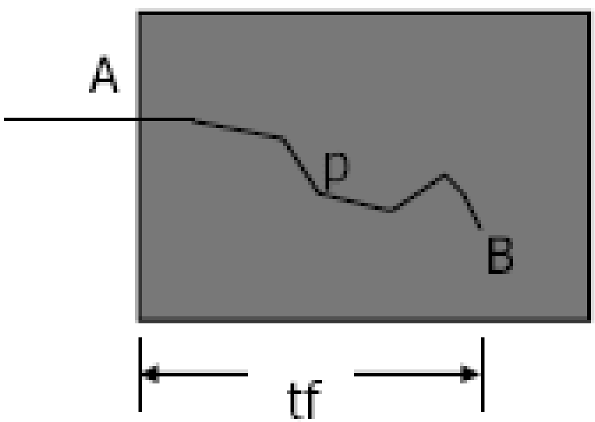
Alcance

Definimos como alcance R de una partícula cargada de una energía cinética dada T en un medio material como el valor esperado de la longitud de su trayectoria en dicho medio hasta que la partícula se detiene (alcanza la energía térmica del medio).

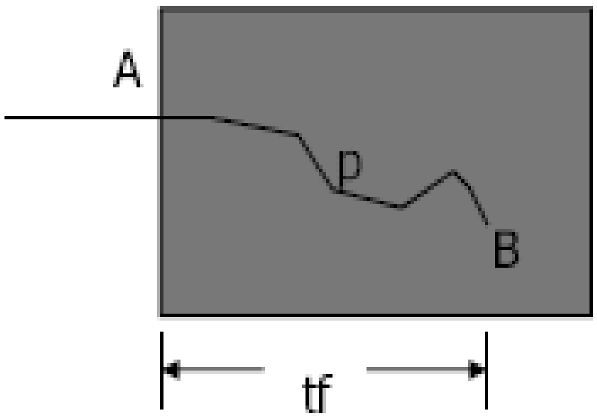


Debido a que la trayectoria de la partícula se desvía de su dirección de incidencia, la profundidad máxima que alcanza tf en el medio no coincide con su alcance R.

Definimos como alcance proyectado <t> de una partícula cargada de una energía cinética T dada en un medio material, como el valor esperado (valor medio) de las profundidades máximas de penetración tf de dicha partícula. Estas profundidades tf se miden en la dirección inicial de incidencia de la partícula cargada.

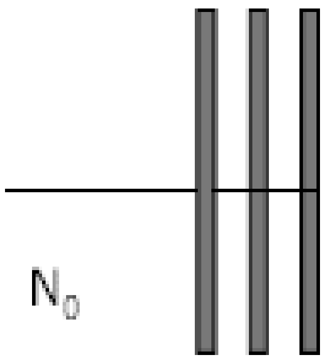
El alcance se suele expresar en unidades de espesor másico (i.e. g/cm2). Se excluye de modo habitual las interacciones de tipo nuclear en la definición de alcance R.

Alcance CSDA partículas cargadas pesadas



El alcance proyectado lo definimos como el valor esperado de la profundidad máxima de penetración tf en el medio en la dirección de incidencia. Si consideramos un haz de partículas estrecho que incide sobre una lámina de espesor t, las partículas que no atraviesen dicha lámina serán aquellas que tengan tf < t. Si consideramos una lámina de espesor infinitesimal dt a una profundidad total t

$$\boxed{\left|\frac{dN(t)}{N_0}\right| = prob(t < tf < t + dt)}$$



Por tanto podemos calcular el valor del alcance proyectado mediante un experimento de transmisión donde midamos el número de partículas que atraviesan un cierto espesor de material aumentándolo progresivamente hasta que no exista ninguna partícula transmitida.

$$\boxed{< t >= \sum_{t=0}^{\infty} t \; prob(t < tf < t + dt) = \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} \left|dN(t)\right| t = \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} dt \; t \left|\frac{dN(t)}{dt}\right|}$$

La función 1/N0 * dN/dt representa la densidad de probabilidad de máximas profundidades de penetración tf.

Alcance CSDA partículas cargadas pesadas

Para garantizar que las velocidades de ambas partículas son iguales, la relación entre la energía cinética T de la partícula de masa M y la energía cinética del protón Tp será

$$\boxed{\frac{T_p}{T} = \frac{M_p c^2(\gamma_p - 1)}{M c^2(\gamma - 1)} = \frac{M_p}{M}}$$

Por lo tanto a iguales velocidades tendremos que $\boxed{T_p = \frac{M_p}{M} T}$

La definición del rango CSDA viene dada por

$$\boxed{R_{CSDA}(M, z, T_0) = \int_0^{T_0} \frac{dT}{\left(\frac{dT}{\rho\, dx}\right)_{M,z}} = \int_0^{\frac{M_p}{M}T_0} \frac{M}{M_p} \frac{dT_p}{z^2\left(\frac{dT_p}{\rho\, dx}\right)_{M_p}} = \frac{M}{z^2 M_p} \int_0^{\frac{M_p}{M}T_0} \frac{dT_p}{\left(\frac{dT_p}{\rho\, dx}\right)_{M_p}} = \frac{M}{z^2 M_p} R_{CSDA}\left(M_p, 1, \frac{M_p}{M} T_0\right)}$$

De donde podemos obtener el poder de frenado másico de una partícula pesada de masa M y carga z a partir del poder de frenado másico del protón en el mismo medio.

Alcance electrones en agua

Energy E_0	S_{ion}	S_{rad} MeV cm²/g	S_{tot}	Range R g/cm² (eq. 6-28)
keV				
10	22.56	.0039	22.56	.0003
20	13.17	.0040	13.18	.0009
40	7.777	.0040	7.781	.0029
80	4.757	.0041	4.762	.0098
100	4.115	.0042	4.120	.0143
200	2.793	.0048	2.798	.0447
400	2.148	.0063	2.154	.1282
800	1.886	.0104	1.897	.3294
MeV				
1	1.852	.0128	1.865	.4359
2	1.839	.0268	1.866	.9720
4	1.896	.0608	1.957	2.019
8	1.970	.1398	2.110	3.984
10	1.994	.1823	2.176	4.917
20	2.063	.4097	2.472	9.237
40	2.125	.8962	3.021	16.55
80	2.184	1.914	4.099	27.88
100	2.204	2.434	4.637	32.47

Alcance CSDA de electrones en agua, última columna de la derecha. Obsérvese que en la región de radioterapia de fotones (MeV) el alcance es del rango de cm.

Alcance CSDA partículas cargadas pesadas

El alcance R CSDA (Continuos Slowing Down Approximation) se suele calcular para protones en el caso de las partículas cargadas pesadas y se obtiene para partículas de diferente carga/masa a través del correspondiente escalado. Hemos de tener en cuenta los siguientes aspectos para partículas cargadas pesadas:

- La energías cinéticas de partículas con la misma velocidad son proporcionales a su masa
- Todas las partículas cargadas con carga unidad (en unidades de la carga del electrón) tienen el mismo poder de frenado
- Por tanto el rango de una partícula cargada pesada (con una carga unidad) es proporcional a su masa en reposo

$$\boxed{T = Mc^2(\gamma - 1)}$$

$$\boxed{\frac{dT}{\rho\, dx} = z^2 L(\beta)}$$

$$\boxed{\frac{dT}{\rho\, dx} = Mc^2 \frac{d(\gamma - 1)}{\rho\, dx} = z^2 L(\beta)}$$

Alcance CSDA partículas cargadas pesadas

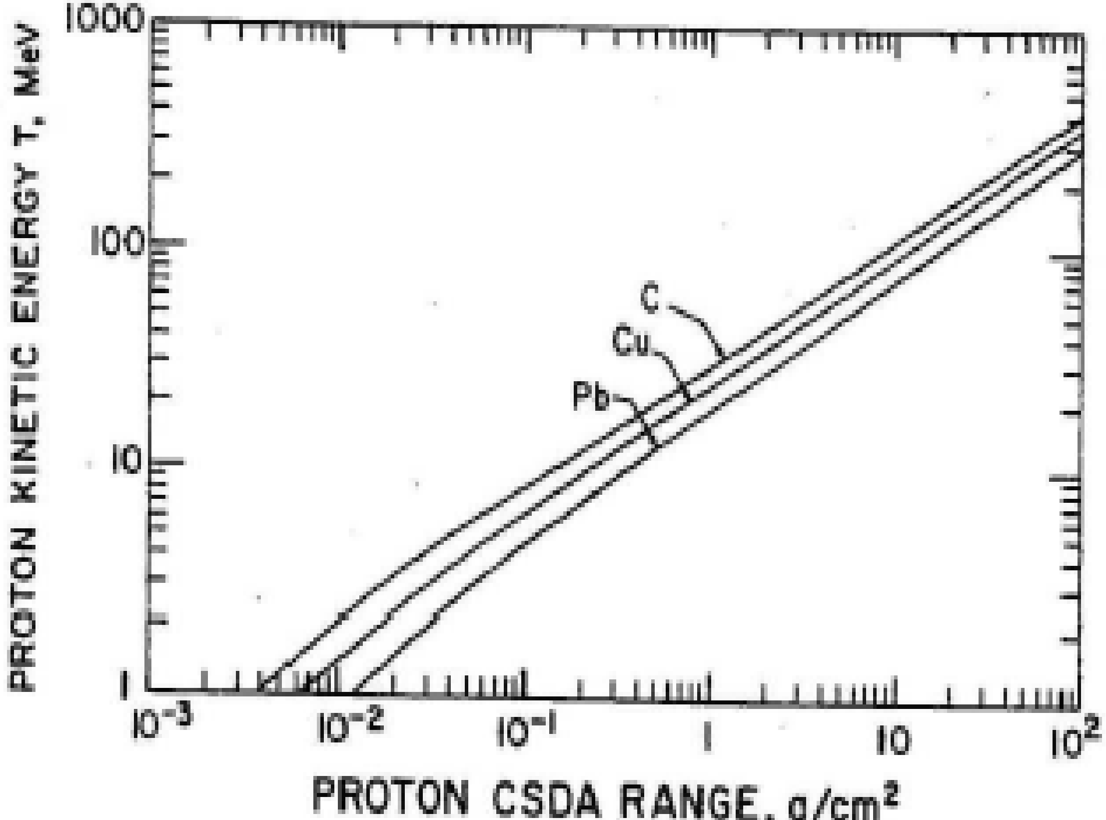


FIGURE 8.8. CSDA range (abscissa) vs. proton kinetic energy (ordinate) for C (graphite), Cu, and Pb.(From data of Bichsel, 1968).

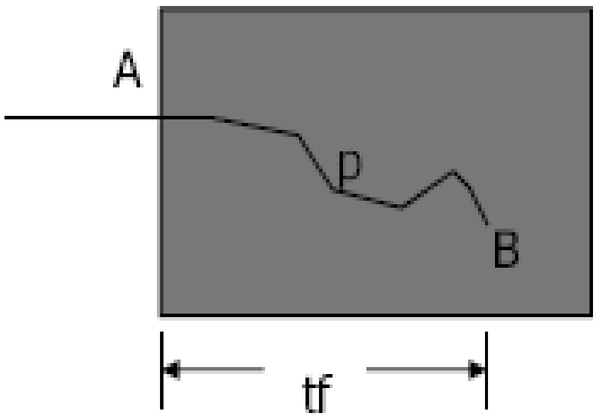
Alcance para protones en C, Cu y Pb. Obsérvese que el comportamiento a altas energías es aproximadamente lineal con $T_0^{1.77}$ con diferentes factores entre los diferentes medios materiales (Z).

$$\boxed{R_{CSDA}(C) = \frac{T_0^{1.77}}{415} + \frac{1}{670}}$$

T en MeV, R en g/cm2

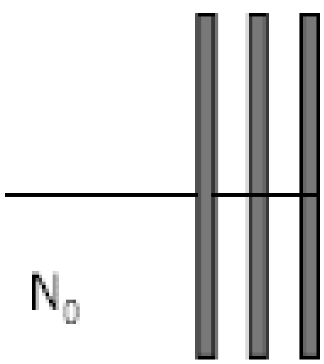
Puesto que el poder de frenado se comporta como Z/A, el rango resulta ser mayor al aumentar Z, de modo que en Pb a la misma energía es del orden de tres veces mayor que en Carbono.

Alcance proyectado



El alcance proyectado lo definimos como el valor esperado de la profundidad máxima de penetración tf en el medio en la dirección de incidencia. Si consideramos un haz de partículas estrecho que incide sobre una lámina de espesor t, las partículas que no atraviesen dicha lámina serán aquellas que tengan tf < t. Si consideramos una lámina de espesor infinitesimal dt a una profundidad total t

$$\left|\frac{dN(t)}{N_0}\right| = prob(t < tf < t + dt)$$



Por tanto podemos calcular el valor del alcance proyectado mediante un experimento de transmisión donde midamos el número de partículas que atraviesan un cierto espesor de material aumentándolo progresivamente hasta que no exista ninguna partícula transmitida.

$$< t > = \sum_{t=0}^{\infty} t \; prob(t < tf < t + dt) = \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} \left|dN(t)\right| \, t = \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} dt \; t \left|\frac{dN(t)}{dt}\right|$$

La función 1/N0 * dN/dt representa la densidad de probabilidad de máximas profundidades de penetración tf.

Alcance

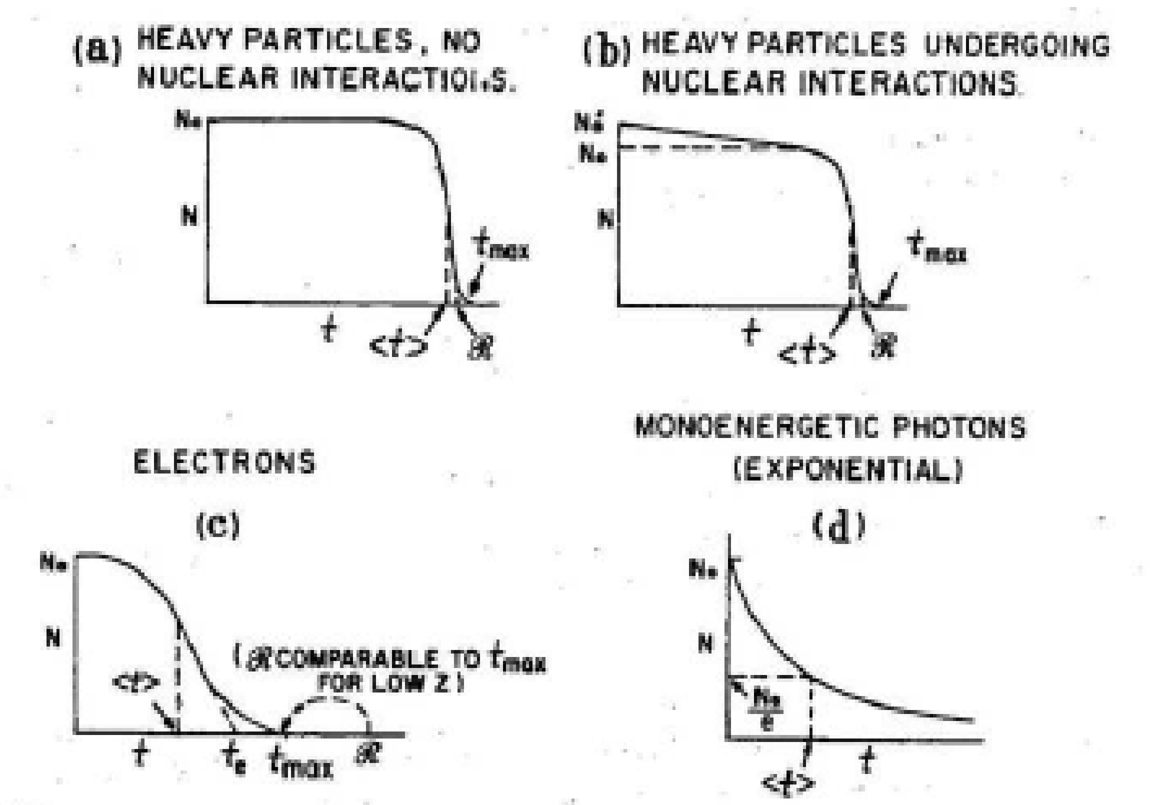


FIGURE 8.9. Numbers of monoenergetic charged particles or photons penetrating through a slab thickness t of absorbing medium. Scattered photons are assumed to be ignored in d. $\langle t \rangle$ is the projected range, t_e is the extrapolated penetration depth, t_{max} is the maximum penetration depth, and R is the range ($\equiv R_{CSDA}$).

El alcance máximo tmax se define como el mínimo espesor másico que no es atravesado por ninguna partícula. (O el alcance de la partícula más penetrante)

En la figura los tres rangos definidos: R_{CSDA}, <t> y t_{max}. Obsérvese que en general se cumple que

$$\boxed{\langle t \rangle < t_{\max}}$$

Para partículas pesadas

$$\boxed{R_{CSDA} \approx t_{\max}}$$

En general hasta que el espesor másico del material se acerca al rango proyectado <t>, no se observa ningun decremento del número de partículas. El rango R (valor medio de la longitud de trayectoria) para protones no suele ser mayor de un 3% que el rango proyectado <t> y es muy cercano a tmax. El rango R para iones suele estar cerca de tmax, en el caso de electrones R > tmax en general.

Alcance electrones

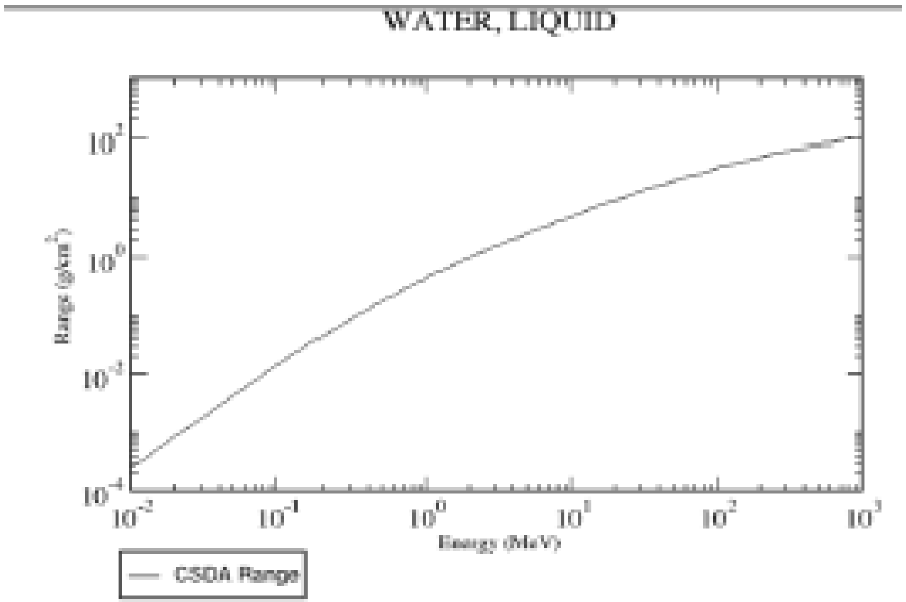


TABLE 8.4. Comparison of Maximum Penetration Depth t_{max} with CSDA Range[a] for Electrons of Energy T_o

T_o (MeV)	Z	t_{max} (mg/cm²)	$\Re_{CSDA}$ (mg/cm²)	$t_{max}/\Re_{CSDA}$
.05	13 (Al)	5.05	5.71	.88
.10	13 (Al)	15.44	18.64	.83
.15	13 (Al)	31.0	36.4	.85
.05	29 (Cu)	5.42	6.90	.79
.10	29 (Cu)	17.1	22.1	.77
.15	29 (Cu)	34.0	42.8	.79
.05	47 (Ag)	5.04	7.99	.63
.10	47 (Ag)	15.6	25.2	.62
.15	47 (Ag)	30.2	48.4	.62
.05	79 (Au)	4.73	9.88	.48
.10	79 (Au)	14.3	30.3	.47
.15	79 (Au)	27.6	57.5	.48

[a] After Bichsel (1968), based on experimental results of Gubernator and Flammersfeld, and CSDA ranges of Berger and Seltzer (1964). Reproduced with permission from H. Bichsel and Academic Press, Inc.

En el caso de los electrones es especialmente llamativa la suave forma de S de su penetración en el material. Es importante tener en cuenta que los electrones (y las partículas cargadas en mucha menor medida) sufren:

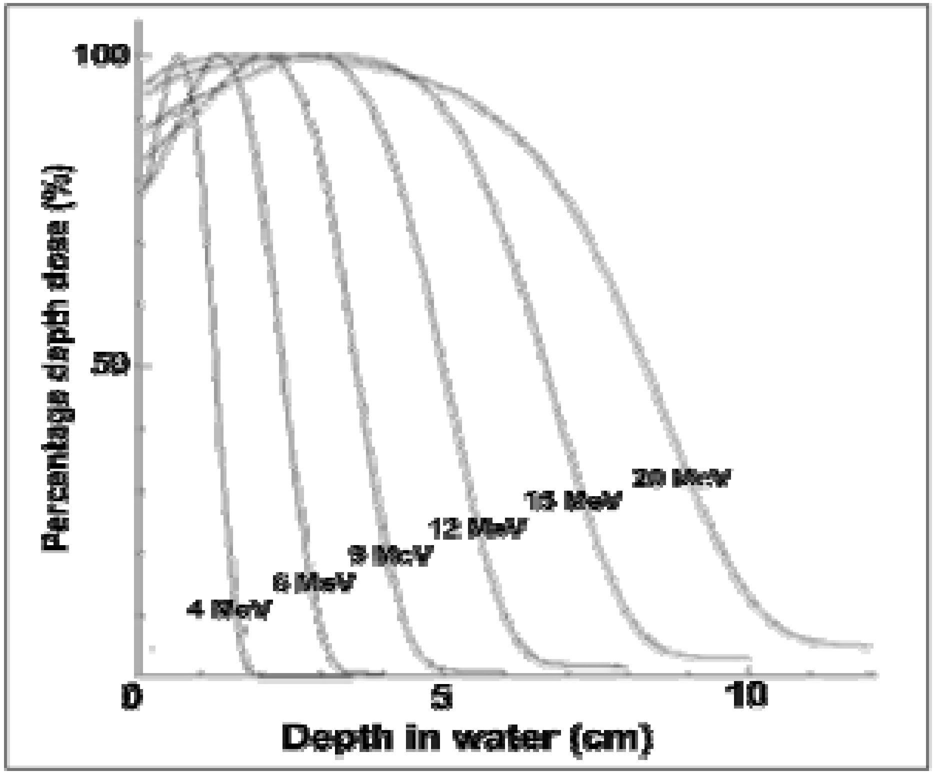
- Scattering multiple que produce trayectorias tortuosas haciendo significativamente menor el valor de la profundidad de penetración respecto al alcance (longitud de trayectoria).

- Dispersión de alcance, produciendo variaciones en el alcance como consecuencia de las variaciones estocásticas en la tasa de pérdida de energía en el medio.

- Dispersión de energía (energy straggling) relacionada con la anterior, produce que después de penetrar un espesor t, un haz monoenergético deja de serlo.

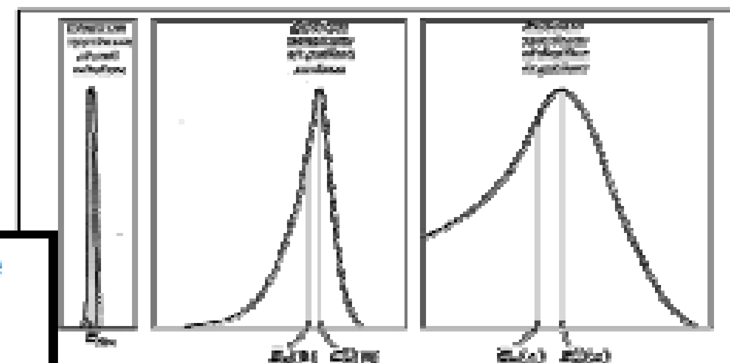
Todos estos efectos en electrones a alta energía llevan a tener tmax ~ 2<t>. Mientras que para bajo Z tmax es comparable al rango, el cociente a alto Z es tmax/R ~ 0.5. Sin embargo <t> y tmax dependen poco de Z.

Alcance electrones en agua



Alcance. Electrones

En el caso de electrones la dosis superficial crece con la energía del haz. En terapia puede considerarse que el haz es casi monoenergético al abandonar el cabezal del LINAC. La contaminación de frenado crece con la energía del haz.

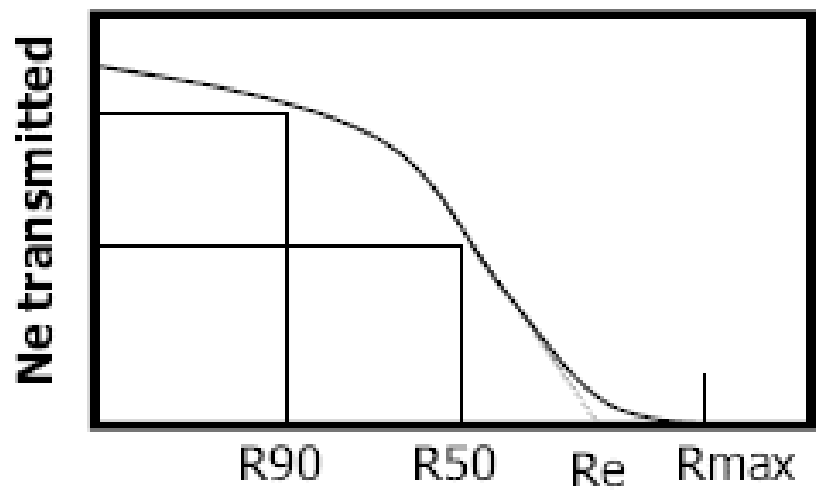


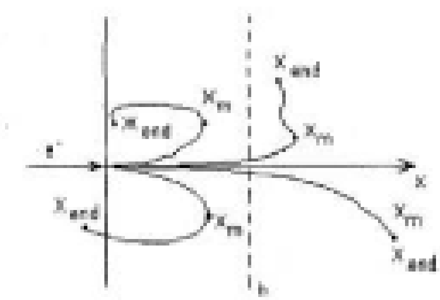
Energy (MeV)	R_{90} (cm)	R_{80} (cm)	R_{50} (cm)	R_p (cm)	(MeV)	Surface dose %
6	1.7	1.8	2.2	2.9	5.6	81
8	2.4	2.6	3.0	4.0	7.2	83
10	3.1	3.3	3.9	4.8	9.2	86
12	3.7	4.1	4.8	6.0	11.3	90
15	4.7	5.2	6.1	7.5	14.0	92
18	5.5	5.9	7.3	9.1	17.4	96

Alcance extrapolado electrones

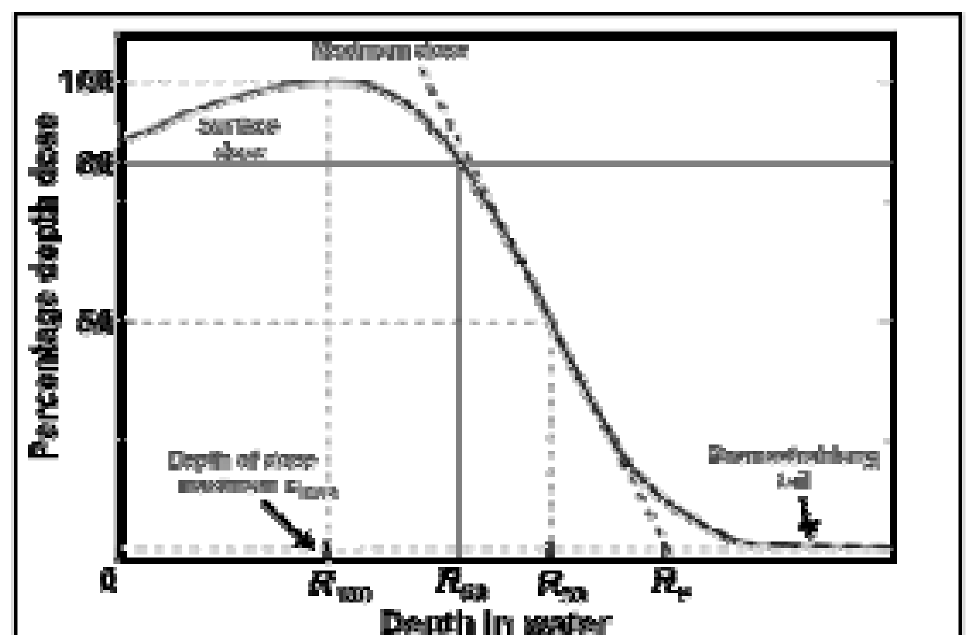
Para el caso de electrones es habitual definir el alcance extrapolado como el punto de corte de la interpolación lineal del número de elecrones transmitidos en función del espesor másico del material. (En niveles de megavoltaje el poder de frenado en agua está entorno a 2MeV/cm)

Se define como R50 (R90) el espesor másico al cual el número de electrones transmitidos es la mitad (90%) de los electrones incidentes en la lámina de material.





Electron energy (MeV)	CSDA range in air (g/cm²)	CSDA range in water (g/cm²)
6	3.255	3.052
7	3.756	3.545
8	4.246	4.030
9	4.724	4.506
10	5.192	4.975
20	9.447	9.320
30	13.150	13.170



Alcance formulas semiempíricas Partículas alfa

Para partículas alpha la diferencia entre el alcance máximo y alcance extrapolado es pequeña (menos del 5%). En general se suele dar el rango en el aire (a temperatura y presión estándar)

$$R(mm) = \exp\left[1.61\sqrt{T}\right] \qquad 1MeV < T \le 4MeV$$

$$R(mm) = (0.05T + 2.85)\,T^{3/2} \qquad 4MeV < T \le 15MeV$$

Donde T es la energía cinética de las partícuas alpha en MeV. Estas fórmulas pueden ser utilizadas para calcular el alcance en otros medios (con igual energía cinética inicial) considerando la regla de Bragg-Kleeman

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}}; \qquad \rho_{aire} = 1.29\cdot 10^{-3}\, g/cm^3$$

En esta fórmula semiempírica podremos usar un número másico efectivo del medio de acuerdo a la ecuación siguiente

$$\sqrt{A_{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{\sqrt{A_i}}}$$

Por ejemplo en el caso de aire (22.9% O, 74.5% N, 2.6% Ar) tendremos que

$$\sqrt{A_{eff}} = \left[\frac{0.229}{\sqrt{16}} + \frac{0.745}{\sqrt{14}} + \frac{0.026}{\sqrt{40}}\right]^{-1} = 3.84; \qquad A_{eff} = 14.7$$

Alcance formulas semiempíricas Partículas alfa

Podemos entonces calcular el alcance de una partícula alpha partiendo de su alcance en aire. Por ejemplo, podemos calcular el alcance de una particula alpha de 10 MeV de energía cinética en aluminio. Recordemos que

$$\boxed{\begin{array}{ll} R(mm) = \exp\left[1.61\sqrt{T}\right] & 1MeV < T \le 4MeV \\ R(mm) = (0.05\,T + 2.85)\,T^{3/2} & 4MeV < T \le 15MeV \end{array}}$$

Por tanto en aire

$$\boxed{R(mm) = (0.05 \cdot 10 + 2.85)\,10^{1.5} = 105.9\ mm}$$

En aluminio tendremos

$$\boxed{R_1 = R_2 \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}} = 105.9\,\frac{1.29 \cdot 10^{-3}}{2.7}\sqrt{\frac{27}{14.7}} = 68.6\ \mu m}$$

Esta fórmula de Bragg-Kleeman se puede usar para calcular el alcance en otros medios como por ejemplo en oro, partiendo del cálculo en aluminio

$$\boxed{R_1 = R_2 \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}} = 68.6\ \mu m\,\frac{2.7}{19.3}\sqrt{\frac{197}{27}} = 25.9\ \mu m}$$

Alcance formulas semiempíricas. Proton y deutron

En el caso de protón y deuterio podemos calcular su alcance en aire usando el alcance de una partícula alpha en auire con su misma velocidad, esto es

$$T_\alpha = \frac{M_\alpha}{M_p} T_p; \quad \text{o bien} \quad T_\alpha = \frac{M_\alpha}{M_d} T_d;$$

Una vez conocida la energía cinética correspondiente calculamos el alcance de la partícula alpha y después el alcance de protón o deuterón mediante

$$R(p,d) = 4\frac{M(p,d)}{M_\alpha} R_\alpha - 2;$$

Donde el rango de la partícula alpha y del protón o deuterón estan en mm.

Por ejemplo, si queremos calcular el rango de deuterio de 5 MeV en aluminio. Primero calcularemos el rango de una partícula alpha equivalente en aire

$$T_\alpha = \frac{M_\alpha}{M_d} T_d \simeq 2T_d = 10\ MeV$$

$$R(mm) = (0.05 \cdot 10 + 2.85)10^{1.5} = 105.9\ mm$$

Calculamos el rango del deuterio en aire

$$R(mm) = 4\frac{1}{2} R_\alpha - 2 = 2 \cdot 106 - 2 = 210\ mm$$

Y usamos la regla de Bragg-Kleeman para calcular

$$R_1 = R_2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}} = 210mm \frac{1.29 \cdot 10^{-3}}{2.7} \sqrt{\frac{27}{14.7}} = 136\ \mu m$$

Alcance formulas semiempíricas. Proton

Otra opción en el cálculo del alcance de protones es usar la parametrización de Bichsel en aluminio (Phys. Rev. 112 1958)

$$\boxed{\begin{array}{ll} R(\mu m) = 14.21\,T^{1.5874} & 1\,MeV < T \le 2.7\,MeV \\ R(\mu m) = 10.5\,\dfrac{T^2}{0.68 + 0.434\ln(T)} & 2.7\,MeV < T \le 20\,MeV \end{array}}$$

T (MeV)

Una vez calculado el alcance en aluminio se puede obtener el correspondiente alcance en otro medio teniendo en cuenta la regla de Bragg-Kleeman.

Por ejemplo podemos determinar el alcance de un protón de 10 MeV en silicio. Para ello calculamos primero el alcance en aluminio

$$\boxed{R = 10.5\,\frac{10^2}{0.68 + 0.434\ln(10)} = 625\ \mu m}$$

Calculamos el rango en silicio

$$\boxed{R_1 = R_2\,\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}} = 625\mu m\,\frac{2.7}{2.33}\sqrt{\frac{28}{27}} = 737\ \mu m}$$

Alcance formulas semiempíricas. Electrones y positrones

Una fórmula aproximada para el alcance extrapolado proviene de Tabata, Ito y Okabe (NIM 103 1972).

$$\boxed{R(kg/m^2) = a_1\left(\frac{\ln[1 + a_2(\gamma - 1)]}{a_2} - \frac{a_3(\gamma - 1)}{1 + a_4(\gamma - 1)^{a_5}}\right)}$$

T (MeV)

Los parámetros a1, a2, a3, a4, a5 dependen de A y Z de la forma

$$a_1 = \frac{2.335\,A}{Z^{1.209}} \qquad a_2 = 1.78\cdot 10^{-4} Z \qquad a_3 = 0.9891 - 3.01\cdot 10^{-4} Z$$

$$a_4 = 1.468 - 1.180\cdot 10^{-2} Z \qquad a_5 = \frac{1.232}{Z^{0.109}} \qquad \gamma = \frac{1.511}{0.511} = 2.957$$

Por ejemplo podemos determinar el alcance de un electrón de 1 MeV en aluminio (Z=13, A=27)

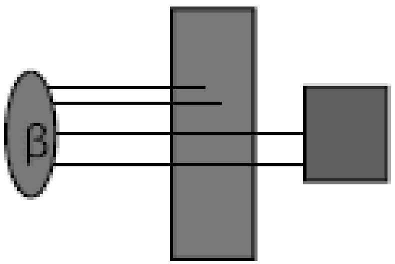
$$a_1 = \frac{2.335\;27}{(13)^{1.209}} = 2.837 \qquad a_2 = 1.78\cdot 10^{-4}\cdot 13 = 2.31\cdot 10^{-3} \qquad a_3 = 0.9891 - 3.01\cdot 10^{-4}\;13 = 0.985$$

$$a_4 = 1.468 - 1.180\cdot 10^{-2}\cdot 13 = 1.3146 \qquad a_5 = \frac{1.232}{(13)^{0.109}} = 0.9315$$

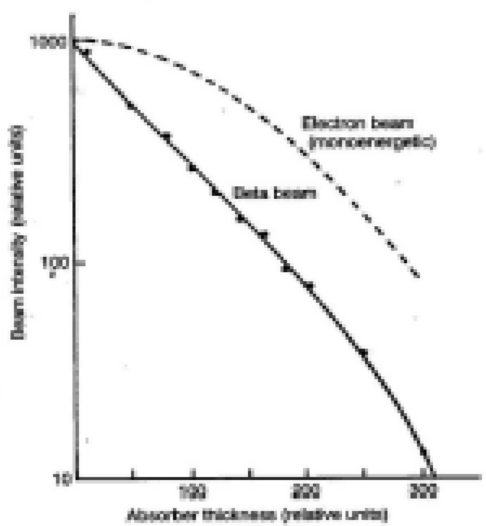
$$R(kg/m^2) = 2.837\left(\frac{\ln[1 + 2.3\cdot 10^{-3}(2.957 - 1)]}{2.3\cdot 10^{-3}} - \frac{0.985(2.957 - 1)}{1 + 1.3146(2.957 - 1)^{0.9315}}\right) = 3.93\,kg/m^2 = 0.393\,g/cm^2$$

$$\boxed{R(cm) = \frac{0.393\,g/cm^2}{2.7\,g/cm^3} = 0.146\,cm = 1.46\,mm}$$

Formulas semiempíricas. Transmisión para fuentes beta



En las fórmulas de alcance para electrones consideramos electrones monoenergéticos. Sin embargo si estudiamos la fracción de electrones transmitidos a través de un cierto espesor t de un material, hemos de tener en cuenta que una fuente beta emite electrones con energías cinéticas desde 0 hasta Emax. La dependencia del número de electrones trasmitidos con el espesor puede considerarse como exponencial



$$\boxed{N(t) = N_0 \exp(-\mu t)}$$

Siendo t el espesor másico del material interpuesto entre la fuente y el detector. El valor del coeficiente de atenuación efectivo se ha determinado experimentalmente

$$\boxed{\mu(m^2 / kg) = 1.7 \cdot E_{max}^{-1.14}}$$

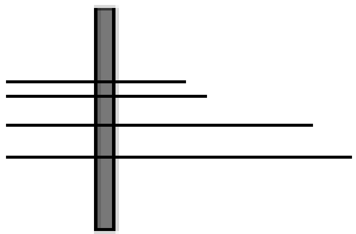
Donde Emax está en MeV.

Podemos entonces calcular la fracción de electrones provenientes de una fuente de 32P que atravesarán una lámina de 0.2 mm de Al. El 32P emite betas con una energía máxima de 1.71 MeV

$$\boxed{\mu(m^2 / kg) = 1.7 \cdot (1.71)^{-1.14} = 0.92\ m^2 / kg}$$

$$\boxed{\frac{N(t)}{N_0} = \exp(-\mu t) = \exp(-0.92\ 0.2\times10^{-3} m\ 2.7\times10^{3} kg / m^{3}) = 0.61}$$

Dosis en láminas delgadas depositada por partículas cargadas



Consideremos un haz de partículas cargadas monoenergético que incide perpendicularmente sobre una lámina delgada (número atómica Z). Sea T0 la energía cinética de las partículas incidentes. En el caso más simple podemos suponer que se cumplen los siguientes requisitos:

- El poder de frenado por colisión es casi constante en el espesor y la pérdida de energía cinética es pequeña comparada con T0

- Todas las partículas siguen una trayectoria prácticamente recta al atravesar la lámina.

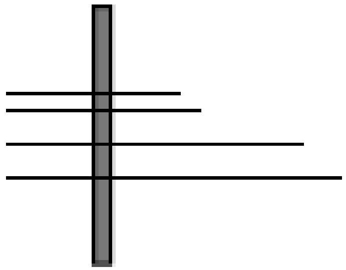
- La energía cinetica de los rayos δ que abandonan la lámina es despreciable. Bien porque el rango de estos rayos es menor que el espesor de la lámina. O bien porque ésta se encuentra insertada entre láminas adyacentes de modo que para cada rayo δ que abandona la lámina otro penetra en la misma. Esto es existe equilibrio de partículas cargadas respecto a los rayos δ.

En general para partículas cargadas pesadas estas condiciones se suelen satisfacer. En el caso de electrones despreciamos aquí su retrodispersión, y el efecto de múltiple scattering que tiende a hacer que sus trayectorias se desvíen significativamente de la línea recta.

Bajo éstas hipótesis cada partícula cargada pierde una energía igual a su poder de frenado por el espesor de material. Así que la energía perdida por unidad de área es

$$\boxed{E = \Phi \left(\frac{dT}{\rho\, dx}\right)_c \rho t; \quad \Phi \text{ fluencia } part/cm^2; \quad \left(\frac{dT}{\rho\, dx}\right)_c \text{ en } \frac{MeV}{g/cm^2}; \quad \rho t \text{ espesor másico } g/cm^2}$$

Dosis en láminas delgadas depositada por partículas cargadas



Considerando la situación de CPE para los rayos δ, podemos considerar que la energía perdida por el haz es igual a la energía impartida en la lámina. Por lo cual la dosis se puede calcular como la energía impartida dividida por la masa asociada a la unidad de área, esto es

$$\boxed{D = \frac{E}{\rho\, t} = \frac{\Phi\left(\frac{dT}{\rho\, dx}\right)_c \rho\, t}{\rho\, t} = \Phi\left(\frac{dT}{\rho\, dx}\right)_c}$$

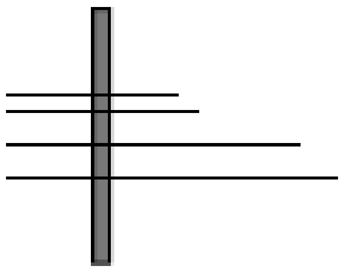
Esto significa que la dosis puede ser calculada como el producto de la fluencia por el poder de frenado másico por colisión en el medio material. En el caso de expresar el poder de frenado en MeV/(g/cm2) y la fluencia en 1/cm2, obtendremos D en MeV/g que puede ser convertido a Gy mediante

$$\boxed{D(Gy) = 1.602 \cdot 10^{-10}\ \Phi\left(\frac{dT}{\rho\, dx}\right)_c}$$

La dosis NO DEPENDE del espesor de la lámina. De modo que si se mantienen las hipótesis de este cálculo, si se inclina la lámina de modo que no sea perpendicular al haz la dosis permanece invariante.

En el caso de no cumplirse CPE para los rayos δ, tendremos que usar el poder de frenado restringido en lugar del poder de frenado total por colisión.

Dosis en láminas delgadas depositada por partículas cargadas



En el caso de electrones, incluso en espesores no excesivamente grandes, la hipótesis de trayectorias rectilíneas no es aceptable. Aunque la pérdida de energía cinética no sea importante, la corrección por la longitud efectiva de la trayectoria puede llegar a ser de hasta un 10%.

El parámetro habitual para parametrizar el espesor de un material para electrones es la fracción de longitud de radiación X0

$$\boxed{\xi = \frac{\rho\, t}{X_0}}$$

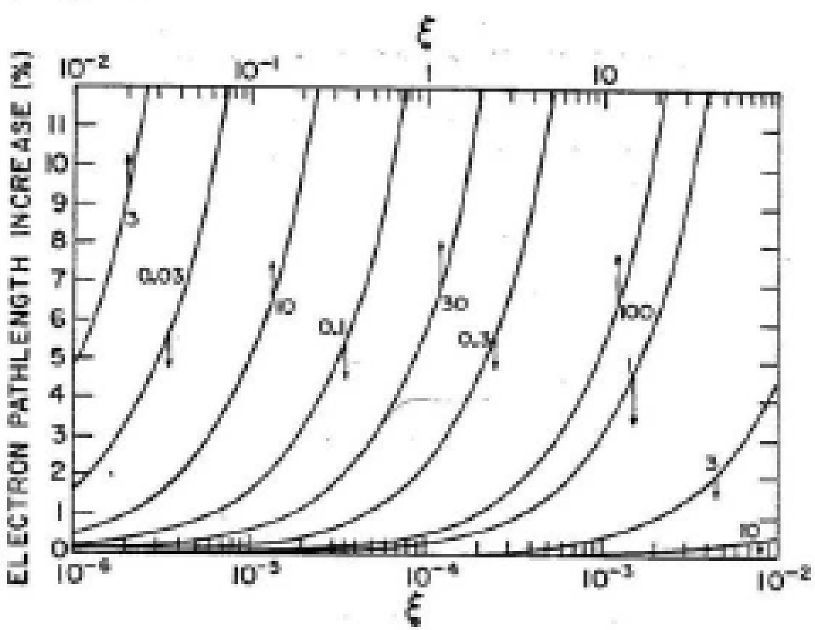


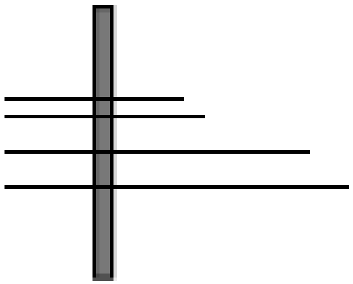
FIGURE 8.11. Percentage increase in mean electron pathlength relative to normalized foil thickness ξ [= foil mass thickness ρt divided by radiation length of the medium; see Eq. (8.28)]. Data were calculated from the "modified Yang theory" according to Birkhoff (1958), given by $50\bar{r}/a^2$ in Birkhoff's terminology. For a given energy and foil material the percentage increase in pathlength is proportional to foil thickness in the Yang approximation. Numbers on curves give electron energies in MeV.

La gráfica adjunta nos muestra el incremento a aplicar en la longitud efectiva de la trayectoria del electrón en función de este parámetro ξ. Una vez conocido el incremento efectivo Δ de la longitud, podemos calcular

$$\boxed{D(Gy) = 1.602\cdot 10^{-10}\ \Phi \left(\frac{dT}{\rho\, dx}\right)_c (1+\Delta)}$$

A primer orden, en láminas delgadas el aumento efectivo (relativo) de la dosis es igual al correspondiente a la longitud efectiva de la trayectoria de electrones.

Dosis en láminas delgadas depositada por partículas cargadas



Cuando consideramos partículas cargadas pesadas en una lámina gruesa, la hipótesis que falla (respecto a las realizadas en lámina fina) es la variación del poder de frenado másico de las partículas (i.e. variación de su velocidad).

La pérdida de energía cinética en lámina gruesa es considerable comparada con el valor de ésta. Sea T_0 la energía cinética incidente del haz monoenergético y Tex la energía cinética media de las partículas emergentes de la lámina. Podremos decir que la pérdida de energía cinética es

$$\boxed{\Delta T = T_0 - T_{ex}}$$

La energía media depositada en la lámina por unidad de superficie es igual a la fluencia del haz multiplicada por la pérdida media de energía cinética

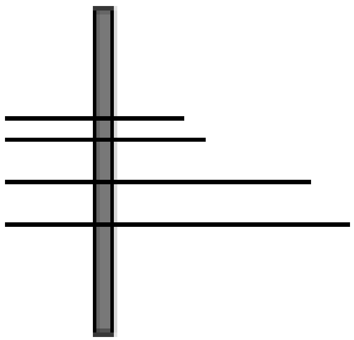
$$\boxed{E = \Phi \cdot \Delta T}$$

La dosis media corresponde al cociente entre esta energía y la masa correspondiente a la unidad de área de la lámina

$$\boxed{\overline{D} = \frac{\Phi \cdot \Delta T}{\rho\, t}; \qquad \overline{D}(Gy) = 1.602 \cdot 10^{-10}\, \frac{\Phi \cdot \Delta T}{\rho\, t}; \quad \Phi \text{ en } cm^{-2} \quad \Delta T \text{ en } MeV \qquad \rho\, t \text{ en } g/cm^2}$$

Una técnica de cálculo consiste en evaluar el alcance CSDA para T_0 en el material R_0. A este valor de alcance le restamos el valor de espesor de la lámina $R_{ex}=R_0-\rho t$ y obtenemos el alcance residual de las partículas emergentes. Tomando este alcance R_{ex} buscamos la energía cinética que le corresponde en la tabla CSDA y obtenemos T_{ex} de donde calculamos ΔT.

Dosis en láminas delgadas depositada por partículas cargadas



En el caso de electrones el principio de cálculo es el mismo. Esencialmente hemos de hacer dos correcciones:

- La longitud de trayectoria media es superior al espesor de la lámina y normalmente esta discrepancia es proporcional al espesor del material.
- Una parte de la pérdida de energía en el medio se invierte en la producción de radiación de frenado. Esta fracción la habíamos caracterizado por Y(T) la fracción neta de energía radiada (diap. 58)

La energía media depositada en la lámina por unidad de superficie es igual a la fluencia del haz multiplicada por la pérdida media de energía cinética empleada en colisiones

$$\boxed{E = \Phi \cdot \Delta T_c} \qquad \boxed{\Delta T_c = T_0(1 - Y(T_0)) - T_{ex}(1 - Y(T_{ex}))}$$

La dosis media será

$$\boxed{\overline{D} = \frac{\Phi \cdot \Delta T_c}{\rho\, t}; \qquad \overline{D}(Gy) = 1.602 \cdot 10^{-10}\, \frac{\Phi \cdot \Delta T_c}{\rho\, t}; \quad \Phi \text{ en } cm^{-2} \quad \Delta T \text{ en } MeV \qquad \rho\, t \text{ en } g/cm^2}$$

Dosis en láminas gruesas depositada por electrones. Ejemplo

Consideremos un haz de electrones de 10 MeV con una fluencia de 10^{10} cm^{-2} que inicide perpendicularmente sobre una lámina de plomo de 1 mm de espesor. Espesor másico 1.13 g/cm2. La longitud de radiación del plomo es X0=6.496 g/cm2 (Attix) (X0=6.213 g/cm2 fórmula diap. 55).

Usamos el apéndice E del Attix para estimar el rango de los electrones

$$\boxed{R_{CSDA}(10MeV) = 6.133\ \frac{g}{cm^2}; \qquad \xi = \frac{1.13}{6.496} = 0.17}$$

El espesor normalizado es 0.17 y buscamos en la gráfica inferior el porcentaje de incremento de la longitud media de las trayectorias de los electrones. Obtenemos un incremento entorno al 8%. Por lo cual el valor de la longitud media de trayectoria es 1.13 g/cm2 (1+0.08)= 1.22 g/cm2

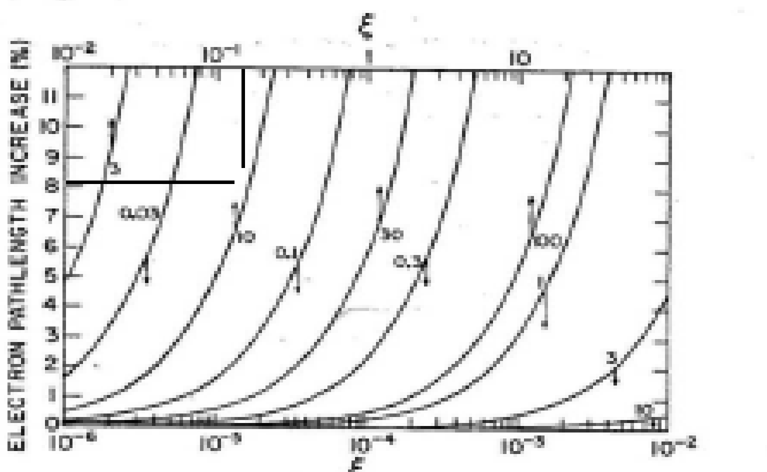


FIGURE 8.11. Percentage increase in mean electron pathlength relative to normalized foil thickness ξ [= foil mass thickness ρt divided by radiation length of the medium; see Eq. (8.28)]. Data were calculated from the "modified Yang theory" according to Birkhoff (1958), given by [illegible] in Birkhoff's terminology. For a given energy and foil material the percentage increase in pathlength is proportional to foil thickness in the Yang approximation. Numbers on curves give electron energies in MeV.

El rango residual de electrones emergentes es (6.13 - 1.22) g/cm2= 4.91 g/cm2. Esto se corresponde a Tex (en la tabla) 7.5 MeV (aprox). De aquí

$$\boxed{\Delta T_c = 10\cdot(1-0.316) - 7.5\cdot(1-0.265) = 1.33\ MeV}$$

$$\boxed{\overline{D}(Gy) = 1.602\cdot 10^{-10}\ \frac{10^{10}\cdot 1.33}{1.13} = 1.9\ Gy}$$

Haces de partículas cargadas. Distribución de dosis en profundidad

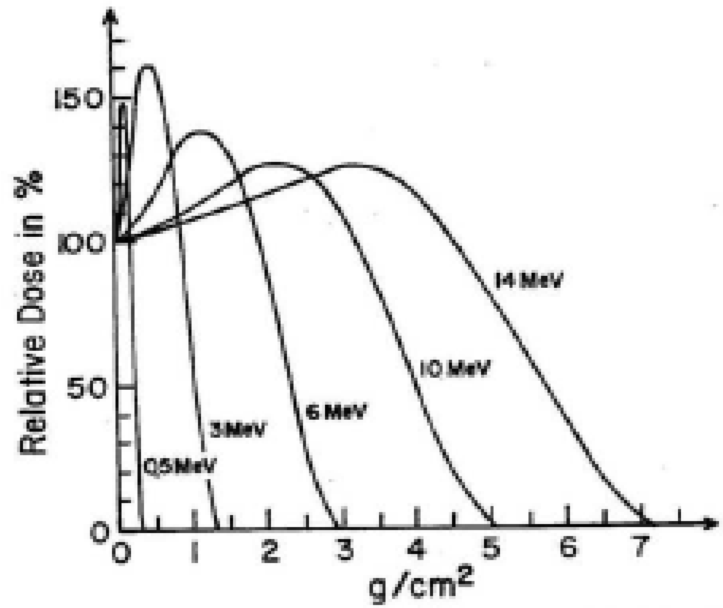


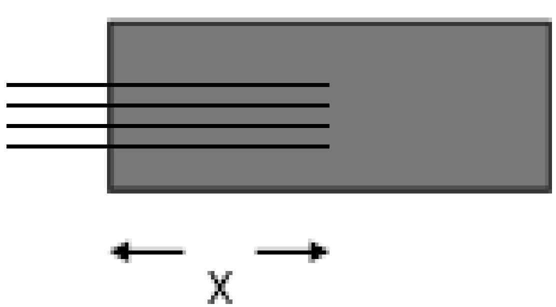
FIGURE 8.14a. Dose vs. depth in water for broad electron beams of the indicated incident energies. (After Holm, 1969. Reproduced with permission of N. W. Holm and Academic Press.)

Cuando irradiamos un medio mediante un haz de partículas cargadas la deposición de dosis en profundidad es consecuencia del transporte de las partículas en ese medio. En el caso de partículas cargadas pesadas se produce la curva de Bragg con un pico abrupto al final de la trayectoria de los iones. Sin embargo para electrones las curvas son mucho más suaves debido a la dispersión de los electrones en el medio.

Un cálculo estricto requiere conocer a cada profundidad el espectro de energía de las partículas o bien su fluencia como función de su energía cinética.

$$\Phi(x,T) = \frac{dN}{da\,dT}; \quad \text{expresado como} \quad \frac{part}{cm^2\,MeV}$$

$$D_{medio}(x) = 1.602 \cdot 10^{-10} \int_0^{T_{max}} dT\; \Phi(x,T) \left(\frac{dT}{\rho\, dx}\right)^{T}_{col,\,medio}$$



Podemos obtener la energía cinética media a una profundidad x usando la técnica previa de evaluar el rango residual después de atravesar una lámina de espesor x. De este rango obtenemos T(x) medio

$$\Phi(x,\bar{T}_x) \approx \Phi_0; \qquad D_{medio}(x) = 1.602 \cdot 10^{-10}\, \Phi_0 \left(\frac{dT}{\rho\, dx}\right)^{\bar{T}_x}_{col,\,medio}$$

Alcance electrones en agua