Métodos matemáticos para la ciencia e Ingeniería: Espectro solar

Fernanda Pérez

24 de Septiembre, 2015

1 Introducción

A partir de datos tabulados del espectro solar v/s longitud de onda, se busca graficarlos e integrarlos mediante algún método para luego calcular la luminosidad total del sol. Luego suponemos una aproximación del sol como un cuerpo negro otorgándole una temperatura $T_{eff} = 5778K$. Se busca integrar la función de Planck para encontrar la constante de Boltzmann y así finalmente calcular el radio efectivo del sol R_{eff}.
Se adiciona el cálculo de las dos integrales anteriores con métodos del módulo *scipy* en python, comparando los valores obtenidos y el tiempo de ejecución del algoritmo creado v/s *scipy*.

2 Integración del flujo en longitud de onda

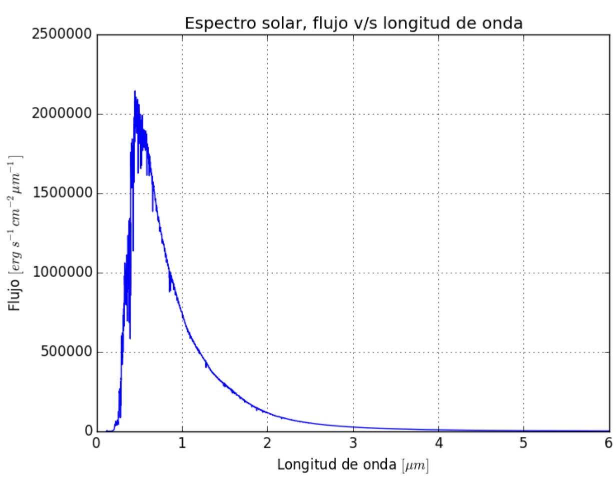

Figura 1: Gráfico flujo v/s longitud de onda.

En la Figura 1 se muestra la gráfica de los datos tabulados en el archivo $sun\_AM0.dat$, obtenida mediante el archivo Tarea.py (al igual que el resto de los resultados).

Para integrar el espectro solar en la longitud de onda se utiliza el método de los trapecios:

$$I_{espectro} = \sum_{i=0}^{1695} \frac{(y_i + y_{i+1})\Delta x_i}{2} = \sum_{i=0}^{1695} \frac{(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)}{2} \tag{1}$$

En donde los x_i corresponden a longitudes de onda y los y_i a flujos. La suma va de $i = 0$ hasta $i = 1695$ ya que tenemos 1697 datos para x e y.
De esta forma obtenemos que la integral del flujo en longitud de onda (constante solar) es $1.366.090,79 \frac{erg}{cm^2 s}$.

3 Luminosidad total

Dado que:

$$Luminosidad = 4\pi \cdot A^2 \cdot I_{espectro} \tag{2}$$

Donde $Integral$ es la integral calculada de la Ecuación (1) y A es la distancia del sol a la tierra (1 U.A), encontramos que la luminosidad total del sol es $3,84 \cdot 10^{33} \frac{erg}{s}$.

4 Integración función de Planck

Función de planck:

$$B_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \tag{3}$$

Puede ser reescrita como:

$$P = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \tag{4}$$

Aproximamos el sol como un cuerpo negro con temperatura $T_{eff} = 5778K$. Para integrar la Ecuación 4 utilizamos el cambio de variable $y = arctan(x)$ y luego tenemos los nuevos límites de integración $a = 0$ y $b = \frac{pi}{2}$. Ya que la función se indefine en 0, se utiliza $a = 0,0001$.

$$I = \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \approx \int_{0,0001}^{pi/2} \frac{tg(y)^3(1 + tg(y))^2 dy}{exp(tg(y)) - 1} = \int_{0,0001}^{pi/2} f(y)dy \tag{5}$$

Se utiliza el método de simpson:

$$I \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} [f(x_i) + 4f(x_i + h) + f(x_i + 2h)] \tag{6}$$

En donde $h = \frac{a+b}{2}$, $x_0 = a$, $x_{i+1} = x_i + 2h$, n número par escogido entre 10 y 1600 con tal de poder ir mejorando la precisión y $f(\cdot)$ la misma función $f(\cdot)$ de la Ecuación 5. Finalmente, con $n = 100$, se obtiene que:

$$I_{planck} = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \cdot I = 63.200.625.798,46 \frac{erg}{cm2s} \tag{7}$$

Donde I corresponde a la energía por unidad de área y tiempo de un cuerpo negro con temperatura $T_{eff} = 5778K$.

5 Radio efectivo del sol

Dado que:

$$I_{planck} = \sigma \cdot T_{eff}^4 \tag{8}$$

$$Luminosidad = 4\pi \cdot \sigma \cdot R_{eff}^2 \tag{9}$$

Es posible obtener la constante de Planck (σ) para luego calcular el radio efectivo del sol. Finalmente, $R_{eff} = 695.511, 8\ km$.

6 Comparación con métodos de scipy en python

A partir del módulo **scipy** en Python, se hace uso de los métodos *scipy.integrate.trapz* y *scipy.integrate.quad* de modo de recalcular $I_{espectro}$ e I_{planck}, respectivamente (ver Tabla 1 y Tabla 2). El tiempo de ejecución es calculado tomando un promedio de 30 mediciones con el comando *time python NombreArchivo.py* desde el terminal.

Algoritmo propio	$I_{espectro}$	I_{planck}
valor $[erg/(cm^2 s)]$	1.366.090,7968389965	63.200.625.798,4598
tiempo $[s]$	1,615	0,543

Tabla 1: Valores de las integrales $I_{espectro}$ y I_{planck} con algoritmos propios y velocidad de ejecución de dichos algoritmos.

Scipy	$I_{espectro}$	I_{planck}
valor $[erg/(cm^2 s)]$	1.366.090,79684	63.200.679.712,4
tiempo $[s]$	0,647	0,602

Tabla 2: Valores de las integrales $I_{espectro}$ y I_{planck} con métodos de scipy y velocidad de ejecución de dichos métodos.

7 Conclusiones

Los valores obtenidos mediante integración numérica, con método de trapecios y de simpson para las integrales de espectro y de la función de Planck respectivamente, son coherentes y distan muy levemente de los valores reales que se manejan de ellas, al igual que los valores de luminosidad total del sol y radio efectivo del sol.

En relación a la comparación del algoritmo propio, para el ćalculo de las integrales pedidas, v/s métodos de scipy, el valor de $I_{espectro}$ es prácticamente el mismo en ambos casos. Esto es esperable ya que el *scipy.integrate.trapz* utiliza el mismo método númerico de trapecios que fue utilizado en el algoritmo propio. El valor de I_{planck} muestra una diferencia apreciable entre ambos algoritmos, causada por haber tomado como límite de integración inferior $a = 0,0001$ en vez de $a = 0$ en nuestro algoritmo propio y por diferencias en la precisión de ambos algoritmos, ya que el nuestro utiliza datos puntuales mientras que *scipy.integrate.quad* utiliza la función en sí.

Se aprecia que el tiempo de ejecución para I_{planck} es menor en el algoritmo propio que en scipy. Esto puede deberse a una mayor simplicidad de nuestro algoritmo en relación a scipy, ya que va tomando puntos de datos que ya conocemos mientras scipy trabaja con la función como tal.