

Introducción sobre estadística

Variables aleatorias

Probabilidad

- Uno de los métodos consiste en utilizar la ley de los números grandes. En este caso, asumimos que podemos realizar cualquier número de tiros de la moneda, con cada tiro de la moneda siendo independiente — es decir, el resultado de cada tiro de la moneda no es afectado por los tiros anteriores de la moneda. Si realizamos N pruebas (tiros de la moneda), y dejamos N_H ser el número de veces que la moneda aterriza en “cabezas”, entonces nosotros podemos, para cualesquiera N , considerar el cociente N_H/N .
- Mientras que N se vuelve cada vez más grande y más grande, contamos con que en
- Nuestro ejemplo el cociente sea cada vez más cerca de $1/2$.

Variables aleatorias

Probabilidad

- Esto nos permite "definir" la probabilidad $\Pr(H)$ de obtener de un tiró "cabezas" como el límite, cuando N tiende al infinito, de esta secuencia de cocientes:

$$\Pr(H) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_H}{N}$$

- En la práctica actual, por supuesto, no podemos tirar una moneda un número infinito de veces; por lo tanto en términos generales, esta fórmula se aplica lo más exactamente posible a las situaciones en las cuales hemos asignado ya una probabilidad a priori a un resultado particular (en este caso, nuestra suposición de que la moneda era una moneda "justa").

Variables aleatorias

Probabilidad

- La ley de números grandes entonces dice esto, dado $\Pr(H)$, y cualquier número arbitrariamente pequeño ϵ , existe un cierto número n tal que para todo el $N > n$

$$\left| \Pr(H) - \frac{N_H}{N} \right| < \epsilon$$

- En otras palabras proclamando " la probabilidad de cabezas es $1/2$ ", nosotros afirmamos que, si tiramos nuestra moneda muchas veces, el número de "cabezas" sobre el número de tiros totales se irá acercando arbitrariamente a $1/2$; y entonces permanecerá *por lo menos* cerca de $1/2$ mientras guardamos el realizar tiros adicionales de la moneda.
- **Incluso si no se sabe el valor límite, un físico estaría a menudo dispuesto a asumir que existe**

Variables aleatorias

La definición moderna

- Al principio se debe definir un espacio Ω para el conjunto de todos los acontecimientos elementales posibles X_i tales que sean exclusivos, esto es, que la ocurrencia de uno de ellos implica que los demás no suceden. Entonces definimos la probabilidad de la ocurrencia de X_i , $P(X_i)$, con las siguientes características:
- $P(X_i) \geq 0$ para todos i
- $P(X_i \text{ or } X_j) = P(X_i) + P(X_j)$ (1.1)
- $\sum P(X_i) = 1$.

Variables aleatorias

Las características de la probabilidad

- Un conjunto A de acontecimientos elementales X_i , se puede tratar otra vez como acontecimiento, aunque no sea elemental. La ocurrencia de A es definida como la ocurrencia de por lo menos un acontecimiento X_i en el sistema A . Entonces denotamos $P(A)$ como la probabilidad que al menos ocurra X_i en el conjunto A .
- *Ley de la adición para los conjuntos de acontecimientos elementales*
- Consideramos dos conjuntos que no sean exclusivos, A y B , de acontecimientos elementales X_i ; es decir, algún X_i puede pertenecer a A y a B

Variables aleatorias

Las características de la probabilidad

- En este caso, siguiendo las definiciones de la Eq (1,1), la probabilidad de que ocurra un acontecimiento que esté en A o en B, o en ambos, está dado como:
- $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$ (1.2)
- Donde " A o B " denota el conjunto de acontecimientos X_i que, o pertenecen al conjunto A, o al B, o ambos, y " A y B " denota el sistema de acontecimientos X_i que pertenece a A y a B.
- La relación (1,2) se puede generalizar a un conjunto de varios sistemas A_1, \dots, A_N .

Variables aleatorias

Las características de la probabilidad

- Tomemos:
- $P_i = P(A_i)$
- $P_{ij} = P(A_i \text{ y } A_j), i < j$
- $P_{ijk} = P(A_i \text{ y } A_j \text{ y } A_k), i < j < k$
- etc., y Si denota la suma
- $S_1 = \sum P_i$
- $S_2 = \sum P_{ij}$
- $S_3 = \sum P_{ijk}, \text{ etc.}$
- Entonces la probabilidad de la ocurrencia de un acontecimiento que pertenece por lo menos a uno de los sistemas A_i está dado por
- $P(A_1 \text{ o } A_2 \text{ o } \dots \text{ o } A_N) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots - (-1)^N S_N$

Variables aleatorias Discretas

■ Un acontecimiento aleatorio es un acontecimiento que tiene más de un resultado posible. Una probabilidad puede ser asociada a cada resultado. El resultado de un acontecimiento aleatorio no es fiable, sólo las probabilidades de los resultados posibles se saben.

■ A un acontecimiento aleatorio A se puede asociar una variable aleatoria X , que toma diversos valores numéricos posibles X_1, X_2, \dots . Correspondiendo a diversos resultados posibles. Las probabilidades correspondientes $P(X_1), P(X_2), \dots$ de una distribución de la probabilidad.

Variables aleatorias Discretas

■ En el caso de más de una variable aleatoria, o de una secuencia de observaciones de la misma variable aleatoria, la cuestión de la independencia de diversas observaciones debe ser considerada. Si son independientes, la distribución de cada variable aleatoria es inafectada por el conocimiento de cualquier otra observación. Por otra parte, la dependencia significa que la distribución de una variable cambia cuando el valor de otra observación es conocida. Las variables dependientes todavía siguen siendo aleatorias. El resultado de una observación es fiable solamente en los términos de las probabilidades de valores posibles, según lo descrito por las distribuciones.

Variables aleatorias Discretas

- Solamente en el caso degenerado de la dependencia completa, cuando el conocimiento de una observación determina exactamente el valor de una segunda variable, la segunda variable llega a ser segura.
- Cuando un experimento consiste en N observaciones repetidas de la misma variable aleatoria X , éste se puede considerar como la sola observación de un vector aleatorio X , con componentes X_1, X_2, \dots, X_N

Variables aleatorias Continuas

- Podemos ahora generalizar probabilidades de acontecimientos a las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias. Para las variables aleatorias discretas, esta generalización es obvia. Para las variables aleatorias continuas (que intervalos continuos cubran los posible valores) necesitamos las herramientas *de la función de densidad de probabilidad* y su integral, *la función de distribución acumulativa*
- **Función de la densidad de la probabilidad**

Variables aleatorias Continuas

- Considere como ejemplo un experimento en el cual la dirección de la trayectoria de una partícula sea determinada por dos arreglos consecutivos de detectores, X y Y . Cada acontecimiento aceptado es caracterizado por dos variables discretas; sus valores son i y j cuando una partícula ha atravesado en el valor X_i del conjunto X y Y_j del conjunto Y . Ahí hay una distribución discreta de dos dimensiones correspondiente a la probabilidad $P(X \text{ y } Y)$.
- El físico puede pensar con frecuencia que la naturaleza se puede describir realmente por una distribución continua de la probabilidad $f(X, Y)$, y que la única razón de conseguir resultados en términos de variables discretas es que los detectores tengan un tamaño finito DX o DY .

Variables aleatorias Continuas

- La relación entre $P(X \text{ y } Y)$ y $f(X, Y)$ puede ser escrita:
- $f(X, Y) = \lim P(X \text{ y } Y) / \Delta X \Delta Y$ donde ΔX y $\Delta Y \rightarrow 0$ y
- $P(X \text{ y } Y) = P[(X - 0.5 \Delta X < X < X + 0.5 \Delta X) \text{ y } (Y - 0.5 \Delta Y < Y < Y + 0.5 \Delta Y)]$
- Es claro que los argumentos dimensionales $f(X, Y)$ representan una densidad de la probabilidad del conjunto de unidades de longitud X y del conjunto de la longitud de Y . Por el consiguiente $f(X, Y)$ se llama una función de la densidad de la probabilidad, p.d.f. abreviado, o función de densidad de probabilidad conjunta, j.p.d.f. (eso se aplica a la función de la densidad de más de una variable).
- Una p.d.f. se normaliza de una manera análoga a Eq. (2,1
- $\iint f(X, Y) dX dY = 1$. Integración en el espacio de todos los valores posibles de X y del Y .

Variables aleatorias Continuos

- **Cambio de la variable**
- Supongamos que $f(X)$ es conocido, y uno quisiera saber la densidad $g(Y)$ lo cual resulta de un cambio de variable
- $Y = h(X),$ (2,13)
- Lo cual mapea el intervalo $(X, X+dX)$ sobre $(Y, Y+dY)$. Si la transformación (2,13) es uno a uno se tiene
- $g(Y)dY = f(X)dX$
- y (2,14)
- $g(Y) = f(X)/|h'(X)|$

Variables aleatorias Continuos

- donde $|h'(X)|$ es el valor absoluto de la derivada de la transformación. En el caso multidimensional, donde X y Y son vectores, $|h'(X)|$ es el Jacobiano de la transformación.
- Si la transformación no es univaluada hay que tomar en cuenta los segmentos $(X, X+dX)$ de la transformación sobre $(Y, Y+dY)$, uno entonces tiene que sumar sobre todos los segmentos, así
- $g(Y) = \sum f(X)/|h'(X)|.$ (2,15)
- Por ejemplo, si la transformación (2,13) es $Y = X^2$ la densidad $g(X^2)$ es obtenida agregando las dos ramas $f(-X)$ y $f(X)$, así obteniendo:
- $g(Y) = (f(-X) + f(X))/2|X|.$ (2,15)

Variables aleatorias Continuas

- **Distribuciones acumulativas, marginales y condicionales**
- El físico usualmente llama a la función de densidad de probabilidad una distribución
- (e.g. distribución de masa). El estadístico reserva la distribución conocida para las funciones integradas de la densidad de la probabilidad. La variable aleatoria X es caracterizada o por su función $f(X)$ o su distribución acumulativa $F(X)$. de la densidad de la probabilidad
- $F(X) = \int f(X)dX$. (2,16)
- Por la construcción
- $F(X_{\min}) = 0$, $F(X_{\max}) = 1$
- Si la gama de valores posibles es $X_{\min} < X < X_{\max}$. $F(X)$ es una función monotonamente creciente de X tal que

Variables aleatorias Continuos

- $F(X_1) > F(X)$ para todos $X_1 > X$
- De la definición es obvio que $F(X_1)$ es la probabilidad de X sea más pequeño que X_1
- En general, la probabilidad de que X y Y tengan valores en una cierta región $R(X, y)$ es
- $P(X \text{ and } Y \text{ in } R) = \iint dF(X,Y)$
- Las proyecciones de la distribución se llaman las distribuciones marginales. Por ejemplo la proyección de la densidad de dos dimensiones (superficie) $f(X, Y)$ sobre el eje de X es la función marginal de la densidad del X .
- $g(X) = \int f(X, Y)dY$.

Variables aleatorias Continuos

- Las secciones con distribuciones se llaman *las distribuciones condicionales*. Así la sección (normalizada) con la función $f(X, Y)$ en $X = X_0$ da la función condicional de la densidad de Y , dado ese $X = X_0$ que es $f(Y|X_0)$. En analogía con el caso discreto, puede ser escrito como
- $f(Y|X_0) = f(X_0, Y) / \int f(X_0, Y) dY = f(X_0, Y) / g(X_0)$,
- donde la distribución $g(X)$ es la marginal del X
- Más generalmente, la densidad condicional de Y , dada $X = h(Y)$ se da como
- $f(Y|X_0) = f(h(Y), Y) / \int f(h(Y), Y) dY$.

Características de las distribuciones

- **Esperanza, promedio y varianza**
- Las funciones de la densidad de la probabilidad se utilizan como funciones generadoras para obtener la información sobre las variables aleatorias. Si $g(X)$ es una cierta función de una variable aleatoria X con la densidad $f(X)$, la esperanza de $g(X)$ es el número
- $E(g) = \int g(X)f(X)dX,$ (2,22)
- Donde es la integración sobre el todo el espacio de X .
- La esperanza E es un operador lineal
- $E[ag(X) + bh(X)] = aE[g(X)] + bE[h(X)]$ (2,23)
- La esperanza de la variable aleatoria X por sí mismo se llama el promedio de la densidad $f(X)$ o el valor previsto de X para la densidad $f(X)$, y es denotada por el μ .

Características de distribuciones

- $\mu = \int Xf(X)dX$.
- La esperanza de la función $(X - \mu)^2$ se llama la varianza $V(X)$ de la densidad $f(X)$
- $V(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] = E[X^2] - \mu^2 = \int (X - \mu)^2 f(X) dX$
- La cantidad σ se llama *desviación estándar*.
- Observe que el promedio de una muestra de la distribución no siempre puede existir. Un ejemplo es dado por la densidad de la distribución de Cauchy
- $f(X) = 1/p(1 + X^2)$
- Cabe destacar que $f(X)$ es la fórmula de Breit-Wigner encontrada a menudo en la física para describir amplitudes de la interacción de las partículas de la resonancia.

Características de distribuciones

- **Covariación y correlación**
- La esperanza Eq. (2,22) se generaliza fácilmente a varias dimensiones. En detalle, la esperanza de una función $g(X, Y)$ de dos variables aleatorias, dado su densidad común $f(X, Y)$, es
- $E[g(X,Y)] = \iint g(X,Y) f(X,Y) dXdY.$
- El medio y la variación de X y de Y son
- $\mu_X = E[X] = \iint X f(X,Y) dXdY = \int X \int f(X,Y) dYdX$
- $\mu_Y = E[Y] = \iint Y f(X,Y) dXdY$
- $\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2]$
- $\sigma_Y^2 = E[(Y - \mu_Y)^2]$
- Dos características numéricas importantes más de la densidad común son *la covariación* definida como
- $\text{cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X) (Y - \mu_Y)] = E[XY] - E[X]E[Y]$

Características de distribuciones

- y el coeficiente de correlación, definido como
- $\text{corr}(X, Y) = \rho(X, Y) = \text{cov}(X, Y) / \sigma_X \sigma_Y$
- El coeficiente de correlación, se ubica entre -1 y +1, para probar esto calculamos la variación de una combinación lineal de X y Y. Claramente la varianza es una cantidad positiva puesto que esta viene de la integración de una función positiva.
- Así
- $V(aX + Y) = 2 V(X) + V(Y) + 2a \text{cov}(X, Y) \geq 0$.
- Los asimientos de la desigualdad para toda la a; por lo tanto se sigue que
- $[\text{cov}(X, Y)]^2 - V(X)V(Y) \leq 0$
- o
- $-1 \leq r \leq 1$

Teorema de Tchebisheff

- Deje que $h(x)$ sea una función no negativa de X del teorema de Tchebisheff de la variable al azar
- Entonces este teorema dice que un límite superior se puede fijar para la probabilidad que $h(x)$ de la función excederá un cierto valor k . Por lo tanto
- $P[h(x) \geq k] \leq E[h(x)]/k$
- Para cada $k > 0$, e independientemente de la forma del $h(x)$, si solamente se sabe su expectativa.
- La prueba es absolutamente simple. En la región R donde $h(x) \geq k$, la expectativa

Teorema de Tchebisheff

- $E[h(x)] = \int h(x)f(x)dx$
- Nunca es mas pequeño que
- $k \int f(x)dx = kP[h(x) \in \mathbb{K}]$
- Desafortunadamente, el teorema es demasiado general como para ser útil en cálculos prácticos puesto que el límite superior puede usualmente ser mejorado usando mas conocimientos sobre la función $h(x)$.

El teorema de limite central

- Este teorema es de gran alcance de la importancia central en problemas teóricos y prácticos en estadística. Si tenemos una secuencia de variables aleatorias independientes X_i , cada uno con una distribución con valor medio μ_i y varianza σ_i^2 , entonces la distribución de la suma $S = \sum X_i$ tendrá un valor medio $\sum \mu_i$ y una varianza $\sum \sigma_i^2$. El teorema de limite central indica como la suma se distribuye en el limite con N grande. Es decir $N \rightarrow \infty$
-
- $(S - \sum \mu_i) / \sqrt{\sum \sigma_i^2} \rightarrow N(0,1)$
- No daré la prueba que se basa en el uso de funciones características.

Generador al numero aleatoria Gaussiano

- La mayoría de los cálculos de Monte Carlo requieren un sistema de números aleatorios uniformemente distribuidos, así que las computadoras tienen generalmente un generador de números aleatorios disponible como una función de biblioteca. Entonces al no tener esta función de biblioteca, los generadores fácilmente puede ser números aleatorios generados distribuidos normalmente. Puede ser hecho también usando el teorema de límite central que no es el método más eficiente.
- $g = (N/2 - \sum U_i) / \sqrt{N/12}$
- donde el número aleatorio U está uniformemente distribuido en $(0,1)$, entonces $m = 1/2$ y $s^2 = 1/12$. Del teorema de límite central g tendrá distribución normal en $N \rightarrow \infty$. En la práctica, g está ya muy cerca de la normal cuando $N = 10$.

Variables aleatorias Discretas

Función lineal de variables aleatorias

La expectativa de la función lineal de varias variables aleatorias X_1, \dots, X_N

$$E[\sum a_i X_i] = \sum a_i E[X_i] = \sum a_i \mu_{X_i}$$

La varianza es

$$V(\sum a_i X_i) = \sum a_i^2 V[X_i] + 2 \sum \sum a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j)$$

Si las X_i son independientes sin correlación la ecuación de arriba toma la simple forma

$$V(\sum a_i X_i) = \sum a_i^2 V[X_i]$$

En el caso cuando las X_i son diversas pruebas N del mismo experimento, el promedio que es dado por el valor medio de las observaciones X_i ,

Variables aleatorias Discretos

$E[X_i] = \mu$ y varianza $V(X_i) = \sigma^2$ para todo i

La expectativa del promedio de la observación de N entonces es

$$E[\sum X_i / N] = \sum E[X_i] / N = N\mu / N = \mu$$

y la varianza del promedio

$$V(\sum X_i / N) = \sum V[X_i] / N^2 + 2 / N^2 \sum \sum \text{cov}(X_i, X_j) = \sigma^2 / N + 2 / N^2 \sum \sum \text{cov}(X_i, X_j)$$

Si los ensayos son independientes, $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ para cada par (i, j) , y el término doble de la suma cae hacia fuera. Entonces tenemos el resultado bien conocido.

$$\sigma(\sum X_i / N) = \sigma(X_i) / \sqrt{N}$$

Lo cuál dice que la desviación de estándar del medio disminuye con \sqrt{N} mientras que N aumenta.

Variables aleatorias Discretas

- En caso de existencia de correlación para dos variables aleatorias
- $\sigma^2((X_1 + X_2)/2) = \sigma^2(1 + \rho)/2$
- **Cociente de variables aleatorias**
- Supongamos que X y Y son variables aleatorias independientemente distribuidas, con funciones de densidad f(X) y g(Y), respectivamente. En el caso cuando f y g son distribuciones normales como $\exp(-X^2/2)/\sqrt{2\pi}$ con cero medio y unen la varianza
- $h(X/Y) = 1/\pi(1 + (X/Y)^2)$

Variables aleatorias Continuas

- La cuál no tiene ninguna variación mala e infinita!
- En caso de que de la condición μ_Y/σ_Y sea suficientemente grande entonces la función de la densidad para la variable
- $(\mu_X - \mu_Y Z) / \sqrt{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 Z^2)}$
- Es la distribución normal con cero medio y $Z=X/Y$
- Para la varianza
- $V(Z) = Z^2((\sigma_X^2 / \mu_X^2 + \sigma_Y^2 / \mu_Y^2))$ en caso de que de
- $|\mu_X| \gg \sigma_X$
- $|\mu_Y| \gg \sigma_Y$
- $Y \neq 0$

Distribuciones extensamente usadas

- **Distribución binomial**

- Función de la probabilidad para la distribución binomial:
-
- $P(r) = B\{N,r\}p^r(1-p)^{N-r}$ donde $B\{N,r\} = N!/r!(N-r)!$, $r = 0,1,2, \dots, N$
- $0 < p < 1$
- Esperanza matemática $E[r] = Np$
- Varianza $V(r) = Np(1-p)$
- Oblicuidad $\gamma_1 = (1-2p)/\sqrt{Np(1-p)}$
- Kurtosis $\gamma_2 = (1-6p(1-p))/(Np(1-p))$

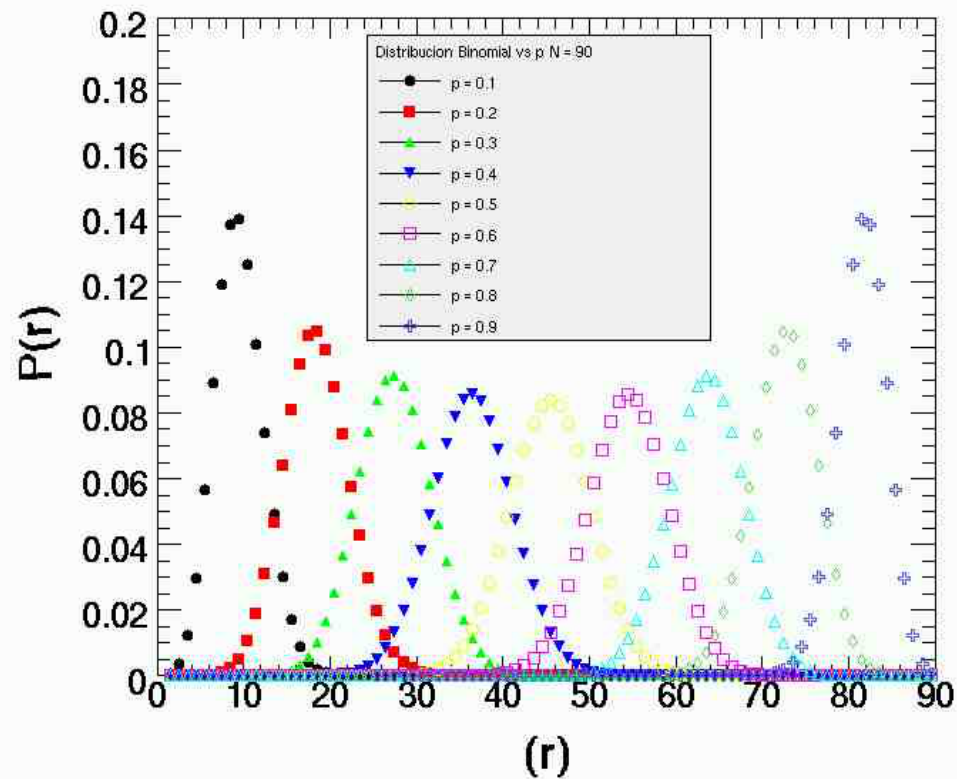
Distribuciones extensamente usadas

- La distribución binomial de la probabilidad de encontrar exactamente r éxitos en N ensayos, cuando la probabilidad del éxito en cada solo ensayo es una constante, p , la distribución del número de acontecimientos en un solo compartimiento del histograma es binomial.
- Si p es desconocido, una estimación imparcial de la varianza se da por
- $V(r) = N^2 (r/N) (1-r/N) / (N-1)$
- Considere un estudio de la absorción de la radiografía en una capa. Suponga que la probabilidad de la absorción de un solo fotón es p . el número de fotones que atraviesan la capa se distribuye según la ley binomial:

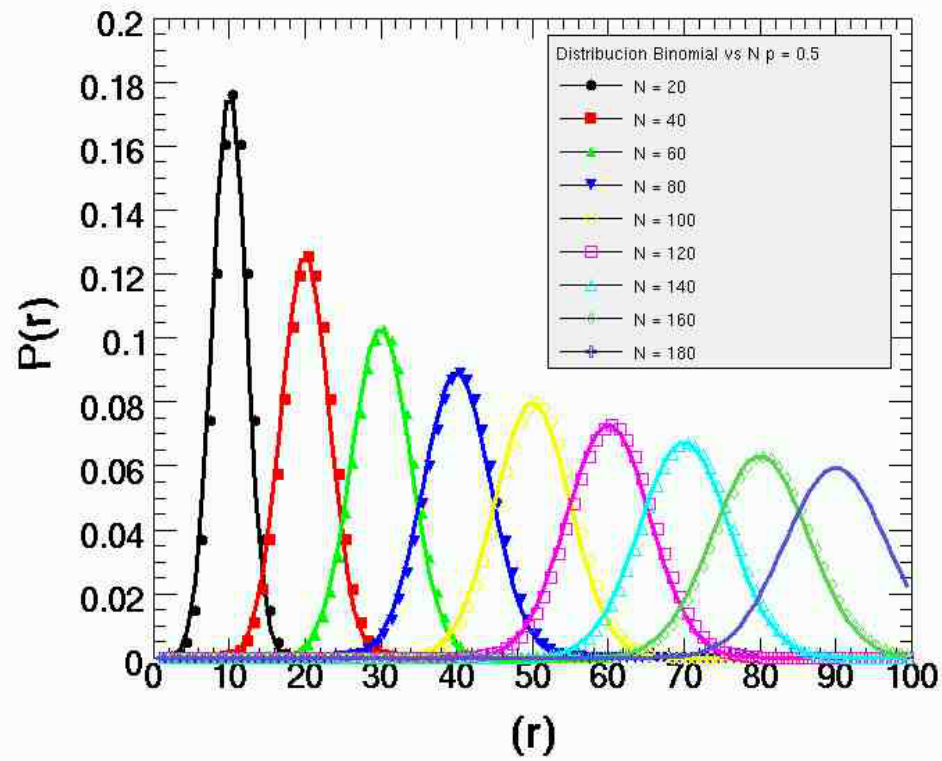
Distribuciones extensamente usadas

- $P(N) = \{N_0 N\} (1-p)^N (p)^{N_0 - N}$
- Entonces el esperanza matemática para N es $N_0(1-p)$, donde N_0 es el número de fotones antes de la capa. De la varianza la esperanza Np , la desviación estándar está dada por \sqrt{Np} (no por \sqrt{N})
- Entonces para las capas gruesas cuando $p \approx 1$, el valor \sqrt{N} para la desviación estándar es apropiado!

Distribuciones extensamente usadas



Distribuciones extensamente usadas



Distribuciones extensamente usadas

- **Distribución de Poisson**

- Función de probabilidad

- $P(r) = \exp(-\mu) \mu^r / r!$

- Esperanza matemática $E[r] = \mu$

- Varianza $V(r) = \mu$

- Oblicuidad $\gamma_1 = 1 / \sqrt{\mu}$

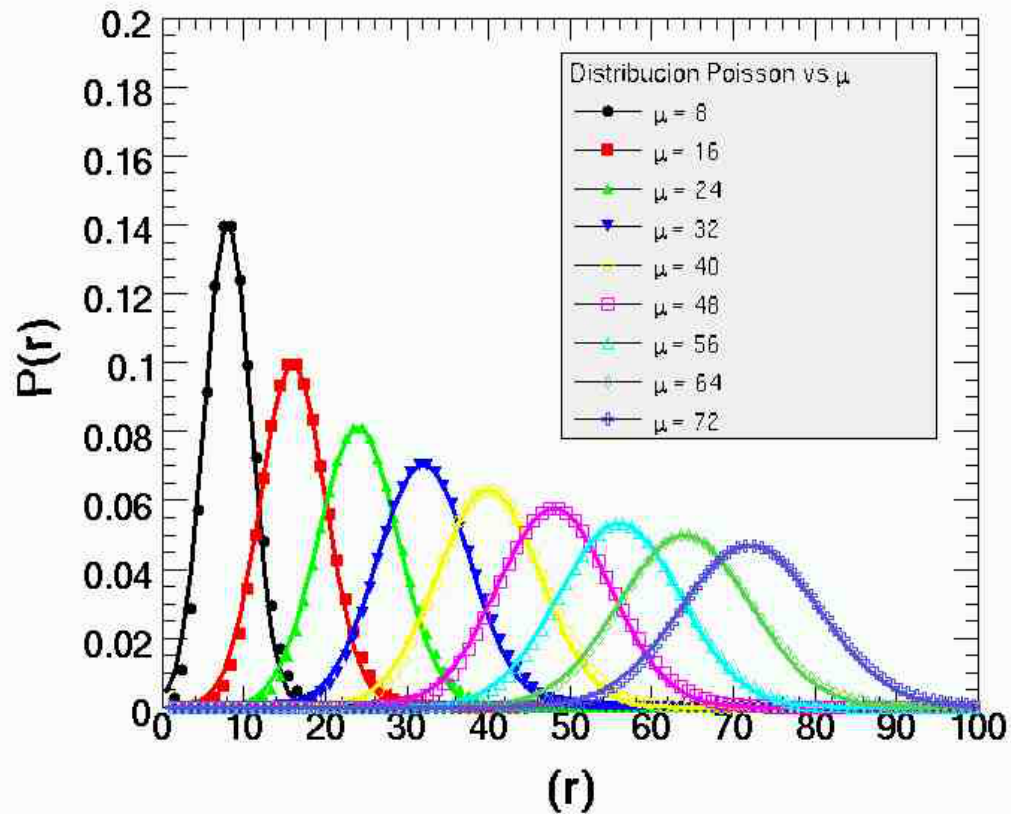
- Kurtosis $\gamma_2 = 1 / \mu$

- La distribución de Poisson da la probabilidad de encontrar exactamente r acontecimientos en una longitud del tiempo dada, si ocurren los acontecimientos independientemente, a una tasa constante.

Distribuciones extensamente usadas

- Es un caso límite de la distribución binomial para $p \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$ cuando $Np = \mu$ una constante finita.
- Cuando $\mu \rightarrow \infty$ la distribución de Poisson converge a la distribución normal.
- **Ejemplo:**
- Suponga que son las partículas emitidas de una fuente radiactiva en un índice medio de g partículas por unidad de tiempo, de una manera tal que la probabilidad de la emisión en δt sea el $\gamma \delta t$, y la probabilidad de más de una emisión en despegue es $O(\delta t^2)$. Entonces la distribución del número de partículas X , emitidas en un intervalo fijo t del tiempo, es Poisson, con g malo t :
- $P(X = r) = (\gamma t)^r \exp(-\gamma t) / r!$

Distribuciones extensamente usadas



Distribuciones extensamente usadas

- **Normal uno dimensional**
- Función de densidad de la probabilidad para la distribución (Gaussiana) normal:
- $f(X) = N(\mu, \sigma^2) = \exp(-(X-\mu)^2/2\sigma^2)/\sigma\sqrt{2\pi}$ donde μ - número real, σ - número real positivo
- Distribución acumulativa
- $\Phi(X) = \Phi((X-\mu)/\sigma)$ donde $\Phi(Z) = \int \exp(-x^2/2)dx/\sqrt{2\pi}$ donde integración - del $-\infty$ a Z
- Esperanza matemática $E[X] = \mu$
- Varianza $V(X) = \sigma^2$

Curso práctico de Monte-Carlo

Distribuciones extensamente usadas

- Oblicuidad $\gamma_1 = 0$
- Kurtosis $\gamma_2 = 0$
- La distribución teórica más importante de la estadística es la función normal de la densidad de la probabilidad, o Gaussiana, generalmente abreviado $N(\mu, \sigma^2)$. Su distribución acumulativa, se llama *la probabilidad normal integral* o *la función de error*.
- La desviación de estándar σ no es la anchura del p.d.f. en la mitad de la altura. La anchura en la mitad de la altura es $1,76\sigma$. El contenido de la probabilidad de varios intervalos se da abajo:

Distribuciones extensamente usadas

- $P(-1.64 \leq (x - m) / s \leq 1.64) = 0.900$
- $P(-1.96 \leq (x - m) / s \leq 1.96) = 0.950$
- $P(-2.58 \leq (x - m) / s \leq 2.58) = 0.990$
- $P(-3.29 \leq (x - m) / s \leq 3.29) = 0.999$
- La función $N(0,1)$ se llama la densidad normal estándar y su función acumulativa,
- $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ donde integración - de $-\infty$ a x
- Se llama la distribución normal estándar.
- Cualquier combinación lineal del X_i es también normal. Si $Z = a_1 X_1 + a_2 X_2$ entonces Z es también normal con valor medio $a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2$ y varianza $a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2$.

Distribuciones extensamente usadas

- **Distribución del Chi-cuadrado**
- Función de la densidad de la probabilidad:
- $f(X) = (X/2)^{N/2-1} \exp(-X/2) / 2\Gamma(N/2)$ donde número – verdadero positivo de X , N - número entero positivo (grados de la libertad)
- Esperanza Matemática $E[X] = N$
- Varianza $V(x) = 2N$
- Oblicuidad $\gamma_1 = 2\sqrt{2}/N$
- Kurtosis $\gamma_2 = 12/N$
- Suponga que X_1, \dots, X_N son las variables normales independientes, estándares, $N(0,1)$. Entonces la suma de cuadrados

Distribuciones extensamente usadas

- $X^2_{(N)} = \sum X_i^2$
- Es triste tener una distribución del chi-cuadrado $\chi^2(N)$, con N grados de libertad. Si $X^2_{(N)}$ y $X^2_{(M)}$ tienen distribuciones independientes de χ^2 con N y M grados de libertad, respectivamente, entonces la suma
- $X^2_{(K)} = X^2_{(N)} + X^2_{(M)}$
- Tiene una distribución de χ^2 con $K=N+M$ grados de libertad.
- Para N grande la cantidad
- $Z_N = (X^2(N) - N)/\sqrt{2N}$
- Es la norma estándar $N(0,1)$

Distribuciones extensamente usadas

