Clase 7

Introducción a vectores y representación gráfica

7.1 Introducción

En muchas aplicaciones se tratan con cantidades mensurables, tales como la presión, la masa, la temperatura, y la rapidez, que pueden describirse por completo mediante su magnitud.

Por otro lado, existen otras cantidades mensurables, como la velocidad, la fuerza y la aceleración, para cuya descripción es necesario plantear no sólo una magnitud, sino también una dirección y un sentido. Estas cantidades se denominan vectores, y serán nuestro tema de estudio durante las próximas clases. Los vectores comúnmente se denotan con letras minúsculas, como u, v, w, y, o z. Hemos utilizado vectores en las clases previas, como el vector de incógnitas “x” o el vector de términos independientes “b”; en la ecuación matricial de tipo Ax=b.

En esta clase veremos la definición de vector, y una introducción a los mismos, desde el punto de vista geométrico, además del algebraico.

7.2 Vectores

Un vector es un objeto matemático, como lo es una recta, un plano o una matriz. Sin embargo, una de las características de un vector es que, si un vector es de dimensión 2 o de dimensión 3, se puede realizar su interpretación geométrica en el plano o en el espacio, respectivamente. Vamos a dar su definición en función de la definición de matrices.

Definición

Las matrices de $1 \times n$ o $n \times 1$ se denominan un n-vectores, o vectores de n dimensiones, y los denotaremos mediante letras minúsculas. Cuando se sobreentienda el valor de n, nos referiremos a los n-vectores sólo como **vectores**.

Así, pues, un vector es una matriz fila, en caso de que su dimensión sea *1xn,* y lo denominamos ***vector fila de n dimensiones***; y una matriz columna, en caso de que su dimensión sea *nx1* y lo denominamos ***vector columna de n dimensiones***. En tales casos se los denominará vector fila o vector columna.

Al ser una matriz, un vector cumple con las propiedades y operaciones que ya estudiamos para las matrices fila y columna.

Ejemplo

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Los vectores v_1 y v_2 son ambos vectores de 3 dimensiones, sin embargo, el primero es un vector columna y el segundo es un vector fila.

Una de las principales diferencias es, por ejemplo, que la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Se puede multiplicar a derecha por el vector v_1, es decir, la siguiente multiplicación es posible:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pero no se puede multiplicar a derecha por el vector v_2, es decir, la siguiente multiplicación no es posible:

$$\cancel{\begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}$$

Definición

A los elementos de un vector también se le suelen llamar coordenadas o componentes, sobre todo cuando se trabaja con su representación geométrica.

En el ejemplo anterior, la primera coordenada del vector v_1 es -3, la segunda coordenada es 2 y la tercera coordenada es 1.

7.3 Representación geométrica de vectores

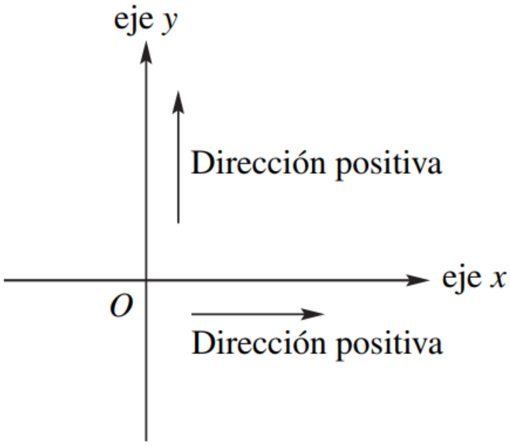
Es de sentido común que un vector comienza a ser “interesante” a partir de las dos dimensiones inclusive, pues un vector de 1 dimensión es un escalar, un número real. Vamos a analizar entonces la representación de vectores de dos dimensiones y de tres dimensiones. En el caso de esta representación se podría trabajar tanto con un vector de tipo fila, como columna.

7.3.1 Puntos en el plano

Recordemos que, para representar puntos en el plano, nos valemos de dos ejes:

- Un eje x, horizontal. Con sentido positivo hacia la derecha.
- Un eje y, horizontal. Con sentido positivo hacia arriba.

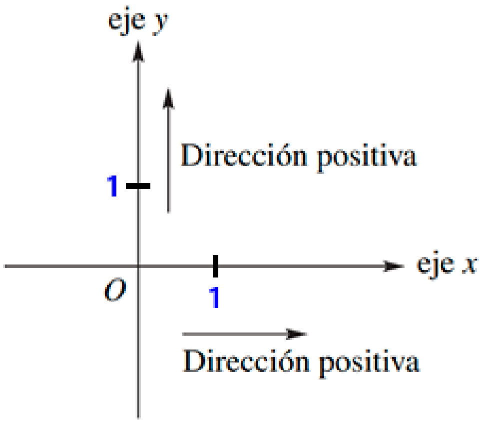
Tal como observamos en la siguiente imagen:



Es decir, trazamos un par de rectas perpendiculares que se intersequen en un punto O, denominado origen.

Una de las rectas, el eje x, por lo general se toma en posición horizontal; la otra recta, el eje y, se considera entonces en posición vertical.

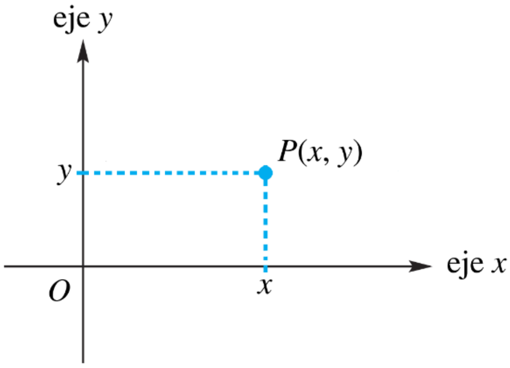
Ahora elegimos un punto en el eje x a la derecha de O, y un punto en el eje y arriba de O para fijar las unidades de longitud y las direcciones positivas en los ejes *x* e *y*.



Con frecuencia, pero no siempre, estos puntos se eligen de modo que sean equidistantes de O, esto es, se utiliza la misma unidad de longitud en ambos ejes, la misma escala. En conjunto, los ejes *x* e *y* se denominan **ejes coordenados**.

Finalmente, sea P un punto en el plano. La coordenada de P en el *eje x* se denomina coordenada "*x*" (abscisa) de P. De manera análoga, la coordenada de P en el *eje y* se llama coordenada "*y*" (ordenada) de P. Así, con cada punto en el plano está asociado a un par ordenado (x,y) de números reales, que determina sus coordenadas. El punto P, con coordenadas *x* e *y*, se denota mediante P(x, y).

Tal como se muestra en la siguiente imagen.

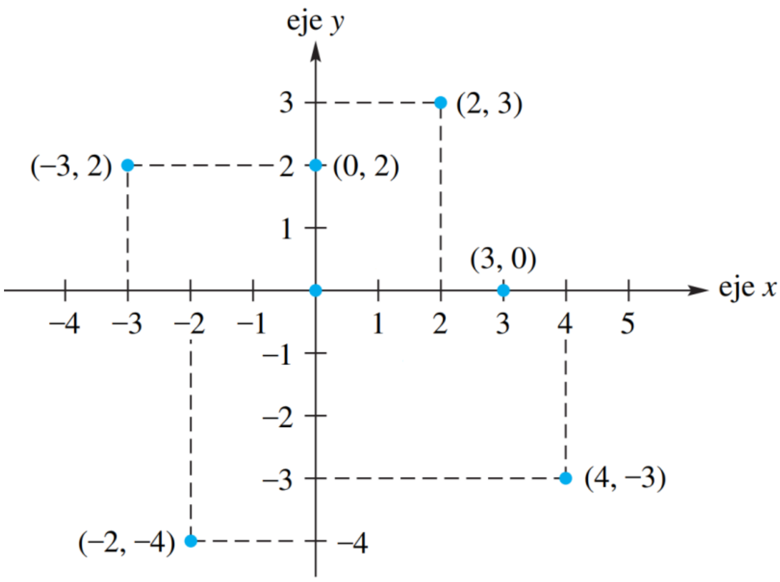


De manera recíproca, es fácil ver que podemos asociar cualquier punto en el plano con un par ordenado (x, y) de números reales.

Esta correspondencia entre puntos en el plano y pares ordenados de números reales se denomina sistema de coordenadas rectangulares, o sistema de coordenadas cartesianas (nombre en honor del filósofo y matemático René Descartes[1]).

El conjunto de puntos en el plano se denota mediante $\mathbb{R}^2$, y también suele denominársele 2-espacio o espacio de 2 dimensiones.

A continuación, vemos algunos ejemplos de puntos en el plano:



Las coordenadas del origen son (0, 0).

7.3.2 Representación geométrica de un vector de 2 dimensiones

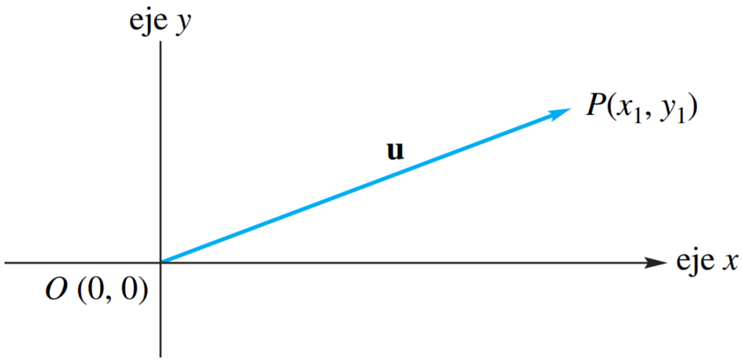
Consideremos el vector de 2 dimensiones:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

[1] René Descartes (1596-1650) fue uno de los científicos y filósofos más conocidos de su época, y es considerado el fundador de la filosofía moderna.

Donde x_1 y y_1 son números reales. Con $\boldsymbol{u}$ asociamos el segmento de recta dirigido con punto inicial en el origen (0, 0) y punto terminal en P(x_1, y_1). El segmento de recta dirigido de O a P se denota mediante $\overrightarrow{OP}$.

Tal como vemos a continuación:

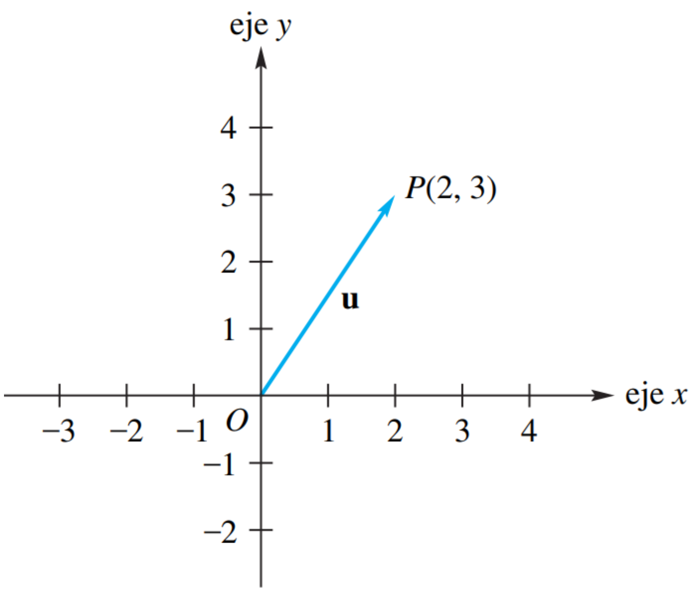


Además, el segmento de recta dirigido tiene una dirección, que es el ángulo que se forma entre ella y la parte positiva del eje x.

Ejemplo 1. Sea

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Con u podemos asociar el segmento de recta dirigido desde (0, 0) hacia P(2,3). Es decir:



Ejemplo 2. Con el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{OP}$ con extremo en $P(4,5)$, podemos asociar el vector de 2 dimensiones:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

En base a lo anterior, vemos que con cada vector podemos asociar un segmento de recta dirigido y, recíprocamente, con cada segmento de recta dirigido que parte del origen podemos asociar un vector. Como hemos visto, se necesita un sistema de coordenadas para establecer esta correspondencia.

La magnitud y dirección de un vector son la magnitud y la dirección de su segmento de recta dirigido. Los conceptos segmento de recta dirigido y vector suelen utilizarse indistintamente, de manera que un segmento de recta dirigido se denomina ***vector***.

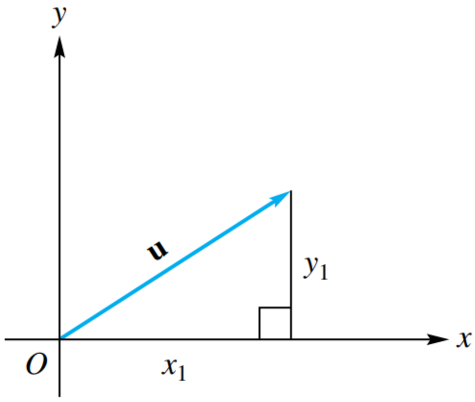
Por lo tanto, el plano puede visualizarse como el conjunto de todos los puntos, o como el conjunto de todos los vectores.

Por esta razón, dependiendo del contexto, en ocasiones tomamos a $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de pares ordenados (x_1, y_1), y en otras como el conjunto de todos los vectores de dos dimensiones $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$.[2]

7.3.3 Norma de un vector

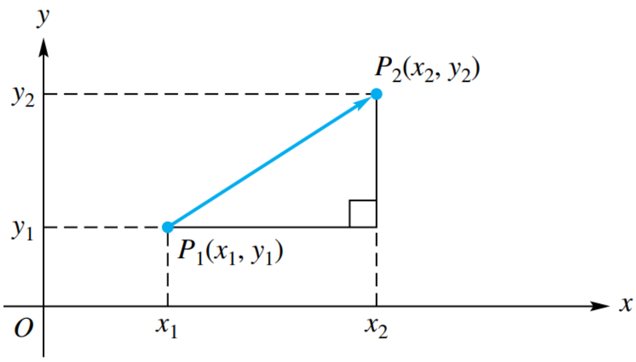
De acuerdo con el teorema de Pitágoras (figura), la longitud, magnitud o **norma** del vector $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ es:

$$\| u \| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$$



7.3.4 Distancia entre dos puntos en el plano

También con base en el teorema de Pitágoras, la longitud del segmento de recta dirigido con punto inicial $P_1(x_1, y_1)$ y el punto terminal $P_2(x_2, y_2)$, o lo que es lo mismo, la distancia entre los puntos P_1 y P_2 es:



$$\| \overrightarrow{P_1P_2} \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

[2] Por lo tanto, indistintamente podemos referirnos a un vector como $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ o bien como (x_1, y_1).

Ejemplo. Si $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, la norma o longitud del vector es

$$\| u \| = \sqrt{(2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

7.3.5 Vectores paralelos

Sean dos vectores distintos de cero

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Se dice que los vectores son paralelos si uno es múltiplo del otro, es decir:

$$\exists\, k \in \mathbb{R}\ tal\ que$$

$$\boldsymbol{u} = k \cdot \boldsymbol{v}$$

Ejemplo. Los vectores

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

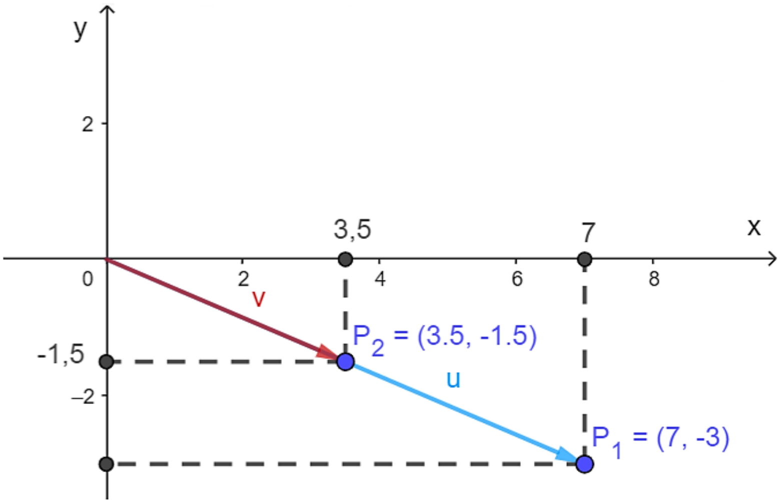
Son paralelos, pues

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{u}$$

O bien

$$\boldsymbol{u} = 2 \cdot \boldsymbol{v}$$

Veamos el gráfico de ambos vectores en el plano cartesiano:



Como vemos, los vectores **u** y **v**, pintados en celeste y rojo, se solapan, indicación de que son paralelos.

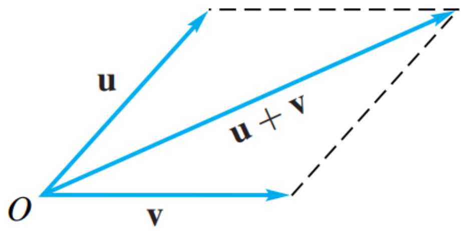
7.3.6 Representación en el plano de la suma de vectores

Sean $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ dos vectores en el plano. La suma de los vectores es otro vector:

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

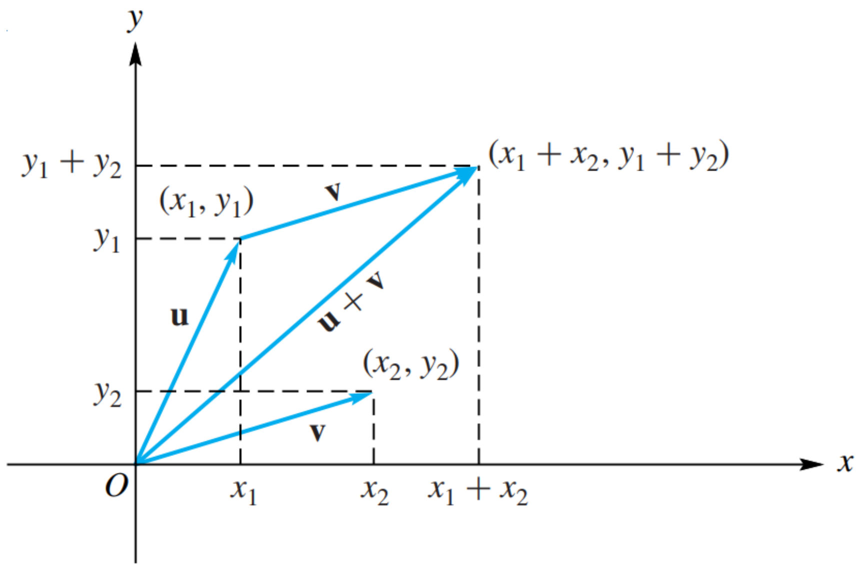
Es decir, se suman componente a componente.

Podemos interpretar de manera geométrica la suma de vectores de la siguiente manera.



En la figura, el vector suma $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ es la diagonal del paralelogramo definido por u y v. Este método gráfico para la suma de vectores es comúnmente conocido como la regla del paralelogramo.

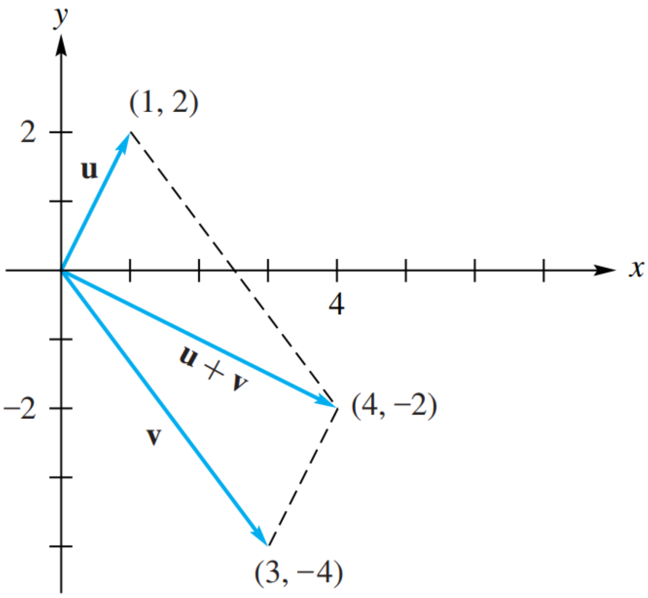
Si ubicamos la suma $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ y los vectores u y v en el plano cartesiano nos queda de la siguiente manera:



Ejemplo. Sea **u** = (1, 2) y **v** = (3, −4). Entonces,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1 + 3, 2 + (-4)) = (4, -2)$$

y gráficamente la suma **u + v** queda:



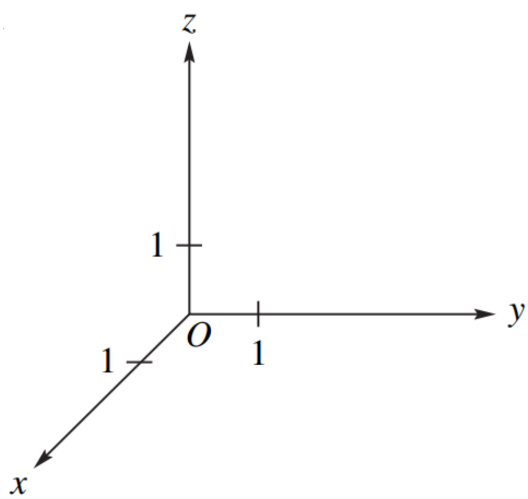
7.4 Representación gráfica de vectores de 3 dimensiones

El espacio de las 3 dimensiones, denominado $\mathbb{R}^3$, se puede modelar y visualizar de manera similar a la que utilizamos para $\mathbb{R}^2$.

Primero fijamos un sistema de coordenadas eligiendo un punto, denominado origen, y tres rectas, llamadas ejes coordenados, cada una de las cuales pasa por el origen, de modo que sea perpendicular a las otras dos. Estas rectas se llaman ejes ***x***, ***y*** y ***z***.

En cada uno de los ejes coordenados elegimos un punto para fijar las unidades de longitud y las direcciones positivas. Con frecuencia, pero no siempre, se escoge la misma unidad de longitud en los tres ejes coordenados.

En la siguiente figura se muestra el sistema de coordenadas de 3 dimensiones, llamado *de mano derecha*.



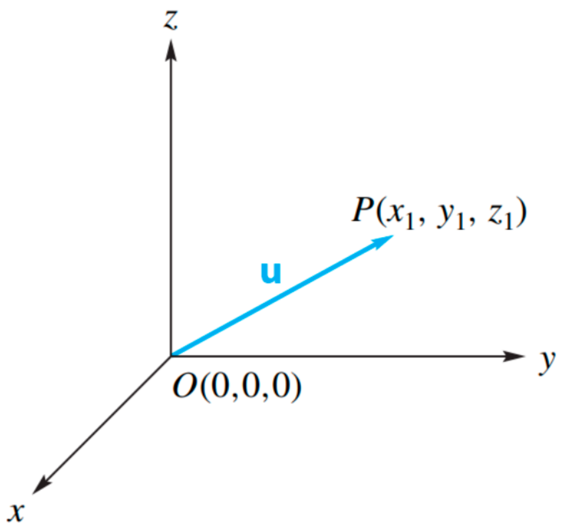
Las coordenadas de cualquier punto en este espacio de 3 dimensiones son (x, y, z) siendo x, y, x números reales. De esa manera un punto P_1 se denominaría

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

De manera análoga a lo que sucede en 2 dimensiones, a cada vector de 3 dimensiones $u = (x_1, y_1, z_1)$ le asociamos el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{OP}$.

Tal segmento de recta dirigido se denomina vector en $\mathbb{R}^3$, o simplemente vector, si ya entendemos que estamos en 3 dimensiones.

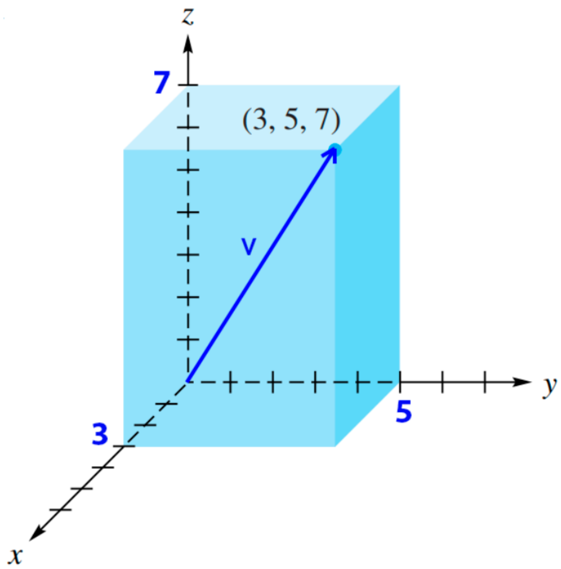
En la siguiente imagen se muestra el vector genérico **u**, como podrán observar es un poco más complicado de visualizar, dado que estamos tratando de simular la vista en 3D mediante perspectiva isométrica.



En el siguiente ejemplo se visualiza con más claridad.

Ejemplo. A continuación, se muestra la representación geométrica del vector

$$v = (3, 5, 7)$$



Por último, mencionar que también se cumple la condición de paralelismo entre dos vectores (es decir, que uno sea "múltiplo" del otro).

Del mismo modo, se cumple una versión de la regla del paralelogramo en tres dimensiones para la suma gráfica de dos vectores.

Sin embargo, se hace difícil visualizar estas propiedades en los ejes coordenados.

7.4.1 Norma de un vector de 3 dimensiones

De manera análoga a lo que sucede en 2 dimensiones, la longitud, magnitud o **norma** del vector $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ es:

$$\| v \| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$$

Ejemplo. Calcular la norma del vector del gráfico anterior:

$$v = (3, 5, 7)$$

Aplicamos la fórmula

$$\| v \| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{9 + 25 + 49} = \sqrt{83}$$

Esta es la longitud del segmento que conforma el vector, es decir, el segmento que va desde el origen hasta el punto $(3, 5, 7)$

Con esto concluimos la clase de esta semana.

Si les interesa experimentar un poco con los puntos y vectores en 3 dimensiones les recomiendo el software Geogebra en su versión 3D. Se puede utilizar de manera online:

Calculadora 3D - GeoGebra

Por otra parte, también está disponible su versión en el plano 2D:

GeoGebra Clásico

¡Hasta la próxima clase!