros de consultas por cualquier duda que quede sobre el tema.