Clase 10

Transformaciones lineales y transformaciones matriciales

9.1 Introducción

Un pensamiento sistémico implica pensar sobre sistemas de conceptos, donde el significado de un concepto está basado en sus relaciones con otros, no con cosas o eventos; de acuerdo con los investigadores, se divide en definicional, demostrativo e hipotético. Consideramos que la presencia de un pensamiento sistémico en la adquisición de conceptos desempeña un papel importante en la didáctica de las matemáticas.

Para el tema de transformación lineal, que concierne al álgebra lineal, por ser un tópico central relacionado con conceptos como espacio vectorial, combinación lineal, base, valores y vectores propios, entre otros. Además, las transformaciones lineales juegan un papel importante en muchas áreas de las matemáticas, así como en numerosos problemas aplicados en las ciencias físicas, económicas y sociales.

En esta ocasión desarrollaremos las transformaciones lineales, sus propiedades y transformaciones matriciales.

10.2 Transformaciones lineales

Definición

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector v $\in$ V un vector único T(v) $\in$ W y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar c :

a) T (u + v) = T(u) + T(v)

b) T (c u) = c T(u)

Nota: Si en particular V=W $\Rightarrow$ T: V$\to$V se llama Operador Lineal.

Ejemplo 1

T: $R^3 \to R^2$ definida por T (x, y, z) = (x, y).

Veamos si T cumple las condiciones a) y b) de la definición:
Aquí u y v son vectores de R^3 entonces u = (x_1, y_1, z_1) y v = (x_2, y_2, z_2) y sea c $\in$ R.
a) T [$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$] = T $(x_1+ x_2, y_1+ y_2, z_1+ z_2)$ = $(x_1+ x_2, y_1+ y_2)$ **(1)**

T (x_1, y_1, z_1) + T (x_2, y_2, z_2) = $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+ x_2, y_1+ y_2)$ **(2)**

(1) = **(2)** $\Rightarrow$ T [$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$] = T (x_1, y_1, z_1) + T (x_2, y_2, z_2)

b) T [c. (x, y, z)] = T (cx, xy, cz) = (cx, cy) (3)

$c.T(x, y, z) = c.(x, y) = (cx, cy)$ (4)

(3) = (4) $\Rightarrow T[c.(x, y, z)] = c.T(x, y, z)$

Las dos condiciones se cumplen por lo tanto T es transformación lineal

Ejemplo 2

$T: V \rightarrow W \,/\, T(v) = 0, \forall\, v \in V$. **Transformación Nula.**

Veamos que así definida es una TL.

Sean u y v $\in$ V y c $\in$R.

a) $T(u + v) = 0$ (1)

$T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0$ (2)

(1) = (2) $\Rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v)$

b) $T(c\,u) = 0 = c\,0$ (3)

$c\,T(u) = c.\,0 = 0$ (4)

(3) = (4) $\Rightarrow T(c.u) = c.\,T(u)$

Por lo tanto, T es transformación lineal

Ejemplo 3

$T: V \rightarrow V \,/\, T(v) = v$ **(transformación Identidad)**

a) $T(u + v) = u + v$ (1)

$T(u) + T(v) = u + v$ (2)

(1) = (2) $\Rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v)$

b) $T(c\,u) = c\,u$ (3)

$c\,T(u) = c.\,u$ (4)

(3) = (4) $\Rightarrow T(c.u) = c.\,T(u)$

Por lo tanto, T es una Transformación Lineal.

Ejemplo 4

$T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $T(x,y) = (x+y\,,\, x- y)$.

Sean $u = (x_1.y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ vectores de R^2 y sea $c \in R$. Veamos que:

a) $T[(x_1, y_1) + (x_2,y_2)] = T(x_1+x_2\,,\, y_1+y_2)$

$= ((x_1+x_2) +(y_1+y_2), (x_1+x_2) - (y_1+y_2))$

$= (x_1+x_2 + y_1+y_2, x_1+x_2 - y_1 - y_2)$ (1)

$T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2) = (x_1+ y_1 , x_1 - y_1) + (x_2+ y_2 , x_2 - y_2)$

$= (x_1+ y_1 + x_2+ y_2, x_1 - y_1 + x_2 - y_2)$ (2)

(1) = (2) se cumple 1era condición de la definición.

b) $T[c(x,y)] = T(cx, cy) = (cx+ cy, cx - cy)$ (3)

$c\,T(x,y) = c(x+y, x-y) = (c.(x+y) ,c.(x-y)) = (cx + cy , cx - cy)$ (4)

(3) = (4) se cumple 2da condición de la definición.

Por lo tanto, T es una TL.

Ejemplo 5

T: $R^{nxn} \to R^{nxn}$ definida por T (A) = AT

T(0) = 0T = 0 (matriz nula) . Esto dice que T puede o no ser T.L.

Para A y B matrices de orden nxn :
a) $T (A+B) = (A+B)^T$ (1)
$T (A) + T(B) = A^T+ B^T$ (2)
(1) = (2) $\Rightarrow$ se cumple 1era condición de la definición.

b) T(c.A) = (c.A)T (3)
c.T(A) = c. (A)T (4)

(3) = (4) $\Rightarrow$ se cumple 2da condición de la definición

Por lo tanto, T es T.L.

10.3 Propiedades de las transformaciones lineales

Si T: V$\to$W es TL entonces cualesquiera sean $v_1,v_2 \in V$ y $c_1,c_2 \in R$ se verifica que:

$$T(c_1v_1+c_2 v_2) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2)$$

En general:

$$T(c_1 v_1+c_2 v_2+\ldots+c_nv_n) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \ldots + c_n T(v_n)$$

Es decir, T conserva las combinaciones lineales.

TEOREMA 1

Si T: V$\to$W es TL. Entonces:
a) $T(0_v) = 0_w$ (donde 0_v : vector nulo de V y 0_w : vector nulo de W)
b) $T(-u) = -T(u)$, $\forall$ u $\in$V
c) $T(u - v) = T(u) - T(v)$

Ejemplos de aplicaciones que no son transformaciones lineales

Ejemplo 1

$T(u) = u + u_0$ con $u_0 \neq 0$ (fijo).

$T(0) = 0 + u_0 \neq 0 \Rightarrow$ T no es una TL.

Analicemos igualmente las dos condiciones:

a) $T(u+v) = (u + v) + u_0$ (1)

$T(u) + T(v) = (u + u_0) + (v + u_0) = u + v + 2.u_0$ (2)

Pero (1) ≠ (2) ⇒ $T(u+v) \neq T(u) + T(v)$

b) $T(cu) = cu + u0_0$ (3)
$cT(u) = c(u + u0_0) = cu + cu0_0$ (4)
(3) ≠ (4) ⇒ $T(cu) \neq c\,T(u)$

Ejemplo 2

T: $R3x3^{3X3} \rightarrow R$ / $T(A)= |A|$
$T(0) = |0| = 0$

a) $T(A + B) = |A + B|$ **(1)**

$T(A) + T(B) = |A| + |B|$ **(2)**

(1) ≠ **(2)** ⇒ no se cumple a) Por lo tanto T no es T.L.

b) $T(c.A) = c.A = c^3\,|A|$ (3)

$c.T(A) = c.\,|A|$ (4)

(3) ≠ (4) ⇒ no se cumple

TEOREMA 2

Sea T: V→W una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n en un espacio vectorial W y sea $S = \{ v_1, v_2, ...v_n\}$ una base ordenada para V. Si u es cualquier vector en V entonces T(u) queda determinado por el conjunto $\{ T(v_1), T(v_2), ...T(v_n) \}$

Ejemplo 3

Sea L: $R^3 \rightarrow R^2$ una T.L tal que : L(1, 0, 0) = (2, -1) , L(0, 1, 0) = (3, 5) , L(0, 0, 1) = (2, 3) . Calcular:

a) L(1, -4, 3)

b) L(x, y, z)

a) S= {(1, 0, 0) ; (0, 1, 0); (0, 0, 1)} es la base canónica de R^3.

(1, -4, 3) = c_1 (1, 0, 0) + c_2 (0, 1, 0) + c_3 (0, 0, 1)

Aquí c_1 = 1 ; c_2 = -4 ; c_3 = 3

(1, -4, 3) = 1. (1, 0, 0) + (-4). (0, 1, 0) + 3.(0, 0, 1)

L(1, -4, 3) = 1. L(1, 0, 0) + (-4). L(0, 1, 0) + 3.L(0, 0, 1)

L(1, -4, 3) = 1. **(2, -1)** + (-4). **(3, 5)** + 3. **(2, 3)**

Entonces L(1, -4, 3) = (-4, -2)

b) (x, y, z) = c_1 (1, 0, 0) + c_2 (0, 1, 0) + c_3 (0, 0, 1)

c_1 = x ; c_2 = y ; c_3 = z

(x, y, z) = x (1, 0, 0) + y (0, 1, 0) + z (0, 0, 1)

L(x, y, z) = x. L(1, 0, 0) + y. L(0, 1, 0) + z. L(0, 0, 1)

L(x, y, z) = x .(2, -1) + y .(3, 5) + z . (2, 3)

L (x, y, z) = (2x + 3y + 2z , -x +5y + 3z)

Ejemplo 4

Sea S={v_1(1,1,1); v_2(1,1,0); v_3(1,0,0)} base de R_3, y sea T:$R_3 \rightarrow R_2$ una Transformación Lineal tal que: T(v_1) = (1,0); T(v_2) = (2,-1); T(v_3) = (4,3)

a) Obtener una fórmula para T(x,y,z)
b) Según lo obtenido calcular T(2,-3,5)

a) como S es base para R_3, entonces:

(x,y,z) = k_1(1,1,1) + k_2(1,1,0) + k_3(1,0,0)   (1)

$$\text{De (1)} \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = x \\ k_1 + k_2 = y \\ k_1 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_3 = x - y \\ k_2 = y - z \\ k_1 = z \end{cases}$$

(x,y,z) = z.(1,1,1) + (y − z).(1,1,0) + (x − y).(1,0,0)

T(x,y,z) = z.T(1,1,1) + (y − z).T(1,1,0) + (x − y).T(1,0,0)

T(x,y,z) = z.(1,0) + (y - z).(2,-1) + (x - y).(4, 3)

T(x,y,z) = (z , 0) + (2y- 2z , -y + z) + (4x - 4y , 3x - 3y)

T(x,y,z) = (4x - 2y - z , 3x -4y +z)

b) Usando la fórmula obtenida antes: T(2,-3,5) = (9,23)

Ejemplo 5

Sea L: $P_1 \rightarrow P_2$ una T.L. para la cual se sabe que L(x+1) = x_2 − 1 ; L(x-1) = x_2 + x . Calcular L(7x + 3).

S = { x+1, x-1} es base para P_1 (Verificarlo)

$$7x+3 = c_1 (x+1) + c_2 (x-1)$$

$$7x+3 = (c_1 + c_2)x + (c_1 - c_2)$$

$$\text{Aquí: } c_1 + c_2 = 7$$

$$c_1 - c_2 = 3$$

Resolviendo el sistema anterior $c_1 = 5$ y $c_2 = 2$

$$7x+3 = 5 (x+1) + 2 (x-1)$$

$$L (7x+3) = 5 L(x+1) + 2 L(x-1)$$

$$L (7x+3) = 5 (x^2 - 1) + 2 (x^2 + x)$$

$$L (7x+3) = 7x^2 + 2 x - 5$$

10.4 Matriz de una transformación lineal

TEOREMA

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión n y m ($n \neq 0$, $m \neq 0$) respectivamente , L: V $\rightarrow$W transformación lineal y sean S = $\{v_1, v_2, ...v_n\}$ y T = $\{w_1, w_2, ...w_m\}$ bases de V y W . Entonces la matriz A de mxn cuya j-ésima columna es el vector de coordenadas $[L(v_j)]_T$ de $L(v_j)$ con respecto a T, se asocia con L y tiene la siguiente propiedad: si $x \in V$ entonces

$$[L(x)]_T = A \, . \, [x]_S$$

Además, A es la única matriz con esta propiedad.

Definición

La matriz A del teorema anterior se conoce como la matriz que representa a L con respecto a las bases S y T , o la matriz de l con respecto a S y T.

Procedimiento para hallar la matriz de una transformación lineal

El procedimiento para calcular la matriz de una transformación lineal L: V $\rightarrow$W con respecto a las bases S = $\{v_1, v_2, ...v_n\}$ y T = $\{w_1, w_2, ...w_m\}$ para V y W respectivamente es el siguiente :

Paso 1: Calcular $L(v_j)$ para j = 1,2,…n.

Paso 2: Determinar el vector de coordenadas de $L(v_j)$ con respecto a la base T, es decir $[L(v_j)]_T$. Esto significa que $L(v_j)$ debe expresarse como combinación lineal de los vectores en T.

Paso 3: La matriz A de L se forma eligiendo como la jésima columna de A al vector $[L(v_j)]_T$.

Ejemplo 1

Sea L: $R^3 \rightarrow R^2$ definida como L (x, y, z) = (x + y , y - z) . Determinar la matriz de L con respecto a las bases S = { (1, 0, 1) ; (0, 1, 1) ; (1, 1, 1) } y T = { (1, 2) ; (-1, 1) }.

1º) Calculamos los transformados de c/u de los vectores de la base S y para c/u de éstos encontramos su vector coordenado de respecto de la base T.

L(1, 0, 1) = (1, -1) ; L(0, 1, 1) = (1, 0) ; L(1, 1, 1) = (2, 0)

2º) Determinamos los vectores coordenados

$[L(1, 0, 1)]_T$; $[L(0, 1, 1)]_T$; $[L(1, 1, 1]_T$

L(1, 0, 1) = (1, -1) = k_1(1, 2) + k_2 (-1, 1)

$$\begin{cases} k_1 - k_2 = 1 \\ 2k_1 + k_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow k_1 = 1; k_2 = -1 \Rightarrow [L(1,0,1)]_T = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L(0, 1, 1) = (1, 0) = k_3(1, 2) + k_4 (-1, 1)

$$\begin{cases} k_3 - k_4 = 1 \\ 2k_3 + k_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow k_3 = \frac{1}{3}; k_4 = -\frac{2}{3} \Rightarrow [L(0,1,1)]_T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

L(1, 1, 1) = (2, 0) = k_5(1, 2) + k_6 (-1, 1)

$$\begin{cases} k_5 - k_6 = 2 \\ 2k_5 + k_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_5 = \frac{2}{3}; k_6 = -\frac{-4}{3} \Rightarrow [L(1,1,1)]_T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

3º) Armamos la matriz de L colocando como columnas de la misma los vectores resultantes en el paso anterior, en el orden en que fueron obtenidos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ -1 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Sea T: $R^2 \rightarrow R^3$ tal que T(x, y) = (y , -5x + 13y , -7x + 16y)

Hallar la matriz de A de T respecto a las Bases:

$B = \{(3,1);(5,2)\}$ y $B' = \{(1,0,-1);(-1,2,2);(0,1,2)\}$

1º) Calculamos los transformados de c/u de los vectores de la base B y para c/u de estos encontramos su vector coordenado de respecto de la base B´.

T(3,1) = k_1(1,0,-1)+k_2(-1,2,2)+k_3(0,1,2)

$$\begin{cases} k_1 - k_2 = 1 \\ 2k_2 + k_3 = -2 \\ -k_1 + 2k_2 + 2k_2 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \approx \cdots \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = 1\,;\; k_2 = 0\,;\; k_3 = -2$$

$[T(3,1)]_{B^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ Primera columna de A.

De igual forma

T(5,2) = (2,1,3) = k_1(1,0,-1)+k_2(-1,2,2)+k_3(0,1,2)

$$\begin{cases} k_1 - k_2 = 2 \\ 2k_2 + k_3 = 1 \\ -k_1 + 2k_2 + 2k_2 = 3 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se tiene que: k_1=3 ; k_2=1 ; k_3=-1

$[T(5,2)]_{B^1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Segunda columna de A.

2º) Formamos la matriz A representativa de T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

Sea T: $P_1 \to P_2$ tal que T (p(x)) = x . p(x)

Encontrar la matriz de A de T con respecto a las bases estándar:

B = {1 , x } ; B` = { 1, x, x^2 }

T(1)=x.1=x ⇒ x=k_1(1)+k_2(x)+k_3(x^2) ⇒ k_1=0 ; k_2=1 ; k_3=0

$\Rightarrow [T(1)]_{B^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

T(x)=x.x=x^2 ⇒ x^2=k_4(1)+k_5(x)+k_6(x^2)

$$\Rightarrow [T(x)]_{B^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$