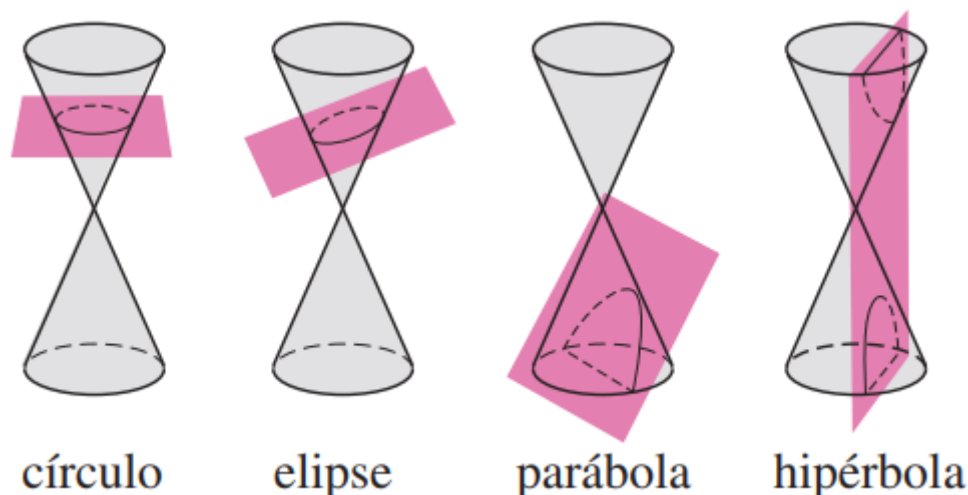


Clase 14

Secciones cónicas no degeneradas, superficies cuadráticas

14.1 Introducción

Hipatia fue la primera mujer en la historia de las matemáticas de la que se conoce bastante. Nació en Alejandría, en 370 a.C., tuvo renombre como matemática y filósofa. Entre sus escritos se destaca *Sobre las cónicas de Apolonio*, que popularizó el trabajo de **Apolonio** 1200 a.C. sobre cónicas, que se pueden obtener cortando un cono doble invertido con un plano. Son el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. Vea la **FIGURA 1**. Al cerrar el periodo griego, se desvaneció el interés en las cónicas; después de Hipatia, el estudio de esas curvas desapareció durante más de 1000 años.



En el siglo xvii, Galileo demostró que, en ausencia de resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil describe un arco parabólico. Más o menos por ese tiempo, Johannes Kepler supuso que las órbitas de los planetas en torno al Sol son elipses, y que el Sol está en uno de los focos. Después, Isaac Newton a través de los métodos del cálculo recién desarrollados verificó esta teoría. Kepler también experimentó con las propiedades reflectoras de los espejos parabólicos, investigaciones que aceleraron el desarrollo del telescopio reflector. Los griegos conocieron pocas de estas aplicaciones prácticas. Habían estudiado las cónicas por su belleza y por sus intrigantes propiedades. En esta ocasión examinaremos tanto las propiedades como las aplicaciones modernas de estas

curvas.

Más que usar un cono, indicaremos cómo se definen la parábola, elipse e hipérbola mediante una distancia. Por medio de un sistema de coordenadas rectangulares y una fórmula para determinar la distancia obtendremos ecuaciones de las cónicas. Cada una de ellas estará en forma de una ecuación cuadrática de las variables x y y :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en donde A, B, C, D, E y F son constantes.

14.2 Canónicas

Un doble cono recto es la figura que engendra una recta g al girar alrededor de una recta h que la corta. La recta h se denomina *eje del cono* y las distintas de g , *generatriz del cono*; el punto de intersección del eje con una cualquiera de las generatrices del cono se denomina *vértice*.

Toda figura plana que se obtiene como intersección de un doble cono recto con un plano que le corta se denomina *sección canica*.

Según las distintas posiciones del plano de corte las secciones cónicas, o simplemente cónicas, reciben nombres diferentes, que dan a continuación (figura 2).

- a) Si el plano es perpendicular al eje del cono, y no pasa por el vértice, la cónica se denomina una circunferencia. En el caso especial de que el plano pase por el vértice se obtiene un punto.
- b) Si el plano no es perpendicular al eje del cono y forman entre si un ángulo superior al ángulo que forman el eje del cono y una cualquiera de las generatrices, la cónica resultante se denomina *elipse*, salvo en el caso especial en que el plano pase por el vértice, en cuyo caso se obtiene un *punto*.
- c) Si el plano es paralelo a una cualquiera de las generatrices la cónica se denomina *parábola*, excepto si el plano pasa por el vértice, cuyo caso se obtiene una *recta*.

d) Si el ángulo que forman el plano y el eje de giro es inferior al ángulo que forman el eje y una cualquiera de las generatrices, la cónica se denomina *hipérbola*, salvo en el caso especial en que el plano pase por el vértice, en cuyo caso se obtienen *dos rectas que se cortan*.

Los casos especiales que aparecen en los casos anteriores se denominan *secciones cónicas degeneradas* y son puntos, o rectas o pares de rectas que se cortan.

14.2.1 La circunferencia

En la circunferencia la distancia del vértice V a un punto P de la circunferencia es constante, como \overline{VC} es fijo, donde C es el punto de intersección del plano y el eje del cono (figura 3), se tiene que $\|\overline{CP}\| = \sqrt{\|\overline{VP}\|^2 - \|\overline{VC}\|^2}$ es constante para todo P de la circunferencia.

Proposición 1

Una circunferencia es conjunto de puntos P de un plano π que satisfacen que su distancia a un punto fijo C , llamado centro, es constante se denomina *radio de la circunferencia*.

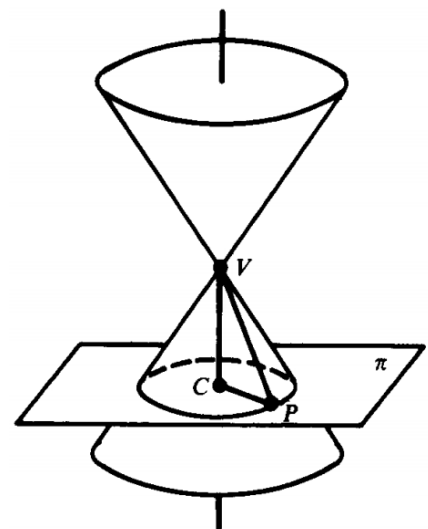
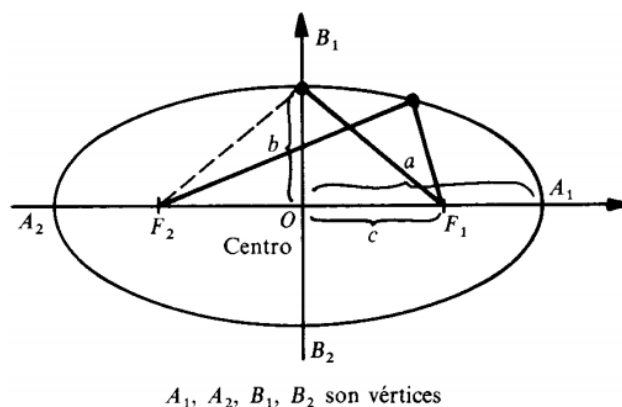


Figura 3

14.2.2 La elipse y la hipérbola

Proposición 2

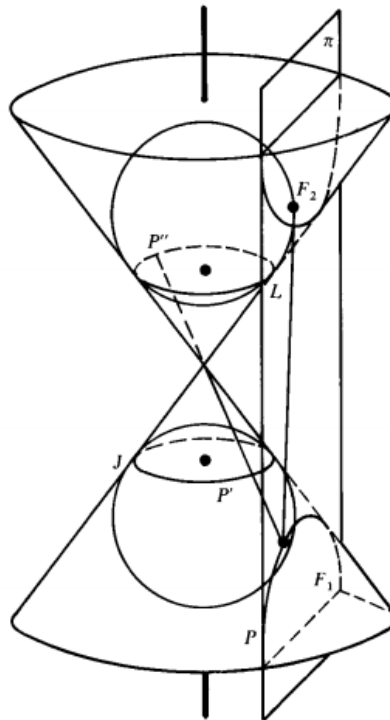
Una elipse es el lugar geométrico de los puntos A del plano cuya suma de las distancias de A a dos puntos fijos y distintos, llamados focos, F_1 y F_2 , es constante ($\|\overline{AF_1}\| + \|\overline{AF_2}\| = \text{constante}$)



Para todo punto A de una elipse se tiene que $\|\overline{AF_1}\| + \|\overline{AF_2}\| = 2a$

Proposición 3

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos y distintos, F y F , llamados focos, es constante en valor absoluto ($|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = \pm 2a$, con a constante).



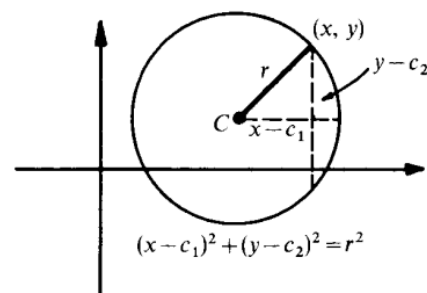
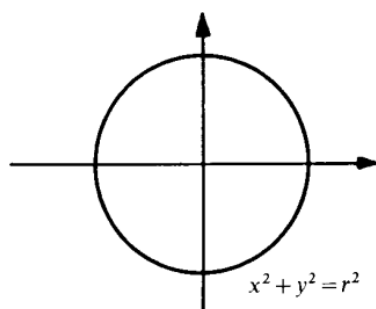
14.3 Ecuaciones de las cónicas en un sistema de coordenadas cartesianas

Es conocido que la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio r es

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

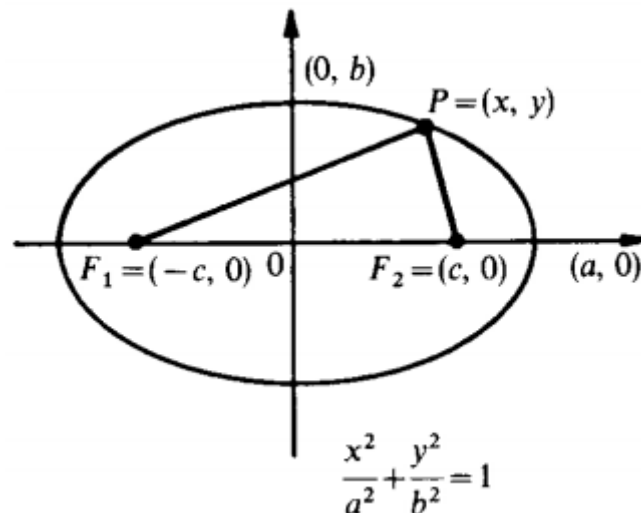
mientras que si su centro está en el punto $C = (c_1, c_2)$ su ecuación es

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$



Trataremos de hallar ahora la ecuación de una elipse de semieje principal (o mayor) a y los focos situados en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ con $a > c$. Utilizando la proposición de la sección 14.2.2 tenemos.

$$2a = \|PF_1\| + \|PF_2\| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$



Poniendo la primera de las raíces en el primer termino y elevando el cuadrado se tiene

$$4a^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = y^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

que una vez simplificado nos permite obtener

$$a^2 + cx = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando de nuevo al cuadrado se obtiene

$$a^4 + 2cxa^2 + c^2x^2 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

Teniendo en cuenta que $b^2 = a^2 - c^2$ obtenemos

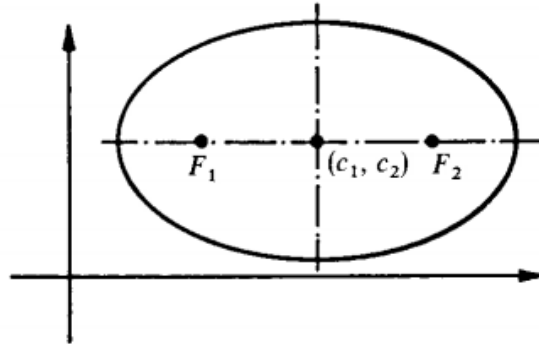
$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

que puede escribirse de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

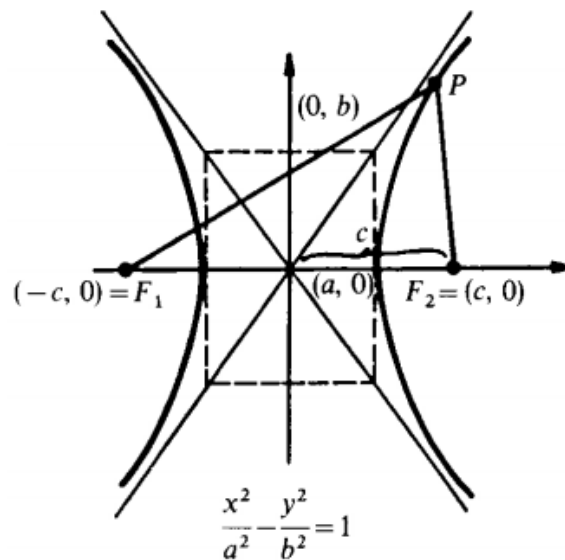
Si la elipse tiene su centro en el punto (c_1, c_2) y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados su ecuación es

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$$



Para hallar la ecuación de una hipérbola de semieje mayor a y focos en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ se procede como en el caso anterior, mediante la utilización de la proposición 3

$$\pm 2a = \|\overline{PF_2}\| - \|\overline{PF_1}\| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$



Por tanto,

$$4a^2 \pm 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + y^2$$

que simplificado nos permite obtener

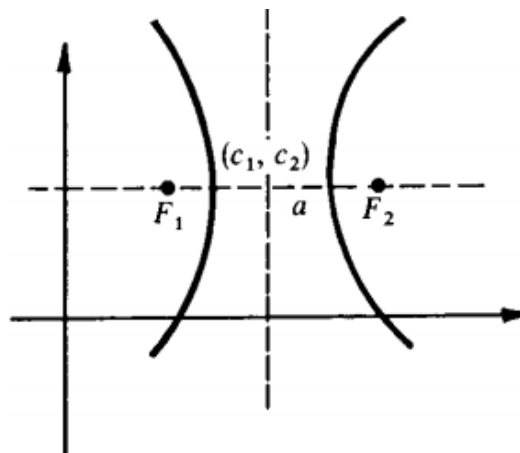
$$a^2 + xc = \mp a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Elevando de nuevo al cuadrado y teniendo en cuenta que $b^2 = a^2 - c^2$ se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

Si la elipse tiene su centro en el punto (c_1, c_2) y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados su ecuación es

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$$

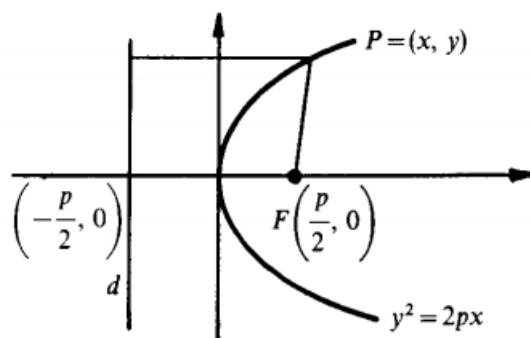


Observación. Si la elipse tiene los focos en el eje OY, su ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

con $a > b$, y si se trata de una hipérbola su ecuación es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

La ecuación de una parábola de directriz $x = -\frac{p}{2}$ y un foco en el punto $(\frac{p}{2}, 0)$ se obtiene de

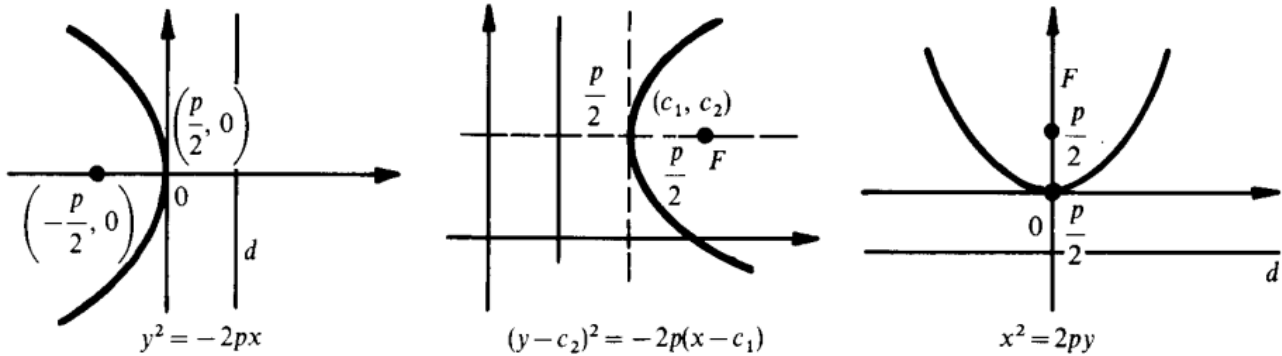
$$\|\overline{PF}\| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = d(P, d) = x + \frac{p}{2}$$



Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene

$$y^2 = 2px \quad (4)$$

Algunos casos más, con sus ecuaciones, se dan en las figuras siguientes.



Las ecuaciones (1), (2), (3), y (4) reciben de forma canónica de la cónica correspondiente y es conveniente observar que en la forma canónica el eje principal coincide con el eje OX.

14.4 Superficies cuadráticas

Además de los cilindros, existen otras formas geométricas en el espacio. Para ser precisos, hay seis superficies espaciales que describen fenómenos reales muy frecuentemente. Primero es necesario saber cómo distinguir la ecuación de una superficie cuadrática. Como primer indicador, siempre en una superficie cuadrática existen las tres variables espaciales x , y y z . De solo poseer una ecuación dos variables, se trataría de un cilindro. La siguiente señal es que al menos dos de esas variables están elevadas al cuadrado. En general, las superficies cuadráticas son de la forma:

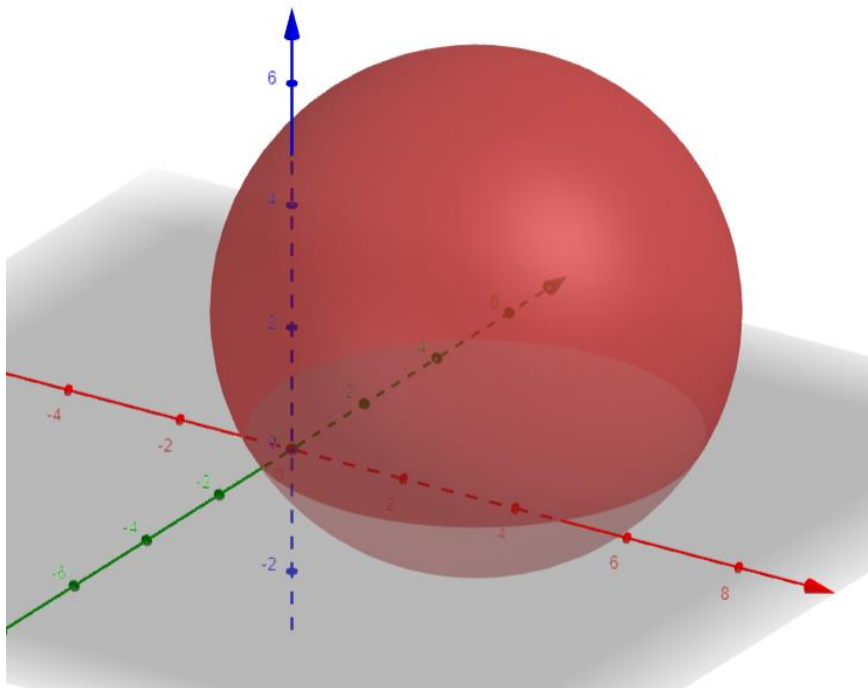
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

Aunque son seis las superficies cuadráticas, es importante mencionar una superficie especial: la esfera. La esfera es una figura geométrica bastante conocida y común. Hasta los planetas son muy similares a esferas.

Matemáticamente, las esferas poseen una representación algebraica como la siguiente:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - r)^2 = r^2$$

La anterior es una ecuación reducida para una esfera de radio r y con centro en el punto $C(a,b,c)$. Parece mucho a una circunferencia en un plano de dos dimensiones. De hecho, la abstracción al espacio tridimensional es inmediata. La definición forma de una esfera es un conjunto de todos los puntos (x,y,z) que son equidistantes a un punto fijo llamado centro.

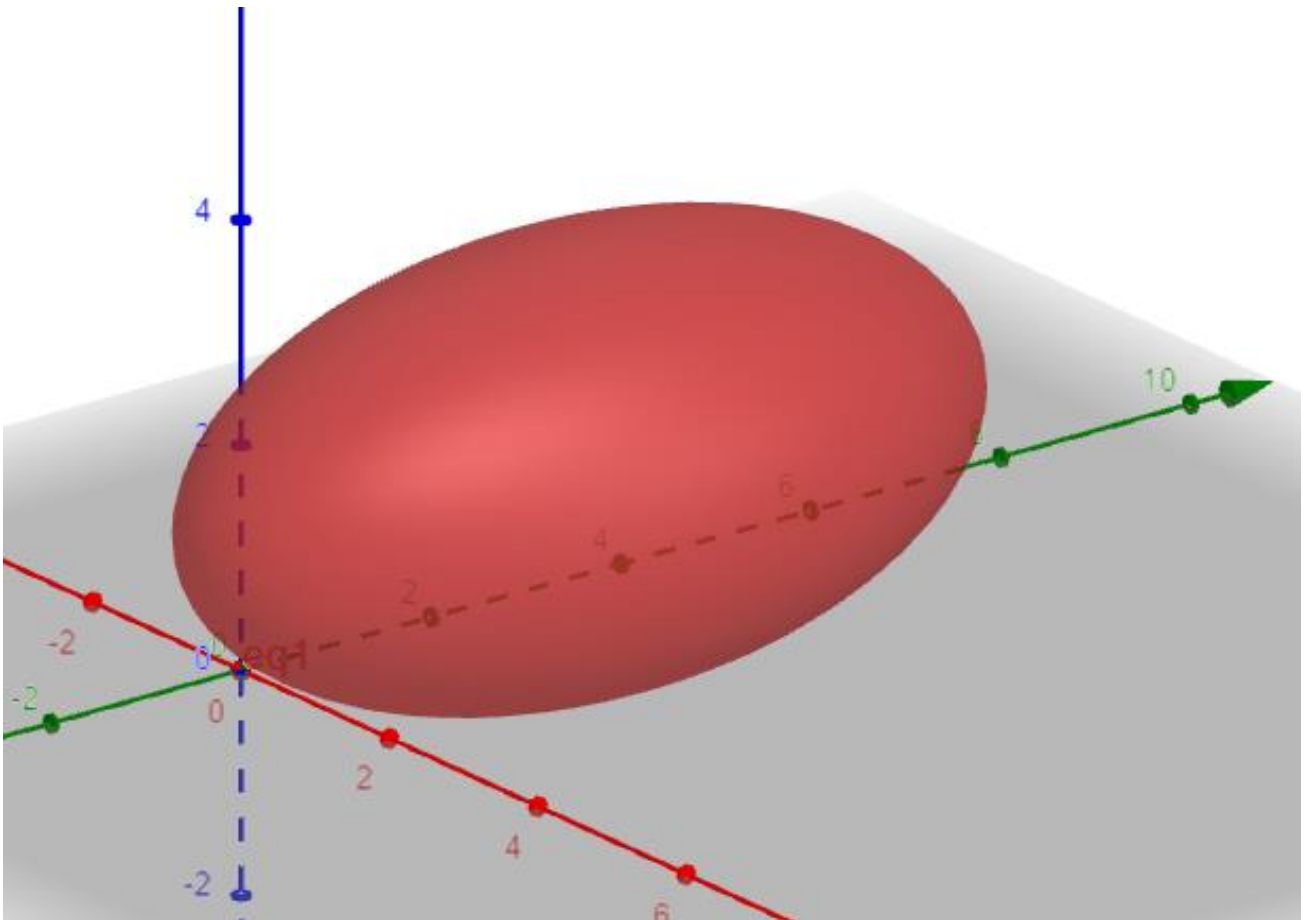


Ahora, habiendo explicado la anterior superficie, continúan las 6 superficies cuadráticas (oficialmente hablando). Dichas formas espaciales son: el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, el cono elíptico, el paraboloide y el paraboloide hiperbólico.

Elipsoide

El elipsoide es una superficie cuadrática fácil de identificar. Las características de su forma algebraica es que las tres variables x , y , y z están elevadas al cuadrado y todas son positivas. Además, en su forma más simple, están igualadas a 1. La ecuación reducida de un elipsoide es:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$



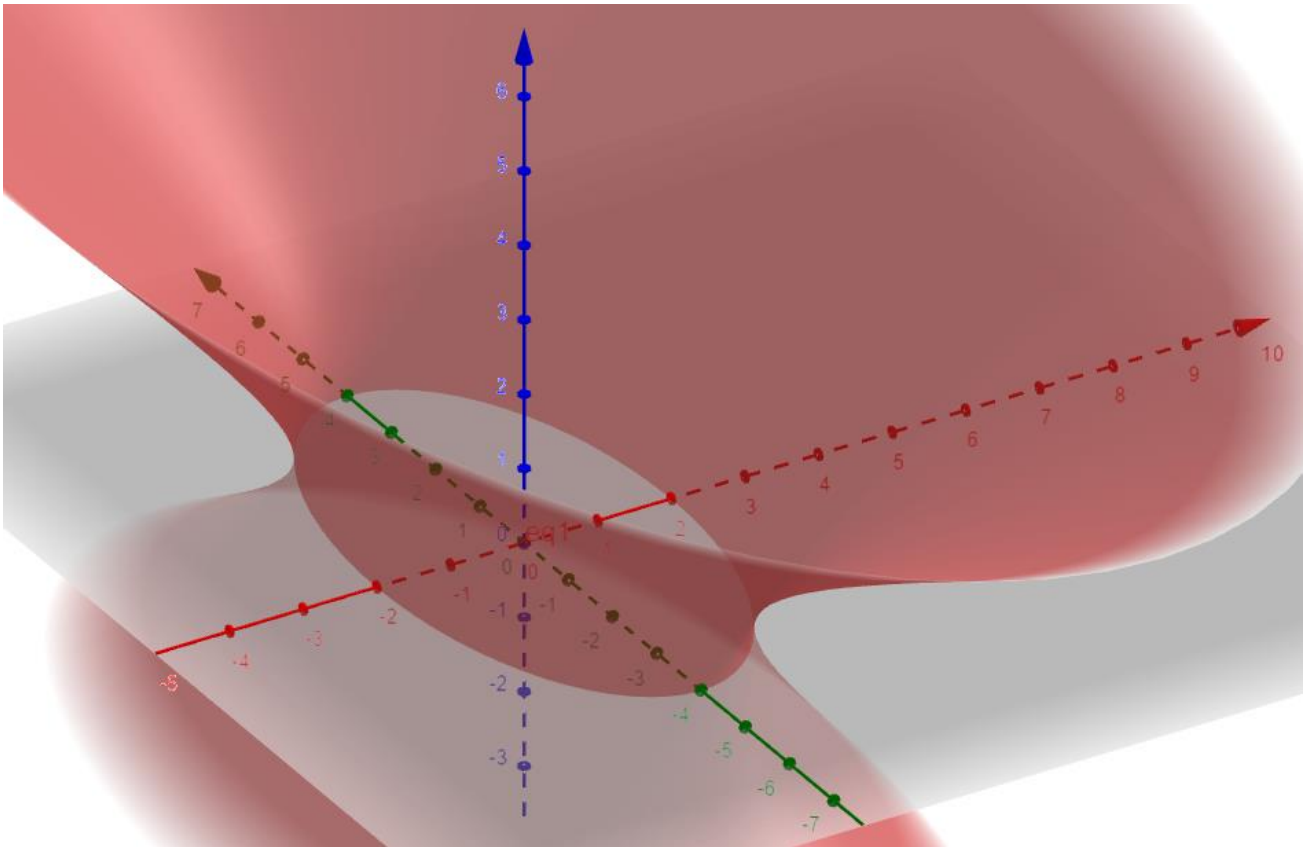
Hiperboloide de una hoja

El hiperboloide de una hoja es una forma que parece familiar al verla pero que en realidad no es tan común en la naturaleza visible. El hiperboloide se puede entender como la revolución de una hipérbola sobre el eje que por el que no pasan los vértices, adquiriendo así volumen.

La ecuación de un hiperboloide se identifica porque, en primer lugar, todas las variables están igualadas a 1. Sin embargo, una de ellas es negativa. De hecho, las variables que es negativa será la que indique hacia que eje abre el hiperboloide. La ecuación, pues, de un hiperboloide de una hoja es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

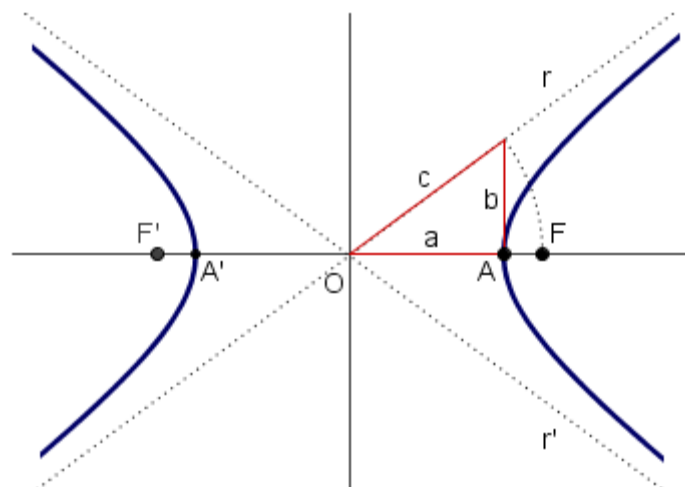
Las constantes a , b y c designan la extensión en los ejes de cada variable. En el caso anterior, el hiperboloide tiene su centro en el origen, sin embargo, esto puede cambiar si se suman o restan valores a las variables lineales y el resultado se eleva al cuadrado.



En este ejemplo, el hiperboloide abre hacia el eje z pues es esa la variable que es negativa. No en todas las superficies cuadráticas hay que guiarse por el signo de las variables sino en cuál es la que se diferencia del resto. A veces que sea negativa no es la señal que se busca.

Hiperboloide de dos hojas

El hiperboloide de dos hojas es la revolución de una hipérbola sobre el eje por el que sí pasan los vértices. El resultado es una figura segmentada. Por ejemplo, una hipérbola horizontal con centro en el origen.

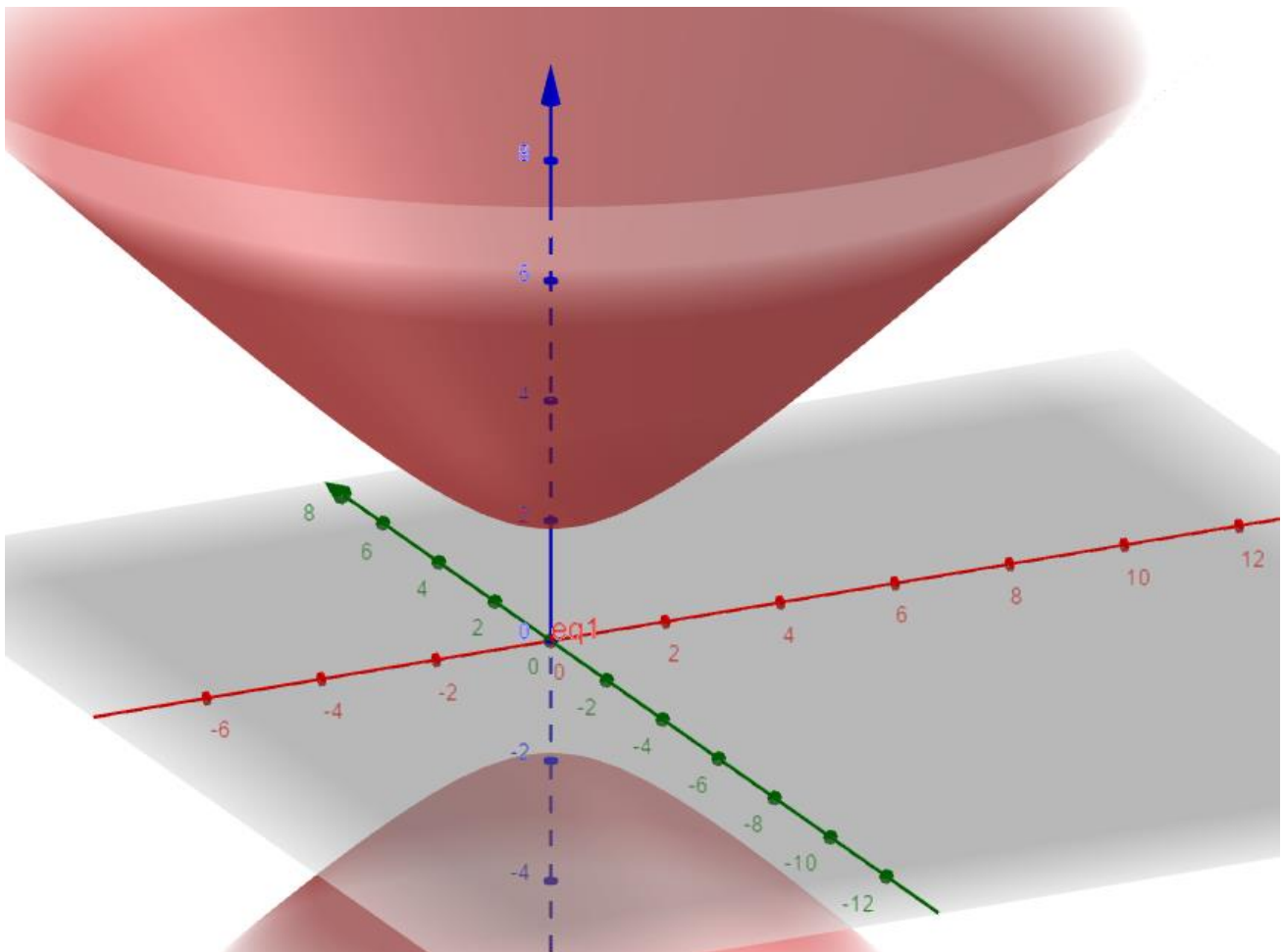


Al rotarse respecto al eje y se obtiene un hiperboloide de una hoja. Pero al rotarse respecto al eje x, el resultado es un hiperboloide de dos hojas.

La ecuación algebraica de esta superficie cuadrática es igual a la anterior, pero en este caso son dos de las variables las que son negativas. Para identificar el eje hacia donde abre este hiperboloide hay que ubicar la variable que es positiva, aquella que se diferencia de las demás. Todo está igualado a 1.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

El caso anterior es el de un hiperboloide de dos hojas con centro en el origen y que abre hacia el eje z. La variable z es positiva mientras que las x y y son negativas. La gráfica se ve así:



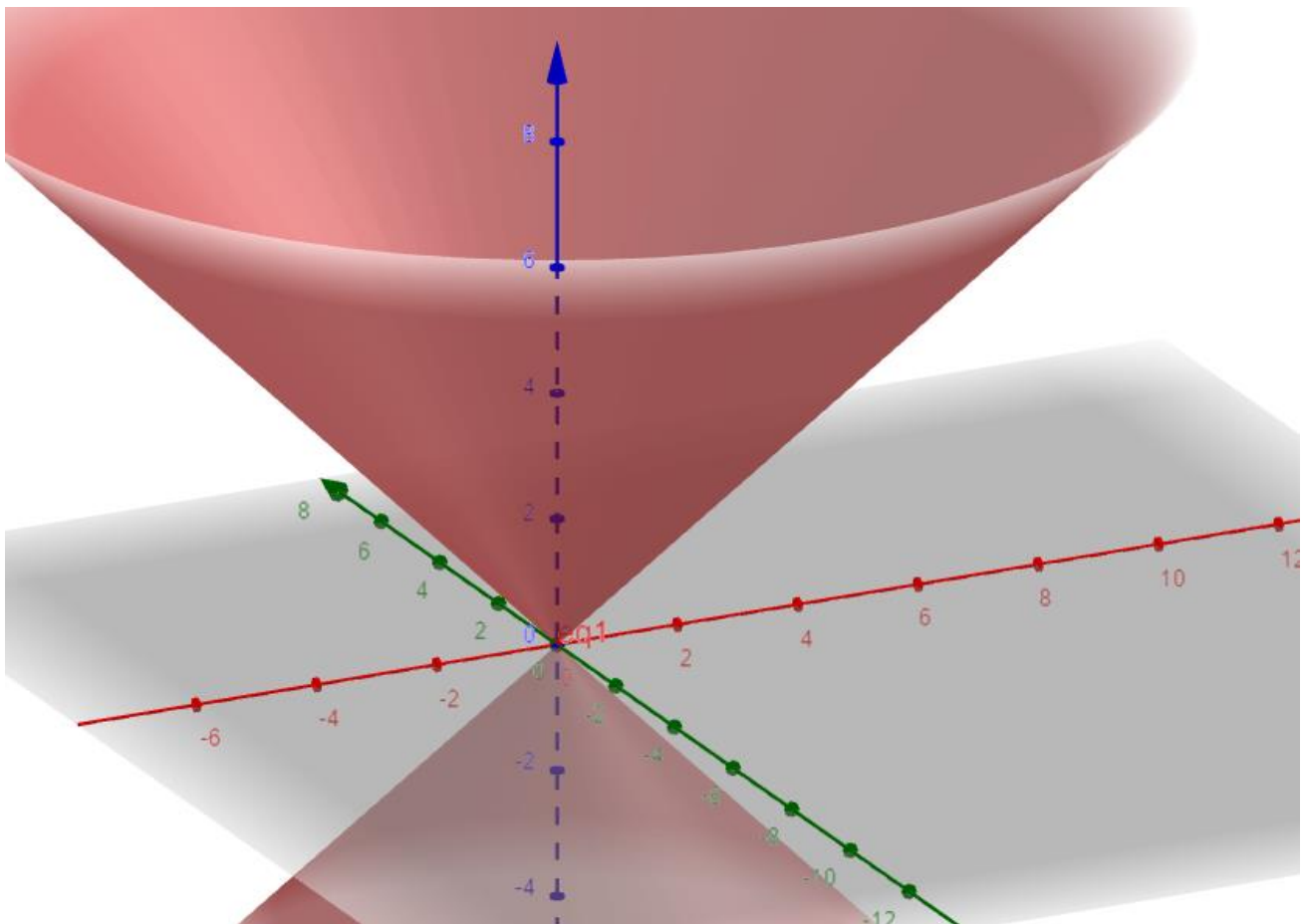
Cono

El cono o cono elíptico es una superficie cuadrática que es similar en cierta forma a un hiperboloide de una hoja. La diferencia es que su forma es más recta y existe un punto de convergencia del que emergen dos formas cónicas. Esto se verá un poco más adelante.

La ecuación de un cono es similar también a la del hiperboloide de una hoja. Las tres variables están elevadas al cuadrado y solo una es negativa. Dicha variable señala hacia cual eje abre el cono. Sin embargo, todo esta igualado a 0. Es por eso que es común encontrarse con la ecuación de esta forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Aparentemente, todas las variables son positivas. Pero las ecuaciones de las superficies vistas hasta ahora tienen a todas las variables de un lado de la ecuación y al 1 del otro lado. Ahora, como todo está igualado a 0, la variable negativa pasa del otro lado, pero positiva. El centro del cono es el origen, sin embargo, puede ser cualquier otro punto.



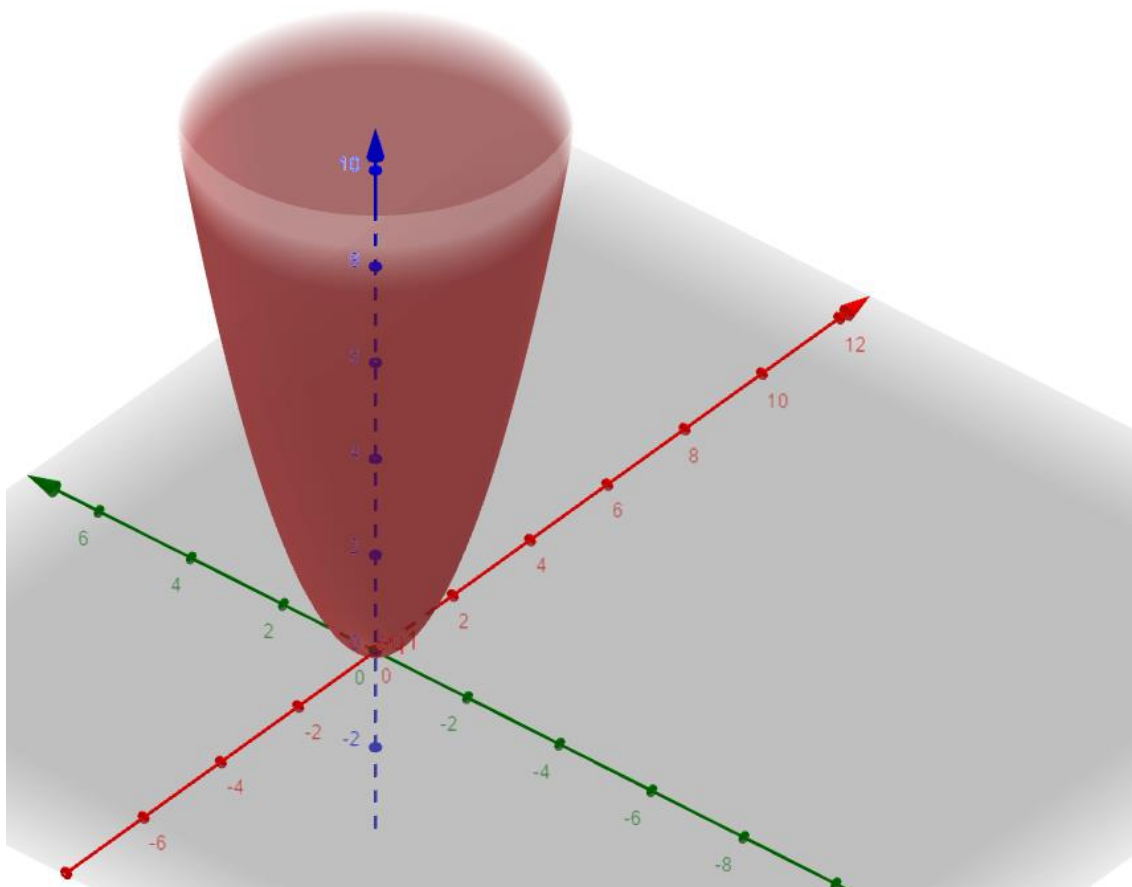
Paraboloide

El paraboloide es una forma más o menos común. No tanto en la naturaleza, pero si coincide con las antenas parabólicas de transmisión de señales que se usan en todo el mundo. El paraboloide resulta de rotar una parábola en dos dimensiones sobre un eje.

La ecuación de paraboloide es similar a la del cono. Pero tiene otra peculiaridad. Todo está igualado a 0. Una variable es negativa, sin embargo, esa misma variable es lineal, es decir, no está elevada al cuadrado.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

La variable z es negativa pero pasa al otro lado de la ecuación con el signo contrario. Además de ser negativa, es lineal. Otro detalle importante es que el denominador que pudiera presentarse dividiendo a z es lineal también. El paraboloide no tiene centro, pero sí vértice y se obtiene igual. En este caso es un paraboloide con centro en el origen.



La variable z se distingue de las otras dos. No solo es negativa, sino que es lineal y las otras son cuadráticas. Por ello, el paraboloide abre hacia el eje z positivo. A partir de aquí hay que aclarar algo muy importante. En este ejemplo, la variable lineal fue negativa. Si fuera positiva, pasaría al otro lado de la ecuación con el signo negativo. En tal caso, el paraboloide abriría hacia el eje z negativo.

Paraboloide hiperbólico

El paraboloide hiperbólico es sin duda la superficie cuadrática más compleja y así mismo, más difícil de graficar. Se considera que tiene la forma de una silla de montar.

La ecuación algebraica tiene varios distintivos. Primero, todos los elementos están igualados a 0. Existe una variable lineal. Esta variable indica hacia que eje apunta el "asiento" de la silla. Esta variable puede ser negativa o positiva, y de ello depende que la silla apunte hacia el eje positivo o al negativo, respectivamente. La siguiente peculiaridad es que alguna de las variables cuadráticas es negativa. Dicha variable indica hacia donde apunta el costado de la "silla".

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

El caso anterior es de un paraboloide con centro en el origen. La variable z es lineal y positiva del otro lado de la ecuación. Originalmente era negativa, por lo que la "silla" apuntara hacia el eje z positivo. La variable x es negativa, por lo que la "silla" apunta de frente al eje y y su costado al eje x .

