Clase 12

Predicados y cuantificadores

12.1 Introducción

Los enunciados compuestos o moleculares definidos en la lógica proposicional se han basado en la combinación de enunciados preexistentes mediante el empleo de conectores. Así, el enunciado compuesto «lloverá o no lloverá» es el resultado de combinar mediante el conector «o» el enunciado atómico «lloverá» y el enunciado compuesto lloverá» (resultado a su vez de combinar la partícula «no» con el enunciado «lloverá»).

Un tipo distinto de enunciados compuestos o moleculares son los que se basan en el empleo de las partículas todo y alguno, como «todo hombre es animal» o «algunos animales viven en el agua».

Las proposiciones que se fundamentan en el empleo del cuantificador «todo» reciben el nombre de generales o universales, y las que se fundan en el empleo del cuantificador «alguno» son denominadas particulares o existenciales.

Este tipo de cuantificadores son los que analizaremos en esta clase, junto el alcance de los mismo en una proposición y la definición de fórmula bien formada para la lógica de predicados.

12.2 Cuantificadores

El desarrollo inicial de la lógica de predicados se encuentra en la silogística aristotélica. La primera formalización completa de la misma se debe a Frege. Obviamente, las partículas «todo» y «alguno» desempeñan papel estratégico en esta parte de la lógica. Los símbolos formales de dichas partículas reciben el nombre de cuantificadores y su análisis sigue a continuación.

Primero definiremos que es un cuantificador.

Definición

Un cuantificador es un operador sobre un conjunto de individuos, se trata de un recurso expresivo que permite construir proposiciones sobre conjuntos o, dicho de otra forma, un cuantificador es una expresión que afirma que una condición se cumple para un cierto número de individuos.

12.2.1 El Cuantificador universal

Empezamos el análisis del cuantificador con el siguiente ejemplo:

x gira en torno al Sol

Esta expresión no es, propiamente hablando, una proposición, sino una función proposicional, esto es, una expresión «abierta» que contiene una variable individual *x*. Sustituyendo esa variable por el nombre de uno cualquiera de los planetas del sistema solar, por ejemplo «Júpiter», la citada función proposicional queda «cerrada» y pasa a convertirse en proposición:

Júpiter gira en torno al Sol.

Pero, por lo que se refiere a nuestro ejemplo, cualquier otro planeta solar, como Marte, Venus o La Tierra, podría ocupar el lugar de «x» con idéntico resultado. Ello puede expresarse en lenguaje coloquial con la proposición:

Todos los planetas giran en torno al Sol.

Donde se da, naturalmente, por sobreentendido, que «todos los planetas» se refiere a los planetas del sistema solar.

También podríamos expresar la función proposicional de la siguiente manera:

para todo x (x gira en torno al Sol)   ***(1)***

La expresión "para todo" es un cuantificador y se lo reconoce como el cuantificador universal o generalizador. Se le asigna el símbolo ∀.

Entonces, si definimos el predicado:

P(x): x gira en torno al sol

La proposición ***(1)*** quedaría:

$$\forall x\ [P(x)]$$

También, cuando no sea necesario el uso de corchetes o paréntesis, como en este caso, se puede expresar sin ellos:

$$\forall x\ P(x)$$

Que se leen:

"para todo x, P de x"

Al anteponer el generalizador a «P(x)», se obtiene una nueva expresión a la que se denomina generalización o cuantificación universal.

Una definición más precisa del generalizador podría ser ésta: el símbolo «∀x» indica —independientemente de si es verdadera o falsa— que la expresión que le sigue es válida para todos los valores de la variable «x».

Aplicando esta definición a *nuestro ejemplo de los planetas del sistema solar*, tendríamos que el resultado de generalizar la función proposicional «P(x)», a partir de $\forall x\ P(x)$, es una expresión indicativa de que al sustituir «x» en «P(x)» por cualquiera de los valores de su dominio, se obtiene una proposición que, en este ejemplo, es siempre verdadera.

12.2.2 El Cuantificador existencial

La partícula «alguno» se simboliza con "∃", y recibe el nombre de particularizador o cuantificador existencial.

Al anteponer el particularizador a una expresión, por ejemplo, a «P(x)», se convierte ésta en una particularización o cuantificación existencial:

$$\exists x\text{: } P(x)$$

que se lee:

para algún x, P de x,

O también:

existe un x tal que P de x

O también:

existe (o hay) al menos un x tal que P de JC.

Una definición más precisa del particularizador podría ser ésta: ∃x: P(x) indica, verdadera o falsamente, que al sustituir «x» en «P(x)» por algún valor del dominio, resulta una proposición que es válida, al menos para un caso.

Es decir, puede ser que sustituyamos para una gran cantidad de casos del dominio y la proposición no sea válida, pero si hay al menos un valor para el cuál lo es, entonces toda la expresión es válida, pues esa es la definición del cuantificador existencial.

Ejemplo 1

Si se vuelve al ejemplo del conjunto de los planetas del sistema solar, pero representando ahora el predicado Q:

Q(x): x es mayor que la tierra

Entonces, la proposición:

$$\exists x: Q(x)$$

Se lee: "existe x, tal que Q de x".

Quiere decir que hay por lo menos un planeta del sistema solar que es mayor que la Tierra — proposición que es de hecho verdadera—.

12.2.3 Cuantificador existencial único

El cuantificador existencial con signo de unicidad se usa para indicar que hay un único elemento de un dominio que cumple una determinada propiedad. Se simboliza mediante "∃!".

Ejemplo 2

Siguiendo con el ejemplo de los planetas del sistema solar, sea la proposición S:

S(x): x no tiene satélites naturales

Entonces la proposición simbólica:

$$\exists! x: S(x)$$

Se lee "existe un único x tal que S(x)" o bien "Existe un único x tal que x no tiene satélites naturales".

Teniendo en cuenta que el dominio son los planetas del sistema solar, esta afirmación es falsa pues hay dos planetas que no tienen satélites. La afirmación solo sería verdadera si hubiese uno y solo un planeta sin satélites.

12.2.4 Negación de cuantificadores

En lógica de predicados la negación sobre un cuantificador se escribe antes del cuantificador existencial, y se niega su alcance.

Ejemplo 3

Dada la siguiente proposición en lenguaje coloquial:

No existe algún planeta más grande que el sol.

Si definimos al predicado P(x): x es más grande que el Sol.

Entonces la expresión simbólica sería

$$\neg\exists x: P(x)$$

La proposición es verdadera en el dominio de los planetas del sistema solar.

Observación: la negación del existencial también se encuentra comúnmente simbolizada mediante

Ejemplo 4

Dada la siguiente proposición en lenguaje coloquial:

No todos los planetas son habitables.

Si definimos al predicado H(x): x es un planeta habitable.

Entonces la expresión simbólica sería

$$\neg\forall x: H(x)$$

Equivalencia en la negación de cuantificadores

Si analizamos el ejemplo 3:

La expresión "No existe algún planeta más grande que el sol" se puede expresar también como "Para todos los planetas se cumple que: No son más grandes que el sol".

De igual manera, "no todos los planetas son habitables" es equivalente a decir "existe algún planeta que no es habitable".

Esto nos lleva a concluir las siguientes ***equivalencias para las negaciones de los cuantificadores***:

$$\neg\exists x\text{: } P(x) = \forall x\text{: } \neg(P(x))$$

$$\neg\forall x\text{: } H(x) = \exists x\text{: } \neg(H(x))$$

12.3 Alcance de los cuantificadores

En un predicado, el alcance del cuantificador es la proposición que se ve afectada por el cuantificador de la variable en cuestión.

También podemos decir que el cuantificador alcanza o afecta al esquema más simple que está ubicado a su derecha, teniendo en cuenta paréntesis, corchetes o llaves.

Ejemplo 5

En la expresión:

$$\forall x\text{: } P(x) \wedge Q(x)$$

El alcance del cuantificador universal es el predicado P(x). Sin embargo, el cuantificador no afecta al predicado Q(x).

Sin embargo, en esta otra expresión:

$$\forall x\text{: } [P(x) \wedge Q(x)]$$

El alcance del cuantificador es a la expresión $P(x) \wedge Q(x)$.

La diferencia del ejemplo anterior no es menor, pues $\forall x\text{: } [P(x) \wedge Q(x)]$ es una proposición, por lo tanto, podremos determinar su valor de verdad. Sin embargo,

$\forall x$: $P(x) \wedge Q(x)$ no es una proposición, porque la variable x en Q(x) es una variable libre, y por lo tanto no podremos determinar su valor de verdad.

Ejemplo 6

Un ejemplo concreto de lo anterior sería:

Sean los predicados:

P(x): x tiene cuatro patas

Q(x): x es perro

Y el dominio es el conjunto de los mamíferos.

Entonces veamos la diferencia entre estas dos expresiones:

$$\forall x: P(x) \wedge Q(x)$$

Esta expresión se interpreta como:

Todo x tiene cuatro patas. Y x es perro.

Por otro lado, esta expresión:

$$\forall x: (P(x) \wedge Q(x))$$

Se interpreta como:

Todo x tiene cuatro patas y todo x es perro.

La diferencia radica en la frase "x es perro" de la primera expresión. En ese caso no podemos determinar su valor de verdad, porque no se especifica si todo x es perros, si algún x es perro, si a es perro (siendo a algún elemento particular del dominio), etc.

12.4 Fórmulas bien formadas en lógica de predicados

Al definir las fórmulas de la lógica de predicados surgen ciertos problemas que no se plantearon con la lógica proposicional. Tenemos dos tipos de fórmulas: las que expresan proposiciones y las que expresan propiedades o relaciones, las cuales conocemos como predicados y a las cuales podemos llamar funciones proposicionales.

Está relacionado con lo que trabajamos en el punto anterior, es decir

$$P(x)$$

Sería una función proposicional y no una proposición.

En tanto que:

$$\forall x: P(x)$$

Es una proposición.

Por tanto, daremos una definición general de fórmula bien formada, determinando lo que constituirán las proposiciones en lógica de predicados:

Definición de fórmula atómica o simple

- Una letra de predicado seguida de constantes individuales es una fórmula atómica.
- Una proposición simple es una fórmula atómica

Ejemplos

$P(a)$

p

$H(a,b)$

Definición de fórmula bien formada (f.b.f.)

Una fórmula bien formada de lógica de predicados es una expresión que se atiene estrictamente a las siguientes reglas de formación:

1. Una fórmula atómica es una fórmula bien formada.
2. Si A es una fórmula bien formada, entonces ¬A es una fórmula bien formada.

3. Si A y B son fórmulas bien formadas, entonces $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ y $A \leftrightarrow B$ son f.b.f.
4. Si A es una fórmula bien formada en donde una constante se cambia por una variable x, resultando A(x), entonces $\forall x$: A(x), $\exists x$: P(x) y $\exists ! x$:P(x) son fórmulas bien formadas.

- Sólo las expresiones que pueden generarse a partir de las cláusulas 1 – 4 en un número finito de pasos son fórmulas bien formadas.

Para finalizar esta clase vamos a dejar algunos ejemplos de fórmulas bien formadas con su correspondiente traducción a lenguaje coloquial.

Ejemplo 7

Dominio:

Cualquier ser humano.

Predicado:

P(x): x es tolerante

Proposición:

$\exists x$: P(x)

Traducción a lenguaje coloquial:

Alguien es tolerante. (o bien existe alguien que es tolerante).

Ejemplo 8

Dominio:

Ciudadanos argentinos.

Predicado:

P(x): x es un político.

Q(x): x es ambicioso.

Proposición:

$\neg\forall x$: $[P(x) \wedge Q(x)]$

Traducción a lenguaje coloquial:

No todos son políticos y son ambiciosos.

Ejemplo 9

Dominio:

D_x: Las cosas.

D_y: Las personas

Predicado:

P(x): x anda mal.

Q(y): y se queja.

Proposición:

$\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$

Traducción a lenguaje coloquial:

Si algo anda mal, entonces todos se quejan.

Ejemplo 10

En lenguaje coloquial:

Ningún abrigo es impermeable a menos que haya sido especialmente tratado.

Dominio

D: Los abrigos.

Predicados:

I(x): x es impermeable.

T(x): x está especialmente tratado.

Traducción a lógica de predicados:

$$\neg\forall x: [\neg T(x) \rightarrow \neg I(x)]$$

Ejemplo 11

En lenguaje coloquial:

En toda pareja de vecinos hay algún ruidoso.

Dominio

D: Las personas.

Predicados

V(x,y): x es vecino de y

R(x): x es ruidoso

Traducción a lógica de predicados:

$$\forall x \forall y: [V(x,y) \rightarrow (R(x) \vee R(y))]$$

Observaciones:

- En estos últimos ejemplos no estamos analizando la veracidad de las proposiciones, solo son ejemplos de fórmulas bien formadas.
- Se puede utilizar de manera indistinta los dos puntos luego de los cuantificadores. Por ejemplo, son equivalentes $\exists x P(x)$ y $\exists x: P(x)$.