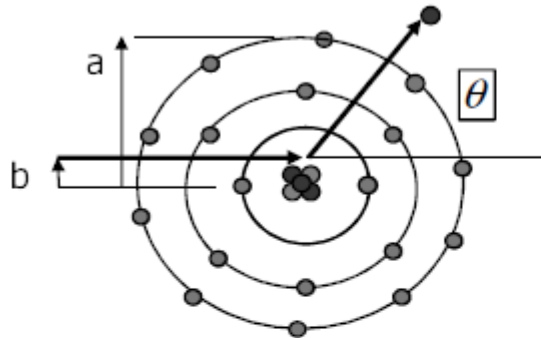


Dispersión múltiple

Colisiones con el campo de Coulomb nuclear



La mayor parte de las colisiones a energías no relativistas dan lugar a scattering elástico que se conoce como scattering Rutherford. Estas colisiones contribuyen al cambio de dirección de las partículas cargadas en el medio sin que éstas pierdan energía.

Para partículas cargadas pesadas la sección eficaz diferencial de scattering Rutherford (relativista) viene dada por

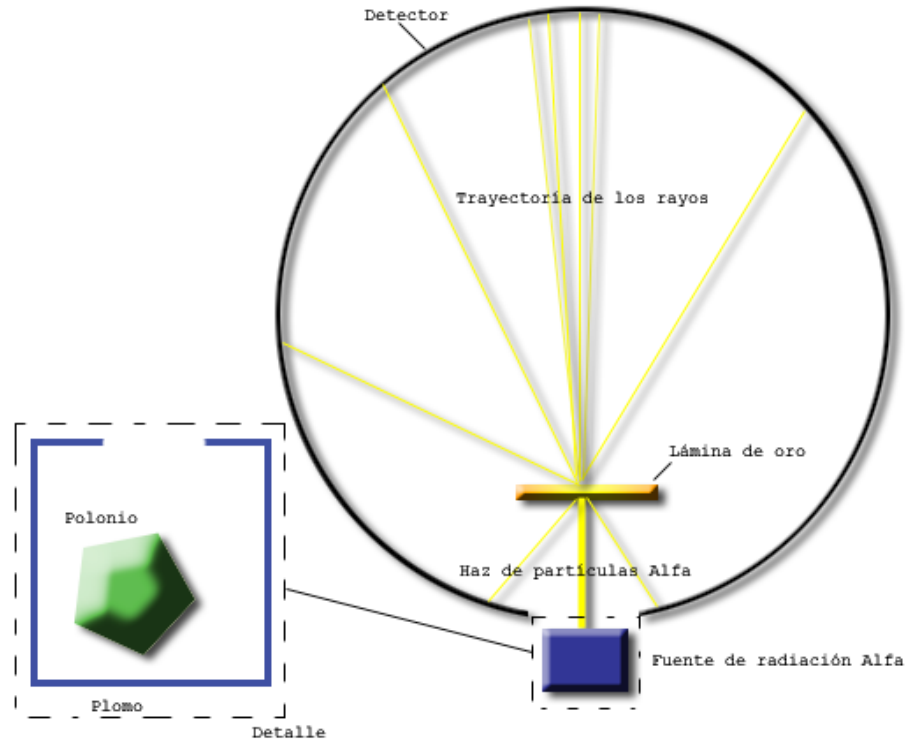
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} = (1 - \beta^2) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{Ze^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Donde E es la energía cinética de la partícula incidente. Esta sección eficaz tiene una marcada dependencia angular produciendo preferentemente dispersiones a bajo ángulo. La sección eficaz Rutherford anterior no se ajusta al caso de los electrones, así que Mc Kinley y Feschbach (Phys. Rev. 74, 1759) modificaron esta sección eficaz elástica para electrones

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{McF}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth}} = 1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2) + \pi\beta \frac{Ze^2}{\hbar c} \sin(\theta/2)(1 - \sin(\theta/2))$$

Dispersión múltiple

El **experimento de Rutherford**, también llamado **experimento de la lámina de oro**, fue realizado por [Hans Geiger](#) y [Ernest Marsden](#) en 1909, y publicado en 1911,¹ bajo la dirección de [Ernest Rutherford](#) en los Laboratorios de Física de la Universidad de Manchester. Los resultados obtenidos y el posterior análisis tuvieron como consecuencia la negación del [modelo atómico de Thomson](#) (*modelo atómico del pudding con pasas*) y la propuesta de un modelo nuclear para el átomo.



^{210}Po	trazas	138 días	α	5,307	^{206}Pb
-------------------	--------	-----------------------------	-------------------	-------	-------------------

Dispersión múltiple

Molière multiple scattering theory

$$W_M(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{B^n} W_n(\theta, t)$$

t- es el grosor de blanco y B- es el parámetro de teoría

A good approximate representation of the distribution at any angle is $W_0(\theta, t) + B^{-1}W_1(\theta, t)$, where

$$W_0(\theta, t) = \frac{2}{\bar{\theta}^2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\bar{\theta}^2}\right)$$

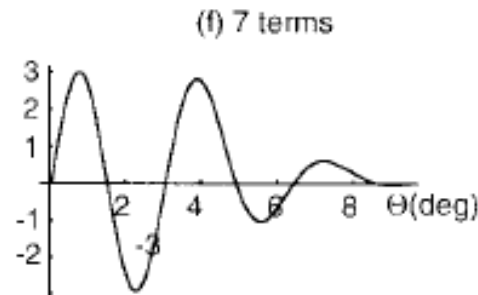
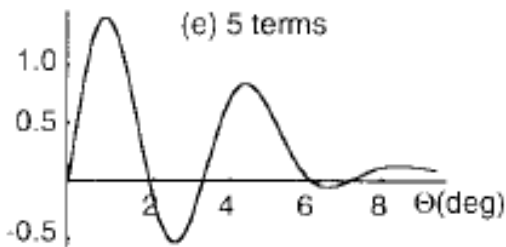
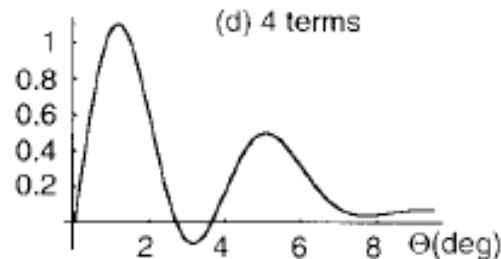
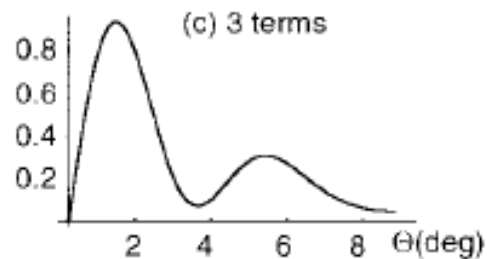
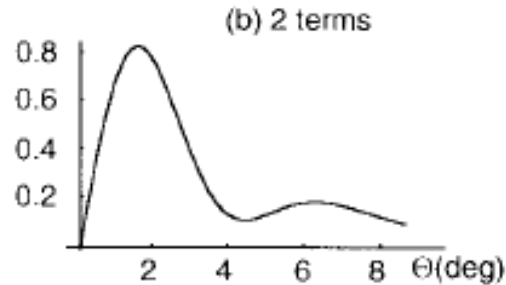
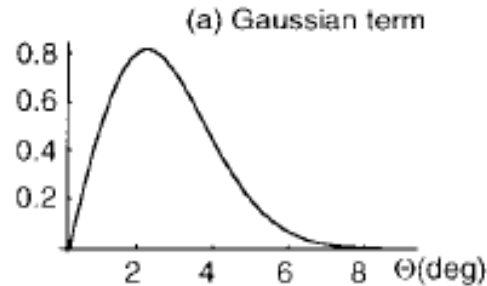
$$W_1(\theta, t) = \frac{2}{\bar{\theta}^2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\bar{\theta}^2}\right) \left\{ \left(\frac{\theta^2}{\bar{\theta}^2} - 1\right) \left[Ei\left(\frac{\theta^2}{\bar{\theta}^2}\right) - \ln\left(\frac{\theta^2}{\bar{\theta}^2}\right) \right] + 1 \right\} - 2,$$

$$\bar{\theta}^2 \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t \ln t.$$

$$Ei(\Theta) = - \int_{-\Theta}^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} \text{ is the exponential integral}$$

Dispersión múltiple

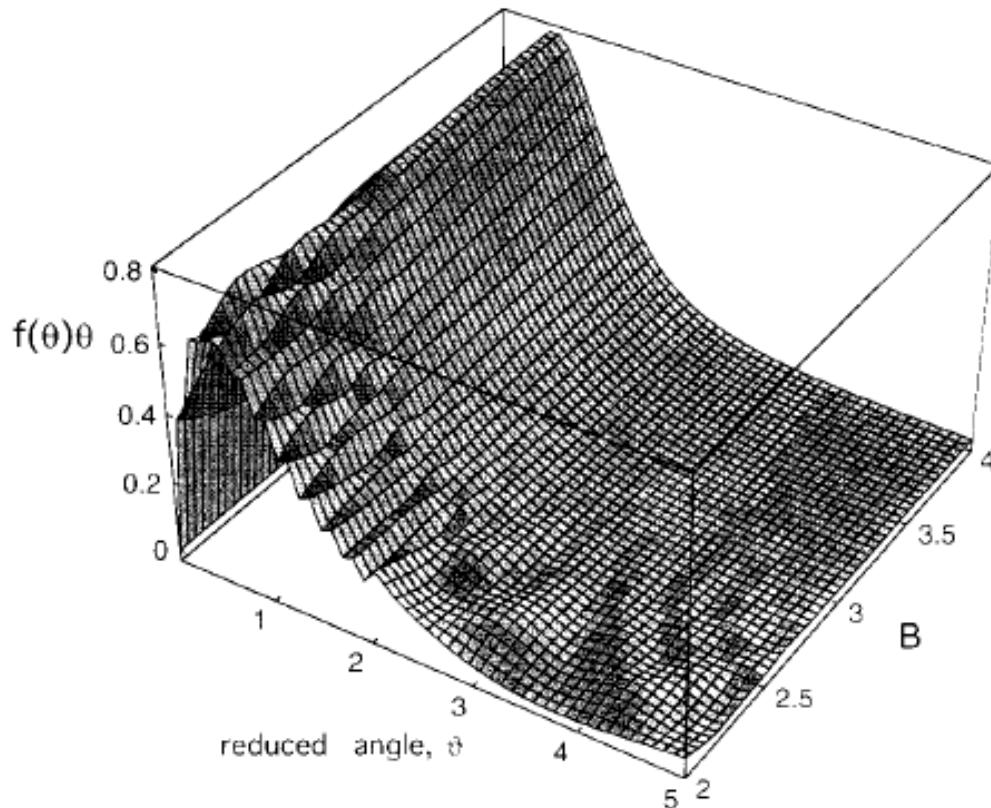
Molière multiple scattering theory



Dispersión de múltiples distribuciones, según la teoría de Molière's e incluyendo diferente número de términos en la serie de expansión de 100 keV incidente de electrones de $0,7 \mu\text{m}$ de grafito ($B = 1.6$).

Dispersión múltiple

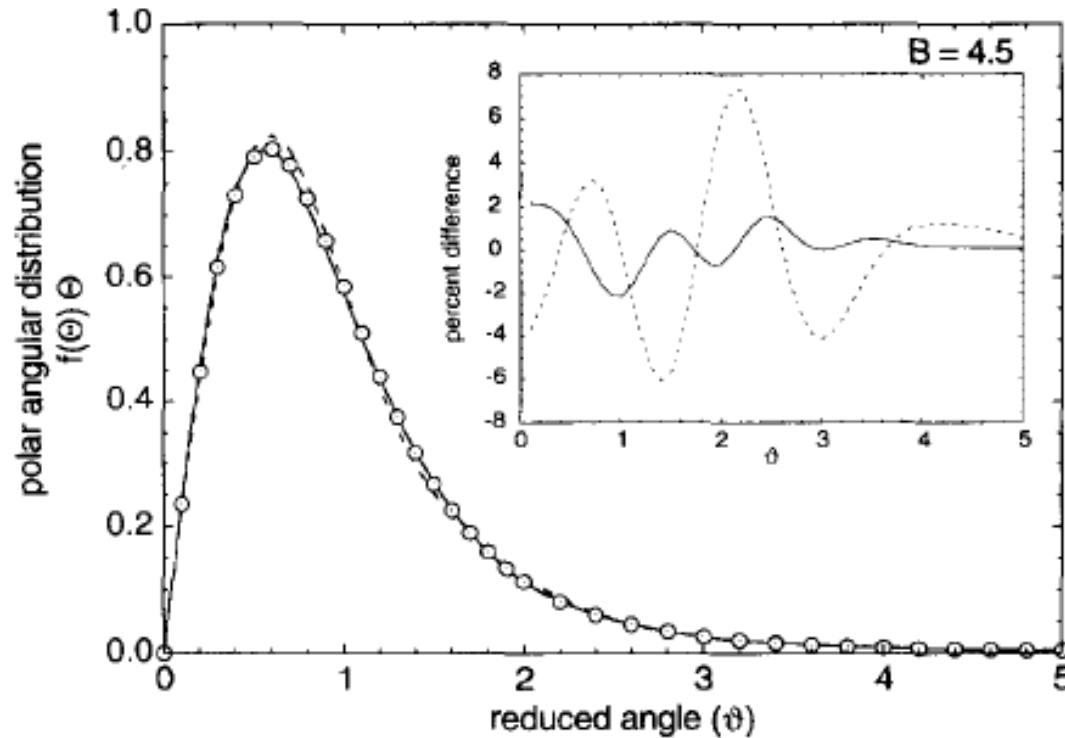
Dispersión Múltiple de teoría Moliere



Calcula distribuciones angulares "exactas" de Moliere's en función de parámetros(B, θ)

Dispersión múltiple

Dispersión Múltiple de teoría Moliere



Comparación entre Moliere's completa distribución angular (círculos) con expansiones de la serie incluyendo diferente número de términos para $B = 4.5$. El inserto muestra diferencias por ciento con respecto a las distribuciones "exactas" con three(dashed lines) y siete términos de (líneas sólidas), respectivamente.

Dispersión múltiple

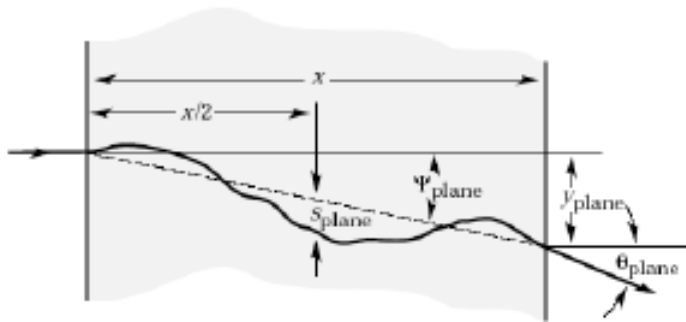


Figure 27.8: Quantities used to describe multiple Coulomb scattering. The particle is incident in the plane of the figure.

Las colisiones de Coulomb en el medio material desvían a las partículas cargadas de su dirección original de movimiento. Aunque los ángulos de dispersión son pequeños el gran número de colisiones contribuye a que este efecto sea apreciable.

Este proceso de dispersión se conoce como scattering múltiple y fue modelizado por Molière. Caracterizamos este proceso por una dependencia gaussiana con un ángulo de semiapertura dado por (para un proyectil de carga z)

$$\theta_0 = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x \rho}{X_0}} \left[1 + 0.038 \ln \left(\frac{x \rho}{X_0} \right) \right]$$

Siendo βc la velocidad de la partícula, p su momento, x el espesor másico del material a atravesar. Evidentemente para un electrón $z=1$. X_0 es la longitud de radiación del material en cuestión. La dirección de salida forma un ángulo en el espacio con la dirección incidente dada por θ_{space} mientras que si lo proyectamos en un plano este ángulo será θ_{plane}

Dispersión múltiple

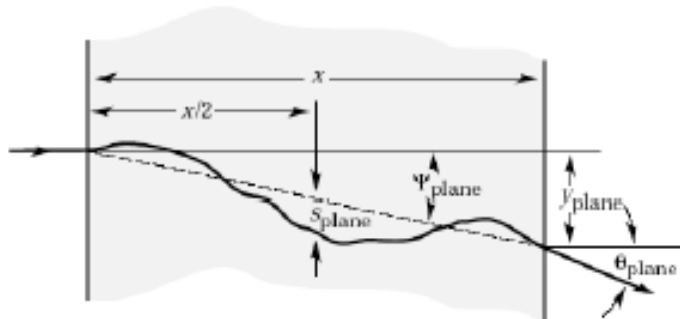


Figure 27.8: Quantities used to describe multiple Coulomb scattering. The particle is incident in the plane of the figure.

La distribución de direcciones de salida de la partícula después de un espesor x será en el espacio

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi \theta_0^2} \exp\left(-\frac{\theta_{space}^2}{2\theta_0^2}\right)$$

Si lo expresamos proyectado en un plano la distribución de ángulos será

$$\frac{dN}{d\theta_{plane}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \theta_0} \exp\left(-\frac{\theta_{plane}^2}{2\theta_0^2}\right)$$

Hay que recordar que aproximadamente se cumple que

$$\theta_{space}^2 \approx \theta_{plane,x}^2 + \theta_{plane,y}^2$$

En muchos problemas puede ser interesante conocer la desviación del punto de emergencia de la partícula respecto al plano que contiene su trayectoria inicial esta desviación se puede escribir

$$y_{plane} = \frac{1}{\sqrt{3}} x \theta_0$$

O la longitud de la cuerda que une el punto de impacto y de salida

$$S_{plane} = \frac{1}{4\sqrt{3}} x \theta_0$$

Longitud de radiación

27.4.1. Radiation length : High-energy electrons predominantly lose energy in matter by bremsstrahlung, and high-energy photons by e^+e^- pair production. The characteristic amount of matter traversed for these related interactions is called the radiation length X_0 , usually measured in g cm^{-2} . It is both (a) the mean distance over which a high-energy electron loses all but $1/e$ of its energy by bremsstrahlung, and (b) $\frac{7}{9}$ of the mean free path for pair production by a high-energy photon [37]. It is also the appropriate scale length for describing high-energy electromagnetic cascades. X_0 has been calculated and tabulated by Y.S. Tsai [38]:

$$\frac{1}{X_0} = 4\alpha r_e^2 \frac{N_A}{A} \left\{ Z^2 [L_{\text{rad}} - f(Z)] + Z L'_{\text{rad}} \right\} . \quad (27.22)$$

For $A = 1 \text{ g mol}^{-1}$, $4\alpha r_e^2 N_A/A = (716.408 \text{ g cm}^{-2})^{-1}$. L_{rad} and L'_{rad} are given in Table 27.2. The function $f(Z)$ is an infinite sum, but for elements up to uranium

can be represented to 4-place accuracy by

$$f(Z) = a^2 [(1 + a^2)^{-1} + 0.20206 \\ - 0.0369 a^2 + 0.0083 a^4 - 0.002 a^6] ,$$

where $a = \alpha Z$ [39].

Longitud de radiación

Table 27.2: Tsai's L_{rad} and L'_{rad} , for use in calculating the radiation length in an element using Eq. (27.22).

Element	Z	L_{rad}	L'_{rad}
H	1	5.31	6.144
He	2	4.79	5.621
Li	3	4.74	5.805
Be	4	4.71	5.924
Others	> 4	$\ln(184.15 Z^{-1/3})$	$\ln(1194 Z^{-2/3})$

Although it is easy to use Eq. (27.22) to calculate X_0 , the functional dependence on Z is somewhat hidden. Dahl provides a compact fit to the data [40]:

$$X_0 = \frac{716.4 \text{ g cm}^{-2} A}{Z(Z + 1) \ln(287/\sqrt{Z})} . \quad (27.24)$$

Results using this formula agree with Tsai's values to better than 2.5% for all elements except helium, where the result is about 5% low.

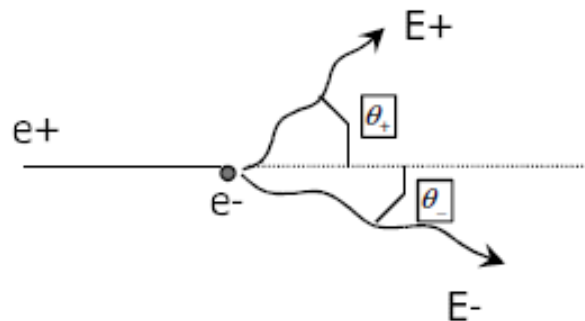
The radiation length in a mixture or compound may be approximated by

$$1/X_0 = \sum w_j/X_j , \quad (27.25)$$

where w_j and X_j are the fraction by weight and the radiation length for the j th element.

Aniquilación positrón-electrón

Un positrón se aniquila con un electrón del medio material para producir dos fotones de alta energía. Consideremos la aniquilación en vuelo del positrón con un electrón inicialmente en reposo en el medio material



En el caso de aniquilación en vuelo los dos fotones pueden tener energía diferente E_+ , E_- que (siendo E la energía cinética del positrón) verificará

$$E + 2m_e c^2 = E_+ + E_-$$

Cada suceso de aniquilación queda completamente caracterizado cuando establecemos el reparto de la energía entre los dos fotones de aniquilación. Se suele usar la variable

$$\zeta = \frac{E_-}{E + 2m_e c^2}$$

Mediante la conservación de energía y momento obtenemos los ángulos polares de emisión de ambos fotones en el laboratorio

$$\cos(\theta_-) = \frac{\gamma + 1 - \frac{1}{\zeta}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}; \quad \cos(\theta_+) = \frac{\gamma + 1 - \frac{1}{1 - \zeta}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

Aniquilación positrón-electrón

La sección eficaz diferencial de aniquilación por electrón fue calculada en el centro de masas por Heitler (1934). Si la transformamos al sistema de referencia donde el electrón está en reposo y la integramos se obtiene la sección eficaz total (por electrón del medio)

$$\sigma_{ann} = \frac{\pi r_e^2}{(\gamma+1)(\gamma^2-1)} \left\{ (\gamma^2 + 4\gamma + 1) \ln \left[\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right] - (3 + \gamma) \sqrt{\gamma^2 - 1} \right\}$$

Donde r_e es el radio clásico del electrón. Esta sección eficaz por electrón se puede transformar en el recorrido libre medio de aniquilación teniendo en cuenta la densidad electrónica del medio.

$$\frac{1}{\lambda_{ann}} = \frac{N_A}{A} \rho Z \sigma_{ann} = \frac{N_A}{A} \rho Z \frac{\pi r_e^2}{(\gamma+1)(\gamma^2-1)} \left\{ (\gamma^2 + 4\gamma + 1) \ln \left[\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right] - (3 + \gamma) \sqrt{\gamma^2 - 1} \right\}$$

Donde si expresamos la densidad en g/cm³ y r_e en cm, obtendremos el recorrido libre medio del positrón en cm.

Aniquilación positrón-electrón

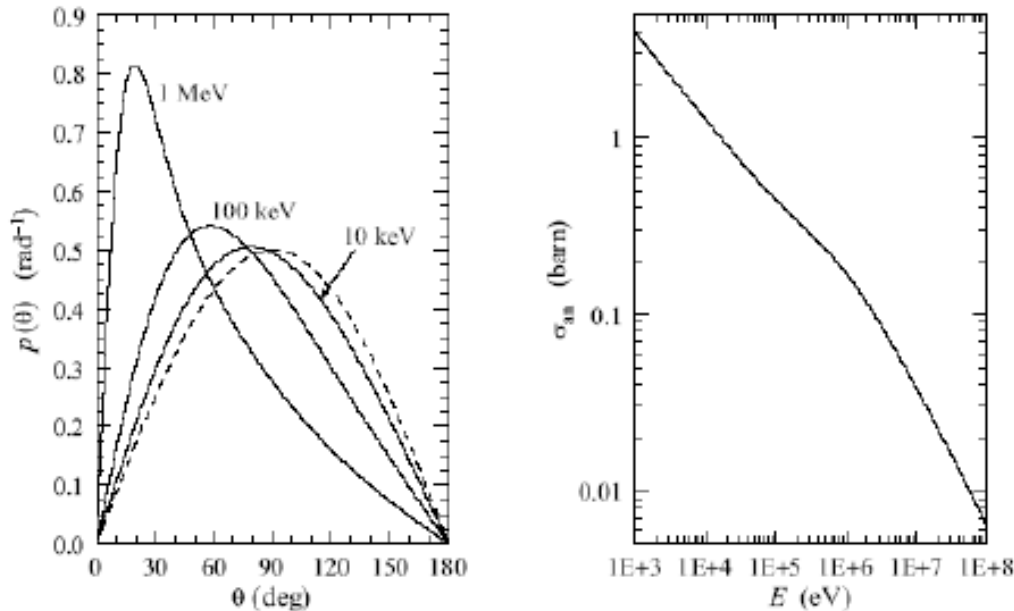


Figure 3.16: Left: angular distributions of photons produced by annihilation in flight of positrons with the indicated kinetic energies. The dashed line represents the isotropic distribution. Right: Annihilation cross section per target electron as a function of the kinetic energy of the positron.

La sección eficaz de aniquilación decrece con la energía cinética del positrón considerablemente. Así un positrón tiende a aniquilarse cuando ha sido frenado en el medio de modo sustancial. La distribución de los ángulos de emisión de los fotones a baja energía tienen un máximo a 90° . Sin embargo a alta energía la aniquilación en vuelo produce fotones orientados hacia delante (a 1 MeV el máximo está entorno a 20°).

Aniquilación positrón-electrón