

# Métodos matemáticos para la ciencia e Ingeniería: Integración ecuación de Poisson en 2D para el potencial electrostático

Fernanda PÉREZ

27 de Octubre, 2015

## 1 Introducción

Se busca integrar la siguiente ecuación de Poisson en 2D para el potencial electrostático :

$$\nabla^2 V(x, y) = -\rho(x, y)$$

Dentro de una caja rectangular de dimensiones  $10[cm]$  x  $15[cm]$ , cumpliendo las siguientes condiciones:

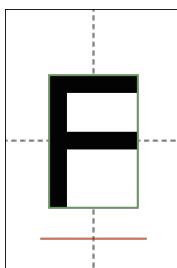
- $V=0$  en el perímetro de la caja.
- En la línea  $y=-5.5$ ,  $x=[-3:3]$ , se tiene que:
  - 1)  $\frac{dV}{dn} = 1$ , para  $y > -5.5$
  - 2)  $\frac{dV}{dn} = -1$ , para  $y < -5.5$

Se especifica que la carga total dentro de letra (ver Figura 1) es:

$$Q = \int \rho(x, y) dx dy = 1[C]$$

Por lo tanto, la función  $\rho(x, y)$  queda definida de la siguiente manera:

- $\rho(x, y) = 0$ , para los  $(x, y)$  fuera de la letra (ver Figura 1).
- $\rho(x, y) = \frac{1}{15}$ , para los  $(x, y)$  dentro de la letra (el área de la letra es  $15cm^2$ ).



**Figura 1:** Caja de dimensiones  $10[cm]$  x  $15[cm]$ , con rectángulo interior centrado de  $5[cm]$  x  $7[cm]$  donde se ubica la letra F con grosor de línea de  $1[cm]$  con densidad constante dentro de ella. La línea roja es donde se aplica la condición de borde derivativa.

Se busca realizar la integración utilizando el método de sobre-relajación sucesiva con distintos  $w$  y  $h = 0.2$ . Se pide estudiar cuántas iteraciones hacen falta para converger en cada caso. Se debe definir un criterio de convergencia.

## 2 Procedimiento

Se toma el sistema  $(i, j)$  partiendo de la esquina inferior izquierda de la caja. Se define una función  $\rho(i, j, h)$  que toma  $(i, j)$  y el paso  $h = 0.2$  y traslada al sistema  $(x, y)$  centrado en la caja, otorgando el valor de  $\rho(x, y)$ .

### 2.1 Iteración

El método de sobre-relajación sucesiva nos dice que para los puntos lejos de la línea donde ocurre la condición de borde derivativa se cumple que:

$$V_{(i,j)_{next}} = (1 - \omega) \cdot V_{(i,j)} + \frac{\omega}{4} \cdot (V_{(i+1,j)} + V_{(i-1,j)_{next}} + V_{(i,j+1)} + V_{(i,j-1)_{next}} + h^2 \cdot \rho(i, j, h)) \quad (1)$$

Donde  $V$  tiene como componentes una copia de las componentes de  $V_{next}$  antes de entrar a la iteración.

Por otro lado, para los puntos inmediatamente vecinos a la línea donde ocurre la condición de borde derivativa se cumple que:

$$V_{(i,j)_{next}} = (1 - \omega) \cdot V_{(i,j)} + \frac{\omega}{3} \cdot (V_{(i+1,j)} + V_{(i-1,j)_{next}} + V_{(i,j-1)_{next}} + h^2 \cdot \rho(i, j, h) + h \cdot a) \quad (2)$$

Los puntos de la línea de condición derivativa cumple:

$$V_{(i,j)_{next}} = V_{(i,j-1)_{next}} + h \cdot a \quad (3)$$

Donde  $a=1$  para las últimas dos ecuaciones.

### 2.2 Convergencia

Se considera que ha convergido si la diferencia absoluta máxima encontrada entre el  $V$  y  $V_{next}$  es menor a cierta tolerancia. Para este problema utilizaremos una tolerancia de  $10^{-3}$ .

Como seguridad se agrega un *counter* que nos permite establecer la cantidad máxima de iteraciones que le permitimos dar a nuestro programa. Cantidad dentro de la cual puede lograr converger o no.

### 2.3 Casos estudiados

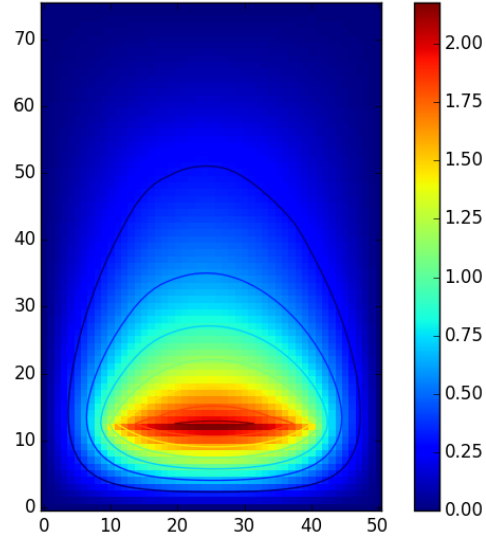
Se estudian los casos:

- $\omega_1 = 0.8$
- $\omega_2 = 1.0$
- $\omega_3 = 1.2$
- $\omega_4 = 1.4$
- $\omega_5 = 1.8$

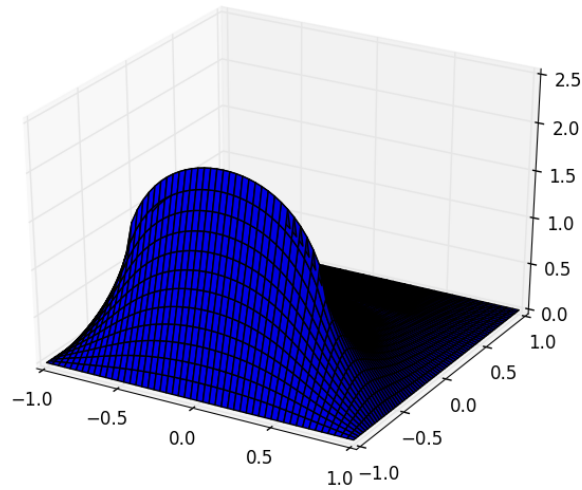
### 3 Resultados

Resolviendo para los distintos  $\omega$  utilizados, todos entre 1.0 y 1.8, se obtienen soluciones del potencial (cuando ya ha convergido) casi idénticas, por lo que se muestra sólo los resultados para el caso  $\omega_2 = 1.0$ , (Figura 1 y Figura 2).

La Tabla 1 muestra la diferencia de rapidez con que es posible alcanzar la convergencia para cada  $\omega$  utilizado.



**Figura 1:** Solución en escala de colores y líneas de contorno del potencial electrostático en unidades de  $\frac{erg}{C}$ , usando  $\omega_2 = 1.0$ . Se utiliza sistema coordenado  $(i, j)$  partiendo desde la esquina inferior izquierda. Punto  $(x, y) = (0, 0)$  está en el centro de la figura.



**Figura 2:** Solución en superficie 3D del potencial electrostático en unidades de  $\frac{erg}{C}$ , usando  $\omega_2 = 1.0$ .

$\omega$	Iteraciones
0.8	993
1.0	781
1.2	600
1.4	439
1.8	2638

**Tabla 1:** Número de iteraciones necesarias para llegar a convergencia, para distintos valores de  $\omega$ .

## 4 Conclusiones

Se obtiene la integral de la ecuación de Poisson en 2D utilizando el método de sobre-relajación sucesiva.

Utilizando distintos  $\omega$  (entre 0.8 y 1.8), la solución a la que convergen es casi idéntica. Es decir, estos  $\omega$  no alteran significativamente la solución del problema. Por otro lado, podemos notar que  $\omega$  afecta a la rapidez con que se converge (número de iteración), siendo los  $\omega$  más eficientes (rápidos)  $\omega_3 = 1.2$  y  $\omega_4 = 1.4$ . Ambas ideas anteriormente mencionadas sobre  $\omega$  son teóricamente esperadas.