Métodos matemáticos para la ciencia e Ingeniería: Oscilador de Van der Pool y Atractor de Lorentz

Fernanda PÉREZ *(rut: 18.769.232-6)*

8 de Octubre, 2015

1 Pregunta1

1.1 Introducción

La ecuación 1 corresponde a la del oscilador de Van del Pool, el cual describe la dinámica de algunos circuitos eléctricos donde k es la constante elstica y μ es un coeficiente de roce.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt} \tag{1}$$

Utilizando el cambio de variable $x(t) = ay(s)$ con $s(t) = t\sqrt{k}$, se tiene que:

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = a\sqrt{k}\frac{dy}{ds} \tag{2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}) = \frac{d}{dt}(a\sqrt{k}\frac{dy}{ds}) = a\sqrt{k}\frac{d^2y}{ds^2}\frac{ds}{dt} = ak\frac{d^2y}{ds^2} \tag{3}$$

Reemplazando en ecuación 1:

$$ak\frac{d^2y}{ds^2} = -aky - \mu(a^2y^2 - a^2)a\sqrt{k}\frac{dy}{ds} \tag{4}$$

Luego se tiene que la ecuación 1 puede escribirse como:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds} \tag{5}$$

Con $\mu^* = a^2\mu k^{-1/2}$.
Se busca resolver la ecuación 5 numéricamente, utilizando Runge-Kutta de orden 3, para las siguientes condiciones iniciales:

- $\frac{dy}{ds} = 0; y = 0.1$
- $\frac{dy}{ds} = 0; y = 4$

Se utiliza $\mu^* = 1.232$.

1.2 Procedimiento

Se implementa el método numérico Runge-Kutta 3, con:

$$\frac{d\vec{y}}{ds} = \vec{f}(s, \vec{y}) \tag{6}$$

Donde:

$$\vec{y} = (y, \frac{dy}{ds} = v) \tag{7}$$

$$\vec{f}(s, \vec{y}) = (v, -y - \mu^*(y^2 - 1)v) \tag{8}$$

Con este método se tiene que:

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 4\vec{k}_2 + \vec{k}_3) \tag{9}$$

Donde:

$$\vec{k}_1 = h\vec{f}(t_n, \vec{y}_n) \tag{10}$$

$$\vec{k}_2 = h\vec{f}(t_n + \frac{h}{2}, \vec{y}_n + \frac{\vec{k1}}{2}) \tag{11}$$

$$\vec{k}_3 = h\vec{f}(t_n + h, \vec{y}_n - \vec{k}_1 - 2\vec{k}_2) \tag{12}$$

Donde h es el paso usado para el tiempo. Se utiliza un h=$20\pi \cdot 10^{-5}$, con s entre 0 y 20π.
Se grafica $y\ vs\ dy/ds$ y $y(s)\ vs\ s$ para las condiciones iniciales ya especificadas, obteniendo la Figura 1 y Figura 2.

1.3 Resultados

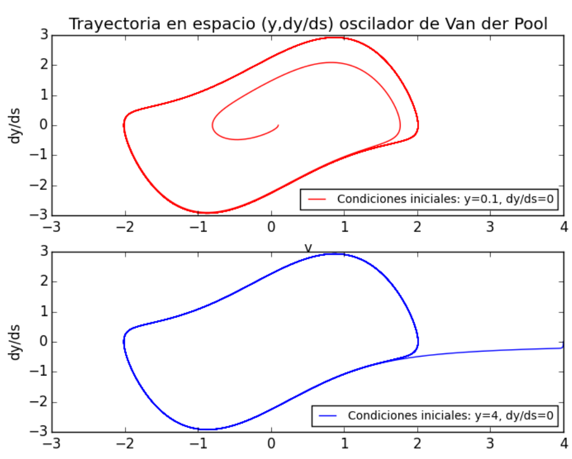

Figura 1: Gráfico y vs dy/ds para dos sets de condiciones iniciales diferentes en el oscilador de Van der Pool.

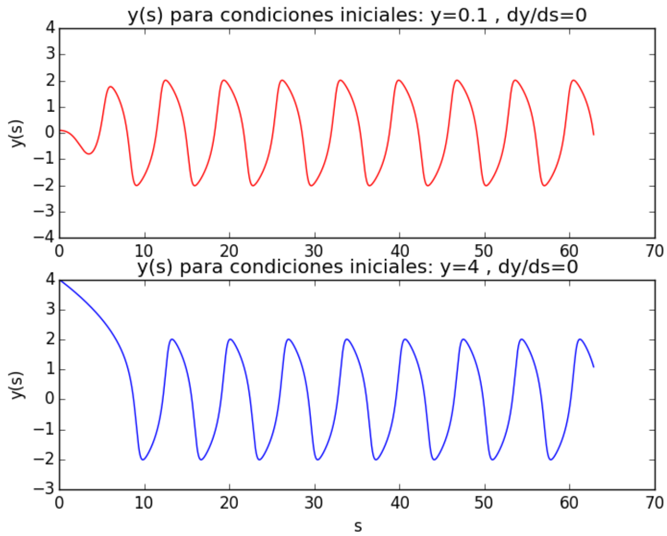

Figura 2: Gráfico $y(s)$ vs s para dos sets de condiciones iniciales diferentes en el oscilador de Van der Pool.

1.4 Conclusiones

En la Figura 1 se aprecia una trayectoria cerrada que sólo varía en una pequeña sección previa a alzancar dicha zona cíclica. Esto se ve también en la Figura 2, donde la gráfica con ambas condiciones iniciales convergen a una función con la misma forma. La diferencia recae en el tiempo en que se logra llegar a esta zona periódica.

2 Pregunta 2

2.1 Introducción

Se busca resolver numéricamente, utilizando Runge-Kutta de orden 4, el sistema de Lorenz:

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y - x) \tag{13}$$

$$\frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y \tag{14}$$

$$\frac{dz}{ds} = xy - \beta z \tag{15}$$

Con el fin de obtener una de las soluciones caóticas más famosas, el llamado atractor de Lorenz, se utiliza $\sigma = 10, \beta = 8/3$ y $\rho = 20$. Se eligen las condiciones iniciales: x(t=0)=1, y(t=0)=1, z(t=0)=1.

2.2 Procedimiento

Se utiliza el método de integración *dopri5* de la librería *scipy.integrate* en python, con $\vec{f} = (\sigma(y-x), x(\rho - z) - y, xy - \beta z)$ como función a integrar. Se escoge un tiempo de 0 a 100, dividido en 10000 intervalos. Finalmente se grafica x,y,z en 3D (ver Figura 3).

2.3 Resultados

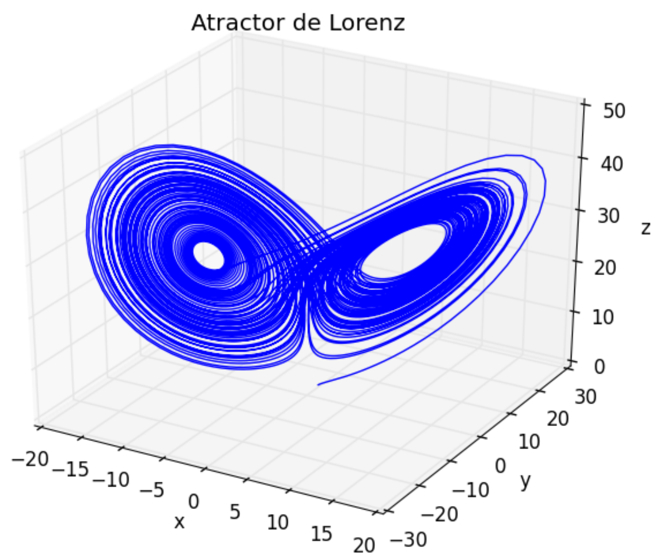

Figura 3: Atractor de Lorenz con condiciones iniciales x(t=0)=1, y(t=0)=1, z(t=0)=1.

2.4 Conclusiones

En la Figura 3 observamos que la gráfica del atractor de Lorenz toma una forma de una mariposa.
Los resultado son los esperados para el atractor de Lorenz.