Clase 10

Reglas derivadas, formas normales y conjunto adecuado de conectivas

10.1 Introducción

En lógica es común hacer uso de «rutinarias» de aplicaciones de las reglas básicas y construir con esas combinaciones nuevas reglas o figuras deductivas que llamaremos reglas derivadas.

Esta figura deductiva puede ser considerada como una nueva regla que no será ya básica, sino derivada, esto es, fundada en la aplicación de las reglas desarrolladas, en parte, en la clase pasada.

A continuación, estudiaremos sistemáticamente las principales reglas derivadas para el cálculo lógico. Cada una de estas reglas irá acompañada de su correspondiente fundamentación o reducción deductiva a reglas anteriores (que pueden ser también derivadas, pero que, en última instancia, al término final de la reducción serán siempre las básicas). A la fundamentación de una regla derivada en otras anteriores la llamaremos también "deducción".

10.2 Reglas derivadas

Veremos a continuación la deducción de las siguientes reglas derivadas:

10.2.1 Leyes de De Morgan

Las leyes de Morgan permiten trasformar negaciones de conjunciones en disyunciones, y a la inversa. El procedimiento es el siguiente: la negación de una disyunción (o conjunción) es equivalente a negar cada una de las proposiciones que forman la disyunción (o conjunción), cambiando el conector.

Es decir

$$\neg(p \vee q) \textit{ es equivalente a } (\neg p \wedge \neg q)$$

Y

$$\neg(p \wedge q) \textit{ es equivalente a } (\neg p \vee \neg q)$$

Por supuesto, al indicar que las expresiones son equivalentes estamos afirmando que sus tablas de verdad son iguales y, por lo tanto, podemos reemplazar una expresión por su equivalente.

Demostración

Vamos a hacer una demostración de las Leyes de De Morgan en base a los valores de verdad. Recordemos que si los valores de verdad de dos expresiones son iguales (es decir, sus tablas de verdad son iguales), las expresiones son equivalentes. Para eso vamos a introducir la siguiente notación:

Llamaremos v(p) al valor de verdad de la proposición p. Es decir, v(p)=V si p es verdadero; v(p)=F si p es falso.

Primero demostraremos que:

$$\neg(p \vee q) \textit{ es equivalente a } (\neg p \wedge \neg q)$$

$v(\neg(p \vee q))=V$

$\Leftrightarrow v(p \vee q)=F$

$\Leftrightarrow v(p)=F$ y $v(q)=F$

$\Leftrightarrow v(\neg p)=V$ y $v(\neg q)=V$

$\Leftrightarrow v(\neg p \wedge \neg q)=V$

Por lo tanto

$v(\neg(p \vee q))=V \Leftrightarrow v(\neg p \wedge \neg q)=V$

Luego, las expresiones $\neg(p \vee q)$ y $\neg p \wedge \neg q$ son equivalentes, que es lo que queríamos demostrar.

Ahora demostraremos que:

$$\neg(p \wedge q) \textit{ es equivalente a } (\neg p \vee \neg q)$$

$v(\neg(p \wedge q))=V$

$\Leftrightarrow v(p \wedge q)=F$

$\Leftrightarrow v(p)=F$ o $v(q)=F$

$\Leftrightarrow v(\neg p)=V$ o $v(\neg q)=V$

$\Leftrightarrow v(\neg p \vee \neg q)=V$

Por lo tanto

$v(\neg(p \wedge q))=V \Leftrightarrow v(\neg p \vee \neg q)=V$

Luego, las expresiones $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ son equivalentes, que es lo que queríamos demostrar.

Otras aplicaciones de las Leyes de De Morgan

Por supuesto, las leyes de De Morgan se pueden aplicar a distintas expresiones, por ejemplo, las siguientes equivalencias se cumplen:

$$\frac{\neg p \wedge q}{\therefore \neg(p \vee \neg q)}$$

$$\frac{p \wedge \neg q}{\therefore \neg(\neg p \vee q)}$$

$$\frac{\neg p \vee q}{\therefore \neg(p \wedge \neg q)}$$

$$\frac{p \vee \neg q}{\therefore \neg(\neg p \wedge q)}$$

Y así se puede aplicar la regla a infinidad de situaciones, por supuesto también en caso de que las proposiciones sean compuestas, siempre que se cumpla una negación de una conjunción o de una disyunción.

10.2.2 Regla de Ex contradictione quodlibet (ECQ)

Ex contradictione quodlibet (del latín, "de una contradicción se sigue cualquier cosa") es una regla derivada de lógica de enunciados cuya sencillez es más que trivial pero cuyas consecuencias no dejan de parecer extrañas para nuestro sentido común.

Su expresión simbólica es esta:

$$\begin{array}{l} p \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Es decir, si en las premisas de un argumento nos encontramos con una contradicción, de ella podemos deducir cualquier conclusión, y el argumento será válido.

Demostración

Realizaremos una demostración deductiva a partir de p y ¬p, tal que, aplicando reglas de sustitución e inferencia, deduzcamos cualquier conclusión q.

p (premisa)

$p \vee q$ (aplicamos la regla de adición disyuntiva)

$\neg p$ (premisa)

q (conclusión) (aplicando silogismo disyuntivo a $p \vee q$ y $\neg p$)

Con lo que queda demostrado.

Este principio o regla puede parecer muy extraño, es decir, de una contradicción puede deducirse cualquier cosa. Consideremos, por ejemplo el siguiente argumento:

Corro y no corro, por lo tanto, el cielo es verde.

Si llamamos a las proposiciones:

p: corro

q: el cielo es verde

Entonces el argumento es

$$\begin{array}{l} p \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Y, por la regla ECQ el argumento es válido.

Otra forma de analizar la validez de este argumento es traducirlo a una implicación para realizar su tabla de verdad.

El argumento sería:

$$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$$

Planteemos la tabla de verdad

p	q	$p \wedge \neg p$	$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	F	V

Como la tabla de la implicación (en verde) es una tautología, el argumento es válido. Pero además podemos observar que la tautología surge de que el antecedente de la implicación $(p \wedge \neg p)$, en amarillo, es siempre falso, con lo cual la implicación será verdadera (recordar que una implicación solo es falsa cuando "V implica F").

Una conclusión que podemos obtener de esta regla es que se debe procurar que un argumento esté libre de cualquier tipo de contradicción, pues con que sólo exista una, de ella podrá derivarse absolutamente todo.

10.2.3 Principio del tercero excluido (PTE)

El principio del tercero excluido, propuesto y formalizado por Aristóteles, es uno de los principios fundamentales de la lógica tradicional y, a diferencia del principio anterior, es uno de los más intuitivos y simples de entender. Es un principio según el cual la disyunción de una proposición y su negación es siempre verdadera.

Es decir, la expresión

$$p \vee \neg p$$

Es siempre verdadera.

En lenguaje coloquial sería equivalente a los siguientes ejemplos:

"Corro o no corro"

“Miro la tele o no miro la tele”

“Apruebo o no apruebo”

“La luna es un satélite o la luna no es un satélite”

Etcétera…

Todas las expresiones anteriores son verdaderas, pues están formados por dos enunciados, en donde uno niega lo que se afirma en el otro, por lo tanto, uno de ellos es imprescindiblemente verídico, pues no hay una tercera posibilidad.

10.3 Formas normales

En lógica, definimos a las formas normales de un enunciado cuando escribimos la las proposiciones que lo conforman exclusivamente utilizando negaciones, disyunciones o conjunciones, es decir, prescindiendo de los condicionales y bicondicionales.

Si tenemos una proposición en donde aparezcan los símbolos → y ↔, podemos obtener una proposición equivalente que solo utilice ∨, ∧ o ¬ aplicando las reglas de inferencia, sustitución y derivadas que trabajamos en la clase pasada y en esta clase.

Además, dentro de las formas normales podemos distinguir en formas normales disyuntivas y conjuntivas.

10.3.1 Formas normales disyuntivas

Una fórmula está en forma normal disyuntiva, FND, cuando es una disyunción de conjunciones de proposiciones atómicas (o sus negaciones).

Por ejemplo, las siguientes proposiciones están escritas en FND

- p
- ¬p ∨ q
- (¬p ∧ q) ∨ q
- (q ∧ r ∧ ¬p) ∨ (¬q ∧ r) ∨ (¬q ∧ p)

Como vemos claramente en este último ejemplo, es una disyunción de conjunciones de proposiciones atómicas (o sus negaciones).

10.3.2 Formas normales conjuntivas

Una fórmula está en forma normal conjuntiva, FNC, cuando es una conjunción de disyunciones de proposiciones atómicas (o sus negaciones).

Por ejemplo, las siguientes proposiciones están escritas en FNC

- p

- $p \wedge r$
- $(\neg q \vee r) \wedge p$
- $(\neg p \vee q) \wedge (r \vee q)$
- $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (r \vee q) \wedge p$

Como vemos claramente, se trata de disyunciones de conjunciones de proposiciones atómicas (o sus negaciones).

Observación:

La proposición *p* es al mismo tiempo una FND y una FNC, pues puede ser escrita como "$p \vee p$" y como "$p \wedge p$".

Teorema. *Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en FNC y a una fórmula en FND.*

Pasos para convertir cualquier proposición en una FND o una FNC

1) Traducir $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ en términos de $\vee$, $\wedge$, $\neg$.
2) Trasladar las negaciones hasta que solo aparezcan asociadas a proposiciones simples (usando las leyes de De Morgan).
3) Eliminar dobles negaciones (usando: $\neg\neg A \equiv A$)[1].
4) Aplicar la distributividad de $\wedge$ respecto de $\vee$, hasta obtener una fórmula en FND. O bien aplicar la distributividad de $\vee$ respecto de $\wedge$, hasta obtener una fórmula en FNC.

Ejemplo

Pasar a FNC la proposición:

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

1) $(\neg\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q)$ *(aplicamos la ley de la implicación, clase 7)*
1) $\neg(\neg\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q)$ *(aplicamos la ley de la implicación, clase 7)*
2) $(\neg(\neg\neg p) \wedge \neg(\neg q)) \vee (\neg p \vee q)$ *(aplicamos la ley de De Morgan)*
3) $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$ (en este punto ya tenemos la FND $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p) \vee q$)
4) $\neg p \vee (\neg p \vee q) \wedge (q \vee (\neg p \vee q))$ (aplicamos distributiva de $\vee$)
5) $(\neg p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p \vee q)$ (quitamos los paréntesis y obtenemos la FNC)

[1] El símbolo ≡ representa la relación "es equivalente a"

En el ejemplo obtuvimos, en el paso 3, una FNC. Esto no ocurrirá en todos los casos.

Es así que tenemos para la proposición

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

Una FND es $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p) \vee q$

Y una FNC $(\neg p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p \vee q)$

10.4 Conjunto adecuado de conectivas

Un conjunto adecuado de conectivas es un conjunto tal que toda proposición puede representarse por medio de una fórmula bien formada en la que sólo aparezcan conectivas de dicho conjunto.

Propiedad 1

El conjunto $\{\vee, \wedge, \neg\}$ es un conjunto adecuado de conectivas.

En efecto, en el apartado anterior de esta clase establecimos que toda proposición se puede escribir como una forma normal conjuntiva o disyuntiva, es decir, utilizando solo los conectores $\{\vee, \wedge, \neg\}$.

Propiedad 2

Los conjuntos $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivas.

Ejemplo

Dado que $\{\neg, \vee\}$ es un conjunto adecuado de conectivas, cualquier proposición se puede expresar usando solamente sus conectivos, haciendo uso de las equivalencias lógicas (por ejemplo, las que vimos a partir de la clase 7).

Además, pueden comprobarse haciendo uso de las correspondientes tablas de verdad.

A modo de ejemplo, vamos a representar al bicondicional con el conjunto adecuado de conectivas $\{\neg, \vee\}$ (el símbolo $\equiv$ representa "es equivalente a").

$(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \equiv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$

Por lo tanto $p \leftrightarrow q$ es equivalente a $\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)$

Esta última fórmula utiliza el conjunto adecuado de conectivas $\{\neg, \vee\}$.

Por supuesto, una primera pregunta que se plantearía es si es posible representar la conjunción usando en el conjunto $\{\neg, \vee\}$. La respuesta es sí, es posible, pues es un conjunto adecuado de conectivas. Dicha representación se lleva a cabo con la ayuda de las leyes de De Morgan.

Es decir:

$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

Pues si aplicamos De Morgan a la expresión de la derecha, obtendremos la de la izquierda:

$\neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg\neg p \wedge \neg\neg q \equiv p \wedge q$

De manera similar se puede representar la disyunción $\vee$ mediante el conjunto $\{\neg, \wedge\}$.