

# Métodos matemáticos para la ciencia e Ingeniería: Modelos del espectro de una fuente

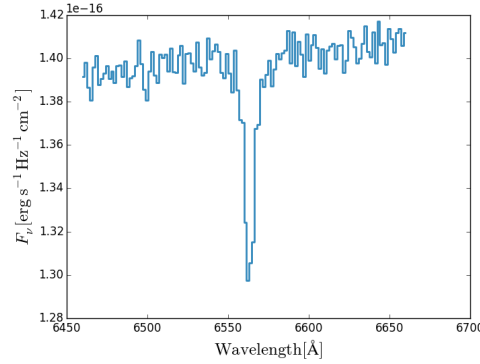
Fernanda PÉREZ (*rut: 18.769.232-6*)

1 de Diciembre, 2015

## 1 Preguntal

### 1.1 Introducción

El archivo *espectro.dat* contiene datos experimentales de un segmento del espectro de una fuente, que muestra un continuo con una leve pendiente y una línea de absorción (ver Figura 1). Las unidades son de flujo por unidad de frecuencia ( $f_\nu[\text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-2}]$ ) vs. longitud de onda en  $[\text{\AA}]$ .



**Figura 1:** Representación del espectro de una fuente generado a partir de los datos del archivo *espectro.dat*, donde se aprecia el continuo y una línea de absorción.

Se busca modelar simultáneamente el continuo y la línea de absorción utilizando los dos mecanismos de ensanchamiento más típicos :

- Forma Gaussiana: línea recta menos una función gaussiana.
- Perfil de Lorentz: línea recta menos un perfil de Lorentz.

## 1.2 Procedimiento

Se utiliza *Python 2.7*. Se guardan los datos en los arrays **wavelength** (variable  $x$ ) y **fnu** (variable  $y$ ), ambos de largo  $n = 122$ , y se crean las siguientes funciones:

- **recta\_gaussiana** $(x, a, b, A, \mu, \sigma) = R(x, a, b) - G(x, A, \mu, \sigma)$
- **recta\_lorentz** $(x, a, b, A, \mu, \sigma) = R(x, a, b) - L(x, A, \mu, \sigma)$

En donde:

- **R** $(x, a, b) = a \cdot x + b$
- **G** $(x, A, \mu, \sigma) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- **L** $(x, A, \mu, \sigma) = A \cdot \frac{1}{\pi\sigma(1+(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)}$

Se definen las siguientes funciones tipo  $\chi^2$  que se desean minimizar:

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \text{recta\_gaussiana})^2 \quad (1)$$

$$\chi_2^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \text{recta\_lorentz})^2 \quad (2)$$

Para minimizarlas se utiliza **scipy.optimize.curve\_fit**, módulo que necesita *adivinanzas* iniciales de los parámetros.

### 1.2.1 Adivinanzas iniciales

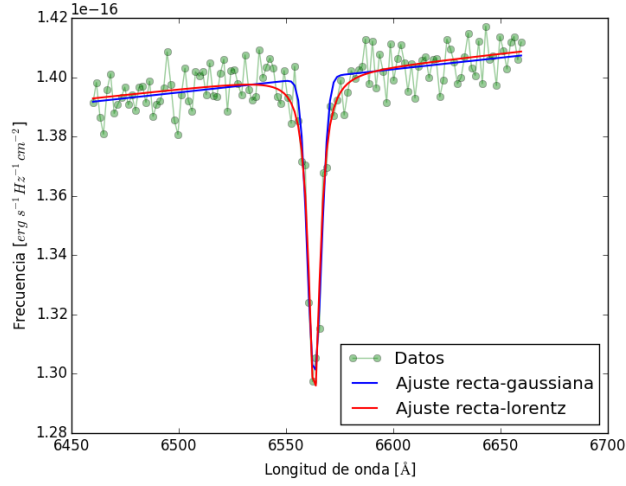
La adivinanza más inmediata es la de la amplitud  $A$ , pues basta ver la gráfica de los datos para notar que un buen valor es  $A_0 = 10^{-17}$ . Por otro lado, realizando un ajuste lineal de los datos, es posible obtener un adivinanza para los parámetros  $a$  y  $b$ . Finalmente, para obtener un buen valor inicial para  $\mu$  y  $\sigma$  se calculan el promedio y la desviación estándar de los datos de las longitudes de onda, respectivamente.

### 1.3 Resultados

Realizando lo descrito en la sección anterior, se obtiene la Tabla 1 y Figura 2.

	Modelo Gaussiano	Modelo Perfil Lorentz	Unidades
$a$	$7.80 \cdot 10^{-21}$	$7.92 \cdot 10^{-21}$	$[erg\ s^{-1}Hz^{-1}cm^{-2}\text{\AA}^{-1}]$
$b$	$8.88 \cdot 10^{-17}$	$8.81 \cdot 10^{-17}$	$[erg\ s^{-1}Hz^{-1}cm^{-2}]$
$A$	$8.22 \cdot 10^{-17}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$	$[erg\ s^{-1}Hz^{-1}cm^{-2}\text{\AA}]$
$\mu$	$6.56 \cdot 10^3$	$6.56 \cdot 10^3$	$\text{\AA}$
$\sigma$	3.26	3.22	$\text{\AA}$
$\chi^2$	$5.20 \cdot 10^{-35}$	$5.01 \cdot 10^{-35}$	$[erg^2s^{-2}Hz^{-2}cm^{-4}]$

**Tabla 1:** Mejores parámetros encontrados para cada modelo junto al valor de la función  $\chi^2$  correspondiente evaluada en los mismo parámetros.



**Figura 2:** Gráfica de los datos del archivo *espectro.dat* (espectro de una fuente), junto a los dos modelos más comunes para este fenómeno.

### 1.4 Conclusiones

Con ambos modelos se obtienen curvas que hacen sentido con la gráfica de los datos. Como se aprecia en la Tabla 1, los valores de los parámetros para cada modelo son muy similares. La diferencia más grande se encuentra en la amplitud, donde resulta ser mayor al utilizar el perfil de Lorentz. Esto último es observable en la Figura 2 (curva roja llega más abajo que la azul).

## 2 Pregunta 2

### 2.1 Introducción

El objetivo de esta pregunta es determinar cuál de los dos modelos utilizados en la Pregunta 1 representa mejor a los datos (del archivo *espectro.dat*). Para esto, se pide utilizar un test de Kolmogorov-Smirnov para responder las siguientes interrogantes:

- ¿Son aceptables los modelos?
- ¿Cuál modelo es *mejor* de acuerdo a este test?

### 2.2 Procedimiento

Se definen las siguientes hipótesis:

- $H_0$ : Los datos siguen la distribución dada por el modelo.
- $H_1$ : Los datos no siguen la distribución dada por el modelo.

Para establecer el criterio de aceptar o rechazar la hipótesis nula ( $H_0$ ), se utiliza el siguiente estadístico:

$$D = \sup_{1 \leq i \leq n} |F_n(y_i) - F_0(y_i)| \quad (3)$$

Donde:

- $y_i$  es el  $i$ -ésimo valor observado en la muestra (cuyos valores son previamente ordenados de menor a mayor).
- $F_n(y_i)$  corresponde a la función distribución acumulada observada de los datos. Representa la probabilidad de observar valores menores o iguales que  $y_i$ . Se utilizan  $F_{n1}(y_i) = \frac{i+1}{n}$  y  $F_{n2}(y_i) = \frac{i}{n}$ . El valor final de  $D$  es el máximo valor entre los supremos encontrados con cada  $F_n$ .
- $F_0(y_i)$  corresponde a la función distribución acumulada de cada modelo. Representa la probabilidad de observar valores menores o iguales que  $y_i$  cuando  $H_0$  es cierta.

Luego, el criterio es el siguiente:

$$\text{Si } D \leq D_{critico} \Rightarrow \text{Se acepta } H_0$$

$$\text{Si } D > D_{critico} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

Asumiendo que  $n = 122$  es *grande*, se tiene que:

$$D_{critico} = \frac{inv((1 - \alpha))}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Donde  $inv(\cdot)$  corresponde a la función inversa de la distribución Kolmogorov. Se utiliza  $\alpha = 0.05$ .

El módulo **kstest** de *scipy.stats* permite realizar el test anteriormente explicado, entregando además el nivel de confianza asociado a cada modelo.

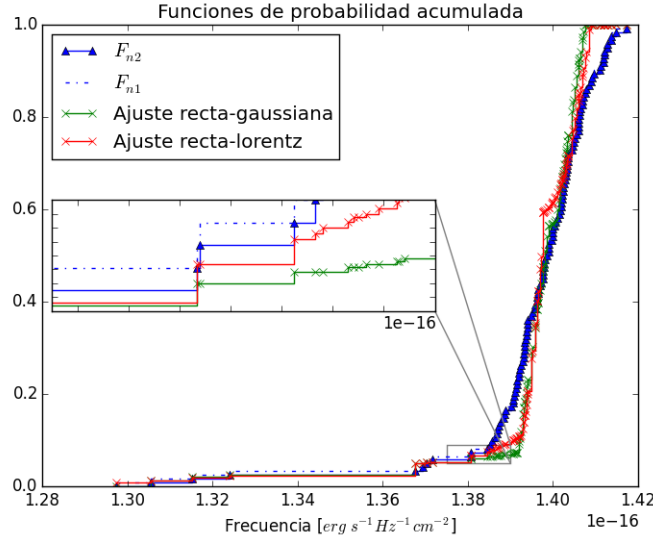
## 2.3 Resultados

Realizando el test de Kolmogorov-Smirnov, explicado en la sección anterior, con el módulo **kstest**, se obtienen la Tabla 2 y Figura 3. También se obtiene que:

$$D_{critico} = 0.1230$$

	Modelo Gaussiano	Modelo Perfil Lorentz
$D$	0.1647	0.1657
Nivel de confianza	0.0023	0.0021
Resultado test	Se rechaza $H_0$	Se rechaza $H_0$

**Tabla 2:** Valores  $D$  encontrados para cada modelo al utilizar un test de Kolmogorov-Smirnov, junto al nivel de confianza.



**Figura 3:** Gráfica de la funciones de distribución de las frecuencias (datos) y de ambos modelos. Contiene un acercamiento para ver con mayor claridad una sección cualquiera de la gráfica.

## 2.4 Conclusiones

Observando la tabla 1, se observa que ambos modelos resultan no aceptables (rechazados) según el test de Kolmogorov-Smirnov. Esto se ve representado también en el bajo nivel de confianza para ambos modelos. Sin embargo, la confianza para el modelo gaussiano resulta levemente superior, por lo que éste modelo es *mejor* que el que utiliza un perfil de Lorentz.

Se aprecia en la Figura 3 que las mayores diferencias entre las funciones de distribución aparecen en el rango de frecuencias entre  $1.39 \cdot 10^{-16}$  y  $1.41 \cdot 10^{-16}$  (en unidades de  $[erg\ s^{-1}Hz^{-1}cm^{-2}]$ ). Observando la Figura 2, se nota que este rango es en donde se encuentra el continuo. Por lo tanto, se determina que el ruido de esta zona es responsable de que se obtengan bajos valores para los niveles de confianza de cada modelo.