

Perdida de ionizaciones

Colisión con electrones

Consideremos una partícula de masa M que sufre una colisión con un electrón en reposo. La máxima energía cinética T que puede adquirir un electrón en una colisión directa es:



$$\beta = \frac{v}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$
$$E = Mc^2 \gamma$$

$$T_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\left[1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2\right]}$$

Cuando se cumple que $2\gamma m_e/M \ll 1$ entonces se puede aproximar como:

$$T_{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

Esta expresión suele ser válida para iones no ultrarrelativistas, y en este caso podemos ver que la máxima energía transferida no depende de M . En el límite no relativista esta expresión se puede escribir como

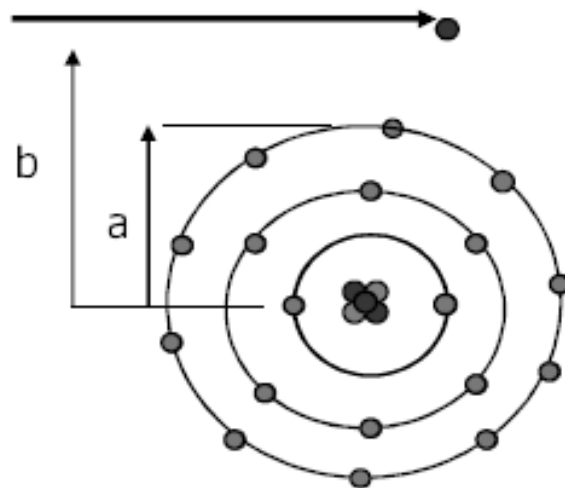
$$T_{\max} = \frac{4E m_e}{M}$$

Si consideramos una partícula alpha esto significa que pierde sólo (como máximo) 1/2000 de su energía en cada colisión con los electrones del medio. (Para un ión de masa A esta pérdida por colisión es de $1/(500 \cdot A)$)

Perdida de ionizaciones

Colisión coulombiana

Debido a la pequeña fracción perdida en cada interacción coulombiana, un ión que atraviesa el medio material interacciona con multitud de cargas en éste, pudiéndose considerar que el efecto es una pérdida continua de energía hasta su detención (Continuos Slowing Down Approximation o CSDA). Aunque el proceso es realmente más complejo.



Esencialmente es posible parametrizar el tipo de interacciones con los átomos del medio en función del parámetro de impacto b de la colisión de la partícula cargada respecto al radio atómico a .

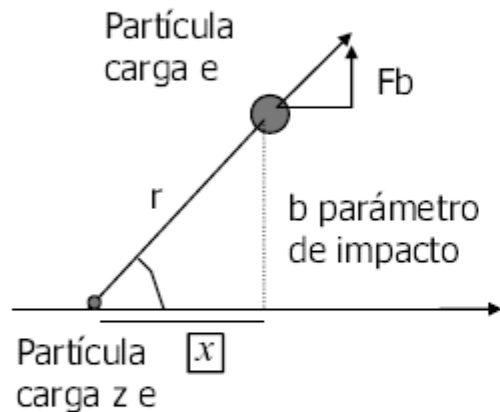
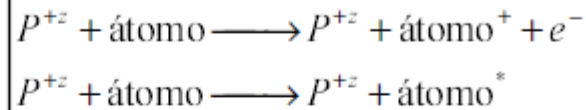
Colisiones "soft" $a < b$

En estas colisiones el proyectil pasa a una elevada distancia del átomo y por tanto apenas lo excita, pudiendo llegar a producirse alguna ionización de electrones de valencia en las capas externas. La pérdida de energía es muy pequeña (eV). Se trata de las colisiones más numerosas en el medio y que provocan la mayor parte neta de la pérdida de energía de la partícula cargada (orden 50%).

Perdida de ionizaciones

Colisiones soft

Consideremos la colisión de ión cargado con carga z con un átomo que da lugar a excitación e ionización atómica en la que participa un solo electrón



Por simetría el cambio de momento lineal de la partícula es aquel que produce la componente de la fuerza Coulombiana en la dirección de la línea de mínima distancia (parámetro de impacto b)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z e^2}{r^2}; \quad F_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z e^2}{r^2} \frac{b}{r}$$

Por lo tanto el cambio de momento durante la colisión viene dado por

$$\Delta p_b = \int_0^\infty F_b dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z e^2}{r^2} \frac{b}{r} \frac{dx}{\beta c}$$

Por lo tanto obtenemos que el cambio de momento en la colisión es

$$\Delta p_b = \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \beta c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dx}{\left(\sqrt{x^2 + b^2}\right)^3} = \frac{z e^2}{4\pi\epsilon_0 \beta c b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{x}{b}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{x}{b}\right)^2 + 1}\right)^3} = \frac{2 z e^2}{4\pi\epsilon_0 \beta c b} = \frac{2 z r_e m_e c}{\beta b}; \quad r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$$

Perdida de ionizaciones

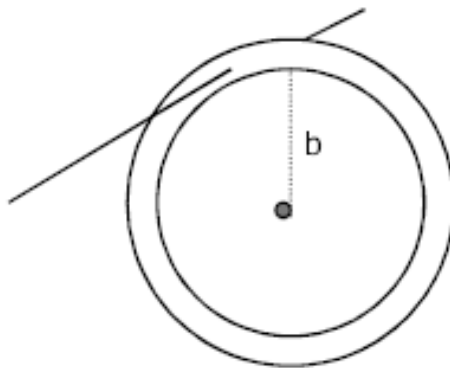
Colisiones soft

Supongamos que la colisión de una partícula cargada con carga z tiene lugar con un electrón del átomo, entonces la transferencia de momento es

$$\Delta p_b = \frac{2 z r_e m_e c}{\beta b}$$

En el límite no relativista esto supone una transferencia de energía dada por

$$\epsilon = \frac{(\Delta p_b)^2}{2m_e} = \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2 b^2}$$



Recordemos que la probabilidad de interacción P en cm^2/g (por unidad de masa superficial) está relacionada con la sección eficaz σ en cm^2/atomo mediante el número de Avogadro

$$P\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}\right) = \frac{N_A}{A} \sigma\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{atomo}}\right)$$

Entonces la probabilidad de que la partícula cargada ceda una energía entre ϵ y $\epsilon + d\epsilon$ viene dada por la expresión

$$P(\epsilon) d\epsilon = \frac{N_A}{A} Z 2\pi b db$$

Donde asumimos que hay Z electrones por átomo en el material en cuestión.

Perdida de ionizaciones

Colisiones soft

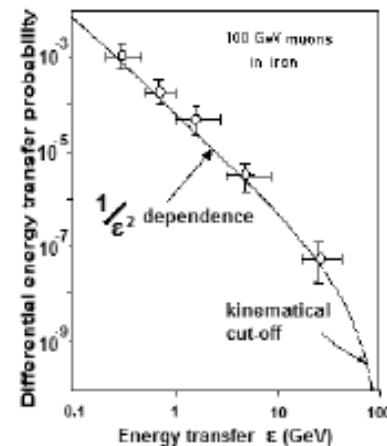
De la relación entre la energía y el parámetro de impacto podemos obtener

$$b^2 = \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2 \epsilon} \quad \Rightarrow \quad 2b db = \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2 \epsilon^2} d\epsilon$$

Por lo tanto la probabilidad de pérdida de energía entre ϵ y $\epsilon+d\epsilon$ será (*)

$$P(\epsilon) d\epsilon = \frac{N_A}{A} Z \pi \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2 \epsilon^2} d\epsilon$$

Lo que nos indica que la probabilidad de producir electrones δ de una cierta energía es inversamente proporcional al cuadrado de ésta



Para obtener la pérdida de energía en un cierto espesor másico ρdx tendremos que integrar sobre todos los posibles parámetros de impacto b

$$-dE = \int_0^\infty P(\epsilon) \epsilon d\epsilon \rho dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{dE}{\rho dx} = \int_0^\infty P(\epsilon) \epsilon d\epsilon = \int_0^\infty \frac{N_A}{A} Z 2\pi b \epsilon db$$

(*) El cálculo mecano-cuántico de la sección eficaz diferencial respecto a la energía T transferida al electrón $d\sigma/dT$ puede encontrarse en D.E. Groom et al., Eur. Phys. Jour. C15 (2000) 1. Esta sección eficaz depende del spin del proyectil.

Perdida de ionizaciones

Colisiones soft

De la relación entre la energía y el parámetro de impacto podemos obtener

$$-\frac{dE}{\rho dx} = \int_0^\infty \frac{N_A}{A} Z 2\pi b \epsilon db = \int_0^\infty \frac{N_A}{A} Z 2\pi b \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2 b^2} db$$

Finalmente obtendríamos la integral

$$-\frac{dE}{\rho dx} = Z 2\pi \frac{N_A}{A} \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{db}{b}$$

Que resultaría ser divergente. Sin embargo, realmente debemos de reconsiderar los límites físicos de integración reescribiendo

$$-\frac{dE}{\rho dx} = Z 2\pi \frac{N_A}{A} \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = Z 2\pi \frac{N_A}{A} \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)$$

Donde el argumento físico se centra en establecer los límites para los parámetros de impacto, de modo que

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)$$

Perdida de ionizaciones

Colisiones soft

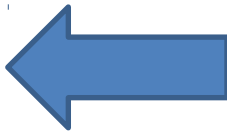
Para establecer los límites físicos de integración, consideraremos que el parámetro de impacto estaba relacionado con la transferencia de energía mediante

$$b^2 \propto \frac{1}{\epsilon}$$

$$b \propto \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

Por lo tanto podríamos relacionar los límites físicos de integración en el parámetro de impacto con los valores máximo y mínimo de energía transferida al electrón

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_{\min}}\right)$$



Vimos antes que la máxima energía que podíamos transferir a un electrón en una colisión no muy relativista viene dada por

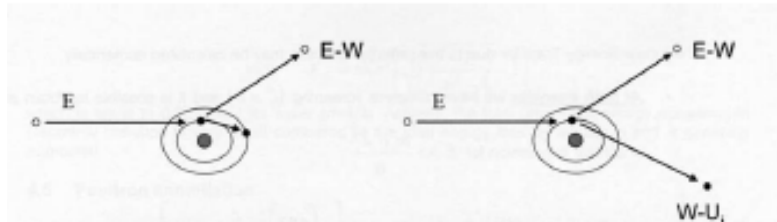
$$\epsilon_{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

Mientras que la mínima energía de excitación se corresponde a un valor promedio entre todos los electrones del átomo que normalmente se denota

$$\epsilon_{\min} = I$$

Perdida de ionizaciones

Colisiones soft



Con lo cual podemos escribir la pérdida de energía de nuestro proyectil como

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right)$$

Esta es nuestra primera aproximación (sólo orientativa) a la fórmula de Bethe-Bloch. El cálculo mecano-cuántico de las colisiones inelásticas de partículas cargadas con átomos individuales fue formulado por primera vez por Bethe (1930 "Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie" Ann. Physik 5, 325-400). En estos trabajos usaba la aproximación de Born a primer orden. Posteriormente sus trabajos fueron corregidos por Bloch y extendidos a las colisiones inelásticas en medios condensados (líquidos y sólidos) por Fano (1963 Ann. Rev. Nucl. Sci. 13, 1-66). La expresión actualmente usada para la pérdida de energía es (PDG, Journal of Physics G Volume 33 July 2006 IOP)

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \frac{T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

Perdida de ionizaciones

Fórmula de Bethe-Bloch

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

Fórmula de Bethe-Bloch para partículas cargadas pesadas moderadamente relativistas (pero no electrones). Se puede escribir como

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right]$$

$\frac{dE}{\rho dx}$ pérdida media de energía del proyectil por unidad de espesor másico de material

N_A número de Avogadro

r_e radio clásico del electrón $2.818 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$

m_e masa del electrón

z carga del proyectil en unidades de la carga del electrón

Z número atómico del medio material

A número másico del medio material

T_{\max} máxima energía cedida al electrón en una colisión $2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$ cuando $M \gg \gamma m_e$

βc velocidad del proyectil

I energía media de excitación (función de Z)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Perdida de ionizaciones

1. La pérdida de energía por unidad de espesor másico no depende de la masa del proyectil. A esta pérdida por unidad de espesor másico se denomina PODER DE FRENADO MÁSICO.
2. El único parámetro de la cinética del proyectil que aparece es la velocidad!
3. I representa la energía media de excitación del átomo. Su conocimiento es semiempírico.
4. T_{max} es la máxima energía que el proyectil puede ceder a un electrón en una colisión. (Ver diap 5)
5. A baja energía la dependencia se comporta como $1/\beta^2$
6. La dependencia sobre el material blanco aparece como Z/A lo cual indica que sobre todo dependemos de la densidad de electrones de éste.

Perdida de ionizaciones

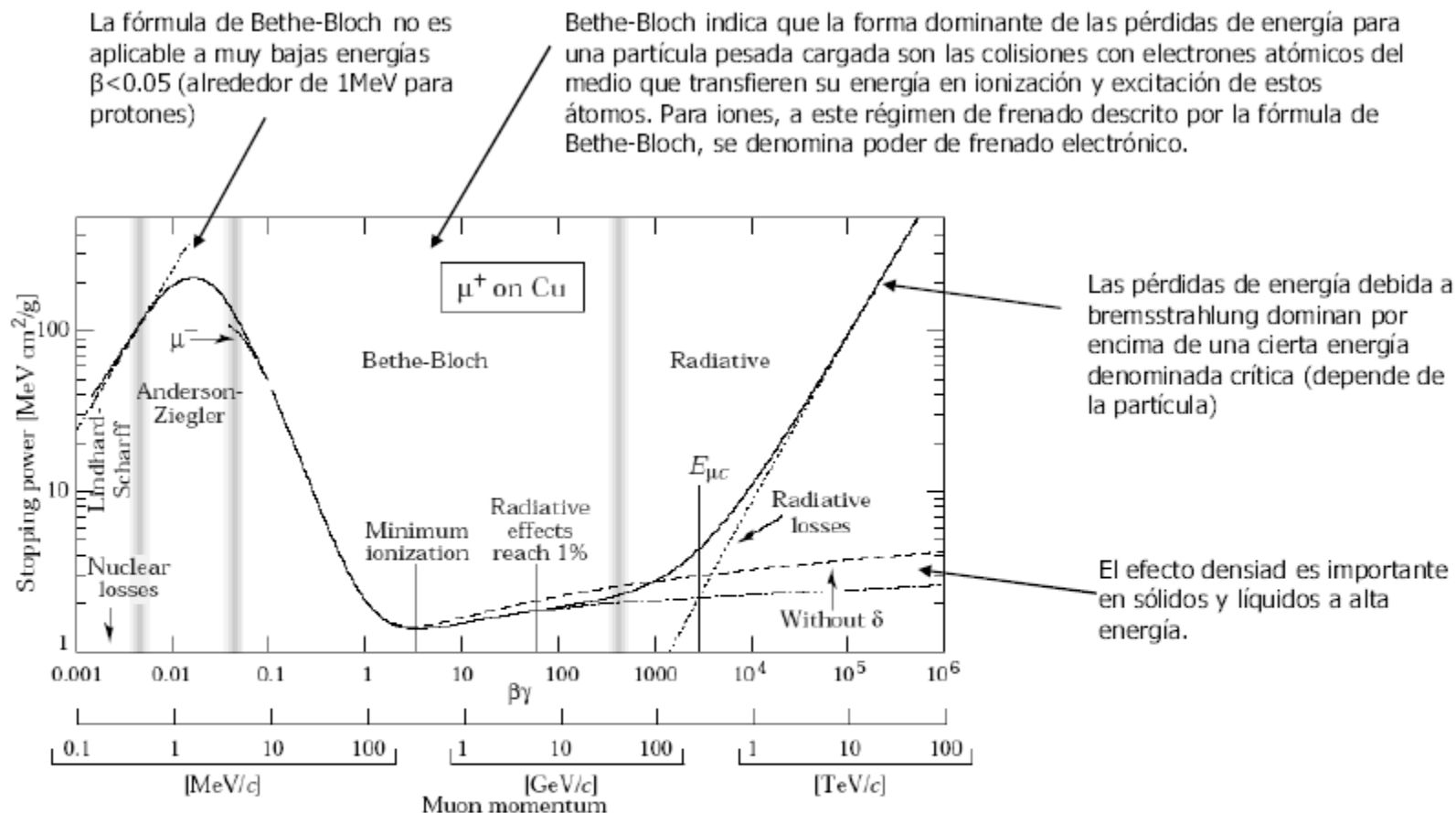
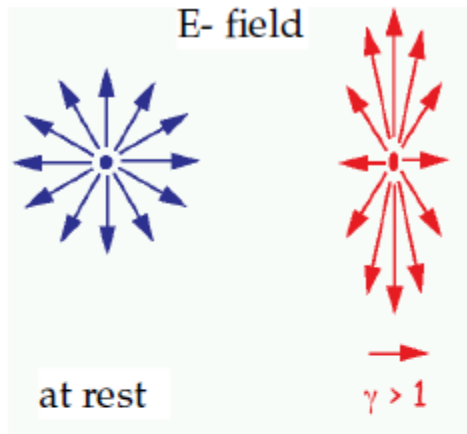


Fig. 27.1: Stopping power ($= \langle -dE/dx \rangle$) for positive muons in copper as a function of $\beta\gamma = p/Mc$ over nine orders of magnitude in momentum (12 orders of magnitude in kinetic energy). Solid curves indicate the total stopping power. Data below the break at $\beta\gamma \approx 0.1$ are taken from ICRU 49 [2], and data at higher energies are from Ref. 1. Vertical bands indicate boundaries between different approximations discussed in the text. The short dotted lines labeled “ μ^- ” illustrate the “Barkas effect,” the dependence of stopping power on projectile charge at very low energies [6].

Perdida de ionizaciones



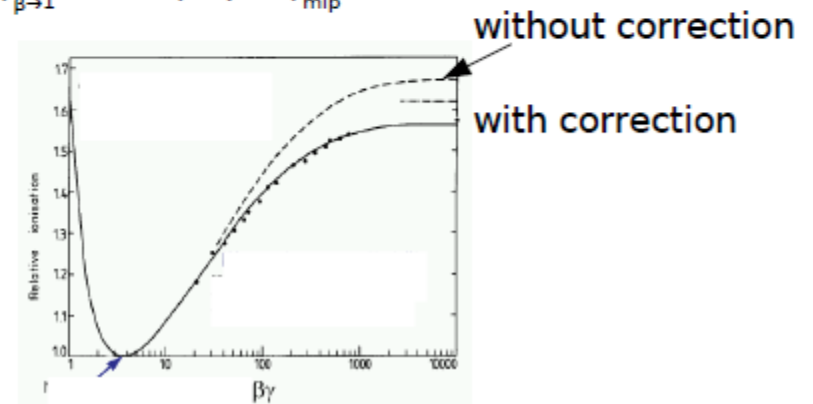
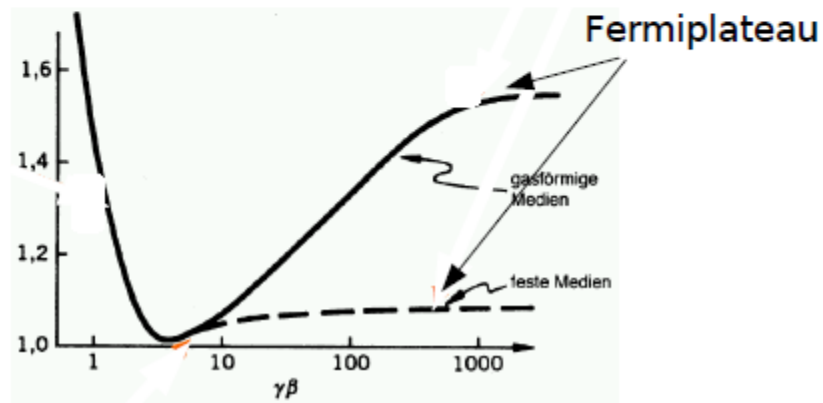
Lorentz-contraction of field lines
transversal component of E-field grows with γ
→ larger collision distances, more collisions

δ -Correction, density effect:
E-Feld gets partially shielded for high densities due to polarisation $\delta(\gamma) = 2 \ln \gamma + \zeta$
 ζ material constant
Less collisions with far distant electrons, lower energy loss
More pronounced for solids

Saturation for high energies → Fermiplateau $T_{\max} = E$

Solids $(dE/dX)_{\beta \rightarrow 1} \approx 1.05-1.1 (dE/dX)_{\text{mip}}$

Gases $(dE/dX)_{\beta \rightarrow 1} \approx 1.5 (dE/dX)_{\text{mip}}$



Perdida de ionizaciones

Fórmula de Bethe-Bloch

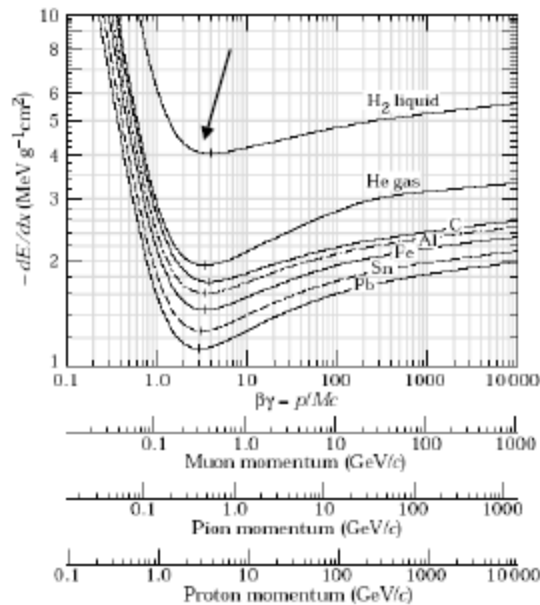
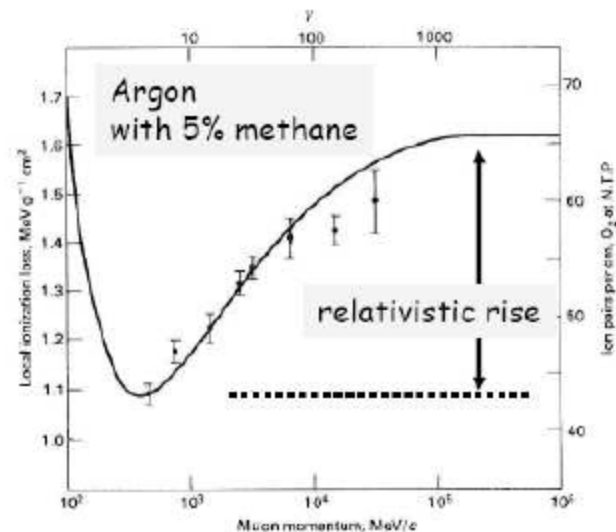


Figure 27.3: Mean energy loss rate in liquid (bubble chamber) hydrogen, gaseous helium, carbon, aluminum, iron, tin, and lead. Radiative effects, relevant for muons and pions, are not included. These become significant for muons in iron for $\beta\gamma \gtrsim 1000$, and at lower momenta for muons in higher- Z absorbers. See Fig. 27.20.

A alta energía la pérdida de energía por unidad de espesor másico sufre un incremento llamado "subida relativista" ya que aunque $\beta \rightarrow 1$ en la fórmula el $\ln(\gamma)$ sigue creciendo. Esto es debido al aumento relativista del campo eléctrico transversal del proyectil. Esta subida es del orden de 1.5 para gases y 1.1 para sólidos.

dE/pdx tiene un mínimo para un valor de $\beta\gamma \sim 3.5$ a 3.0 cuando Z va de 7 a 100. Este valor mínimo en la pérdida de energía por unidad de espesor másico es aproximadamente universal (ver siguiente página) con un valor de $1.5 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$. Cuando una partícula alcanza esta energía se dice que es una partícula mínimamente ionizante o MIP.



Perdida de ionizaciones

Fórmula de Bethe-Bloch

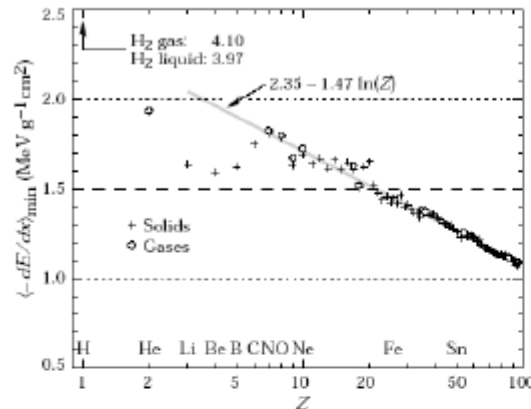


Figure 27.2: Stopping power at minimum ionization for the chemical elements. The straight line is fitted for $Z > 6$. A simple functional dependence on Z is not to be expected, since $\langle -dE/dx \rangle$ also depends on other variables.

La fórmula original de Bethe-Bloch predice que dE/pdx para distintos proyectiles con igual velocidades serían iguales incluso en medios distintos (con igual densidad de electrones). El efecto densidad (polarización del medio) es responsable del comportamiento diferencial entre distintos metriales.

El valor del mínimo de dE/pdx no es absolutamente universal ya que tiene una cierta dependencia de Z .

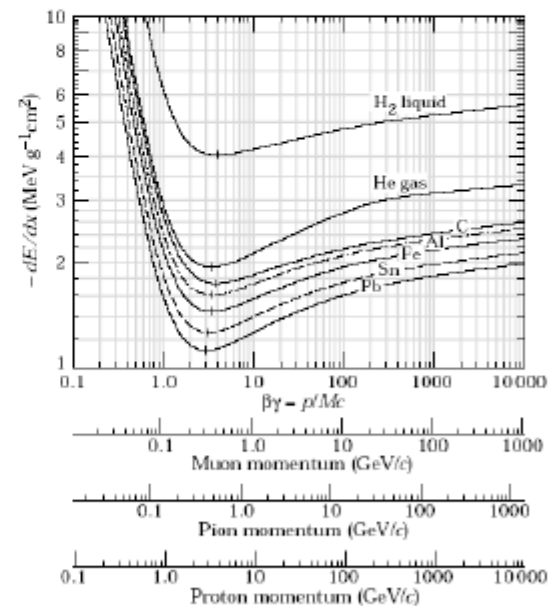


Figure 27.3: Mean energy loss rate in liquid (bubble chamber) hydrogen, gaseous helium, carbon, aluminum, iron, tin, and lead. Radiative effects, relevant for muons and pions, are not included. These become significant for muons in iron for $\beta\gamma \gtrsim 1000$, and at lower momenta for muons in higher- Z absorbers. See Fig. 27.20.

Perdida de ionizaciones

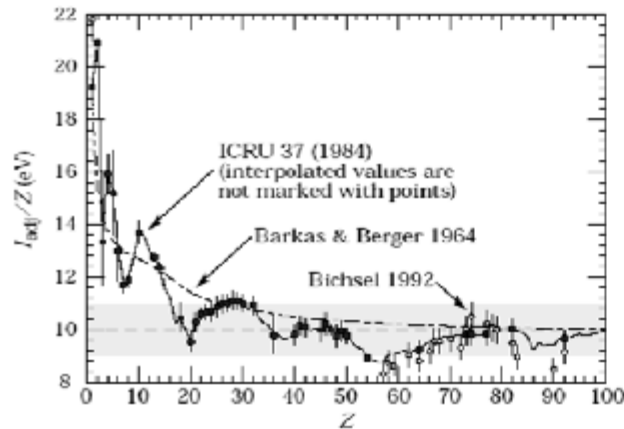
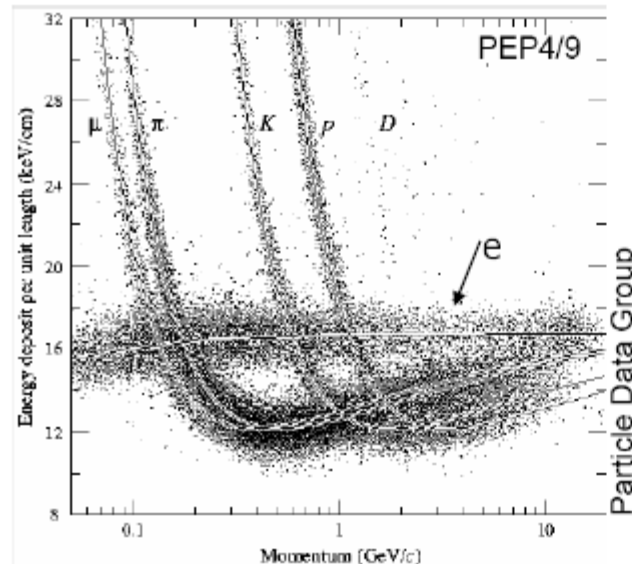


Figure 27.5: Mean excitation energies (divided by Z) as adopted by the ICRU [9]. Those based on experimental measurements are shown by symbols with error flags; the interpolated values are simply joined. The grey point is for liquid H_2 ; the black point at 10.2 eV is for H_2 gas. The open circles show more recent determinations by Bichsel [11]. The dotted curve is from the approximate formula of Barkas [12] used in early editions of this *Review*.

Uno de los puntos cruciales del modelo de Bethe-Bloch es la energía media de excitación atómica I . Se trata de un parámetro difícil de obtener usando un modelo teórico. Normalmente se calcula a través de un modelo semi-empírico (ICRU 37). En primera aproximación se suele considerar aproximadamente I proporcional a Z ($I=10 \cdot Z$ a primer orden). Obsérvese que la gráfica nos da I/Z como función de Z mostrando una dependencia más compleja.

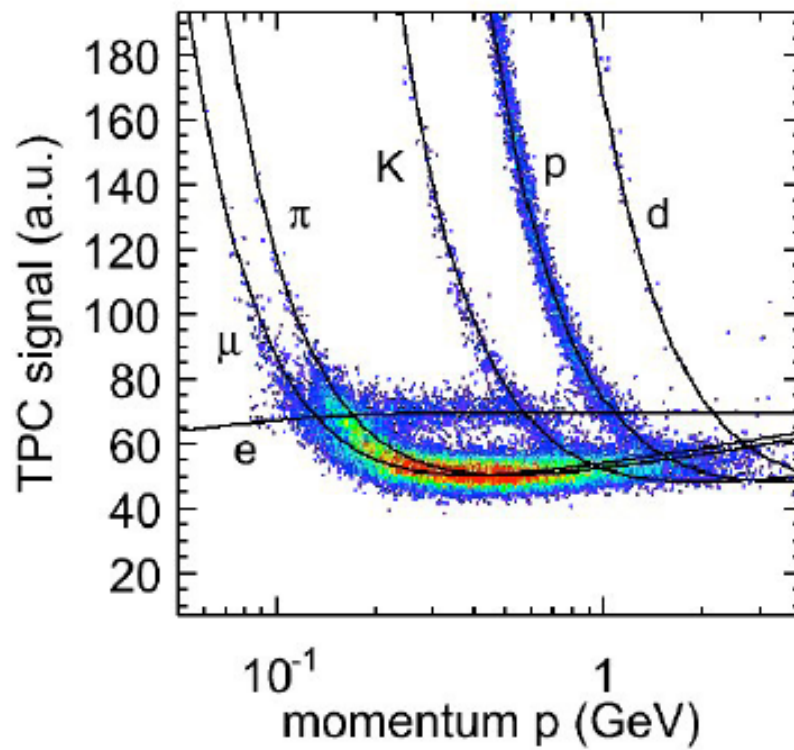


En la formulación actual de Bethe-Bloch el orden de precisión con el que se reproduce dE/dx en un cierto material se encuentra dentro del 1% típicamente. En la imagen la reconstrucción de dE/dx a partir de una cámara gaseosa de proyección de tiempo o TPC (Time Projection Chamber PEP4)

Perdida de ionizaciones

$$\frac{-dE}{dx} \approx K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right] \quad \text{as long as } 2 \gamma m_e \ll M$$

dE/dx only depends on velocity not on mass of particle →
Particle identification



ALICE TPC measured energy loss

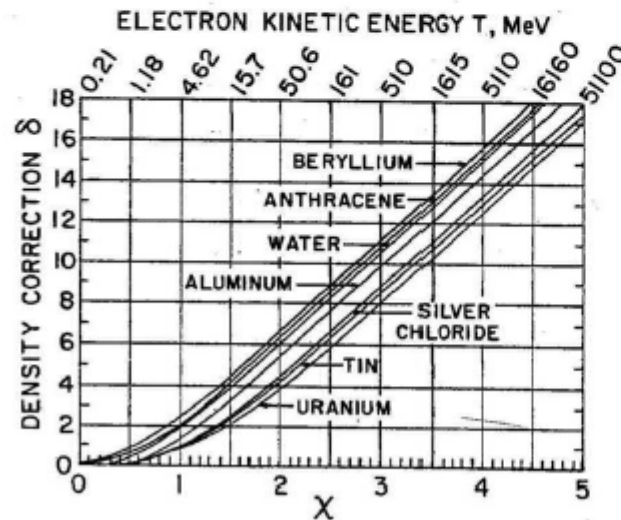
- Heavy particles
 dE/dx well described by Bethe Bloch formula (ionisation, excitation)
- Electrons not described by Bethe-Bloch

Perdida de ionizaciones

Fórmula de Bethe-Bloch

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

La corrección por efecto densidad (polarización del medio) δ es una función del producto $\beta\gamma$. Se suele parametrizar δ como una función lineal del parámetro $X = \log_{10}(p/m_0c)$. Siendo m_0 la masa en reposo de la partícula proyectil y p su momento. Estas parametrizaciones provienen del trabajo de R.M. Sternheimer.



Corrección por efecto densidad δ como función del parámetro $X = \log_{10}(p/m_0c)$.

FIGURE 8.4. Density-effect correction δ as a function of χ and electron kinetic energy T . After Sternheimer (1952). Reproduced with permission from R. M. Sternheimer and the American Physical Society.

Perdida de ionizaciones

Fórmula de Bethe-Bloch

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

En el régimen de baja energía la aproximación de que la velocidad del proyectil es superior a la de los electrones atómicos empieza a fallar. Esencialmente cuando se reduce la energía del proyectil éste deja de producir excitaciones o ionizaciones de los estados electrónicos de las capas internas del átomo. Este efecto (shell correction) modifica el valor real de dE/dx en la fórmula de Bethe-Bloch. El valor de C/Z es una función de la velocidad de la partícula y del medio material. C/Z tiende a cero a altas energías.

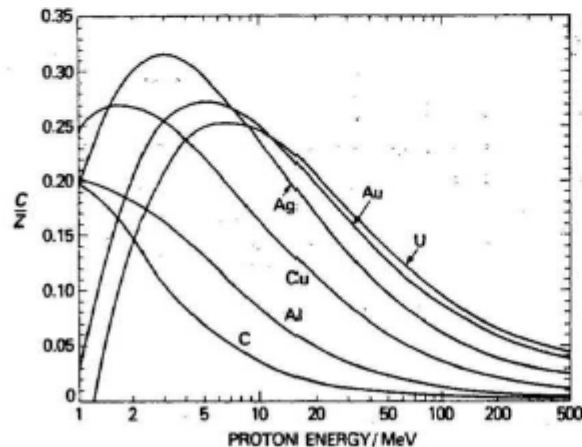


FIGURE 8.3. Semiempirical shell corrections of Bichsel for selected elements, as a function of the proton energy (ICRU, 1984a). Reproduced with permission from H. Bichsel and the International Commission on Radiological Units and Measurements.

Corrección de capas en la fórmula de Bethe-Bloch expresadas en función de la energía para protones.

Perdida de ionizaciones

Poder de frenado: electrones y positrones

La anterior fórmula de Bethe-Bloch es válida para partículas cuya masa es significativamente mayor que la del electrón: muones, mesones cargados, iones, etc... Sin embargo no podemos aplicarla exactamente a un electrón o positrón. La interacción de los electrones atómicos con el electrón incidente se conoce como scattering Möller, y como scattering Bhabha para los antielectrones.

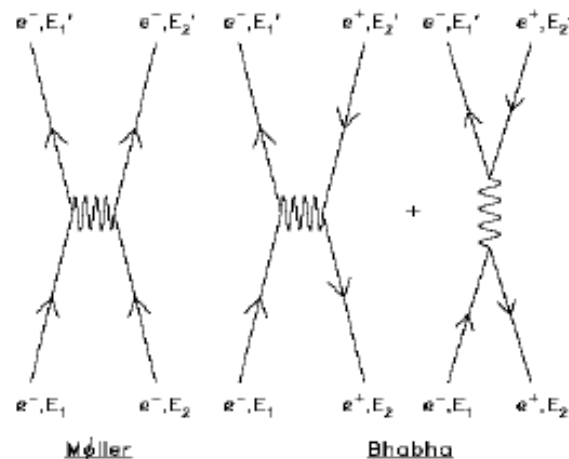


Figure 2.2: Feynman diagrams depicting the Möller and Bhabha interactions. Note the extra interaction channel in the case of the Bhabha interaction.

Además de los diferentes canales de interacción, es habitual debido a la indistinguibilidad cuántica de los electrones asignar como electrón primario al que tenga mayor energía después del scattering. Por esta razón el electrón sólo puede ceder como máximo la mitad de su energía, mientras que el positrón puede ceder toda su energía al electrón atómico.

Perdida de ionizaciones

Poder de frenado para electrones y positrones

La ecuación para el poder de frenado másico de electrones y positrones se suele denominar por algunos autores como fórmula de Berger-Seltzer (H.Messel and D.F.Crawford. Pergamon Press,Oxford,1970)

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(m_e c^2)^2 \beta^2 \gamma^2 (\gamma - 1)}{I^2} \right) - G^\pm(\beta) - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

La función G^+ corresponde a positrones y la G^- corresponde a electrones.

$$G^-(\beta) = \frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{(\gamma - 1)^2}{8} + 1 - (\gamma^2 + 2\gamma - 1) \ln(2) \right]$$

$$G^+(\beta) = -\frac{\beta^2}{24} \left[23 + \frac{14}{\gamma + 1} + \frac{10}{(\gamma + 1)^2} + \frac{4}{(\gamma + 1)^3} \right] + \frac{\ln(2)}{2}$$

Podemos encontrar expresiones equivalentes en Knoll y Attix. En muchas referencias es habitual usar en lugar de β y γ la fracción de la energía cinética sobre la energía en reposo.

$$\tau = \frac{T}{m_e c^2}; \quad \tau = \gamma - 1; \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

Perdida de ionizaciones

Poder de frenado para electrones y positrones

La ecuación anterior también se puede reescribir como

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\ln \left(\frac{(m_e c^2)^2 \tau^2 (\tau + 2)}{2I^2} \right) - H^\pm(\tau) - \delta - \frac{2C}{Z} \right]$$

$$\tau = \frac{T}{m_e c^2}$$

Siendo T la energía cinética del electrón incidente

La función H^+ corresponde a positrones y la H^- corresponde a electrones.

$$H^-(\tau) = 1 - \beta^2 + \frac{1}{(1 + \tau)^2} \left[\frac{\tau^2}{8} - (2\tau + 1) \ln(2) \right]$$

$$H^+(\tau) = 2 \ln(2) - \frac{\beta^2}{12} \left[23 + \frac{14}{\tau + 2} + \frac{10}{(\tau + 2)^2} + \frac{4}{(\tau + 2)^3} \right]$$

Esta expresión y la de la diapositiva anterior son equivalentes.

Perdida de ionizaciones

Ejemplo

Consideremos una partícula alpha de 5 MeV en silicio. Calcular su poder de frenado (despreciando el efecto densidad y la corrección de capas)

$$-\frac{dE}{\rho dx} \approx 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 \right] = 0.307 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 \right]$$

$$\rho = 2.33 \text{ g/cm}^3; \quad Z = 14; \quad A = 28; \quad z = 2; \quad I = 173 \text{ eV}$$

$$\gamma = 1 + \frac{T}{Mc^2} = 1 + \frac{5}{4 \times 931.5} = 1.00134; \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 0.00268$$

$$-\frac{dE}{\rho dx} \approx 0.307 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{14}{28} \frac{2^2}{0.00268} \left[\ln \left(\frac{2(0.511)(0.00268)(1.00134)^2}{173 \times 10^{-6}} \right) - 0.00268 \right] = 633 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

Si considerasemos el poder de frenado lineal entonces

$$-\frac{dE}{dx} = 633 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \rho = 633 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \cdot 2.33 \text{ g cm}^{-3} = 1.47 \cdot 10^3 \text{ MeV cm}^{-1}$$

Si el poder de frenado fuera constante durante el movimiento del ión (cosa que no es cierta... de hecho aumenta cuando disminuye su velocidad!)

$$X \leq \frac{T}{-\frac{dE}{dx}} = \frac{5 \text{ MeV}}{1.47 \cdot 10^3 \text{ MeV cm}^{-1}} = 3.4 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

Perdida de ionizaciones

Ejemplo

Consideremos una electrón de 5 MeV en silicio. Calcular su poder de frenado (despreciando el efecto densidad y la corrección de capas)

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(m_e c^2)^2 \beta^2 \gamma^2 (\gamma-1)}{I^2} \right) - \frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{(\gamma-1)^2}{8} + 1 - (\gamma^2 + 2\gamma - 1) \ln(2) \right] - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

$$-\frac{dE}{\rho dx} \approx 0.307 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{1}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\ln \left(\frac{(m_e c^2) \beta \gamma \sqrt{\gamma-1}}{I} \right) - \frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{(\gamma-1)^2}{8} + 1 - (\gamma^2 + 2\gamma - 1) \ln(2) \right] \right]$$

$$\rho = 2.33 \text{ g/cm}^3; \quad Z = 14; \quad A = 28; \quad I = 173 \text{ eV}$$

$$\gamma = 1 + \frac{T}{m_e c^2} = 1 + \frac{5}{0.511} = 10.785; \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 0.9914$$

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 0.307 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{14}{28} \frac{1}{0.9914} \left[\ln \left(\frac{(0.511)(\sqrt{0.9914})(10.785)(\sqrt{10.785-1})}{173 \times 10^{-6}} \right) - \frac{1}{2(10.785)^2} \left[\frac{(10.785-1)^2}{8} + 1 - ((10.785)^2 + 2 \cdot 10.785 - 1) \ln(2) \right] \right]$$

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 1.83 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

Lo cual representa un poder de frenado 1000 veces menor que la partícula alpha!!

En términos del poder de frenado lineal

$$-\frac{dE}{dx} = 1.83 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \rho = 1.83 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \cdot 2.33 \text{ g cm}^{-3} = 4.28 \text{ MeV cm}^{-1}$$

De nuevo si el electrón mantuviera su poder de frenado constante durante su movimiento, recorrería más de un cm (esto no es así exactamente!!) pero nos da una idea de la longitud que recorre el electrón.

Perdida de ionizaciones

Poder de frenado en compuestos

En la mayoría de los casos tenemos que calcular el poder de frenado de partículas en compuestos en lugar de sustancias puras. En este caso se considera que

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{comp} = \omega_1 \left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_1 + \omega_2 \left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_2 + \omega_3 \left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_3 + \dots$$

Donde w_1, w_2, w_3, \dots son las proporciones en peso de cada elemento con números atómicos Z_1, Z_2, Z_3, \dots . Si obviamos los términos de efecto densidad y de corrección de capas. Podemos escribir (considerando las pérdidas energéticas en valor absoluto)

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_i \approx K \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{Z}{A}\right)_i z^2 \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I_i} \right) - \beta^2 \right]$$

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{comp} \approx K \frac{z^2}{\beta^2} \left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I_1} \right) + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I_2} \right) + \dots - \beta^2 \right]$$

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{comp} \approx K \frac{z^2}{\beta^2} \left\{ \ln(2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2) \left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 + \dots \right] - \left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 \ln(I_1) + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 \ln(I_2) + \dots \right] - \beta^2 \right\}$$

Lo habitual es definir el cociente Z/A efectivo para el compuesto

$$\left(\frac{Z}{A}\right)_{comp} = \left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 + \dots \right]$$

Perdida de ionizaciones

Poder de frenado en compuestos

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{comp} = K \frac{z^2}{\beta^2} \left\{ \ln(2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2) \left(\frac{Z}{A}\right)_{comp} - \left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 \ln(I_1) + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 \ln(I_2) + \dots \right] - \beta^2 \right\}$$

Con esta definición sería interesante tener una parametrización del potencial de excitación medio efectivo de manera que se cumpliera

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{comp} \approx K \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{Z}{A}\right)_{comp} z^2 \left[\ln\left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I_{comp}}\right) - \beta^2 \right]$$

Para obtener esta parametrización resulta natural considerar que

$$\left(\frac{Z}{A}\right)_{comp} \ln(I_{comp}) = \omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 \ln(I_1) + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 \ln(I_2) + \dots$$

De aquí obtenemos el valor efectivo del potencial de excitación medio del compuesto

$$\ln(I_{comp}) = \frac{\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 \ln(I_1) + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 \ln(I_2) + \dots}{\left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 + \dots \right]}$$

Análogamente se puede obtener el valor efectivo para el efecto densidad en el medio

$$\delta_{comp} = \frac{\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 \delta_1 + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 \delta_2 + \dots}{\left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 + \dots \right]}$$

Perdida de ionizaciones

Frenado en pequeños espesores

- La fórmula de Bethe-Bloch describe la pérdida media de energía por unidad de espesor másico.
- El número de colisiones en un espesor dado sigue una distribución de Poisson. Cuando este número es lo bastante grande se puede decir que las fluctuaciones en dE/dx son gaussianas.
- Cuando el número de colisiones es muy bajo en espesores pequeños (i.e. detector gaseoso a presión ambiente para una partícula de mínima ionización el número de colisiones es del orden de 10 por cm) las fluctuaciones respecto al valor medio de energía de frenado de la partícula son muy importantes. Estas fluctuaciones fueron descritas en un modelo desarrollado por Landau y Vavilov (L. Landau, J. Physics (USSR) 8 (1944) 201).

$$f(\Delta E, \delta x) = \phi(\lambda) / \xi$$

$$\phi(\lambda) = \int e^{-t \log t - \pi t} \sin(\pi t) dt$$

$$\lambda = \{\Delta E - \langle \Delta E \rangle\} / \xi - (1 - \gamma) - \beta^2 - \ln(\xi / E_{\max})$$

$\xi = 153.4 z^2 Z \rho \delta x / A \beta^2$ – de Rutherfordio dispersa, δx - el grosor de mat.

E_{\max} - pérdida máxima

ΔE - pérdida actual y $\langle \Delta E \rangle$ - pérdida promedio

γ - el constante de Euler's

Perdida de ionizaciones

Frenado en pequeños espesores

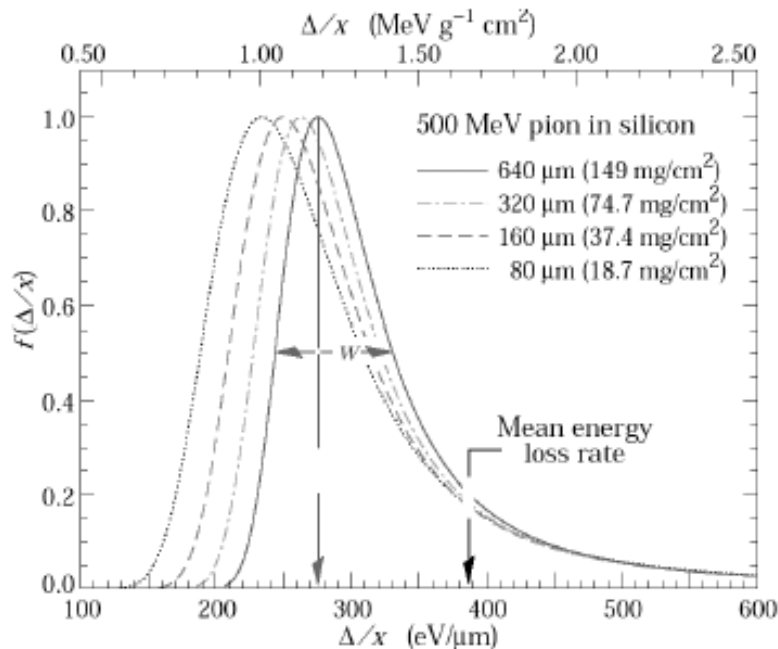


Figure 26.6: Straggling functions in silicon for 500 MeV pions, normalized to unity at the most probable value Δ_p/x . The width w is the full width at half maximum.

Pérdida de energía más probable como función del producto $\beta\gamma$

Distribución de la deposición de energía por piones de 500 MeV en detectores de Si de diferentes espesores. Se observa la forma de la distribución de Landau. El valor medio de la pérdida de energía es mucho mayor que el valor más probable de pérdida de energía. La larga cola de altas pérdidas de energía corresponde a sucesos donde se producen uno o varios electrones δ .

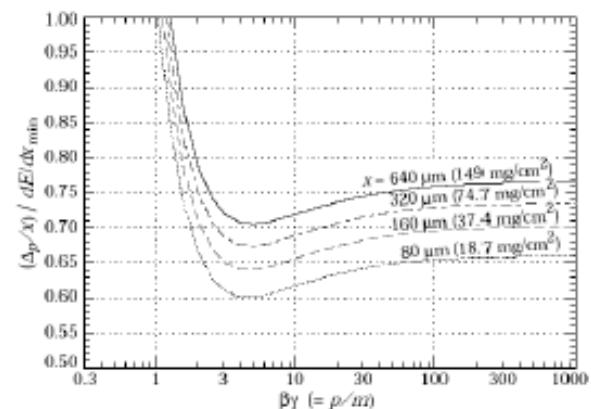
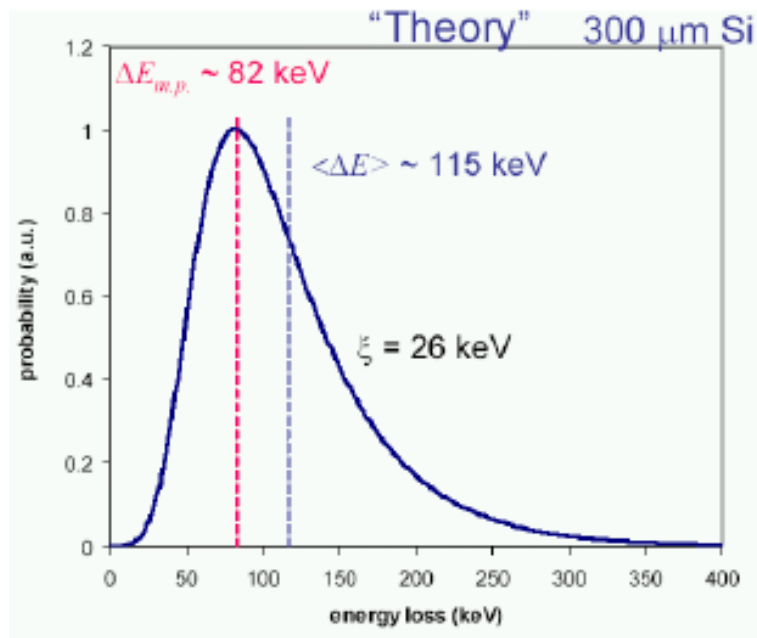


Figure 27.7: Most probable energy loss in silicon, scaled to the mean loss of a minimum ionizing particle, $388 \text{ eV}/\mu\text{m}$ ($1.66 \text{ MeV g}^{-1}\text{cm}^2$).

Perdida de ionizaciones

Fluctuaciones



$$\Delta E_{mp} = 82 \text{ keV}$$

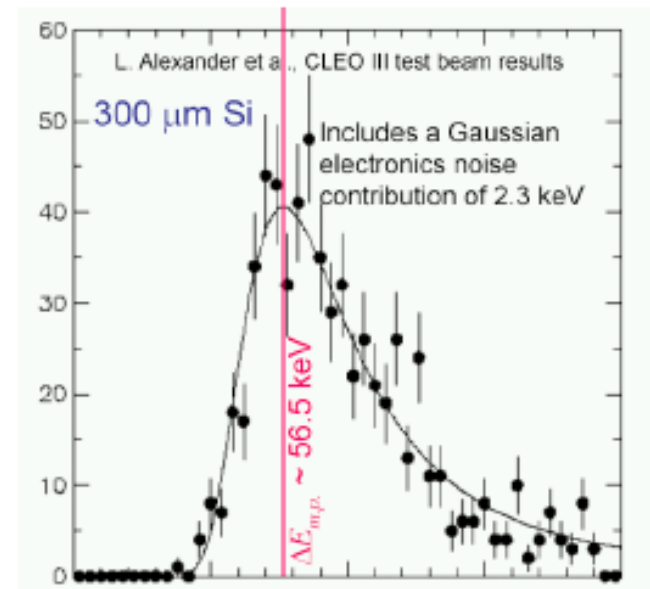
$$\text{Landau: Probability } (\Delta E) = \frac{1}{2\pi\xi} \exp\left(-\left(\frac{1}{2}(\lambda + e^{-\lambda})\right)\right) \quad \lambda = (\Delta E - \Delta E_{mp})/\xi$$

ξ : material constant mean energy loss in layer x

$\xi = K \rho x / \beta^2$ depends on density, thickness and velocity

ΔE mean E- loss, ΔE_{mp} most probable E-loss

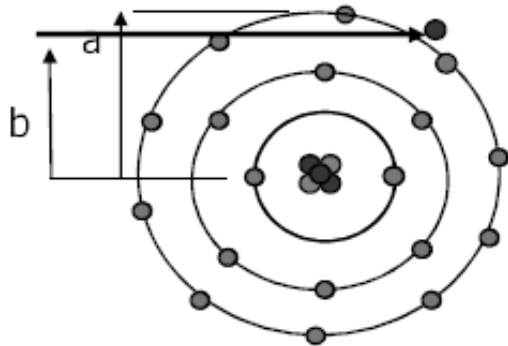
Messung



$$\Delta E_{mp} = 56.5 \text{ keV}$$

Perdida de ionizaciones

Colisiones hard



Colisiones "hard" $a \sim b$

En estas colisiones el proyectil incide sobre el átomo con un pequeño parámetro de impacto. En esta situación lo más probable es que el proyectil interactúe con un solo electrón del átomo que adquiere una elevada energía cinética. Este tipo de electrones se llaman rayos δ , y disipan su energía a una cierta distancia de la trayectoria original del proyectil.

El tratamiento de la producción de rayos δ suele hacerse estableciendo un valor de corte en la energía cinética transmitida a un electrón en una colisión individual. Las pérdidas de energía tales que $0 < T < T_{\text{cut}} < T_{\text{max}}$ vienen dadas por

$$-\frac{dE}{\rho dx} \Big|_{T < T_{\text{cut}}} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\text{cut}}}{I^2} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{T_{\text{cut}}}{T_{\text{max}}} \right) - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

La expresión anterior tiende a Bethe-Bloch cuando $T_{\text{cut}} \rightarrow T_{\text{max}}$

La distribución de electrones δ con $I \ll T < T_{\text{max}}$ por unidad de espesor másico

$$-\frac{d^2 N}{\rho dx dT} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \frac{F(T)}{T^2}$$

La función $F(T)$ es dependiente del spin del proyectil y β corresponde a la velocidad de éste.

Perdida de ionizaciones

Colisiones hard

En la fórmula

$$-\frac{d^2 N}{\rho dx dT} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \frac{F(T)}{T^2}$$

Si la partícula primaria es de spin cero (i.e. alpha), entonces

$$F(T) = 1 - \beta^2 \frac{T}{T_{\max}}$$

La dependencia de las funciones $F(T)$ está descrita en Rossi "High Energy Particles" Prentice-Hall (1952). Hay que señalar que los valores típicos de pérdida de energía por colisión se sitúan entorno a los 20 eV, mientras que un electrón δ de 1 keV o más es un suceso poco frecuente. En el caso spin cero podemos calcular esta contribución escribiendo

$$\left. -\frac{dE}{\rho dx} \right|_{\text{rayos } \delta} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \int_{T_{\text{cut}}}^{T_{\max}} dT \frac{F(T)}{T} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \int_{T_{\text{cut}}}^{T_{\max}} dT \left(\frac{1}{T} - \frac{\beta^2}{T_{\max}} \right)$$

$$\left. -\frac{dE}{\rho dx} \right|_{\text{rayos } \delta} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left(\ln \left(\frac{T_{\max}}{T_{\text{cut}}} \right) - \beta^2 \left(1 - \frac{T_{\text{cut}}}{T_{\max}} \right) \right)$$

(Para electrones T_{\max} sólo puede valer $E/2$ siendo E la energía cinética del electrón primario)

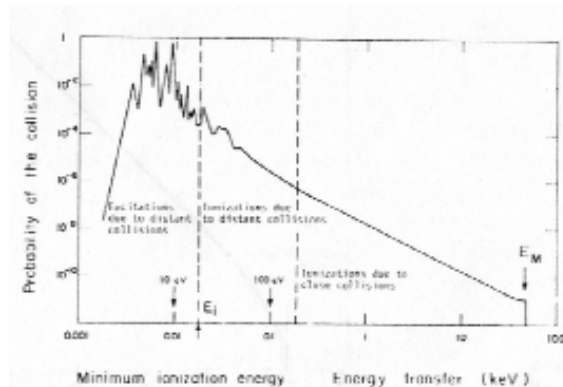


Fig. 2 Relative probability of different processes induced by fast (100 keV) electrons in water, as a function of the energy transfer in a collision³⁾. The maximum kinematically allowed energy transfer, $E_M = 50$ keV in this case, is also shown.

Perdida de ionizaciones

Ejemplo

Consideremos de nuevo una partícula alpha de 5 MeV en silicio. Si consideramos $T_{cut} = 1\text{keV}$, entonces

$$\left. -\frac{dE}{\rho dx} \right|_{\text{rayos } \delta} = 0.1535 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left(\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{T_{cut}} \right) - \beta^2 \left(1 - \frac{T_{cut}}{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2} \right) \right)$$

Sustituyendo tendremos que

$$\left. -\frac{dE}{\rho dx} \right|_{\text{rayos } \delta} = 0.1535 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{14}{28} \frac{2^2}{0.0027} \left(\ln \left(\frac{2(0.511)(0.0027)(1.0013)^2}{1 \times 10^{-3}} \right) - (0.0027) \left(1 - \frac{1 \times 10^{-3}}{2(0.511)(0.0027)(1.0013)^2} \right) \right)$$

De lo que obtenemos una estimación

$$\left. -\frac{dE}{\rho dx} \right|_{\text{rayos } \delta} = 115 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 633 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

Por tanto aproximadamente 1/6 de la pérdida energética da lugar a electrones con energía cinética mayor que 1 keV.

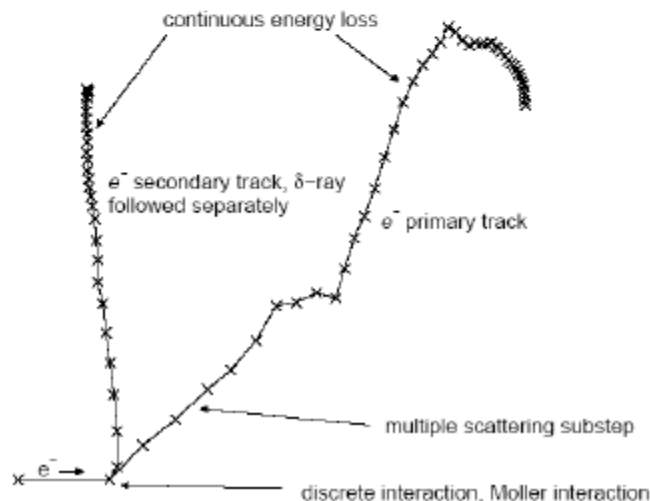
Hasta aquí

Perdida de ionizaciones

Poder de frenado másico restringido

Siguiendo la notación de ICRU (1980). Cuando calculamos la dosis en un pequeño volumen o en un espesor delgado nos encontramos que los rayos δ tienen suficiente rango para escapar de este volumen fiducial y no depositan localmente toda su energía cinética. Si usamos el poder de frenado por colisiones (ionización+excitación) global estaremos sobreestimando la dosis local. Esto tiene especial relevancia en microdosimetría y en radiobiología. También es muy importante en los efectos por interacción individual (Single Event Upset) sobre componentes de microelectrónica digital.

Definimos el poder de frenado másico restringido como aquella fracción del poder de frenado másico total por colisiones que provoca la transferencia a un electrón de una energía cinética menor que un cierto valor de corte T_{cut} que se suele denominar Δ



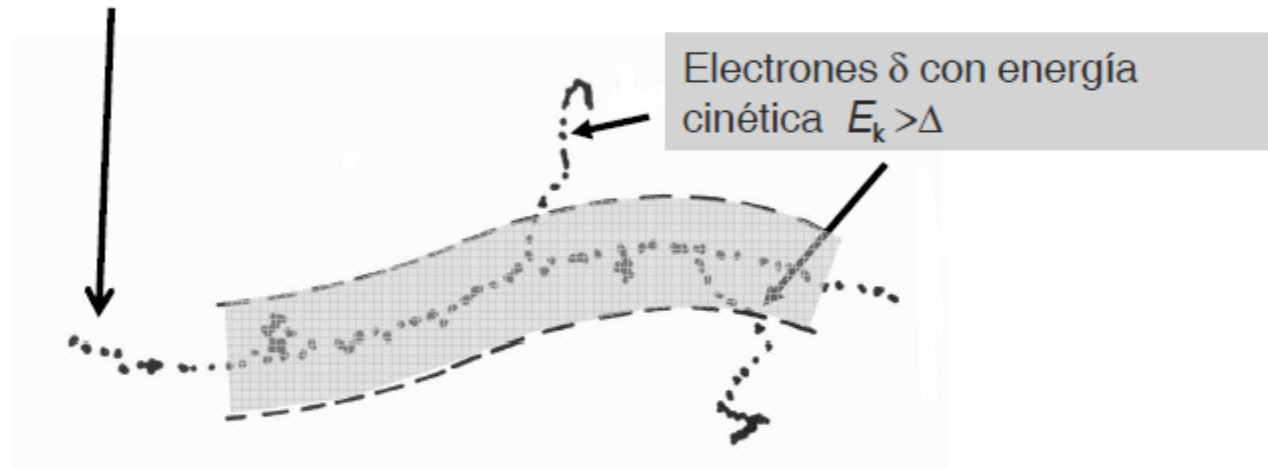
$$\left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{col} = \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T < \Delta} + \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T \geq \Delta}$$

En la gráfica una colisión "hard" provoca la aparición de un electrón con una fracción energía grande respecto a la energía del electrón primario. El electrón secundario δ recorre una distancia macroscópica antes de frenarse.

Perdida de ionizaciones

Poder de frenado másico restringido

Trayectoria de un electrón:



En la práctica la transferencia lineal restringida equivale a generar un tubo cilíndrico alrededor de la trayectoria del electrón de modo que los electrones secundarios (δ) incluidos puedan tener una energía cinética inicial máxima Δ .

Los electrones δ con energía inicial $E_k > \Delta$ se excluyen.

Perdida de ionizaciones

Poder de frenado másico restringido

Por supuesto el poder de frenado másico restringido tiende al poder de frenado másico total cuando relajamos la energía de corte y la acercamos al valor de Tmax.

$$\left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T < \Delta} \xrightarrow{\Delta \approx T_{\max}} \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{col}$$

Para partículas cargadas pesadas, ya hemos visto que la expresión del poder de frenado másico restringido es

$$\left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T < \Delta} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \Delta}{I^2} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{\Delta}{T_{\max}} \right) - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

Para electrones y positrones se puede escribir como (siendo E la energía cinética de la partícula primaria) (recordemos que Tmax es E/2 para e- y E para e+)

$$\left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T < \Delta} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\ln \left(\frac{(m_e c^2)^2 \tau^2 (\tau + 2)}{2I^2} \right) - F^\pm(\tau, \eta) - \delta - \frac{2C}{Z} \right]$$

$$F^-(\tau, \eta) = -1 - \beta^2 + \ln[4(1-\eta)\eta] + \frac{1}{1-\eta} + (1-\beta^2) \left[\frac{\tau^2 \eta^2}{2} + (2\tau+1) \ln(1-\eta) \right]$$

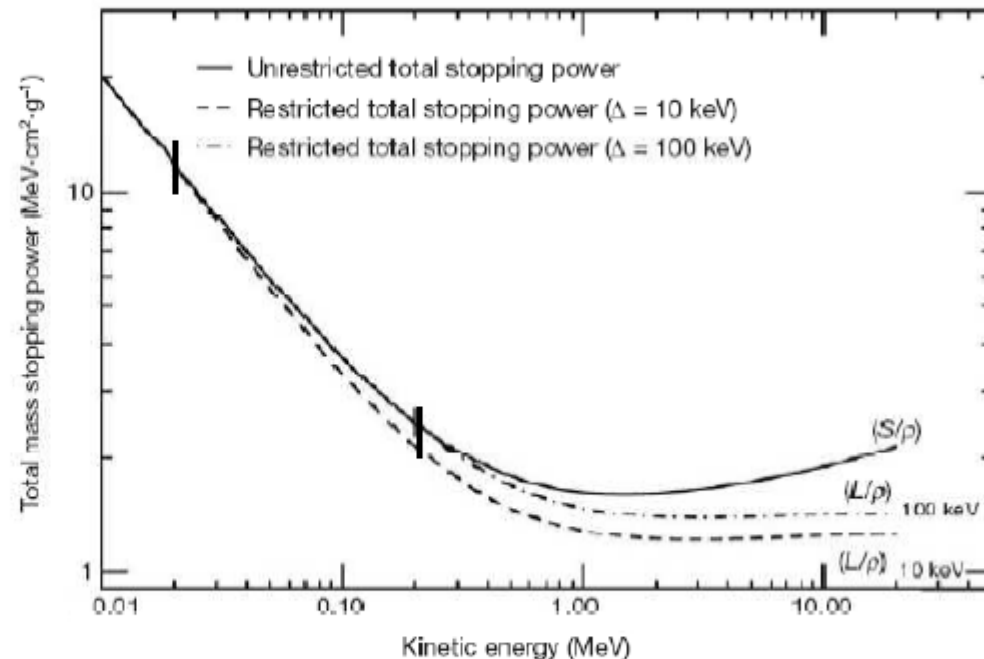
$$\tau = \frac{E}{m_e c^2}; \quad \eta = \frac{\Delta}{E}; \quad \xi = \frac{1}{\tau + 2}$$

$$F^+(\tau, \eta) = \ln(4\eta) - \beta^2 \left[1 + (2-\xi^2)\eta - (3+\xi^2) \frac{\xi \tau}{2} \eta^2 + (1+\xi \tau) \frac{\xi^2 \tau^2}{3} \eta^3 - \frac{\xi^3 \tau^3}{4} \eta^4 \right]$$

Perdida de ionizaciones

Poder de frenado másico

Poder de frenado másico total no restringido y restringido ($\Delta = 10$ keV y 100 keV) para carbono (ICRU Report No. 37)



Observamos que el poder de frenado másico no restringido y restringido empiezan a divergir al aumentar la energía. Evidentemente cuanto mayor sea el valor de Δ a mayor energía se aprecia la divergencia (líneas rojas).

Perdida de ionizaciones

Transferencia lineal de energía

La transferencia lineal de energía L_{Δ} es el poder de frenado lineal restringido asociado a la partícula en cuestión, de modo que

$$L_{\Delta} = \left[\frac{dE}{dx} \right]_{T < \Delta} = \rho \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T < \Delta}$$

La transferencia lineal de energía se suele dar el keV por μm . Hay que dividir por un factor 10 en el caso de tener el poder de frenado másico calculado en $\text{MeV cm}^2/\text{g}$ junto con la densidad en g/cm^3 . Para un ión por tanto

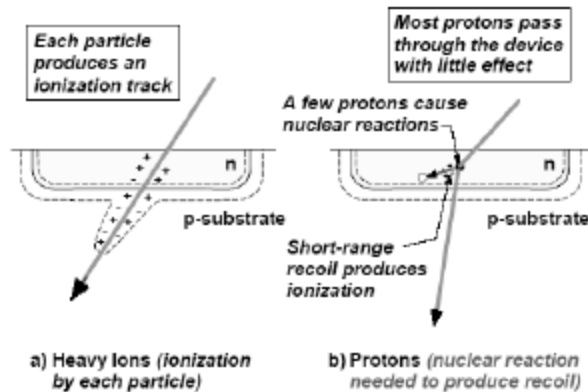
$$L_{\Delta} = -\rho \frac{dE}{\rho dx} \Big|_{T < \Delta} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \rho \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \Delta}{I^2} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{\Delta}{T_{\max}} \right) - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

También se define la transferencia lineal de energía no restringida (de importancia en la protección radiológica) como

$$L_{\infty} = \lim_{\Delta \rightarrow T_{\max}} L_{\Delta} = \rho \left(\frac{dE}{\rho dx} \right)_{col}$$

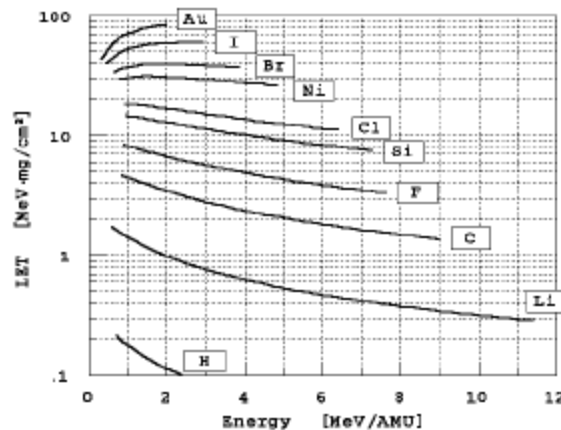
Perdida de ionizaciones

Transferencia lineal de energía y microelectrónica

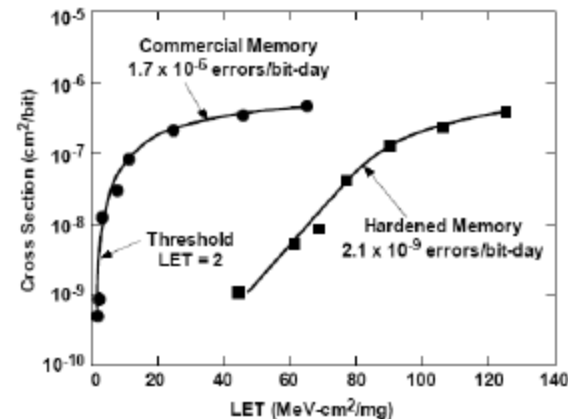


La transferencia lineal de energía está directamente vinculada a la producción de cambios de estado en microelectrónica digital (Single Event Upset) por la interacción de una única partícula.

El efecto se produce mediante iones o fragmentos nucleares cuyo LET es muy elevado

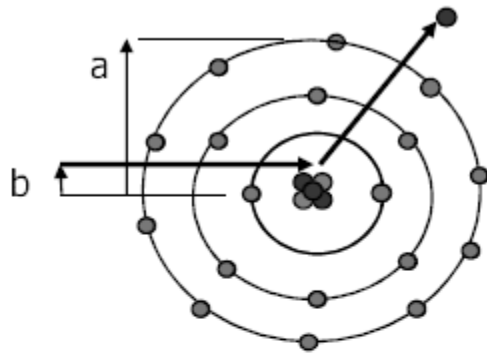


LET de diferentes iones en función de su energía por nucleón



Probabilidad de cambio de estado en función del LET

Colisiones con el campo de Coulomb nuclear



Colisiones "hard" $a \gg b$

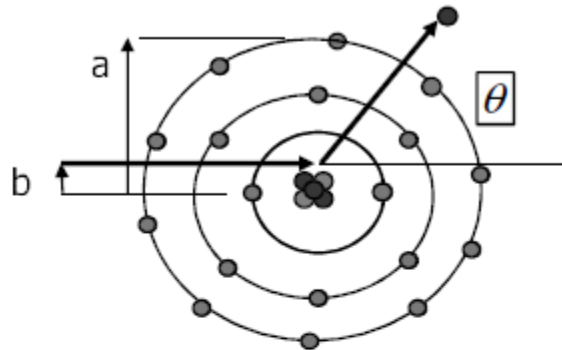
En estas colisiones el proyectil incide sobre el átomo con un parámetro de impacto tan pequeño que la interacción electromagnética tiene lugar en el campo de Coulomb que rodea al núcleo. La colisión en las energías de interés en dosimetría y radiología es elástica excepto en una pequeña fracción de sucesos (2 a 3%).

Este proceso radiativo es mucho más importante para electrones y positrones que para partículas cargadas pesadas. Debido a su mayor masa y carga, el proceso de frenado se debe fundamentalmente a las colisiones con el núcleo del átomo. Bethe y Heitler (1934) desarrollaron el modelo no-relativista de colisión donde el núcleo se supone fijo y el proyectil tiene masa M (ver Jackson "Classical Electrodynamics")

$$\left[\frac{dE}{dx} \right]_{rad} \propto \frac{Z^2 z^4}{M^2}$$

Esta dependencia implica que las pérdidas por bremsstrahlung son más importantes en materiales de alto Z y se comportan inversamente a la masa del proyectil para una velocidad dada.

Colisiones con el campo de Coulomb nuclear



La mayor parte de las colisiones a energías no relativistas dan lugar a scattering elástico que se conoce como scattering Rutherford. Estas colisiones contribuyen al cambio de dirección de las partículas cargadas en el medio sin que éstas pierdan energía.

Para partícula cargadas pesadas la sección eficaz diferencial de scattering Rutherford (relativista) viene dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} = (1 - \beta^2) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{Ze^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Donde E es la energía cinética de la partícula incidente. Esta sección eficaz tiene una marcada dependencia angular produciendo preferentemente dispersiones a bajo ángulo. La sección eficaz Rutherford anterior no se ajusta al caso de los electrones, así que Mc Kinley y Feschbach (Phys. Rev. 74, 1759) modificaron esta sección eficaz elástica para electrones

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{McF}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth}} = 1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2) + \pi\beta \frac{Ze^2}{\hbar c} \sin(\theta/2) (1 - \sin(\theta/2))$$

Perdida de ionizaciones

Pico de Bragg

Consideremos un ión o una partícula cargada pesada que se propaga en un medio material. La pérdida de energía responde a la fórmula de Bethe-Bloch

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

Durante el recorrido en el medio el ión tiene su carga desnuda, y su pérdida de energía dE/dx aumenta al disminuir su velocidad. Al llegar a velocidades bajas parte de la carga del ión se recombina, reduciendo el valor de dE/dx . A la curva donde se representa dE/dx en función de la distancia de penetración de la partícula se conoce como curva de Bragg. Esta curva alcanza un máximo conocido como pico de Bragg a una distancia de penetración que depende de la energía cinética original de la partícula.

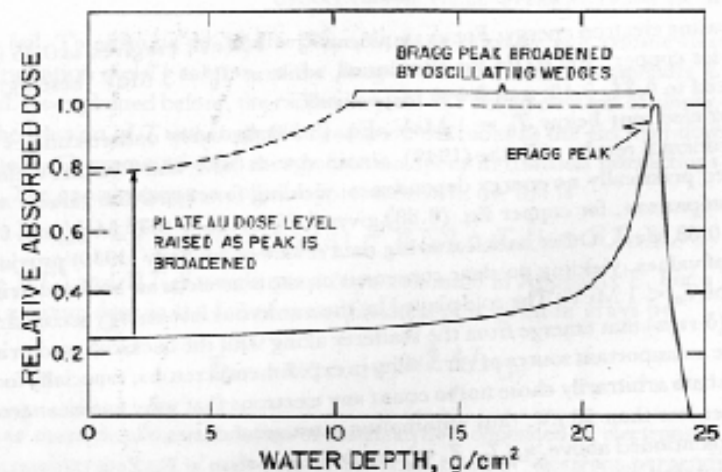
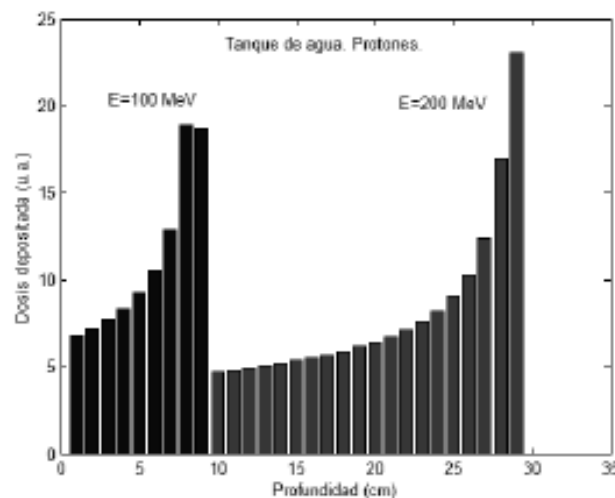


FIGURE 2.13a. Dose vs. depth for 187-MeV protons in water, showing Bragg peak. The dashed curve demonstrates the effect of passing the beam through optimally designed, variable-thickness absorbers such as oscillating wedges. (After Karlsson, 1964. Reproduced with permission from Strahlentherapie.)

