Métodos matemáticos para la ciencia e Ingeniería: Choque inelástico

Fernanda Pérez

1 de Octubre, 2015

1 Introducción

A partir de las ecuaciones de posición en el eje vertical para una partícula de masa m en presencia de gravedad y para un suelo que oscila sinusoidalmente con amplitud A y frecuencia ω, en adición con la regla de velocidades que sigue un choque inelástico, se busca encontrar la forma de las soluciones del sistema luego de un periodo de relajación, variando el parámetro ω.

2 Ecuaciones y valores fijos a utilizar

Ecuaciones de posición y velocidad para una partícula de masa m, con posición inicial y_0, velocidad inicial v_0 y aceleración de gravedad g:

$$y_p(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1}$$

$$v_p(t) = v_0 t - gt \tag{2}$$

Ecuaciones de posición y velocidad para un suelo que oscila sinusoidalmente con amplitud A y frecuencia ω:

$$y_s(t) = Asin(\omega t) \tag{3}$$

$$v_s(t) = A\omega cos(\omega t) \tag{4}$$

Variación de velocidad después de un choque inelástico:

$$v_p'(t^*) = (1+\eta)v_s(t^*) - \eta v_p(t^*) \tag{5}$$

En donde t^* corresponde al tiempo en que ocurre el choque, $v_p'(t^*)$ es la velocidad de la partícula después del choque,$v_p'(t^*)$ la velocidad de la partícula antes del choque y η es el coeficiente de restitución que va entre 0 y1.

Para la resolución del problema se utiliza $m = 1$, $g = 1$, $A = 1$, $y_0 = 0$, $v_0 = 2$, $\eta = 0.15$.

3 (y_{n+1}, v'_{n+1}) a partir de (y_n, v'_n)

A partir de la posición y velocidad de la partícula luego del n-ésimo rebote (y_n, v_n), se busca obtener (y_{n+1}, v_{n+1}). Para esto se crea una función auxiliar, $f(t) = particula\_menos\_suelo(t)$, la cual nos entrega la resta entre la posición de la partícula y el suelo.

A partir de la Ecuación 1, podemos estima el tiempo en que ocurriría el rebote. Recordando que se utiliza $y_0 = 0$ y $g = 1$, buscamos el tiempo en que la partícula vuelve a la posición 0:

$$0 = v_0 t_{estimado} - \frac{1}{2}(t_{estimado})^2 \tag{6}$$

Lo que finalmente nos deja:

$$t_{estimado} = 2 \cdot v_0 \tag{7}$$

Se escoge un $delta = 1$, para luego hacer uso del método bisect de scipy.optimize en python con la función $f(t)$ y extremos de adivinanza $a = t_{estimado} - delta$ y $b = t_{estimado} + delta$, y así se obtiene el tiempo de choque t_{choque}.

Finalmente, conocidos t_{choque}, y_n, v_n y dado que $\omega = 1.66$ y $\eta = 0.15$, es posible mediante las ecuaciones de movimiento calcular y_{n+1} y v'_{n+1}.

4 Relajación del sistema (N_{relax})

Se busca encontrar el número de botes necesarios para regalar el sistema. Para esto se crea una función en python que nos permite ingresar los valores de los parḿetros del sistema y la cantidad de botes que queremos que se efectúen. Esta función nos entrega los vectores de $tiempo_choque$, y_n y v'_n. Luego se trafica n vs v'_n, con n el número de rebotes. A partir del gráfico se estima el N_{relax}, buscando el valor de n para el cual v'_n se ha estabilizado.

5 Post N_{relax}

Una vez conocidos los N_{relax}, finalmente es posible conocer la forma de las soluciones del sistema luego del periodo de relajación.

Para la visualización de esto se grafica v'_n vs ω, con ω entre 1.66 y 1.776 para 50 rebotes, partiendo de $n = 2 \cdot N_{relax\_max}$, donde N_{relax_max} es el máximo N_{relax} de los existentes con ω entre 1.66 y 1.776. (Ver Figura 2).

6 Resultados

Variando el valor de ω se obtiene el gráfico de la Figura 1, en donde se aprecia que los N_{relax} para $\omega_1 = 1.66, \omega_2 = 1.685, \omega_3 = 1.7$ son aproximadamente 50, 3 y 3 respectivamente.

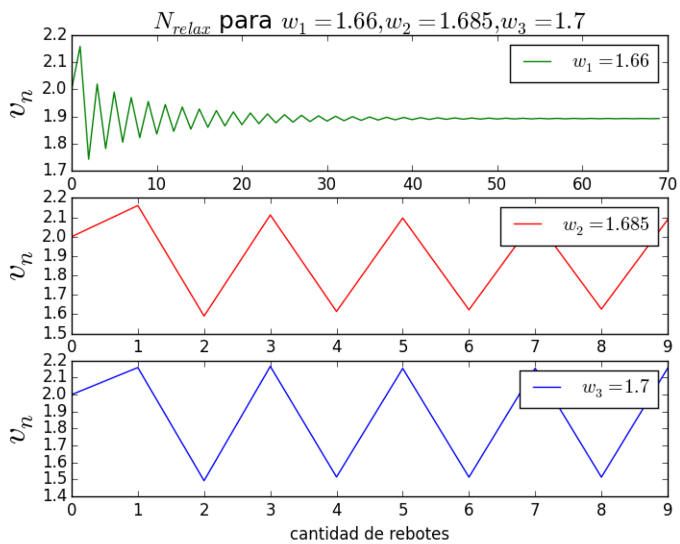

Figura 1: Gráfico n vs v'_n para distintos valores de w.

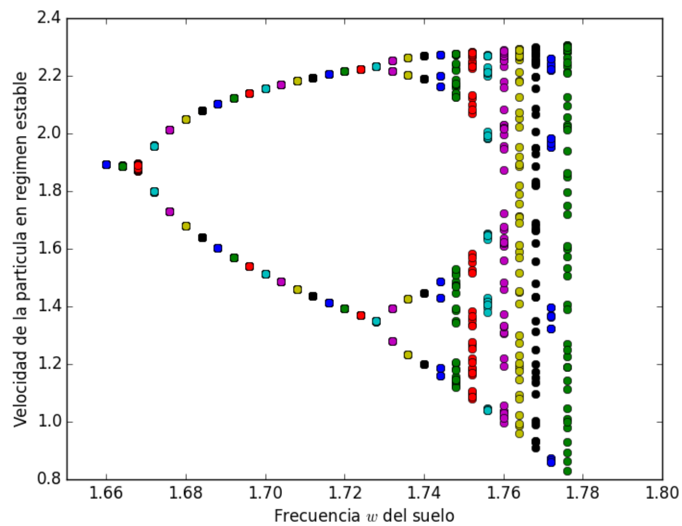

Figura 2: Gráfico n vs v'_n para distintos valores de ω.

7 Conclusiones

A partir de la Figura 1 vemos que existe una dependencia de ω para el N_{relax} del sistema. También se observa que en la situación estable del sistema la partícula puede tener más de un valor $v'_{p\_estable}$, dependiendo del valor de ω. Esta dependencia se ve con mayor claridad en la figura 2, donde se aprecia que en $\omega = 1.66$ hay un sólo valor para $v'_{p\_estable}$, pero luego en $\omega \sim 1.67$ hay una bifurcación en la gráfica, provocando que hayan dos valores $v'_{p\_estable}$. Luego en $\omega \sim 1.73$ vuelve a haber una bifurcación, habiendo entonces cuatro calores para $v'_{p\_estable}$.