

# Métodos matemáticos para la ciencia e Ingeniería: Choque inelástico

Fernanda PÉREZ

1 de Octubre, 2015

## 1 Introducción

A partir de las ecuaciones de posición en el eje vertical para una partícula de masa  $m$  en presencia de gravedad y para un suelo que oscila sinusoidalmente con amplitud  $A$  y frecuencia  $\omega$ , en adición con la regla de velocidades que sigue un choque inelástico, se busca encontrar la forma de las soluciones del sistema luego de un periodo de relajación, variando el parámetro  $\omega$ .

## 2 Ecuaciones y valores fijos a utilizar

Ecuaciones de posición y velocidad para una partícula de masa  $m$ , con posición inicial  $y_0$ , velocidad inicial  $v_0$  y aceleración de gravedad  $g$ :

$$y_p(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

$$v_p(t) = v_0 t - g t \quad (2)$$

Ecuaciones de posición y velocidad para un suelo que oscila sinusoidalmente con amplitud  $A$  y frecuencia  $\omega$ :

$$y_s(t) = A \sin(\omega t) \quad (3)$$

$$v_s(t) = A \omega \cos(\omega t) \quad (4)$$

Variación de velocidad después de un choque inelástico:

$$v'_p(t^*) = (1 + \eta) v_s(t^*) - \eta v_p(t^*) \quad (5)$$

En donde  $t^*$  corresponde al tiempo en que ocurre el choque,  $v'_p(t^*)$  es la velocidad de la partícula después del choque,  $v_p(t^*)$  la velocidad de la partícula antes del choque y  $\eta$  es el coeficiente de restitución que va entre 0 y 1.

Para la resolución del problema se utiliza  $m = 1$ ,  $g = 1$ ,  $A = 1$ ,  $y_0 = 0$ ,  $v_0 = 2$ ,  $\eta = 0.15$ .

### 3 $(y_{n+1}, v'_{n+1})$ a partir de $(y_n, v'_n)$

A partir de la posición y velocidad de la partícula luego del  $n$ -ésimo rebote  $(y_n, v_n)$ , se busca obtener  $(y_{n+1}, v_{n+1})$ . Para esto se crea una función auxiliar,  $f(t) = \text{particula\_menos\_suelo}(t)$ , la cual nos entrega la resta entre la posición de la partícula y el suelo.

A partir de la Ecuación 1, podemos estimar el tiempo en que ocurriría el rebote. Recordando que se utiliza  $y_0 = 0$  y  $g = 1$ , buscamos el tiempo en que la partícula vuelve a la posición 0:

$$0 = v_0 t_{\text{estimado}} - \frac{1}{2} (t_{\text{estimado}})^2 \quad (6)$$

Lo que finalmente nos deja:

$$t_{\text{estimado}} = 2 \cdot v_0 \quad (7)$$

Se escoge un  $\text{delta} = 1$ , para luego hacer uso del método bisección de `scipy.optimize` en python con la función  $f(t)$  y extremos de adivinanza  $a = t_{\text{estimado}} - \text{delta}$  y  $b = t_{\text{estimado}} + \text{delta}$ , y así se obtiene el tiempo de choque  $t_{\text{choque}}$ .

Finalmente, conocidos  $t_{\text{choque}}$ ,  $y_n$ ,  $v_n$  y dado que  $\omega = 1.66$  y  $\eta = 0.15$ , es posible mediante las ecuaciones de movimiento calcular  $y_{n+1}$  y  $v'_{n+1}$ .

### 4 Relajación del sistema $(N_{\text{relax}})$

Se busca encontrar el número de botes necesarios para regalar el sistema. Para esto se crea una función en python que nos permite ingresar los valores de los parámetros del sistema y la cantidad de botes que queremos que se efectúen. Esta función nos entrega los vectores de  $\text{tiempo\_choque}$ ,  $y_n$  y  $v'_n$ . Luego se grafica  $n$  vs  $v'_n$ , con  $n$  el número de rebotes. A partir del gráfico se estima el  $N_{\text{relax}}$ , buscando el valor de  $n$  para el cual  $v'_n$  se ha estabilizado.

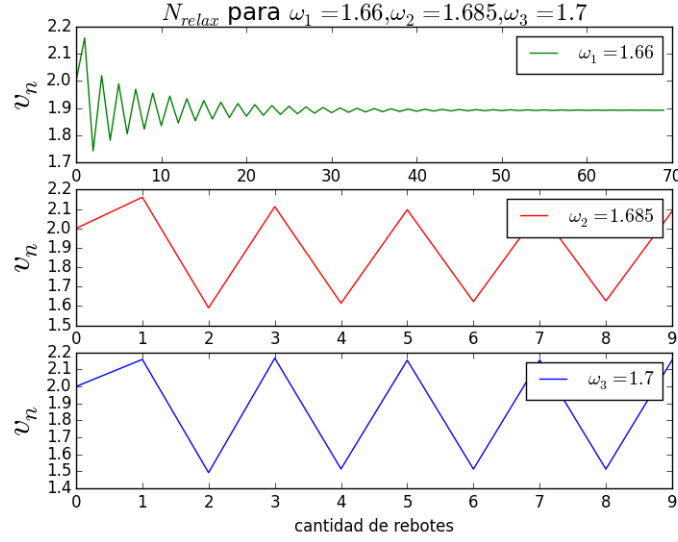
### 5 Post $N_{\text{relax}}$

Una vez conocidos los  $N_{\text{relax}}$ , finalmente es posible conocer la forma de las soluciones del sistema luego del periodo de relajación.

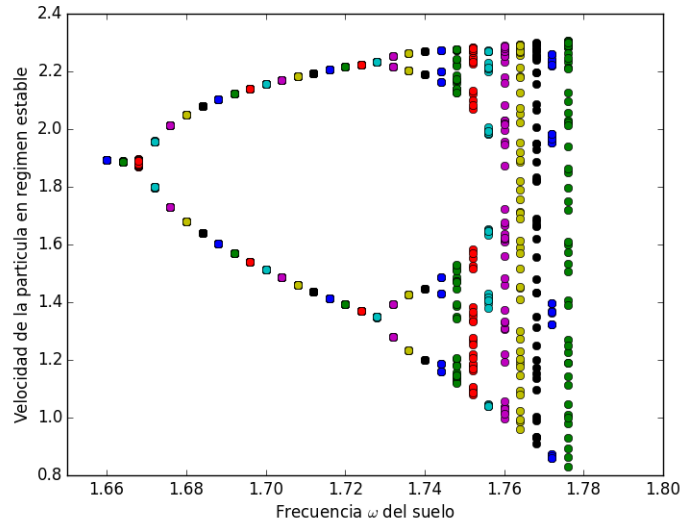
Para la visualización de esto se grafica  $v'_n$  vs  $\omega$ , con  $\omega$  entre 1.66 y 1.776 para 50 rebotes, partiendo de  $n = 2 \cdot N_{\text{relax\_max}}$ , donde  $N_{\text{relax\_max}}$  es el máximo  $N_{\text{relax}}$  de los existentes con  $\omega$  entre 1.66 y 1.776. (Ver Figura 2).

## 6 Resultados

Variando el valor de  $\omega$  se obtiene el gráfico de la Figura 1, en donde se aprecia que los  $N_{relax}$  para  $\omega_1 = 1.66, \omega_2 = 1.685, \omega_3 = 1.7$  son aproximadamente 50, 3 y 3 respectivamente.



**Figura 1:** Gráfico  $n$  vs  $v'_n$  para distintos valores de  $w$ .



**Figura 2:** Gráfico  $n$  vs  $v'_n$  para distintos valores de  $\omega$ .

## 7 Conclusiones

A partir de la Figura 1 vemos que existe una dependencia de  $\omega$  para el  $N_{relax}$  del sistema. También se observa que en la situación estable del sistema la partícula puede tener más de un valor  $v'_{p.estable}$ , dependiendo del valor de  $\omega$ . Esta dependencia se ve con mayor claridad en la figura 2, donde se aprecia que en  $\omega = 1.66$  hay un sólo valor para  $v'_{p.estable}$ , pero luego en  $\omega \sim 1.67$  hay una bifurcación en la gráfica, provocando que hayan dos valores  $v'_{p.estable}$ . Luego en  $\omega \sim 1.73$  vuelve a haber una bifurcación, habiendo entonces cuatro valores para  $v'_{p.estable}$ .