Clase 4

Matriz inversa y determinante

4.1 Introducción

Una matriz, un instrumento matemático para organizar información numérica. Es una herramienta enormemente versátil, ya que tiene aplicaciones prácticamente para todo. Una de las más conocidas es la resolución de sistema de ecuaciones lineales. Pero no es la única. Hay aplicaciones en ciencias sociales, ingeniería, informática, robótica, astronomía, estadística, geometría, etc.

Por ejemplo, si pudiésemos expresar con una matriz la configuración atómica y molecular (sólo se sabe y con incertidumbres la del elemento más simple, el hidrógeno) podríamos crear certeras moléculas contra el cáncer que lo destruirían de forma sencilla sin dañar nada más. Hoy día estamos lejos de este objetivo, ya que desconocemos muchos datos de la configuración atómica y molecular, y además los cálculos que tendrían que realizar serían gigantescos...

Una matriz es cuadrada, si tiene el mismo número de filas que de columnas; si no, es rectangular, pudiendo ser vertical, si tiene más filas, y horizontal si tiene más columnas. Un caso especial de matriz vertical es la matriz columna, que sólo tiene una, y de matriz horizontal la matriz fila, que sólo tiene una. La matriz diagonal tiene todos los valores nulos (con cero) excepto la diagonal, que será escalar si todos los elementos de la diagonal son iguales, e identidad si todos son el número 1. Una matriz nula o cero tiene todos los elementos nulos (cero, 0). Una matriz es traspuesta de otra si coinciden las filas con sus columnas y viceversa.

Con las matrices se pueden realizar varios tipos de operaciones, como trasponerlas (es como un reflejo de sus elementos), sumarlas, restarlas, multiplicarlas entre ellas o por un escalar, e invertirlas, siendo una matriz inversa, la que posee ciertas propiedades. Son las matrices que más se usan en álgebra.

El rango en álgebra es la dimensión en conjunto imagen de una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales. El rango en una matriz es el número de columnas o filas respectivamente que son linealmente independientes. De esta forma se descartan filas o columnas nulas, iguales, o que son combinaciones lineales o proporcionales de otras.

Los determinantes se crearon antes que las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero es en el siglo XIX, cuando se da impulso a su teoría y se empieza a usar su notación actual.

Entre los métodos de cálculo de determinantes, destaca la Regla de Sarrús para determinantes de 3 filas y 3 columnas.

Los determinantes, además de su uso para cálculo matricial y resolución de ecuaciones lineales, también se pueden emplear, entre otras aplicaciones, para cálculos en el plano, posiciones de rectas y planos, cálculo de volúmenes, como aplicaciones matemáticas.

4.2 Matriz inversa

El álgebra de matrices proporciona herramientas para manipular ecuaciones matriciales y crear diversas fórmulas útiles en formas similares a la ejecución ordinaria del álgebra con números reales. En esta sección se investiga el análogo matricial del recíproco, o inverso multiplicativo, de un número diferente de cero.

La generalización matricial requiere ambas ecuaciones y evita la notación con diagonales (para indicar una división) debido a que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

Más aún, una generalización completa sólo es posible si las matrices involucradas son cuadradas.

Se dice que una matriz A de $n \times n$ es invertible si existe otra matriz C de $n \times n$ tal que

$$CA = I \text{ y } AC = I$$

donde $I = I_n$, la matriz identidad $n \times n$. En este caso, C es un inverso de A. De hecho, C está determinado únicamente por A, porque si B fuera otro inverso de A, entonces $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. Este inverso único se denota mediante A^{-1}, de manera que,

$$A^{-1}A = I \text{ y } AA^{-1} = I$$

Una matriz que no es invertible algunas veces se denomina matriz singular, y una matriz invertible se denomina matriz no singular.

Ejemplo 1

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, entonces

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así que $C=A^{-1}$

La matriz inversa no siempre existe, para que exista, es condición necesaria y suficiente que el determinante de la matriz sea distinto de cero:

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Propiedades de la matriz inversa

I. La inversa de una matriz es única.

II. Sean dos matrices cuadradas A y C. Si la matriz C cumple que $C \cdot A = I_n$ o bien que $A \cdot C = I_n$ (al menos una de las dos condiciones). Entonces la matriz A es invertible, siendo C la inversa de A.

III. Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} es invertible y

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Es decir, la inversa de la inversa de una matriz A, es la propia matriz A.

IV. Si A y B son matrices invertibles de $n \times n$, entonces también lo es $A \cdot B$, y el inverso de $A \cdot B$ es el producto de los inversos de A y B en el orden opuesto. Esto es,

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

V. Si A es una matriz invertible, también lo es A^T, y el inverso de A^T es la transpuesta de A^{-1}. Esto es,

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

VI. A es una matriz invertible si y solo si las filas (columnas) de A son linealmente independientes.
Por lo tanto, una matriz A de orden n (n filas y n columnas) tiene inversa cuando su rango es n, es decir, cuando el rango de dicha matriz coincide con su orden.

4.2.1 Un algoritmo para calcular A^{-1}

Si se colocan lado a lado A e I para formar una matriz aumentada [A I], entonces las operaciones de fila en esta matriz producen operaciones idénticas sobre A e I. Hay operaciones de fila que transforman a A en I_n y a I_n en A^{-1}, o A no es invertible.

Algoritmo para encontrar A^{-1}

Reduzca por filas la matriz aumentada [A I]. Si A es equivalente por filas a I, entonces [A I] es equivalente por filas a [I A^{-1}]. Si no es así, A no tiene inversa.

Ejemplo 2

Encuentre el inverso de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$, si existe.

$$[A \quad I]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim F_2 \leftrightarrow F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim -4F_1 + F_3 \rightarrow F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & \vdots & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim 3F_2 + F_3 \rightarrow F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \frac{F_3}{2} \rightarrow F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim -2F_3 + F_2 \rightarrow F_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} - 3F_3 + F_1 \rightarrow F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Como $A = I$, se concluye que A es inversible, y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Es recomendable verificar la respuesta final:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9/2 & 1 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

Encuentre el inverso de la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -9 \\ 3 & 1 & 12 \end{bmatrix}$, si existe.

$$[A \quad I]$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -9 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 12 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \frac{F_1}{-2} \leftrightarrow F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1/2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -9 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 12 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim F_2 - 5F_1 \to F_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & \vdots & 5/2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 12 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim F_3 - 3F_1 \to F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & \vdots & 5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & \vdots & 3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim -F_2 \to F_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & \vdots & -5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & \vdots & 3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim -F_3 - F_2 \to F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & \vdots & -5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \frac{F_3}{3} \to F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & \vdots & -5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \sim F_2 - 9F_3 \to F_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -29/2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Como $A = I$, se concluye que A es inversible, y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -29/2 & -4 & -3 \\ 4/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Verificamos la respuesta final:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -9 \\ 3 & 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -29/2 & -4 & -3 \\ 4/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 Determinante

A cada matriz cuadrada A se le asigna un escalar particular denominado determinante se A, denotado por |A| o por det(A). Este escalar permite caracterizar algunas propiedades de la matriz. El concepto de determinante nos permitirá obtener una fórmula para calcular la matriz inversa de una dada. También se estudiarán las propiedades.

En particular, estableceremos la relación entre el rango de una matriz y la anulación de ciertos determinantes, lo cual nos permitirá encontrar una fórmula para resolver sistemas de ecuaciones compatibles.

4.3.1 Determinante de orden dos

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ una matriz de 2x2. Se define el determinante de A como

$$\det(A) = |A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4.3.2 Determinante de orden tres

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ una matriz de 3x3. Se define el determinante de A como

$$\det(A) = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 4

Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. Calcule $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 4[(-5).9 - 6.1] - 7[3.9 - (-8).1] + (-2)[3.6 - (-8)(-5)]$$

$$= 4.(-51) - 7.35 - 2.(-22)$$

$$= -405$$

4.3.4 Regla de Sarrus

La regla de Sarrus es un algoritmo sencillo de memorizar y sirve para facilitar el cálculo del determinante de una matriz de 3x3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

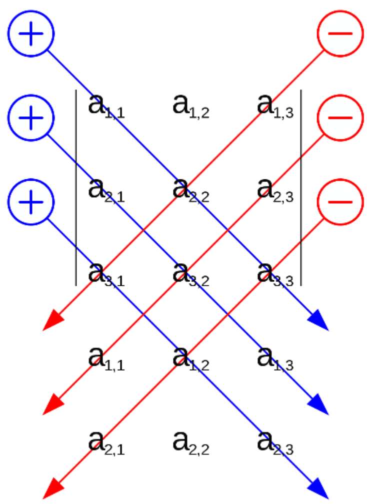
Veremos dos maneras de implementar la regla de Sarrus.

El <u>primer método</u> consiste en lo siguiente:

1) En primer lugar, repetir las dos primeras filas de la matriz debajo de la misma de manera que queden cinco filas:

$$\begin{matrix} \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{matrix}$$

2) Luego sumar los términos formados por los productos de las diagonales descendentes (en azul) y restar los términos formados por los productos de las diagonales ascendentes (en rojo), como se muestra a continuación:

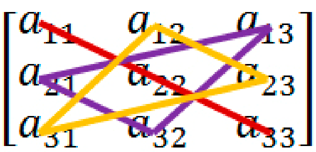


3) Finalmente, el determinante de la matriz es el resultado de las sumas y restas:

$$|A| = \boldsymbol{a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{31}.a_{12}.a_{23} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{23}.a_{32}.a_{11} - a_{33}.a_{12}.a_{21}}$$

El <u>segundo método</u> es el siguiente:

Los términos con signo positivo están formados por los elementos de la diagonal principal y de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.

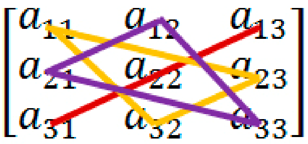


Positivos

$$Positivos = \boldsymbol{a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{32}.a_{13}}$$

Los términos con signo negativo están formados por los elementos de la diagonal secundaria y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.

La siguiente figura nos indica cuáles posiciones de la matriz debemos multiplicar.



Negativos

$$Negativos = a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{32}.a_{23}.a_{11} + a_{12}.a_{21}.a_{33}$$

det(A)= Sumandos positivos - Sumandos negativos.

Ejemplo 5

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ calcule |A| usando la regla de Sarrus.

Positivos= 5.(-1).7 + 2.5.6 + 4.9.3 = 133

Negativos= 3.(-1).6 + 9.5.5 + 2.4.7 = 263

det(A)= Sumandos positivos – Sumandos negativos = 133 – 263 = -130

4.3.4 Propiedades de los determinantes

A continuación, se presentan algunas propiedades de los determinantes.

Propiedad 1. Los determinantes de una matriz y de su transpuesta son iguales; es decir, det(A^T) = det(A).

Ejemplo 6

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \det(A) &= (1)(1)(2) + (2)(3)(3) + (3)(2)(1) \\ &\quad - (1)(3)(1) - (2)(2)(2) - (3)(1)(3) = 6. \end{aligned}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \det(A^T) &= (1)(1)(2) + (2)(1)(3) + (3)(2)(3) \\ &\quad -(1)(1)(3) - (2)(2)(2) - (3)(1)(3) \\ &= 6 = \det(A). \end{aligned}$$

Propiedad 2. Si la matriz B se obtiene intercambiando dos filas o intercambiando dos columnas de A entonces det(B) = −det(A).

Ejemplo 7

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Propiedad 3. Si dos filas (o columnas) de A son iguales, entonces det(A) = 0.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Propiedad 4. Si una fila o columna de A consta sólo de ceros, entonces:

det(A)=0

Ejemplo 8

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Propiedad 5. Si B se obtiene a partir de A multiplicando una fila o columna de A por un número real c, entonces det(B) = c·det(A).

Ejemplo 9

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = (2)(3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6(4-1) = 18.$$

Propiedad 6. Si la matriz B se obtiene de la matriz A sumando a cada elemento de la r-ésima fila (columna) de A una constante c por el elemento correspondiente de la s-ésima fila (columna) r ≠ s de A, entonces det(B) = det(A).

Ejemplo 10

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La segunda matriz se obtiene de la primera matriz, al sumar el doble de la segunda fila a la primera fila. Si ahora se aplica la definición de determinante, podemos que ver que ambos tienen el valor de 4.

Propiedad 7. Si una matriz A = [a_{ij}] es triangular superior o inferior, entonces

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Es decir, el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo 11

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

det(A)= 2·(-4)·3 = -24 det(B)= 3·5·(-4) = -60 det(C)= (-5)·4·(-6) = 120

Propiedad 8. El determinante del producto de dos matrices es el producto de sus determinantes, es decir:

det(A·B)=det(A)·det(B)

Ejemplo 12

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$|A| = -2 \quad \text{y} \quad |B| = 5$$

Además,

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Y

$$|AB| = -10 = |A||B|$$

Propiedad 9. Como corolario de la propiedad anterior tenemos que, si det(A)≠0 (es decir si a es no singular):

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Es decir, el determinante de la inversa, es la inversa del determinante.

Propiedad 10. Una matriz cuadrada es invertible si y solo si det(A)≠0.

Esta propiedad es importante pues nos indica la condición necesaria y suficiente para que una matriz dada tenga inversa, que su determinante no sea cero.

Propiedad 11. Una matriz A es linealmente independiente si y solo si su determinante es distinto de cero.

Este resultado también es importante, pues nos da una condición necesaria y suficiente determinar si las filas (o columnas) de una matriz son todas linealmente independientes entre sí.

Propiedad 12. Por último, como consecuencia de la propiedad anterior (recordar la definición de rango de una matriz de la clase pasada) tenemos que:

El determinante de una matriz es cero si y solo si el rango de dicha matriz también es cero. Es decir:

$$\det(A) = 0 \leftrightarrow rang(A) = 0$$

4.2.5 Calculo de Rango de una matriz no cuadrada por determinante

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ calcule el rango de la matriz.

Siempre empezaremos mirando si la matriz es de rango máximo resolviendo el determinante de orden más grande. Y, si el determinante de ese orden es igual a 0, iremos probando determinantes de orden menor hasta encontrar uno que sea distinto de 0.

En este caso, se trata de una matriz de dimensión 3×4. Por tanto, como máximo será de rango 3, ya que no podemos hacer ningún determinante de orden 4. Así que cogemos cualquier submatriz 3×3 y miramos si su determinante es 0. Por ejemplo, resolvemos el determinante de las 3 primeras columnas con la regla de Sarrus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 9 + 0 - 24 + 1 - 0 = \mathbf{0}$$

El determinante de las columnas 1, 2 y 3 es 0. Así que ahora tenemos que probar con otro determinante, por ejemplo, el de las columnas 1, 2 y 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 0 + 6 - 1 - 0 = \mathbf{0}$$

De determinantes de orden 3 solo nos queda por intentar el determinante compuesto por las columnas 2, 3 y 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 14 - 1 + 21 - 16 = \mathbf{0}$$

Ya hemos probado todos los determinantes 3×3 posibles de la matriz A, y como ninguno de esos es diferente de 0, **la matriz no es de rango 3**. Por tanto, como máximo, será de rango 2.

$$rg(A) < 3$$

Ahora vamos a ver si la matriz es de rango 2. Para ello, tenemos que encontrar una submatriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante sea diferente de 0. Probaremos con la submatriz 2×2 de la esquina superior izquierda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq \mathbf{0}$$

Hemos encontrado un determinante de orden 2 diferente de 0 dentro de la matriz. Por tanto, **la matriz es de rango 2**:

$$rg(A)=2$$