Clase 6

Fórmulas bien formadas y traducción simbólica

6.1 Introducción

En las clases anteriores acordamos que, para poder analizar la validez de ciertos razonamientos, deberemos conformar lo que llamaremos esquema de razonamiento. Para esto vamos a necesitar la creación de un lenguaje abstracto y así crear ciertas fórmulas para confeccionar los correspondientes esquemas de razonamientos y alejarnos de las proposiciones en cuestión, para trabajar con fórmulas abstractas que nos permitan analizar la corrección de los distintos razonamientos y no dejarnos influenciar por los enunciados.

Como ya hemos visto la clase pasada, el sistema lógico más elemental es el de la Lógica Proposicional, donde llamaremos proposición simple o atómica a aquella proposición que se considere como un todo indivisible sin considerar las posibles partes que puedan formar dicha proposición atómica (cosa que haremos más adelante en la lógica de predicados). Es decir que podríamos decir que una proposición atómica es una oración afirmativa que, siendo una proposición, no se puede dividir en dos o más proposiciones.

Además, vimos que, dadas dos o más proposiciones es posible combinarlas mediante conectores tales como "y", "o", entre otros, y formar enunciados compuestos o moleculares.

En esta clase nos enfocaremos en la traducción simbólica de enunciados compuestos, así como en la determinación de cuándo una traducción simbólica es aceptable en lógica proposicional, lo que nos lleva a la definición de las fórmulas bien formadas. Finalmente definiremos que son las funciones lógicas y su análisis mediante tablas de verdad.

6.2 Fórmulas bien formadas

Tenemos que definir qué vamos a aceptar como una fórmula correcta para realizar los esquemas de argumentos, también llamada forma enunciativa correcta. A estas fórmulas correctas las denominaremos formulas bien formadas (fbf).

Antes de definir las fbf, vamos a llamar variables de enunciado, también llamadas letras proposicionales, a las proposiciones simples (atómicas) que notaremos con las letras p, q, r, s, t, u, v, o.

6.2.1 Definición de fórmula bien formada

Una fórmula bien formada es una expresión en la que intervienen variables de enunciado y las conectivas o conectores.

Una fbf se conforma utilizando las siguientes reglas:

1) Toda proposición simple (p, q, r, …) es una fórmula bien formada.

2) Si A y B son fórmulas bien formadas, también lo son:

$$(\neg A)$$

$$(\neg B)$$

$$(A \wedge B)$$

$$(A \vee B)$$

$$(A \rightarrow B)$$

$$(A \leftrightarrow B)$$

3) Sólo son fórmulas bien formadas, las que cumplen las reglas 1) y 2).

Ejemplo

Sean p, q y r proposiciones atómicas, entonces

$$(p \wedge q) \rightarrow (\neg\ (q \vee r))$$

Es una fórmula bien formada ya que cumple las reglas de construcción de la definición. Es decir:

1) p, q, r son fórmula bien formadas

2) $(p \wedge q)$ y $(q \vee r)$ son fórmula bien formadas

$\neg(q \vee r)$ es una fórmula bien formada

$(p \wedge q) \rightarrow (\neg\ (q \vee r))$ es una fórmula bien formada

Otros ejemplos:

$(\neg(\ \neg(\ \neg(\ \neg(\ \neg\ p)))))$ es una fbf

$\vee\, p\ \neg\ q$ no es una fbf (pues $\vee\, p$ no es una fórmula bien formada)

$\neg(p \vee q)$ es una fbf

6.2.2 Normas de precedencia y jerarquía para fórmulas bien formadas

a) Una conectiva afecta a las letras proposicionales inmediatas o a los conjuntos inmediatos a ella que están entre paréntesis.

b) Reglas de precedencia:

nivel 1	$\neg$
nivel 2	$\wedge$, $\vee$
nivel 3	$\rightarrow$, $\leftrightarrow$

La jerarquía de la tabla indica que las conectivas del nivel i preceden a las de nivel i+1.

Por ejemplo:

- Con respecto a la regla a), en la fbf

$$\neg (q \vee r)$$

  el conector de la negación $\neg$ afecta a la fbf que se encuentra ente paréntesis, es decir a $(q \vee r)$

- $(\neg p) \wedge (\neg q)$ puede escribirse como $\neg p \wedge \neg q$, pues la precedencia de la negación es mayor que la de la conjunción, con lo cual primero se debe realizar la negación y, por lo tanto, los paréntesis no son necesarios.

- $((p \wedge q) \vee s) \leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$ puede escribirse como $(p \wedge q) \vee s \leftrightarrow \neg p \vee q$

  Pues primero se opera con la negación, luego con las conjunciones y disyunciones y por último con la doble implicación, con lo cual había paréntesis que no eran necesarios.

Cabe aclarar que, al igual que en los cálculos aritméticos, si hay algún paréntesis de más, adecuadamente colocado, no se modifica la expresión. Es decir, en los dos últimos ejemplos, ambas fórmulas eran equivalentes.

6.3 Traducción simbólica

Ahora que hemos determinado aquellas fórmulas de la lógica proposicional que son bien formadas, utilizaremos este tipo de fórmulas para traducir enunciados coloquiales a su correspondiente simbólico, es decir, a su correspondiente fórmula bien formada.

Definición

Denominaremos traducción simbólica a la representación de un enunciado coloquial en su equivalente fórmula bien formada.

Por ejemplo, dado el enunciado:

Sí llueve se terminarán los problemas de sequía y no hará falta más dinero.

Alguien estaría tentado a afirmar que la traducción simbólica es la siguiente:

$$p \rightarrow q \wedge \neg r$$

Lo cual podríamos argumentar que no estaría mal, pero para eso deberemos definir a las proposiciones p, q y r de una determinada manera, con lo cual, para evitar ambigüedades y diferencias de interpretación, acompañaremos la traducción simbólica con los significados de las proposiciones atómicas intervinientes, mediante el concepto de "diccionario".

6.3.1 Diccionario de la traducción simbólica

Denominaremos "diccionario" al realizar una traducción de lenguaje coloquial a simbólico en lógica proposicional, a la explicitación de los significados de las proposiciones simples o atómicas intervinientes.

Lo haremos de la siguiente manera, tomando el ejemplo anterior:

Sí llueve se terminarán los problemas de sequía y no hará falta más dinero.

Diccionario

p: llueve

q: se terminarán los problemas de sequía

r: hará falta más dinero

Traducción simbólica

$$p \rightarrow q \wedge \neg r$$

De esa manera, se evitan diferencias en las interpretaciones de los significados de las proposiciones p, q y r; y la traducción es evidentemente correcta.

6.4 Funciones lógicas

Habiéndonos ocupado de la sintaxis de los lenguajes para la lógica proposicional, debemos ocupamos de su significado, la cual consiste en la forma en que se los interpreta. Lo que tenemos en mente cuando hablamos de la interpretación de un lenguaje proposicional es la atribución de valores de verdad a sus oraciones.

Una función es una correspondencia que a cada valor de un conjunto de salida (dominio) le asigna un único valor del conjunto de llegada (imagen). En el caso de la lógica proposicional, las funciones son las fórmulas bien formadas, el dominio son las combinaciones de los valores de verdad de las proposiciones atómicas y la imagen es el valor de verdad de la función.

Es decir, las funciones lógicas son o bien verdaderas, o bien falsas, dependiendo de los valores de verdad de las proposiciones simples que las componen. Para aclarar esto, primero debemos introducir el concepto de valor de verdad.

Decimos que el valor de verdad de una proposición es ***V*** si la oración es verdadera y es ***F*** si la oración es falsa. También es común indicar que el valor es 1 si es verdadero y 0 si es falso. Es común identificar el valor de verdad de una proposición p, como v(p).

Aquí nos ocupamos sólo de proposiciones que son verdaderas o falsas.

Ejemplo

Tomemos, por ejemplo, la fórmula bien formada:

$$\neg (q \vee r)$$

Dicha fórmula es una función en la medida en que su valor de verdad depende de los valores de verdad de *q* y de *r*. Vamos a analizar su valor de verdad para distinto valores de verdad de q y de r.

- En el caso en que:

  q sea V

  r sea V

  Entonces

$$\neg (q \vee r) \text{ es F}$$

- En caso que:

  q sea V

  r sea F

  Entonces

$$\neg (q \vee r) \text{ es F}$$

- En caso que:

  q sea F

  r sea V

  Entonces

$$\neg (q \vee r) \text{ es F}$$

- En caso que:

  q sea F

  r sea F

Entonces

$$\neg (q \vee r) \text{ es V}$$

Es así que el valor de verdad de la fbf $\neg (q \vee r)$ depende de los valores de verdad de q y r.

Para simplificar, y resumir, la valuación de la función se suele utilizar el concepto de tabla de verdad.

6.4.1 Tabla de verdad de las funciones lógicas

La tabla de verdad es aquella en la cual se indican las distintas combinaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que componen la función y el valor de verdad correspondiente de dicha función. También se pueden agregar sub-fórmulas de la fbf completa, con el objetivo de facilitar el análisis.

Para el ejemplo anterior, la tabla de verdad sería:

q	**r**	**$\neg (q \vee r)$**
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

También se podría, por ejemplo, agregar a la tabla la fórmula **$(q \vee r)$**, si es que se considera necesario:

q	**r**	**$(q \vee r)$**	**$\neg (q \vee r)$**
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Por último, vamos a elaborar la tabla de verdad de una fbf un poco más compleja, como ser:

$$(p \wedge q) \rightarrow (\neg\ (q \vee r))$$

Para hacerlo, vamos a recordar la tabla de verdad de la implicación:

p	**q**	**p → q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Además, a la tabla que haremos vamos a agregar las siguientes sub-fórmulas para facilitar el análisis:

$$\mathbf{(p \wedge q)} \quad \text{y} \quad \mathbf{\neg(q \vee r)}$$

Es así que nos queda:

p	**q**	**r**	**(p ∧ q)**	**¬(q ∨ r)**	**(p ∧ q) → (¬ (q ∨ r))**
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

Con lo cual tenemos los valores de verdad de la fórmula en función de los valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen.

Observación: al trabajar con fórmulas bien formadas, dado su definición, no se admite el conector de la disyunción excluyente Δ.

Esto no es en realidad un problema, porque la disyunción excluyente $p\ \Delta\ q$ es equivalente a la siguiente fbf:

$$(q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge p)$$

Como podemos verificar en la siguiente tabla de verdad:

p	**q**	**(q ∧ ¬p) ∨ (¬q ∧ p)**	**p Δ q**
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F