

Proyecto Global Integrador: Control de Accionamiento de CA con Motor Sincrónico de Imanes Permanentes

Franco Palau, Gonzalo Fernández¹

¹Facultad de Ingeniería. UNCuyo. Mendoza. Argentina

Año 2019

Resumen

El control en sistemas electromecánicos es una herramienta indispensable para el desarrollo industrial. En esta monografía se realiza el diseño de un sistema de control automático de posición y movimiento para el accionamiento de una articulación de un robot SCARA. Una vez realizado el modelado y simulación se analizó el desempeño del sistema en cuestión. Se obtuvo un sistema de control robusto y con un buen seguimiento a las consignas de posición provistas por el usuario.

1. Introducción

El presente trabajo se centra en el modelado, simulación, diseño y análisis de desempeño de un **sistema de control automático de posición y movimientos** para un **accionamiento electromecánico de 4 cuadrantes**, compuesto por: máquina eléctrica de corriente alterna (CA) trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes (PMSM), alimentada por inversor trifásico desde fuente de CC; reductor de velocidad planetario de salida hacia la carga mecánica; y realimentación con 1 sensor de posición (encoder) en el eje del motor, más 3 sensores de corriente instantánea de fases en la salida del inversor al estator.

El sistema mecánico a controlar es el eje para la articulación “hombro” de un robot SCARA. Por lo tanto, el problema se reduce al análisis de un grado de libertad rotacional del eje vertical del robot. No se considera la dinámica no lineal acoplada del robot. Dado que las otras articulaciones pueden moverse independientemente de la articulación en estudio, los parámetros, tales como el momento de inercia, son variables según sea la posición angular instantánea de cada una de las articulaciones. Por lo tanto, los parámetros equivalentes se expresan mediante un valor nominal y una variación máxima.

En la primera parte de este informe se realizará el modelado, análisis y simulación dinámica del sistema en lazo abierto, es decir, sin control realimentado. Posteriormente, en la segunda parte, se desarrollará el diseño, análisis y simulación de un controlador de movimiento en cascada con un modulador de torque equivalente (control vectorial). Por último, a partir de las simulaciones y resultados conseguidos, se expondrán las conclusiones obtenidas sobre las características y funcionamiento del sistema en cuestión.

2. Modelado, Análisis y Simulación dinámica a Lazo Abierto (sin control realimentado)

2.1. Modelo matemático equivalente (1 grado de libertad) del subsistema mecánico del motor

Se parte del modelo simplificado equivalente, referido al eje de salida del tren de transmisión:

$$J_l \cdot \ddot{q}(t) = T_q(t) - b_l \cdot \dot{q}(t) - T_l(t) \quad (1)$$

Esta ecuación relaciona la posición angular del eje de salida del tren de transmisión o coordenada $q(t)$ y el torque de salida que entrega la caja reductora $T_q(t)$ con el momento de inercia de la carga $J_l(t)$, el amortiguamiento viscoso o fricción viscosa rotacional de la carga b_l , y el torque de carga, de perturbación o resistente $T_l(t)$. La inercia y

la fricción son dos de los parámetros que varían según sea la posición del resto de las articulaciones. En este trabajo, se considerará un valor nominal de ellos así como sus posibles máximas variaciones, las cuales se muestran a continuación:

$$J_l \approx (0,2520 \pm 0,1260) \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$b_l \approx (0 \pm 0,0630) \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad/s}}$$

El tren de transmisión está compuesto por una caja reductora reversible con sistema de engranajes planetarios. Se asumirá un acoplamiento rígido, sin elasticidad torsional y sin juego. El modelo equivalente, que relacionan la carga mecánica con el subsistema mecánico de la máquina eléctrica, está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t); \quad T_q = r \cdot T_d(t) \quad (2)$$

Donde $\dot{q}(t)$ es la velocidad angular de salida de la caja reductora, r es la relación de reducción, $\omega_m(t)$ es la velocidad angular del motor, $T_q(t)$ es el torque ejercido por la carga mecánica y $T_d(t)$ es el torque de carga en el eje del motor.

El estator se considera estacionario siendo el sistema inercial de referencia. El modelo del subsistema mecánico del motor, con rotor referido a estator estacionario, está dado por las siguientes ecuaciones:

$$J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d \quad (3)$$

$$\dot{\theta}_m(t) \equiv \omega_m(t) \quad (4)$$

Donde J_m y b_m son el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa del motor y la caja respectivamente. Estos poseen los siguientes valores:

$$J_m \approx 3,1 \times 10^{-6} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$b_m \approx 1,5 \times 10^{-5} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad/s}}$$

Utilizando las ecuaciones en (2) para poner en función de ω_m la ecuación (1), y luego despejando $T_d(t)$:

$$T_d(t) = \frac{J_l}{r^2} \cdot \dot{\omega}_m(t) + \frac{b_l}{r^2} \cdot \omega_m(t) + \frac{T_l(t)}{r}$$

Introduciendo la expresión anterior en la ecuación del subsistema mecánico (3), se obtiene:

$$\left(J_m + \frac{J_l}{r^2} \right) \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - \left(b_m + \frac{b_l}{r^2} \right) \cdot \omega_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t)$$

Se definen parámetros equivalentes de la siguiente forma:

$$J_{eq} = J_m + \frac{J_l}{r^2}; \quad b_{eq} = b_m + \frac{b_l}{r^2} \quad (5)$$

A partir de las ecuaciones previamente desarrolladas se obtienen las ecuaciones de estado del subsistema mecánico referido al eje del motor:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot T_m(t) - \frac{1}{J_{eq}} \cdot b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{1}{J_{eq} \cdot r} \cdot T_l(t) \\ \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \end{cases}$$

Expresado matricialmente:

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot \underline{x(t)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} & -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot \underline{u(t)} \quad ; \quad \underline{x(t_0)} = \begin{bmatrix} \theta_m(t_0) \\ \omega_m(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \end{bmatrix} \\ \underline{y(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x(t)} \end{cases} \quad (6)$$

Donde el vector de estado es de la forma:

$$\underline{x(t)} = \begin{bmatrix} \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\dot{x}(t)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\omega}_m \end{bmatrix}$$

Y los vectores de entrada y salida son respectivamente:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} T_m \\ T_l \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{y}(t) = [\theta_m]$$

La Figura 1 muestra el diagrama de bloques desagregado del subsistema mecánico.

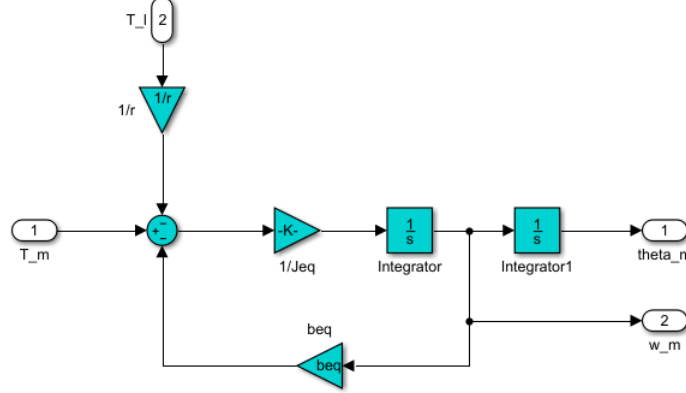


Figura 1: Diagramas de bloques del subsistema mecánico

2.2. Modelo dinámico del sistema físico completo, incorporando el subsistema electromagnético y térmico

2.2.1. Modelo global no lineal (NL), para $i_{ds}^r(t)$ genérica

Para obtener el modelo del sistema físico del sistema completo es necesario desarrollar el subsistema electromagnético y térmico, que se incorporarán al subsistema mecánico previamente elaborado.

El desarrollo del subsistema electromagnético se realiza a partir de la transformación de Park, la cual convierte las componentes abc del sistema trifásico a otro sistema de referencia $dq0$. El objetivo de la transformación consiste en convertir los valores trifásicos variables sinusoidalmente en el tiempo abc , a valores constantes $dq0$ en régimen permanente. Las inductancias en los bornes del estator no son constantes dado que dependen de la posición instantánea del rotor. Por lo tanto, se utiliza la transformación de Park para poder trabajar en coordenadas rotóricas $qd0$ fijas al rotor con inductancias conocidas y constantes.

La transformación directa para pasar desde las coordenadas trifásicas del estator abc a las coordenadas fijas al rotor $qd0$ está dado por:

$$\begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \cos \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \theta_r(t) & \sin \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix}$$

La transformación inversa para pasar desde las coordenadas fijas al rotor $qd0$ a las coordenadas trifásicas del estator abc está dada por:

$$\begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \sin \theta_r(t) & 1 \\ \cos \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \\ \cos \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}(t) \end{bmatrix}$$

Donde $f_x(t)$ puede representar tensión, corriente, flujo concatenado, entre otros.

El modelo equivalente del subsistema electromagnético en coordenadas eléctricas de entrehierro $qd0$ fijas al rotor, a partir de transformación de Park del circuito de estator estacionario, es de la forma:

$$\dot{\theta}_r(t) \equiv \omega_r(t) \quad (7)$$

$$\theta_r(t) \equiv P_p \cdot \theta_m(t); \quad \omega_r(t) = P_p \cdot \omega_m(t) \quad (8)$$

Siendo el torque electromagnético:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (9)$$

Donde $i_{ds}^r(t)$ es la componente de la corriente paralela al flujo, $i_{qs}^r(t)$ es la componente de la corriente perpendicular al flujo 90° eléctricos, P_p es el número de pares de polos magnéticos, λ_m^r es el flujo magnético equivalente de imanes concatenado por espiras del bobinado del estator observado desde el rotor, L_d es la inductancia de estator en el eje directo y L_q es la inductancia de estator en el eje en cuadratura. En máquinas síncronas de polos salientes el camino magnético del flujo resultante no es constante debido a la presencia de un gran espacio de aire interpolar, en este tipo de máquinas L_d es mayor a L_q . Estos parámetros tienen los siguientes valores:

$$P_p = 3 \quad \text{pares (i. e. 6 polos)} \quad ; \quad \lambda_m^r \approx 0,01546 \quad \text{Wb} \cdot \text{t, ó} \quad \left(\frac{\text{V}}{\text{rad/s}} \right)$$

$$L_q \approx 5,8 \quad \text{mH} \quad ; \quad L_d \approx 6,6 \quad \text{mH} \quad ; \quad L_{ls} \approx 0,8 \quad \text{mH}$$

El balance de tensiones eléctricas equivalentes de estator, referido a coordenadas $qd0$ fijas en rotor, está dado por:

$$v_{qs}^r(t) = R_s \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t) \quad (10)$$

$$v_{ds}^r(t) = R_s \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \quad (11)$$

$$v_{0s}(t) = R_s \cdot i_{0s} + L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}(t)}{dt} \quad (12)$$

Donde $v_{qs}^r(t)$, $v_{ds}^r(t)$ y $v_{0s}(t)$ son las tensiones; $i_{qs}^r(t)$, $i_{ds}^r(t)$ y $i_{0s}(t)$ son las corrientes de fase; R_s es la resistencia de estator por fase, la cual depende de la temperatura; L_{ls} es la inductancia de dispersión de estator. $v_{0s}(t)$ e $i_{0s}(t)$ representan cualquier desequilibrio que exista en el sistema.

A partir de las ecuaciones (10), (11) y (12), se obtienen las ecuaciones del modelo de estados del subsistema electromagnético. La Figura 2 muestra el diagrama de bloques de dicho sistema. Incorporando la ecuación (9) en el subsistema mecánico, y combinando los ambos subsistemas, obtenemos las siguientes ecuaciones de estado del sistema global no lineal (sin el subsistema térmico):

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot [-R_s \cdot i_{qs}^r(t) + v_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \cdot [-R_s \cdot i_{ds}^r(t) + v_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \cdot [-R_s \cdot i_{0s}(t) + v_{0s}(t)] \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[\frac{3}{2} P_p [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \\ \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \end{cases} \quad (13)$$

Expresado en forma matricial:

$$\underline{\dot{x}(t)} = \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ -\frac{b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{J_{eq}} + \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t)}{2 \cdot J_{eq}} + \frac{3 \cdot P_p \cdot (L_d - L_q)}{2 \cdot J_{eq}} \cdot i_{ds}^r(t) \cdot i_{qs}^r(t) \\ -\frac{R_s}{L_q} \cdot i_{qs}^r(t) - \frac{\lambda_m^r \cdot P_p}{L_q} \cdot \omega_m(t) - \frac{L_d \cdot P_p}{L_q} \cdot i_{ds}^r(t) \cdot \omega_m(t) \\ -\frac{R_s}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) + \frac{L_q \cdot P_p}{L_d} \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_m(t) \\ -\frac{R_s}{L_{ls}} \cdot i_{0s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} \end{bmatrix} \cdot \underline{u(t)} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{d(t)} \quad (14)$$

$$\underline{y(t)} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot \underline{x(t)}$$

Siendo el vector de estado $\underline{x(t)}$ y la condición inicial $\underline{x(t_0)}$:

$$\underline{x(t)} = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\dot{x}(t)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \end{bmatrix} ; \quad \underline{x(t_0)} = \begin{bmatrix} \theta_m(t_0) \\ \omega_m(t_0) \\ i_{qs}^r(t_0) \\ i_{ds}^r(t_0) \\ i_{0s}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \end{bmatrix}$$

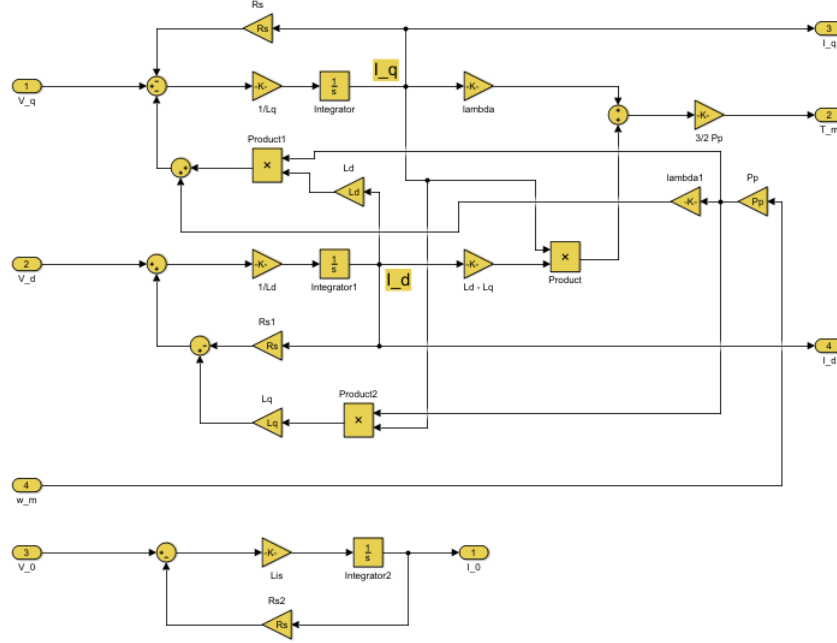


Figura 2: Diagramas de bloques del subsistema electromagnético

Y los vectores de entrada, $\underline{u}(t)$, perturbación, $\underline{d}(t)$, y salida, $\underline{y}(t)$, respectivamente:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \end{bmatrix} ; \quad \underline{d}(t) = \begin{bmatrix} T_l(t) \\ r \end{bmatrix} ; \quad \underline{y}(t) = [\theta_m]$$

Nótese que en los términos marcados con rojo existe una multiplicación de dos variables de estado, esto hace que el sistema expresado sea no lineal.

Para el desarrollo del subsistema térmico, se toma un modelo simplificado equivalente de primer orden, donde se consideran sólo pérdidas resistivas por efecto Joule (calóricas) en el bobinado del estator, despreciando pérdidas magnéticas y las ocurridas en rodamientos. Se considera la transferencia de calor por conducción y convección natural, sin ventilador. La potencia de pérdidas calóricas está dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} P_{s \text{ perd}}(t) &= R_s \cdot (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t)) \\ &= \frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) \end{aligned} \quad (15)$$

El balance térmico del estator está dado por:

$$P_{s \text{ perd}}(t) = C_{ts} \cdot \frac{dT_s(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-\text{amb}}} \cdot (T_s(t) - T_{\text{amb}}(t)) \quad (16)$$

Igualando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) = C_{ts} \cdot \frac{dT_s(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-\text{amb}}} \cdot (T_s(t) - T_{\text{amb}}(t)) \quad (17)$$

Donde R_s es la resistencia de los devanados estatóricos, $T_{\text{amb}}(t)$ es la temperatura ambiente, $R_{ts-\text{amb}}$ es la resistencia térmica estator-ambiente y C_{ts} es la capacitancia térmica del estator. La Figura 3 muestra el diagrama de bloques del subsistema térmico

La resistencia del devanado estatórico es a su vez una función de la temperatura:

$$R_s = R_{s\text{REF}} \cdot [1 + \alpha_{Cu} \cdot (T_s(t) - T_{s\text{REF}})] \quad ; \quad \alpha_{Cu} = 3,9 \times 10^{-3} \quad \frac{1}{^\circ\text{C}} \quad (18)$$

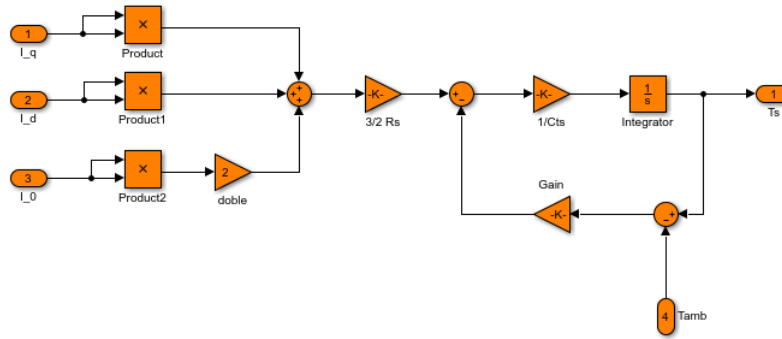


Figura 3: Diagramas de bloques del subsistema térmico

Si bien la variación de la temperatura provocará una variación de la resistencia del estator, lo que producirá, a su vez, una variación de las corrientes que modificará el comportamiento global del sistema, dicho análisis excede los alcances del proyecto por lo que se asume que la variación de dicha resistencia es despreciable, es decir, se permite considerar que R_s será constante en ciertos rangos de temperatura. De esta manera, no se realimenta a ningún otro subsistema y se utilizará únicamente para el monitoreo de la temperatura, la cual no debe superar la temperatura máxima del bobinado del estator. Los valores de los parámetros se muestran a continuación:

- Resistencia de estator, por fase: $R_s \approx 1,02\Omega(@40^\circ\text{C}) \rightarrow 1,32\Omega(@115^\circ\text{C})$
- Capacitancia térmica de estator: $C_{ts} \approx 1,091\text{W}/(^\circ\text{C} / \text{s})$
- Resistencia térmica estator-ambiente: $R_{ts-\text{amb}} \approx 55^\circ\text{C}/\text{W}$

Al combinar los subsistemas mecánicos, electromagnéticos y térmico se obtiene el modelo dinámico del sistema físico completo, el cual se aprecia en la Figura 4.

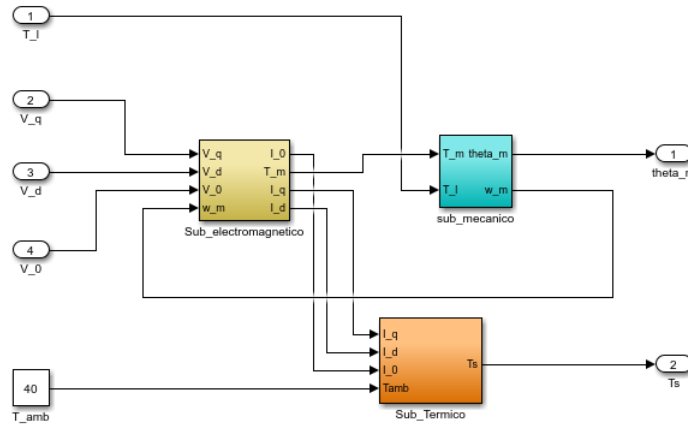


Figura 4: Diagramas de bloques del sistema completo

2.2.2. Modelo simplificado lineal invariante en el tiempo (LTI), para $i_{ds}^r(t) = 0$

Imponiendo ciertas restricciones y simplificaciones, es posible convertir el sistema no lineal expresado anteriormente en un sistema lineal equivalente.

En primer lugar, nótese de la Figura 4 que el subsistema térmico sólo influye sobre sí mismo. Esto significa que si se considera R_s constante, la temperatura no tendrá ningún efecto sobre el resto de las variables de estado. Es válido realizar esta simplificación, ya que, como la variación es muy pequeña, se permite considerar que R_s será constante en ciertos rangos de temperatura.

En segundo lugar, sabiendo que el estator de la máquina eléctrica está conectado en estrella con neutro flotante, siendo un sistema simétrico y equilibrado, si aplicamos ley de Kirchoff:

$$i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t) = 0 \quad (19)$$

Aplicando la transformación de Park y teniendo en cuenta la Ecuación (12), encontramos que:

$$i_{0s}(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t)) = \frac{1}{3} \cdot (0) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{di_{0s}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow v_{0s}(t) = 0 \quad (21)$$

Por último forzamos a que $i_{ds}^r(t) = 0$, lo que nos lleva a desacoplar los canales de flujo y torque del controlador, denominándose estrategia de control vectorial con campo orientado. De esta manera, aplicando las restricciones mencionadas, el sistema de Ecuaciones (13) queda expresado matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \\ \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{i}_{qs}^r(t) = \frac{1}{L_q} [v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_{qs}^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m^r}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \cdot \lambda_m^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \cdot [v_{qs}^r(t)] + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq} \cdot r} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [T_l(t)] \\ \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (23)$$

Nótese que, a diferencia del sistema matricial (14) donde existían multiplicaciones de variables de estado, en este sistema LTI solo existen sumas y restas de variables de estado, de modo que las matrices de coeficientes no varían con el tiempo. La Figura 5 muestra el diagrama de bloques de este sistema LTI.

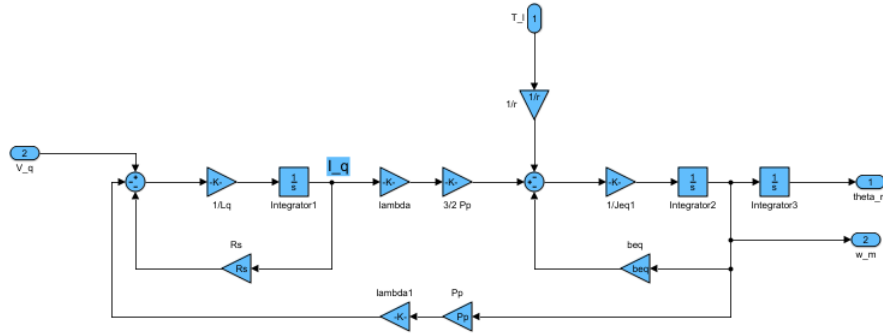


Figura 5: Diagramas de bloques del sistema lineal

Al imponer que la corriente del eje directo sea nula $i_{ds}^r(t) = 0$ y como $i_{0s}(t) = 0$, según la Ecuación (11) el valor de $v_{ds}^r(t)$ queda restringido de la siguiente manera:

$$v_{ds}^r(t) = -L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \quad (24)$$

De esta manera, la tensión de entrada del eje directo estará sujeta a una realimentación de dos variables de estado. Este tipo de linealización se denomina linealización por realimentación (feedback linearization).

Al aplicar la transformada inversa de Park, teniendo en cuenta que $i_{ds}^r(t) = 0$ y $i_{0s}(t) = 0$, las corrientes en el sistema abc nos quedan:

$$\begin{aligned} i_{as}(t) &= \cos \theta_r(t) \cdot i_{qs}^r(t) \\ i_{bs}(t) &= \cos \left(\theta_r(t) - \frac{2}{3}\pi \right) \cdot i_{qs}^r(t) \\ i_{cs}(t) &= \cos \left(\theta_r(t) + \frac{2}{3}\pi \right) \cdot i_{qs}^r(t) \end{aligned} \quad (25)$$

Con ellas se demuestra que las corrientes de fases tendrán la misma amplitud pero estarán desfasadas 120° una de otra (sistema equilibrado y simétrico). Para el caso de las tensiones, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} v_{as}(t) &= v_{qs}^r(t) \cos(\theta_r(t)) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \sin(\theta_r(t)) \\ v_{bs}(t) &= v_{qs}^r(t) \cos(\theta_r(t) - \frac{2}{3}\pi) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \sin(\theta_r(t) - \frac{2}{3}\pi) \\ v_{cs}(t) &= v_{qs}^r(t) \cos(\theta_r(t) + \frac{2}{3}\pi) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \sin(\theta_r(t) + \frac{2}{3}\pi) \end{aligned} \quad (26)$$

2.2.3. Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV) para $i_{ds}^r(t)$ genérica

En la sección anterior se logró linealizar el sistema mediante la linealización por realimentación. En esta sección se desarrolla la aproximación lineal del problema mediante la consideración de la teoría de las pequeñas variaciones locales. Este método consiste en considerar pequeñas variaciones alrededor de puntos de operación cuasi-estacionarios.

Se asume que una variable $z(t)$ está compuesta por dos partes: una magnitud estacionaria o cuasi-estacionaria $Z_0^{(t)}$ (de variación muy lenta en el tiempo) y una magnitud pequeña o parte dinámica $\Delta z(t)$ (de variación rápida en el tiempo) cumpliendo la forma:

$$z(t) = Z_0^{(t)} + \Delta z(t) \quad (27)$$

Sabiendo que un sistema se expresa en forma general como:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) & ; \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \\ \underline{y}(t) = C \cdot \underline{x}(t) \end{cases} \quad (28)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_0 + \underline{\Delta x}(t) \quad ; \quad \underline{u}(t) = \underline{U}_0 + \underline{\Delta u}(t) \quad (29)$$

Considerando que todo punto en un tiempo siguiente se puede considerar como el valor del tiempo anterior más el cambio generado (definición de derivada), podemos expresar:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \frac{d\underline{X}_0}{dt} + \frac{d\underline{\Delta x}(t)}{dt} = f(\underline{X}_0 + \underline{\Delta x}(t), \underline{U}_0 + \underline{\Delta u}(t)) \\ \underline{x}_0 = \underline{X}_0 + \underline{\Delta x}(t_0) \quad ; \quad \underline{\Delta x}(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x}_0 = \underline{X}_0 \end{cases} \quad (30)$$

Realizando una aproximación de Taylor de 1° orden en un punto genérico de operación, despreciando los términos de orden superior:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &\approx f(\underline{X}_0 + \underline{\Delta x}(t), \underline{U}_0 + \underline{\Delta u}(t)) \\ &\approx f(\underline{X}_0, \underline{U}_0) + \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}|_0(t) \cdot \underline{\Delta x}(t) + \frac{\partial f}{\partial \underline{u}}|_0(t) \cdot \underline{\Delta u}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

Se puede obtener dos ecuaciones de la forma:

$$\frac{d\underline{X}_0}{dt} = f(\underline{X}_0, \underline{U}_0) \quad (32)$$

$$\underline{X}_0 = \underline{x}_0 \quad ; \quad \underline{Y}_0 = C \underline{X}_0$$

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{\Delta x}(t)}{dt} &\approx \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}|_0(t) \right] \cdot \underline{\Delta x}(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}|_0(t) \right] \cdot \underline{\Delta u}(t) \\ \underline{\Delta x}(t_0) &= 0 \quad ; \quad \underline{\Delta y}(t) = C \underline{\Delta x}(t) \end{aligned} \quad (33)$$

Obtenemos una separación del problema en dos modelos. El primero de ellos, es un modelo no lineal cuasi-estacionario de “Equilibrio” Dinámico. El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{m0} = \omega_{m0} \\ \dot{\omega}_{m0} = \frac{1}{J_{eq}} \left\{ \frac{3}{2} \cdot P_p \left[\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r \right] \cdot i_{qs0}^r \right\} - b_{eq} \cdot \omega_{m0} - \frac{1}{r} \cdot T_{l0} \\ \dot{i}_{qs0}^r = \frac{1}{L_q} \cdot \left[v_{qs0}^r - R_s \cdot i_{qs0}^r - (\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r) \cdot P_p \cdot \omega_{m0} \right] \\ \dot{i}_{ds0}^r = \frac{1}{L_d} \cdot \left[v_{ds0}^r - R_s \cdot i_{ds0}^r + L_q \cdot i_{qs0}^r \cdot P_p \cdot \omega_{m0} \right] \\ \dot{i}_{0s0} = -\frac{R_s}{L_{ls}} \cdot i_{0s0} + \frac{1}{L_{ls}} \cdot v_{0s0} \\ \dot{T}_{s0} = \frac{1}{C_{ts}} \left[\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs0}^2 + i_{ds0}^2 + i_{0s0}^2) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_{s0} - T_{amb0}) \right] \end{cases} \quad (34)$$

Como es un problema cuasi-estacionario, es válido realizar la siguiente suposición para pequeñas variaciones alrededor de dichos puntos:

$$\frac{dX_0}{dt} \approx 0 \quad (35)$$

Es decir que las variaciones en el punto de operación de las variables de estado son cercanas a cero. El otro modelo, es un modelo dinámico local lineal con parámetros variables (LPV) de pequeñas perturbaciones. Las ecuaciones del sistema son:

$$\begin{cases} \Delta \dot{\theta}_m(t) = \Delta \omega_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \{-b_{eq} \cdot \Delta \omega_m(t) - \frac{1}{r} \Delta T_l(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \{ [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r] \Delta i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot i_{qs0}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) \} \\ \Delta \dot{i}_{qs}^r(t) = \frac{1}{L_q} \cdot [\Delta v_{qs}^r(t) - R_s \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - P_p \cdot (\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r) \cdot \Delta \omega_m(t) - P_p \cdot L_d \cdot \omega_{m0} \Delta i_{ds}^r(t)] \\ \Delta \dot{i}_{ds}^r(t) = \frac{1}{L_d} \cdot [\Delta v_{ds}^r(t) - R_s \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + L_q \cdot P_p \cdot (i_{qs0}^r \cdot \Delta \omega_m(t) + \omega_{m0} \cdot \Delta i_{qs}^r(t))] \\ \Delta \dot{i}_{0s}(t) = -\frac{R_s}{L_{ls}} \cdot \Delta i_{0s}(t) + \frac{1}{L_{ls}} \cdot \Delta v_{0s}(t) \\ \Delta \dot{T}_s^o(t) = \frac{1}{C_{ts}} \left[3 \cdot R_s (i_{qs0}^r \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + i_{ds0}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + 2 \cdot i_{0s0} \cdot \Delta i_{0s}(t)) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (\Delta T_s^o(t) - \Delta T_{amb}^o(t)) \right] \end{cases} \quad (36)$$

Se puede notar que aunque hayan variables de estado multiplicándose unas a otras, si dicha variable de estado se evalúa en el punto de operación, se considera que es constante localmente. De forma matricial se puede expresar como:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) \\ \Delta \dot{i}_{qs}^r(t) \\ \Delta \dot{i}_{ds}^r(t) \\ \Delta \dot{i}_{0s}(t) \\ \Delta \dot{T}_s^o(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r]}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_{qs0}^r}{J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P_p \cdot (\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r)}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} & -\frac{P_p \cdot L_d \cdot \omega_{m0}}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_q \cdot P_p}{L_d} \cdot i_{qs0}^r & \frac{L_q \cdot P_p}{L_d} \cdot \omega_{m0} & -\frac{R_s}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot R_s}{C_{ts}} \cdot i_{qs0}^r & \frac{3 \cdot R_s}{C_{ts}} \cdot i_{ds0}^r & \frac{6 \cdot R_s}{C_{ts}} \cdot i_{0s0} & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta i_{0s}(t) \\ \Delta T_s^o(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T_l(t) \\ \Delta v_{qs}^r(t) \\ \Delta v_{ds}^r(t) \\ \Delta v_{0s}(t) \\ \Delta T_{amb}^o(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta i_{0s}(t) \\ \Delta T_s^o(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (37)$$

Considerando la restricción $i_{ds}^r(t) = 0$ y dado que $i_{0s}(t) = 0$ se obtiene el siguiente sistema (sin considerar el subsistema térmico):

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) \\ \Delta \dot{i}_{qs}^r(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m^r}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \cdot \lambda_m^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T_l(t) \\ \Delta v_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (38)$$

Comparando dichas ecuaciones con el modelo LTI, ecuaciones (23), se puede observar que se obtiene el mismo resultado, es decir que los modelos coinciden. El sistema LPV es más genérico y representa de forma genérica al sistema.

Nótese que debido a que la corriente $i_{ds}^r(t)$ está orientada en el mismo sentido que el campo principal, cuando $i_{ds}^r(t) = 0$ existe únicamente un flujo concatenado por los imanes permanentes λ_m^r . Si $i_{ds}^r(t) < 0$ se produce un debilitamiento del campo (menor torque, mayor velocidad) y en el caso de que fuese $i_{ds}^r(t) > 0$ se produciría un reforzamiento del campo (mayor torque, menor velocidad).

Lo anterior descrito se puede ver en la Ecuación 9 explicitada nuevamente a continuación.

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t)$$

Sabiendo que $L_d - L_q > 0$ para este tipo de máquinas eléctricas, al aumentar $i_{ds}^r(t)$, aumentará $T_m(t)$, y si disminuye la corriente, disminuye el torque. Si de la Ecuación 10 se considera un valor de $i_{ds}^r(t)$ constante y despejamos la velocidad angular, nos queda:

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \cdot [-R_s \cdot i_{ds}^r + v_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] = 0 \quad (39)$$

$$\omega_m(t) = \frac{-v_{ds}^r(t) + R_s \cdot i_{ds}^r(t)}{L_q \cdot P_p \cdot i_{qs}^r(t)} \quad (40)$$

Pudiendo observar que una $i_{ds}^r(t)$ positiva producirá una disminución del módulo de la velocidad angular y una negativa producirá un aumento del módulo. Dado que la transmisión es a potencia constante, un aumento de torque producirá una disminución de velocidad y viceversa.

Ahora se obtienen los autovalores de la matriz en la Ecuación 37, y se verifica el comportamiento del sistema de acuerdo a un cambio en $i_{ds}^r(t)$. Para ello se trabajó con un valor constante de $i_{qs}^r(t) = 0,1$ A y se fue variando el valor de $i_{ds}^r(t)$ desde -2 A hasta 2 A, pasando por 0 A. El resto de los valores de los parámetros se eligieron en su valor máximo. Se obtuvo lo siguiente:

- Dos polos invariables, uno en -1275 y uno en cero, para cualquier valor de $i_{ds}^r(t)$
- Dos polos complejos conjugados con parte real negativa con muy poca variación (siempre permanecen negativos alejados del cero)
- Un polo con solo parte real negativa, la cual a medida que se disminuye el valor de $i_{ds}^r(t)$ se va acercando al cero.

Se aprecia que en estas pruebas nuestro sistema siempre es estable. Sin embargo, al dar valores de $i_{ds}^r(t)$ mayores a su límite negativo (-2 A) el polo con parte real negativa ahora se convierte en un polo con parte real positiva, haciendo el sistema inestable.

2.2.4. Funciones de Transferencia para el sistema simplificado lineal LTI

Para obtener las funciones de transferencia de ambas entradas $v_{qs}^r(t)$ y $T_l(t)$ a la salida $\theta_m(t)$, se aplica la transformada de Laplace al modelo LTI de la ecuación 23:

$$\begin{cases} s \cdot \Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s \cdot \Omega_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot I_{qs}^r(s) - b_{eq} \cdot \Omega_m(s) - \frac{1}{r} \cdot T_l(s) \right] \\ s \cdot I_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q} [V_{qs}^r(s) - R_s \cdot I_{qs}^r(s) - \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \Omega_m(s)] \end{cases} \quad (41)$$

Despejando las ecuaciones anteriores y operando algebraicamente se llega a la siguiente expresión:

$$\Theta_m(s) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot V_{qs}^r(s) - \frac{1}{r} \cdot (L_q \cdot s + R_s) T_l(s)}{[L_q \cdot J_{eq} \cdot s^3 + (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \cdot s^2 + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r2}) \cdot s]} \quad (42)$$

De donde se puede obtener ambas funciones de transferencia:

$$G_{V_{qs}^r}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{s [J_{eq} \cdot L_q \cdot s^2 + (R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q) \cdot s + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r2})]} \quad (43)$$

$$G_{T_l/r}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{(L_q \cdot s + R_s)}{s [J_{eq} \cdot L_q \cdot s^2 + (R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q) \cdot s + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r2})]} \quad (44)$$

2.3. Análisis de Estabilidad a lazo abierto para Sistema LTI

2.3.1. Determinación de polos y ceros

Un sistema LTI de orden n es estable si, para toda excitación $u(t)$ acotada en $t > t_0$ (respuesta forzada), todos sus estados $x_i(t)$ toman valores acotados. Si desaparece la excitación (respuesta natural), el sistema tiende al origen del espacio de estados ($x = 0$). Matemáticamente, se dice que un sistema lineal es estable si todos los autovalores de la matriz de coeficientes A tienen parte real negativa. Estos autovalores son los polos del sistema.

Del polinomio característico de las funciones de transferencia, se obtienen los siguientes polos, los cuales dan información sobre el comportamiento dinámico del sistema:

$$s \left[J_{eq} \cdot L_q \cdot s^2 + (R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q) \cdot s + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2) \right] = 0 \quad (45)$$

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_{2,3} = \frac{-(R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q) \pm \sqrt{(R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q)^2 - 4 \cdot J_{eq} \cdot L_q \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2)}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \end{cases} \quad (46)$$

Los polos del sistema, calculados a 40°C y para valores nominales de parámetros, son los siguientes:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -89,26 + 301,60i \\ s_3 = -89,26 - 301,60i \end{cases} \quad (47)$$

Se observa que dos de estos polos tienen parte real negativa y el tercer polo se ubica en el origen. Debido a esto se puede decir que el sistema es **estable**. A su mismo, al tener parte imaginaria en los polos, obtenemos información sobre el tipo de amortiguamiento que posee el sistema, en este caso subamortiguado.

Al cero del sistema lo aporta la entrada de perturbación T_l :

$$z_1 = -\frac{R_s}{L_q} = -175,86 \text{ rad/s} \quad (48)$$

Por otro lado, se observa que hay tres coeficientes que tienen rangos de acción variables: el coeficiente de fricción equivalente, la inercia equivalente y la resistencia de estator. En la Figura 6 se muestran los valores que toman los polos y el cero al considerar los valores medios (negro), mínimos (azul) y máximos (rojo) de J_{eq} y b_{eq} mientras la temperatura varía de 40°C (marca mas gruesa) a 115°.

2.3.2. Evaluación de la estabilidad. Determinación de la frecuencia natural y el amortiguamiento

Para evaluar la frecuencia natural y el amortiguamiento se plantea lo siguiente:

$$s^2 + \left(\frac{R_s}{L_q} + \frac{b_{eq}}{J_{eq}} \right) \cdot s + \frac{1}{L_q \cdot J_{eq}} \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2) = 0 \quad (49)$$

Comparando con la forma estándar para sistemas de segundo orden:

$$s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0 \quad (50)$$

Se obtienen las siguientes expresiones:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{L_q \cdot J_{eq}} \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2)} \quad (51)$$

$$\xi = \frac{\left(\frac{R_s}{L_q} + \frac{b_{eq}}{J_{eq}} \right)}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{L_q \cdot J_{eq}} \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2)}} \quad (52)$$

Para 40°C y tomando valores nominales de los coeficientes, estos valores son:

$$\omega_n = 314,5047 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad ; \quad \xi = 0,2838 \quad (53)$$

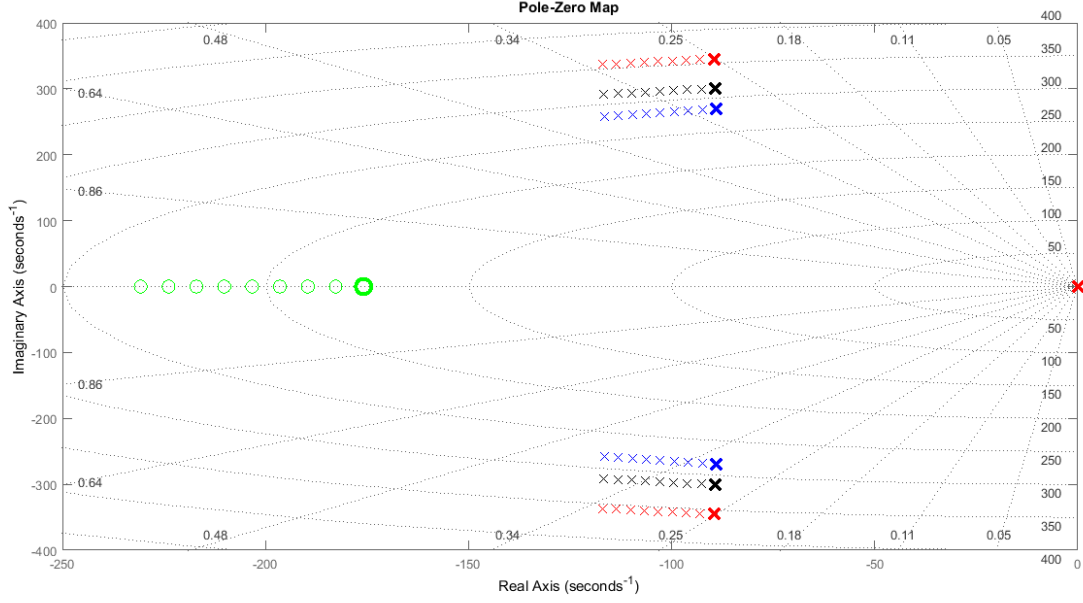


Figura 6: Diagrama de polos del sistema a lazo abierto

2.4. Respuesta Dinámica en el Dominio del Tiempo para Sistema LTI

Se pretende obtener la respuesta del estado interno a un escalón de tensión del estator desde $v_{qs}^r(t) = 0$ a $v_{qsnom}^r(t) = +19,596V_{cc}$ en $t_{step1} = 0,1s$ seguido de un escalón de torque de carga desde $T_l(t) = 0$ a $T_{lmax}(t) = +1,57Nm$ en $t_{step2} = 0,3s$. El diagrama de bloques utilizado para realizar dicha simulación se muestra en la Figura 7.

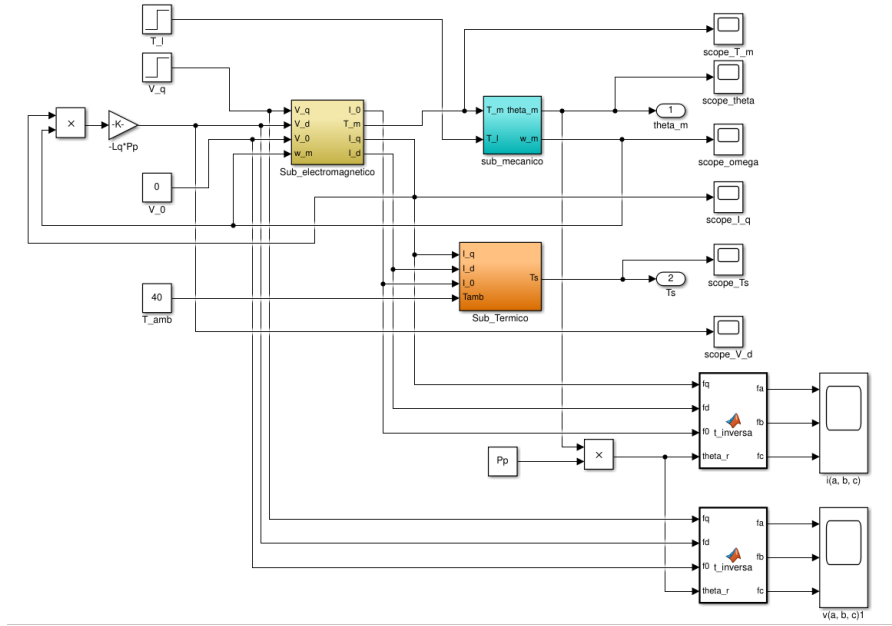


Figura 7: Diagrama de bloques para la respuesta a lazo abierto

En la Figuras 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15 se muestra el comportamiento del ángulo, torque, temperatura, voltaje abc, corriente i_q , velocidad angular, tensión V_d y corrientes abc respectivamente frente a las entradas ya explicadas.

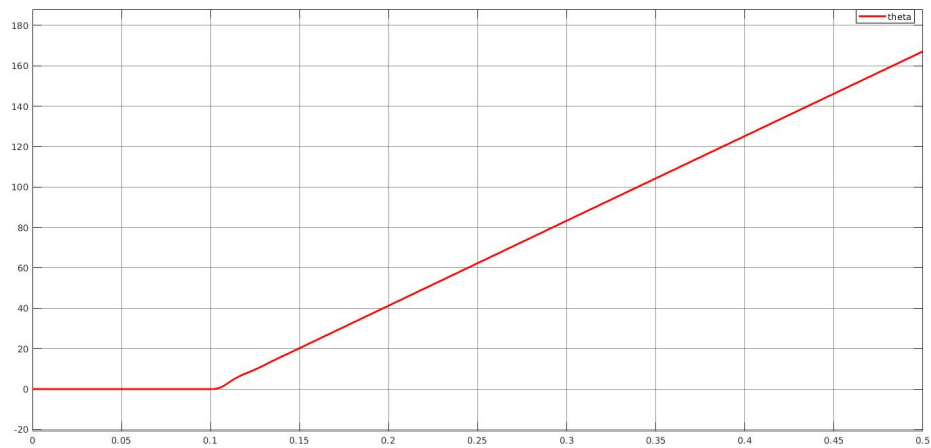


Figura 8: Ángulo del rotor

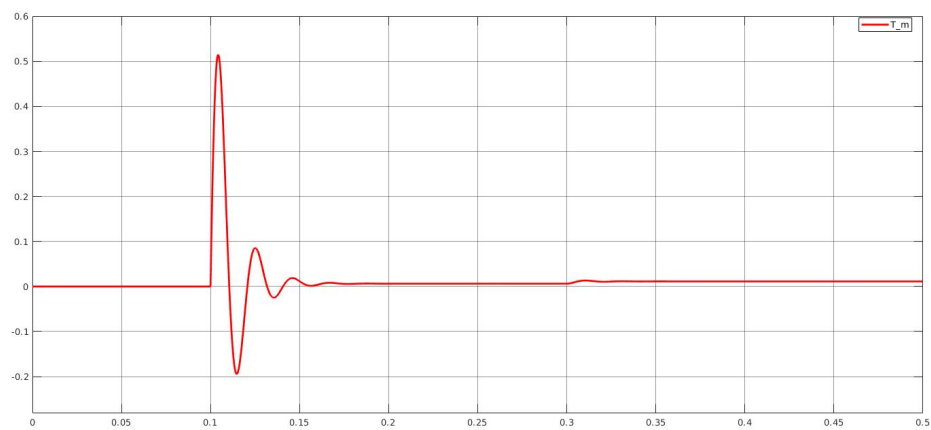


Figura 9: Torque motor

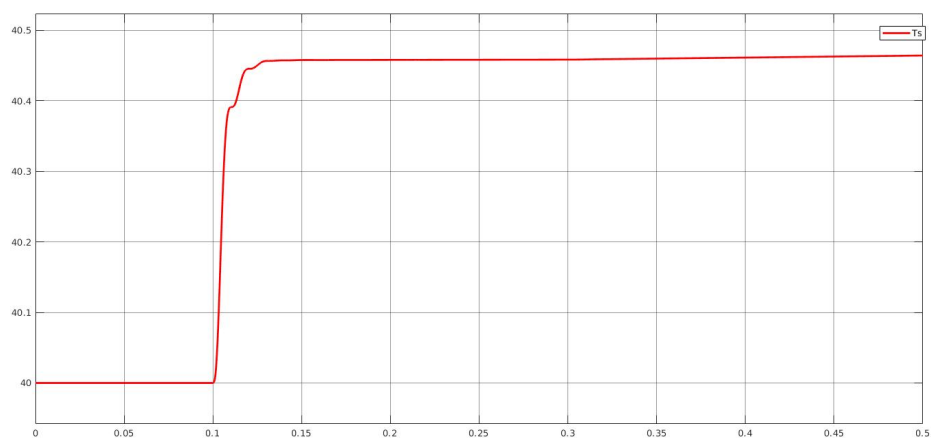


Figura 10: Temperatura

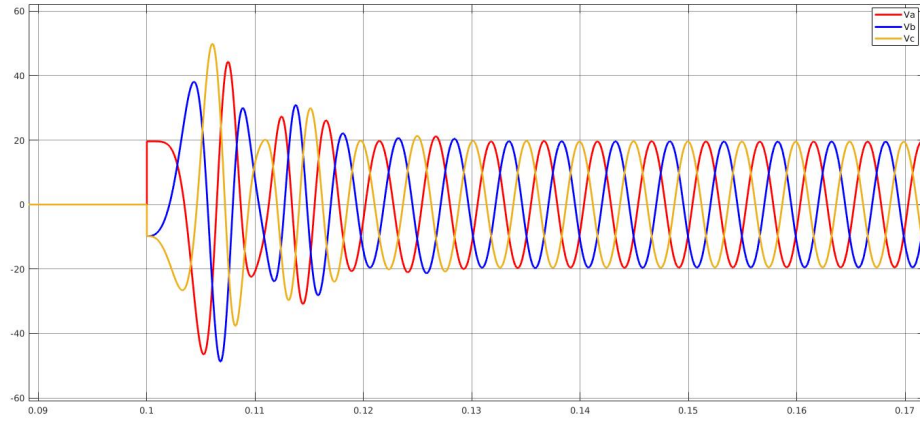


Figura 11: Tensiones estáticas en coordenadas abc

Como se aprecia en la Figura 12, la entrada de tensión provoca un sobrepico de corriente en cuadratura elevado, fuera de los límites tolerados por la máquina. Además, en la Figura 13 se establece una velocidad del eje motor que si bien no excede el límite, es de un valor muy elevado, del orden de 4000 rpm.

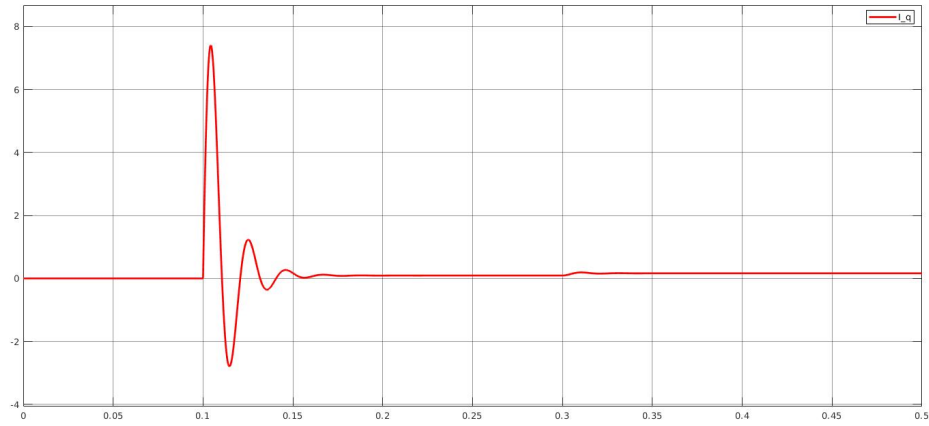


Figura 12: Variación de la corriente iq

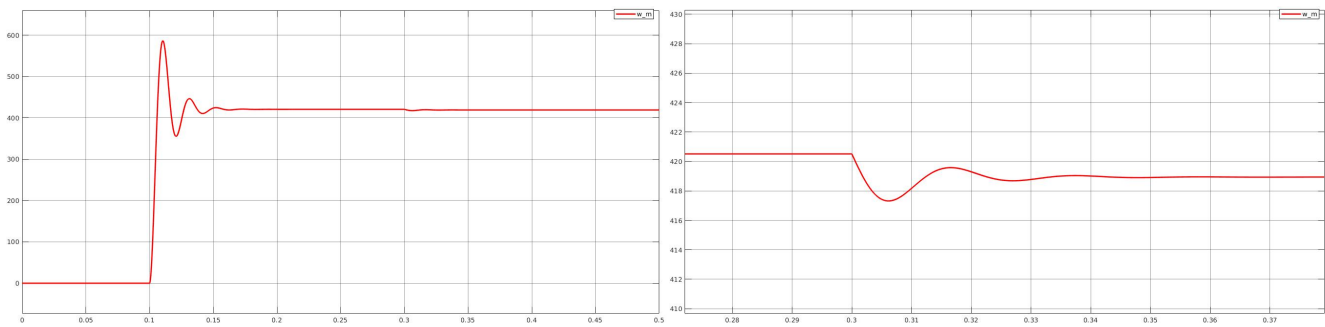


Figura 13: Velocidad Angular

Con las Figuras antes mostradas, y mediante herramientas gráficas que nos provee el scope de MATLAB, se pudieron calcular los valores de velocidad y corriente final de establecimiento. También se calcularon los tiempos de crecimiento, es decir el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 % al 90 % de su valor final. Para el cálculo del tiempo de establecimiento, se determina el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final de $\pm 1\%$. Se calculan además los sobrepicos que existen. Para la corriente se

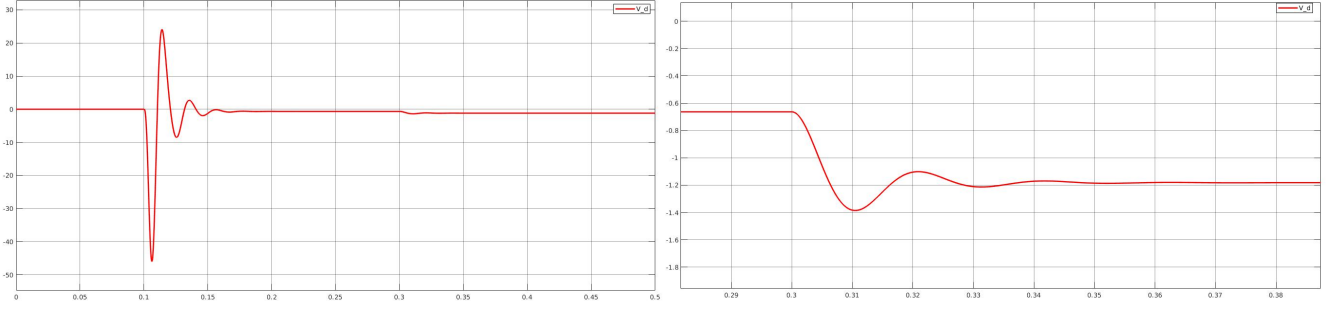


Figura 14: Tensión V_d del estator, con zoom a los 0.3s

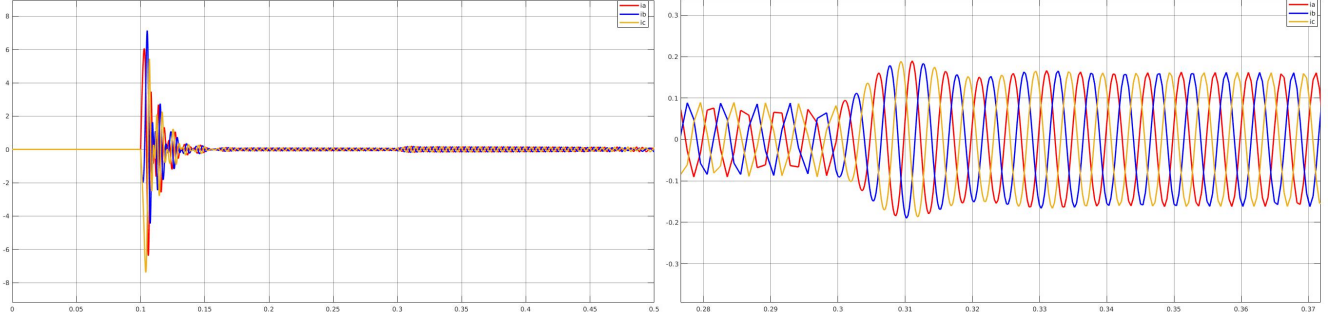


Figura 15: Corrientes estatóricas en coordenadas abc

trabaja después del escalón de torque mientras que para la velocidad se lo hace después del escalón de tensión. Los valores resultantes se muestran en el Cuadro 1

	ω_m	i_{qs}^r
Valor final de establecimiento	420,51 rad/s	0,162 A
Tiempo de establecimiento	0,1508 s	0,036 s
Tiempo de crecimiento	0,0042 s	0,0041 s
Sobrepico	586,32 rad/s	0,1927 A

Cuadro 1: Características de desempeño de respuesta transitoria a escalón

La aplicación del torque de carga no tiene mucha incidencia en el sistema debido a su pequeño valor relativo, y al efecto de la elevada reducción dada por la caja planetaria de engranajes.

2.5. Análisis de Controlabilidad del Sistema LTI

Se dice que un sistema lineal invariante en el tiempo es controlable en t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control $u(t)$ no restringido, en un intervalo de tiempo finito. En otras palabras, es posible con entradas admisibles cambiar los estados de cualquier valor inicial a cualquier otro valor final en un intervalo de tiempo dado.

El criterio de controlabilidad completa de estado en el espacio de estado requiere que los vectores $B, A.B, \dots, A^{n-1}.B$ sean linealmente independientes. Por lo tanto, la matriz de controlabilidad debe tener rango n , siendo n la cantidad de variables de estado.

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (54)$$

Según las matrices expresadas en Ecuación 23, calculamos la matriz de controlabilidad:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m'^r}{J_{eq} \cdot L_q} \\ 0 & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m'^r}{J_{eq} \cdot L_q} & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot b_{eq}}{J_{eq}^2 \cdot L_q} - \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot R_s}{L_q^2 \cdot J_{eq}} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p^2 \cdot \lambda_m'^{r2}}{J_{eq} \cdot L_q^2} + \frac{R_s^2}{L_q^3} \end{bmatrix} \quad (55)$$

La cual tiene rango 3, verificando que el sistema es controlable por lo que existirá alguna ley de control que permita ubicar los polos de la forma que se quiera.

2.6. Análisis de Observabilidad del Sistema LTI

Se dice que un sistema lineal invariante en el tiempo es observable en t_0 si, con el sistema en el estado inicial $x(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito. En palabras más simples, nos dice que un sistema será observable si cada cambio en una variable de estado afecta a cada elemento del vector de salida. Si es completamente observable existirá la forma de reconstruir el estado a partir de la salida.

El criterio de observabilidad en el espacio de estado requiere que los vectores $C, C.A, \dots, C.A^{n-1}$ sean linealmente independientes. Por lo tanto, la matriz de observabilidad debe tener rango n , siendo n la cantidad de variables de estado.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ \dots \\ C.A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Según las matrices expresadas en Ecuación 23, calculamos la matriz de observabilidad para la salida $\theta_m(t)$. Su rango fue igual al número de variables de estado (3), verificando que el sistema es observable a partir de dicha salida, es decir que es posible reconstruir el estado mediante el estudio de ésta.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b_{eq}/J_{eq} & 3P_p \lambda_m'^r / 2J_{eq} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Ahora, si suponemos que la salida medida va a ser $\omega_m(t)$, es decir que no se mide posición con un encoder sino velocidad con un tacogenerador, vemos que el rango de la matriz de observabilidad es 2. Esto nos indica que no es posible reconstruir el estado mediante el estudio de la velocidad del motor.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b_{eq}/J_{eq} & 3P_p \lambda_m'^r / 2J_{eq} \\ 0 & -\frac{b_{eq}^2}{J_{eq}} - \frac{3P_p^2 \lambda_m'^{r2}}{2J_{eq} L_q} & -\frac{3P_p \lambda_m'^r b_{eq}}{2J_{eq}} - \frac{3P_p \lambda_m'^r R_s}{2J_{eq} L_q} \end{bmatrix} \quad (58)$$

3. Diseño, Análisis y Simulación de Controlador de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque equivalente (Control Vectorial)

En esta segunda parte del proyecto, se presenta una estrategia de control alternativa al clásico control por realimentación completa de Estado, denominada control en Cascada. Este planteo es más efectivo, tiene más sentido físico que matemático, y es muy aplicado actualmente en la industria y en accionamientos comerciales de alta potencia. Consiste en la implementación de dos lazos de control, uno interno y otro externo. El primero es un lazo rápido de control de corriente y torque, mientras que el segundo es un lazo de control de movimiento.

El controlador estará compuesto por ciertas secciones: un modulador de tensión, un modulador de torque, un controlador PID y un observador de estado de orden reducido. Los primeros dos bloques se obtendrán mediante el diseño de desacoplamiento de las realimentaciones del modelo físico para contrarrestar sus efectos. De este modo, se transforma primero la consigna de tensión, en consigna de corriente y luego en consigna de torque. Sabemos que, al tratar con aproximaciones de los coeficientes al modelar el sistema (es imposible hacerlo de forma perfecta), existirán imprecisiones lógicas en el modelo. Para ello es que se implementa un controlador externo de movimiento, en donde se realimentan las variables de estado, y permite solventar en gran medida el problema de las imprecisiones. Finalmente, el observador de estado se agrega debido a la imposibilidad, o a que no es conveniente, medir la velocidad

físicamente, y por ello, realimentando únicamente la posición medida por un encoder y la utilización del observador, se podrá estimar la velocidad real.

3.1. Modulador de Torque equivalente (controlador interno de corriente/torque)

Se plantea el modulador de torque para poder dar una consigna o señal de control de torque, proveniente de un compensador de movimiento, en este caso un PID de velocidad o de posición. El modulador de torque se basa en los siguientes lineamientos:

- Desacoplamiento de todas las realimentaciones físicas naturales de estado hacia la entrada
- Diseño de lazos internos de control vectorial de corrientes desacoplados de la velocidad (donde $i_{ds}^r(t) = 0$), con control proporcional solamente, con polo en $p = -5000$ rad/s para ambos casos.
- Incorporación adecuada de consigna de torque (nueva variable manipulada).

El análisis va a realizarse para la consigna de $i_{qs}^r(t)$, siendo para las otras dos consigas un proceso similar. Dada la ecuación (10), despejando el término que contiene $\dot{i}_{qs}^r(t)$ tenemos que:

$$L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \quad (59)$$

Si consideramos que se está trabajando con consignas de voltaje, dicha entrada al sistema se puede renombrar:

$$L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \approx v_{qs}^{r*}(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \quad (60)$$

Es importante aclarar que la suposición que se hizo de $v_{qs}^{r*}(t) = v_{qs}^r(t)$ es posible y válida debido a que se considera la existencia de un modulador de tensión unitario. El estudio de los detalles de este modulador no es el objetivo del presente trabajo y por eso se pasarán por alto.

Sabiendo que los dos últimos términos de la derecha son los que pueden desacoplarse, se obtiene entonces una variable que es la consigna de voltaje en forma desacoplada, que es proporcional al error de la corriente (entre la consigna y el valor medido). Por lo tanto, se tendrán tres ganancias proporcionales: una para cada una de las fases qd0.

$$L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \approx v_{qs}^{r*'}(t) = R_q' \cdot (i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)) \quad (61)$$

Operando y aplicando Transformada de Laplace, llegamos a que:

$$\frac{I_{qs}^r(s)}{I_{qs}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_q}{R_q'}s + 1} \quad (62)$$

Esta expresión final (función de transferencia de corriente) muestra los polos que agrega el modulador. Al observar la función de transferencia notamos que no contiene ningún cero, y solo un polo. Lo primero es característico en filtros pasa-bajo. Aquí la constante de tiempo será de la forma:

$$\tau = -\frac{1}{p} = -\frac{L_q}{R_q'} \quad (63)$$

Como se desea una respuesta rápida de corriente se colocan los polos del controlador alejados del origen, $p_i = -5000$, siendo las ganancias proporcionales:

$$\begin{aligned} R_q' &= 29 \, \Omega \\ R_d' &= 33 \, \Omega \\ R_0' &= 4 \, \Omega \end{aligned} \quad (64)$$

Y de forma que el ancho de banda es:

$$BW = |p| = 2\pi \cdot f_{corte} \Rightarrow f_{corte} = 796 \text{ Hz} \quad (65)$$

Tenemos que mientras mayor sea el ancho de banda del lazo de control obtenemos una respuesta más rápida y mejor desempeño.

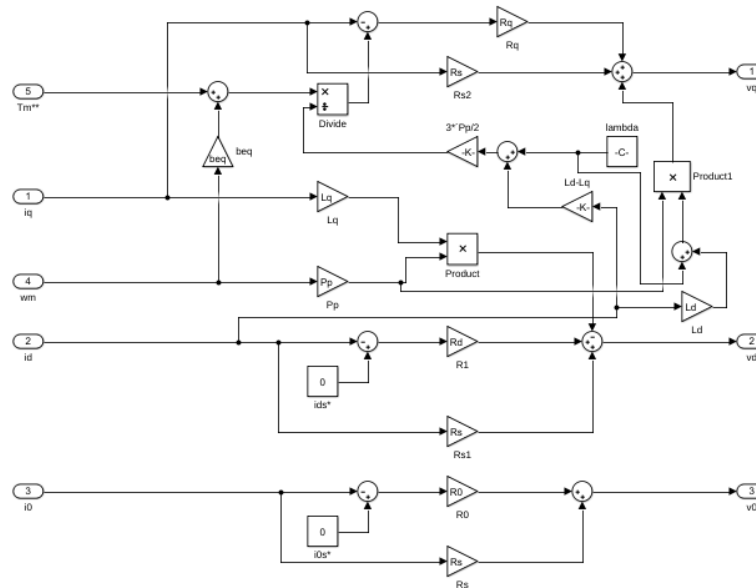


Figura 16: Diagrama de bloques del Modulador de Torque

En esta sección se diseñará un controlador PID, el cual se llevará a cabo utilizando el método de sintonía serie con acción integral, con $n = 2,5$ y $\omega_{pos} = 800$ rad/s, considerando valores nominales de inercia y amortiguamiento, a temperatura ambiente. Se buscará dar consignas de posición y velocidad.

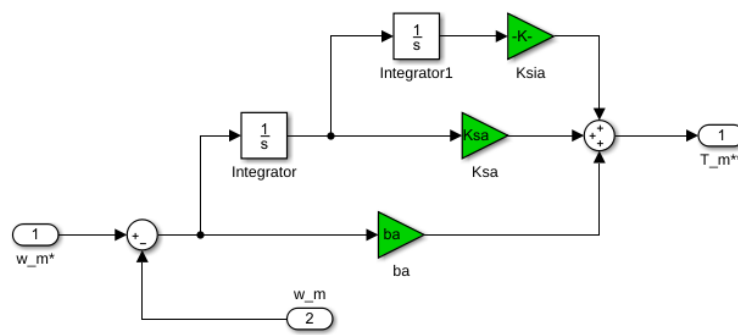


Figura 17: Diagrama de bloques del controlador PID

La función de transferencia de nuestro controlador es la siguiente:

$$G_{\theta_m^*}(s) = \frac{b_a s^2 + k_{sa} s + k_{sia}}{J_{eq} s^3 + b_a s^2 + k_{sa} s + k_{sia}} \quad (66)$$

$$G_{T_l/r}(s) = -\frac{s}{J_{eq} s^3 + b_a s^2 + k_{sa} s + k_{sia}}$$

Al analizar la función de transferencia en régimen estacionario para una entrada escalón unitario:

- Si $k_{sia} \neq 0 \Rightarrow G_{\theta_m^*}(s) = 1$ y $G_{T_l/r}(s) = 0$ (rechazo total a perturbaciones)
- Si $k_{sia} = 0 \Rightarrow G_{\theta_m^*}(s) = 1$ y $G_{T_l/r}(s) = -1/k_{sa}$ (sin rechazo a perturbaciones)

Se puede observar que la acción integral compensa las perturbaciones de carga constante en estado estacionario. Para encontrar los valores de las constantes de nuestro PID, usamos el método de la sintonía serie. Proponemos un polinomio de la siguiente forma:

$$p(s) = J(s + \omega_{pos})(s^2 + 2\zeta\omega_{pos}s + \omega_{pos}^2) \quad (67)$$

Si comparamos términos con el polinomio característico de nuestro PID, obtenemos las siguientes expresiones que nos permiten calcular las constantes del PID, donde $n = (2\zeta + 1)$, con $n = 2,5$ y $\omega_{pos} = 800$ rad/s :

$$b_a = J_{eq} \cdot \omega_{pos} \cdot n = 0,0113 \text{ N.m/rad/s}$$

$$k_{sa} = J_{eq} \cdot \omega_{pos}^2 \cdot n = 9,04 \text{ N.m/rad} \quad (68)$$

$$k_{sia} = J_{eq} \cdot \omega_{pos}^3 = 2893 \text{ N.m/rad.s}$$

A estos coeficientes se los denomina activos porque son parte del controlador, no generan pérdidas ni calor, pero sirven para amortiguar el sistema dinámico.

Ahora analizando el polinomio característico podemos determinar la posición de los 3 polos del controlador:

$$p_1 = -800$$

$$p_2 = -600 + 529,15i \quad (69)$$

$$p_3 = -600 - 529,15i$$

La nueva gráfica de polos con valores nominales, incluyendo los propios del sistema, los que agrega el modulador de torque y los nuevos obtenidos del controlador PID, se muestra en la Figura 18.

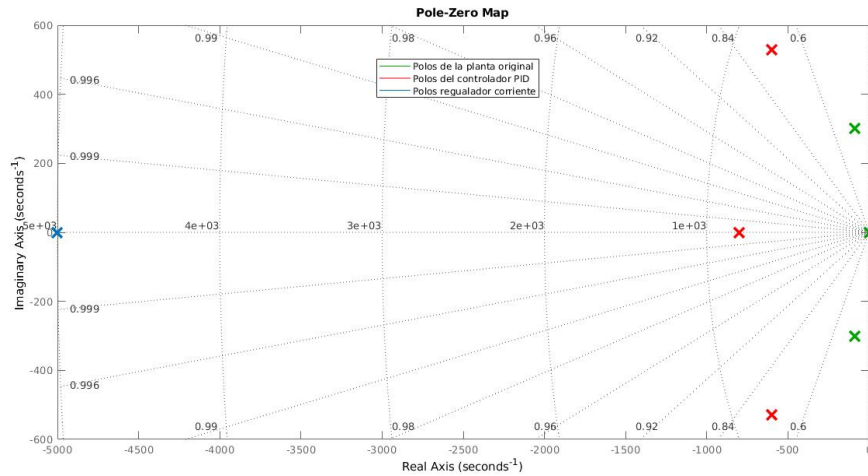


Figura 18: Polos del sistema con valores nominales

En las Figuras 19 y 20 se muestran los polos con valores de parámetros máximos y mínimos. Se puede observar que al aumentar los valores de estos parámetros los polos se trasladarán hacia zonas más inestables, pero para los extremos establecidos en esta aplicación, los polos se modifican muy poco y el sistema se encuentra lejos de ser inestable

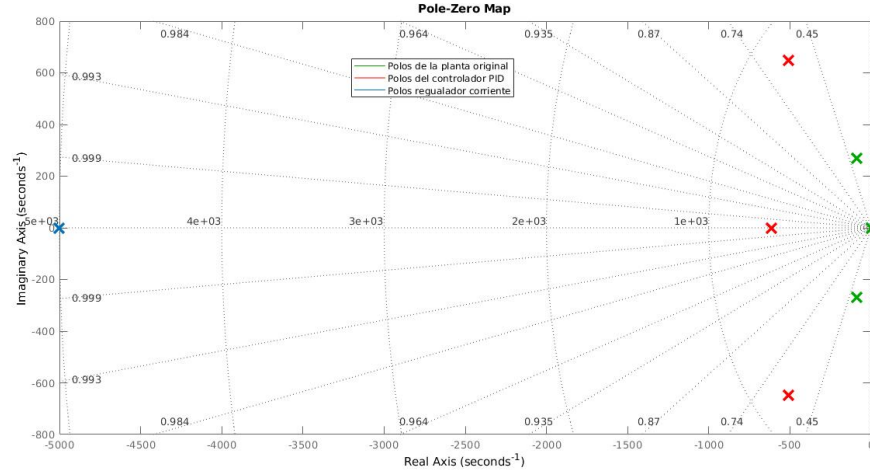


Figura 19: Polos del sistema con valores máximos

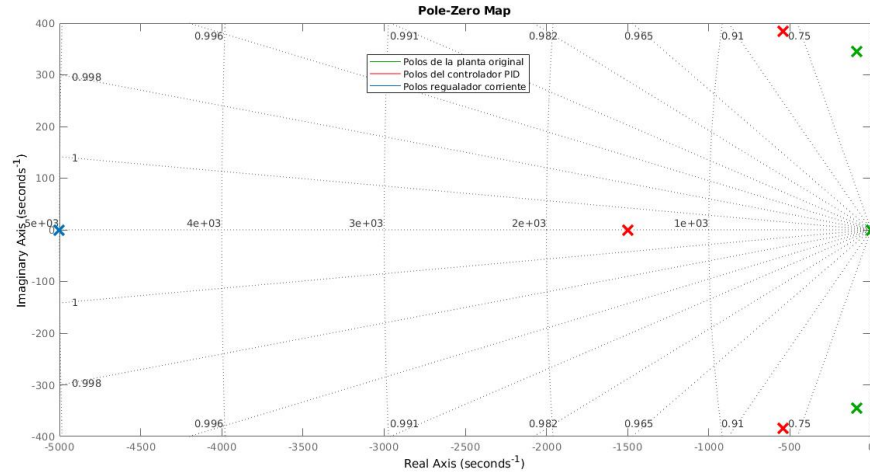


Figura 20: Polos del sistema con valores mínimos

3.3. Incorporación y diseño de Observador de Estado de orden reducido para la parte mecánica

Como vimos, si bien lo que se quiere controlar es la posición de la máquina, en el controlador PID adoptado no se realimenta la posición para evitar los problemas numéricos que surgen al incluir derivadores en el mismo. Por lo tanto, se optó por realimentar la velocidad. Sin embargo, medir la velocidad provoca una pérdida de información del sistema, además de las limitaciones que presentan los tacogeneradores, las cuales son superadas por los encoders. Por lo tanto, la solución propuesta es plantear un observador de Estado en el cual se estiman la posición y la velocidad a partir de medir la posición.

No se considera el coeficiente de fricción dado que fue desacoplado en el modulador de Torque. Además, como se dispone de sensores de corriente, no es necesario estimar las mismas. Se obtiene un Observador de Estado, con

su diagrama de bloques completo mostrado en la Figura 21.

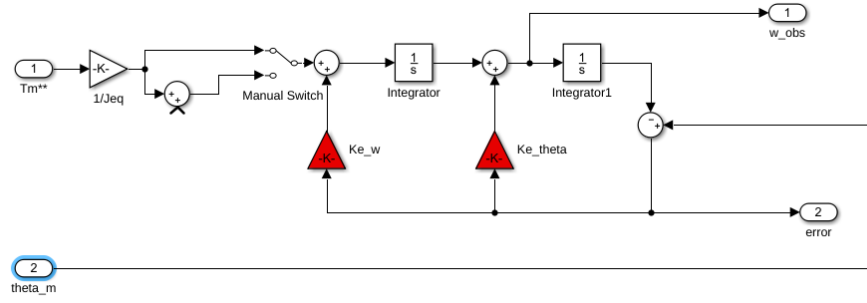


Figura 21: Diagrama de bloques del Observador

El modelo en espacio de estados de nuestro observador es el siguiente:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) + K_e C(x(t) - \tilde{x}(t)) \quad (70)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [A - K_e C]\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) + K_e Cx(t)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}_m(t) = \dot{\tilde{\omega}}_m(t) + k_{e\theta}(\dot{\theta}_m(t) - \tilde{\theta}_m(t)) \\ \dot{\tilde{\omega}}_m(t) = T_m(t)/J_{eq} + k_{ew}(\theta_m(t) - \tilde{\theta}_m(t)) \end{cases} \quad (71)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}}_m(t) \\ \dot{\tilde{\omega}}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_m(t) \\ \tilde{\omega}_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_{eq} \end{bmatrix} T_m(t) + \begin{bmatrix} k_{e\theta} \\ k_{ew} \end{bmatrix} \cdot (\theta(t) - \tilde{\theta}_m(t)) \quad (72)$$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_m(t) \\ \tilde{\omega}_m(t) \end{bmatrix}$$

Donde $\tilde{\theta}_m(t)$ y $\tilde{\omega}_m(t)$ son la posición y velocidad estimadas respectivamente. Para calcular el valor de las ganancias de nuestro observador calculamos el siguiente determinante:

$$\det |sI - (A - K_e C)| = \begin{vmatrix} s + k_{e\theta} & -1 \\ k_{ew} & s \end{vmatrix} = s^2 + k_{e\theta}s + k_{ew} \quad (73)$$

Nuestro observador tendrá dos polos iguales en $p = -3200$ rad/s:

$$p(s) = (s + 3200)^2 = s^2 + 6400s + 3200^2 \quad (74)$$

Comparando los anteriores polinomio obtenemos:

$$\begin{aligned} k_{e\theta} &= 6400 \text{ 1/s} \\ k_{ew} &= 1,024 * 10^7 \text{ 1/s}^2 \end{aligned} \quad (75)$$

De esta forma se obtiene un observador de estado que permite estimar la velocidad del motor a partir de los valores medidos de posición. Así se previenen los errores numéricos provocados por los derivadores.

3.4. Simulación en tiempo continuo con modelo completo NL

Se agrega al sistema el modulador de torque, el control PID y el observador de estado obteniendo el modelo no lineal completo, mostrado en la Figura 22.

Se realiza la simulación en tiempo continuo con el modelo no lineal. Se verifica el seguimiento de consignas de movimiento $q^*(t) = (1/r) \cdot \theta_m^*(t)$ con un perfil trapezoidal de posición.

La Figura 23 muestra como el sistema realiza un seguimiento correcto de la posición. En la Figura 24 se aprecia el pequeño error que presenta este seguimiento de consigna.

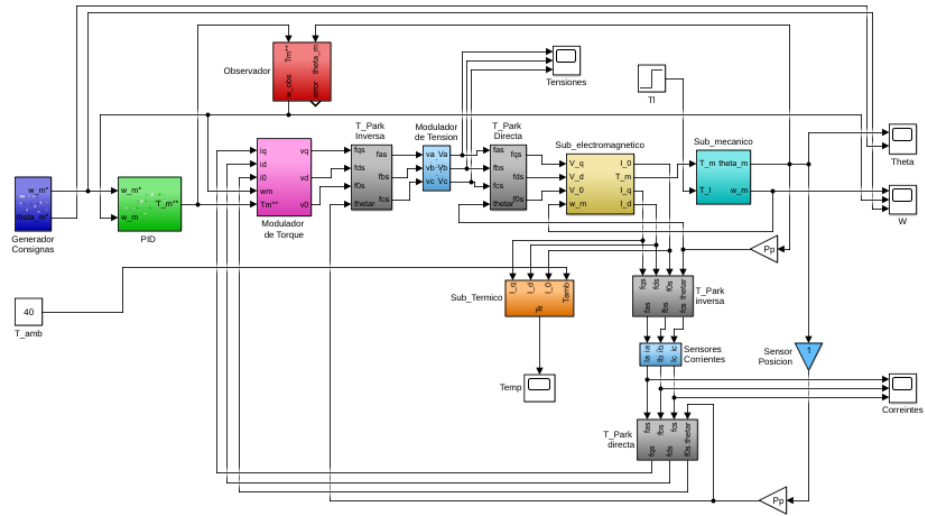


Figura 22: Diagrama de bloques del sistema usado para la simulación

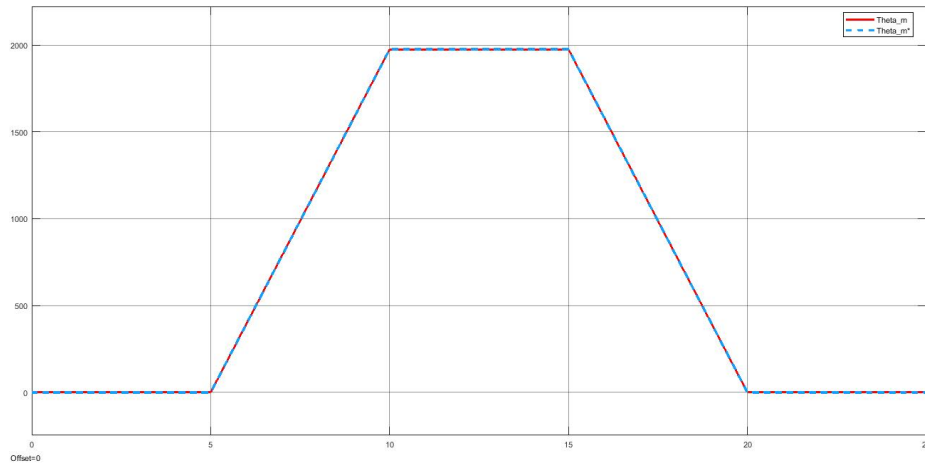


Figura 23: Seguimiento de consigna trapezoidal de posición

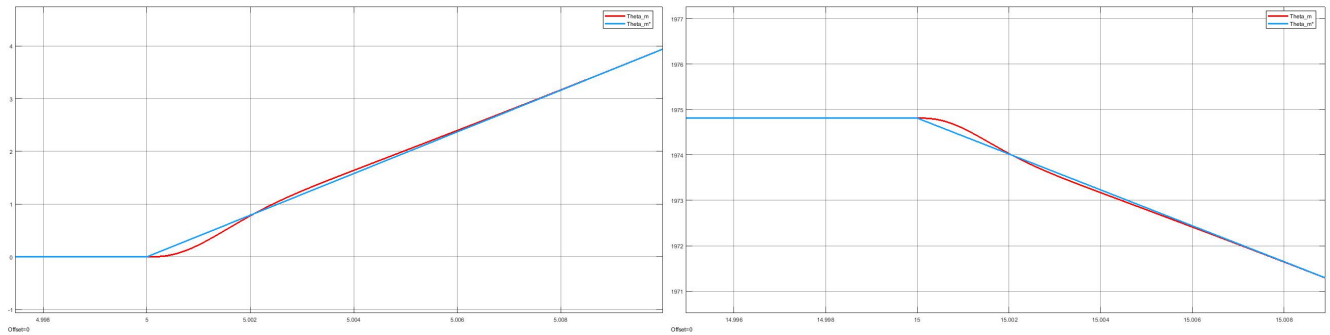


Figura 24: Zoom en el seguimiento de consigna de posición

La Figura 25 muestra el perfil de velocidad obtenido de la consigna de posición trapezoidal, junto con el seguimiento que hace el sistema y el observador. La Figura 26 muestra con mayor claridad los aumentos de velocidad cuando el perfil de posición presenta un cambio en su valor.

Las Figuras 27 y 28 muestran el comportamiento de las corrientes abc frente al perfil trapezoidal de consigna. La Figura 29 muestra el comportamiento de las tensiones abc

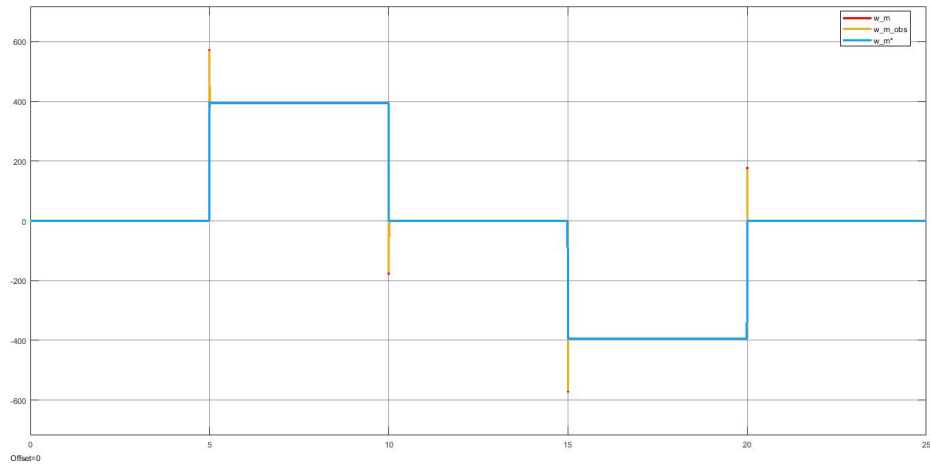


Figura 25: Seguimiento de consigna de velocidad

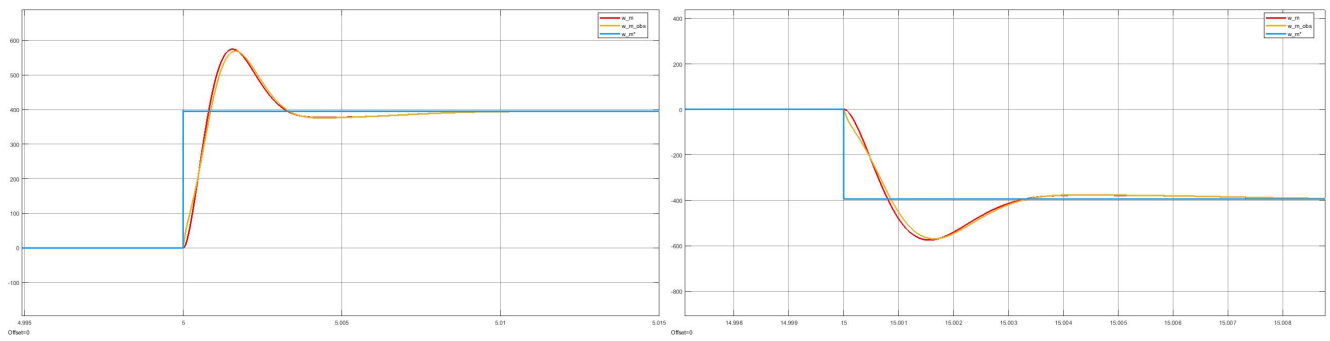


Figura 26: Zoom en el seguimiento de consigna de velocidad

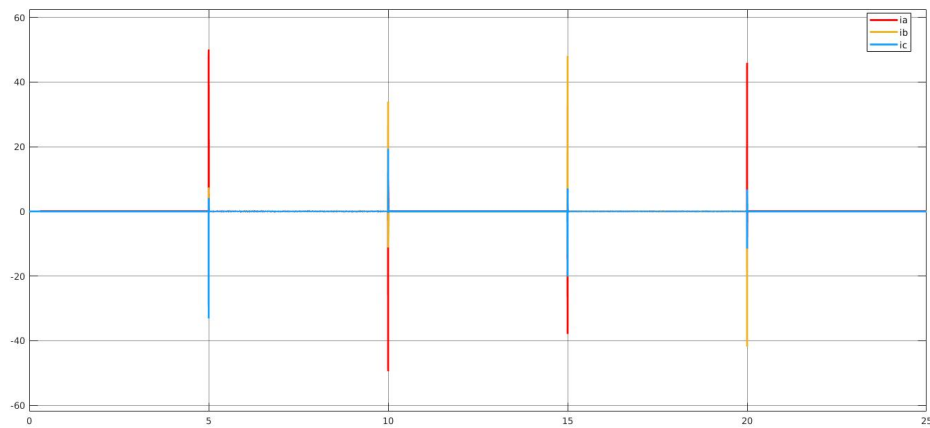


Figura 27: Comportamiento de las corrientes abc

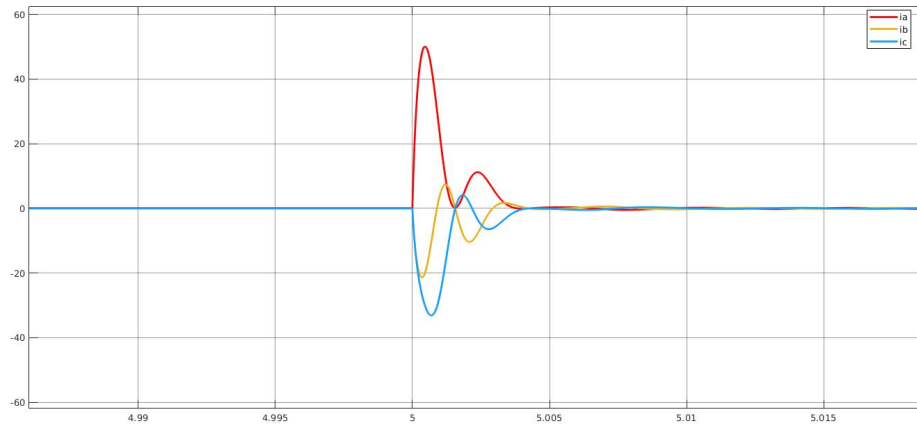


Figura 28: Zoom comportamiento de las corrientes abc

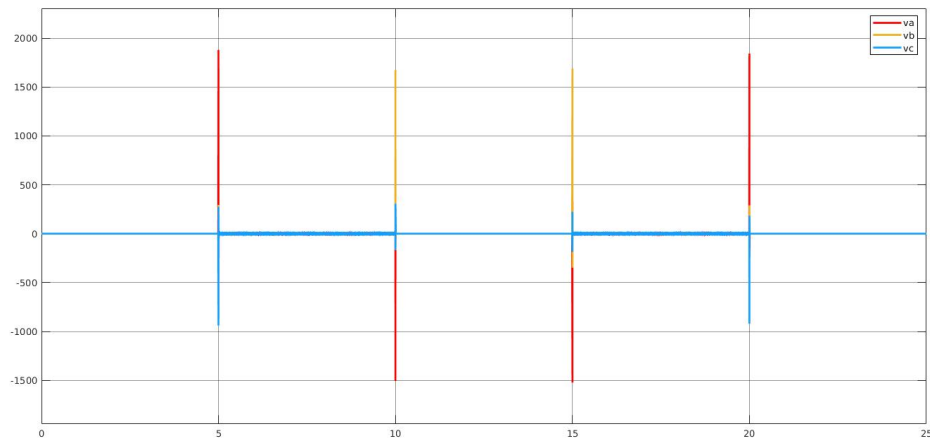


Figura 29: Comportamiento de las tensiones abc

También se simuló el comportamiento del sistema frente a un escalón de perturbación de $1,57 \cdot (1/r)$ N aplicados a $0,3s$ de comenzada la simulación. La Figura 30 muestra como esta perturbación crea un error de estado estacionario en la salida de posición del sistema. En la Figura 31 se muestra este error en otro momento de la solución. La Figura 32 muestra la respuesta de velocidad frente a la perturbación.

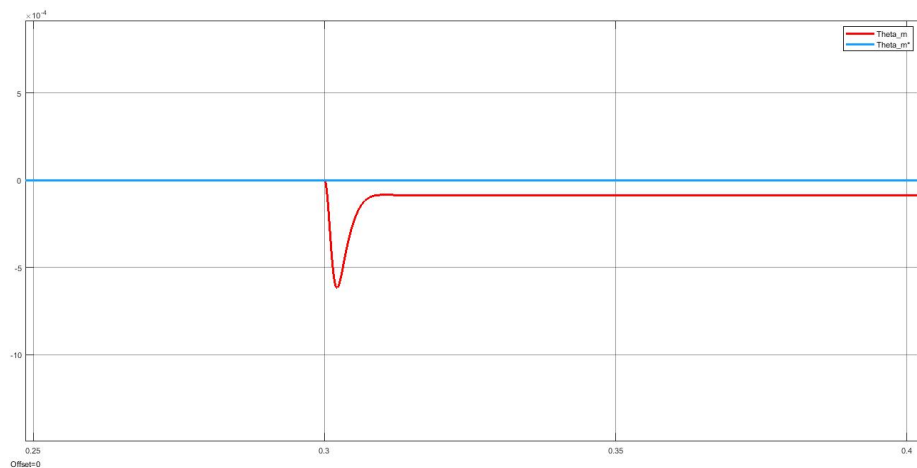


Figura 30: Error de estado estacionario causado por la perturbación

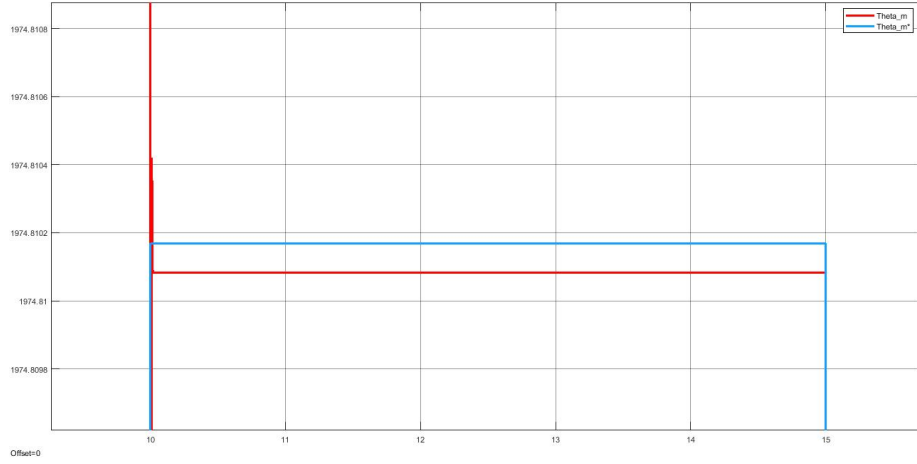


Figura 31: Error de estado estacionario presente en el seguimiento de consigna trapezoidal

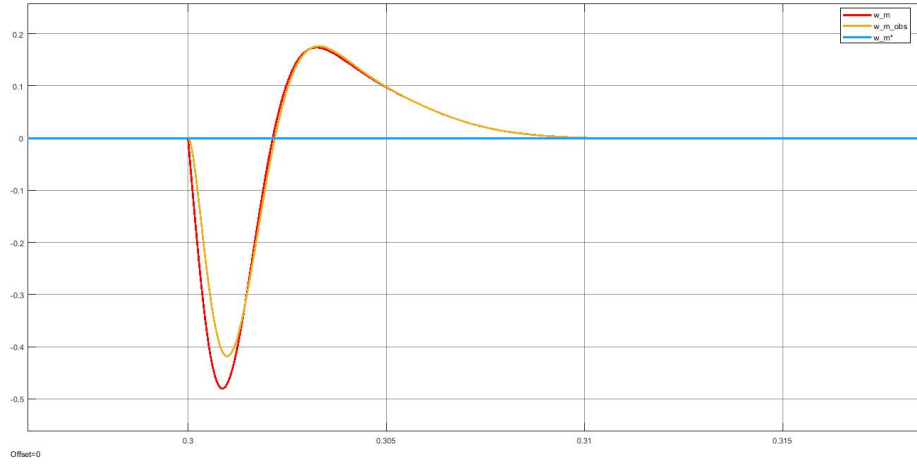


Figura 32: Comportamiento de la velocidad frente a la perturbación

3.5. Verificación de desempeño y/o mejoras

3.5.1. Verificación de las especificaciones de operación

Al hacer la simulación, se comparan los resultados obtenidos con las especificaciones de operación para ver si están dentro de los límites permitidos. Los mismos son:

- Velocidad nominal del rotor: $\omega_{mnom} = 691,15 \text{ rad/s}$
- Torque nominal de salida: $T_{qnom} = 7,26 \text{ N.m}$
- Torque pico de salida: $T_{qmax} = 29,42 \text{ N.m}$ (aceleración)
- Tensión nominal de linea: $V_{slnom} = 24 \text{ V}$
- Tensión nominal de fase: $V_{sfnom} = 13,85 \text{ V}$
- Tensión máxima de fase: $V_{sfmax} = 19,59 \text{ V}$
- Corriente nominal: $I_{snom} = 0,4 \text{ A}$
- Corriente máxima: $I_{smax} = 2 \text{ A}$ (aceleración)
- Temperatura máxima de bobinado estator: $T_{smax} = 115 \text{ °C}$

Si bien en la Figura 25 se ve que, para el perfil trapezoidal de posición, la velocidad no supera los valores límites, en la Figura 27 y 29 se aprecia claramente que las corrientes y tensiones toman valores muy superiores a los límites. Esto se debe principalmente a que el perfil de velocidad es escalonado teniendo derivadas infinitas. Para ello entonces, se corregirá la consigna de posición, generándola a partir de una consigna de perfil trapezoidal de velocidad.

Se buscará un perfil trapezoidal que tenga el misma área debajo de la curva que un escalón de 5 segundos con dicho valor. De esta forma, se llegará a la misma posición angular en el mismo tiempo, pero con una velocidad un poco más gradual, aunque con un valor máximo mayor.

Sea t_{rise} el tiempo de elevación, es decir el tiempo que tarda la velocidad en llegar desde cero al valor máximo, sea t_{high} el tiempo en el que se aplica la velocidad es máxima y sea ω_{high} la velocidad máxima. Siendo 5 segundos el tiempo en que se produce la rampa en la consigna de posición, entonces:

$$\begin{aligned} 2.t_{rise} + t_{high} &= 5 \\ t_{high} &= 5 - 2.t_{rise} \end{aligned} \quad (76)$$

Dado que la variación de posición es igual al área bajo la curva y dado que la posición final es igual a $2\pi.r$, donde r es el factor de reducción. Entonces:

$$\begin{aligned} (t_{rise} + t_{high}).\omega_{high} &= 2.\pi.r \\ (t_{rise} + 5 - 2.t_{rise}).\omega_{high} &= 2.\pi.r \\ t_{rise} &= 5 - (2.\pi.r)/\omega_{high} \end{aligned} \quad (77)$$

Por lo tanto, el valor de dependerá únicamente de ω_{high} , para un valor de velocidad angular del 59% del valor nominal tenemos:

$$\begin{aligned} \omega_{high} &= 0,59.\omega_{max} = 407,77 \text{ rad/s} \\ t_{rise} &= 0,1571 \text{ s} \end{aligned} \quad (78)$$

$$t_{high} = 4,6857 \text{ s}$$

El perfil de velocidad calculado se muestra en la Figura 33 y el correspondiente perfil de posición se muestra en la Figura 34.

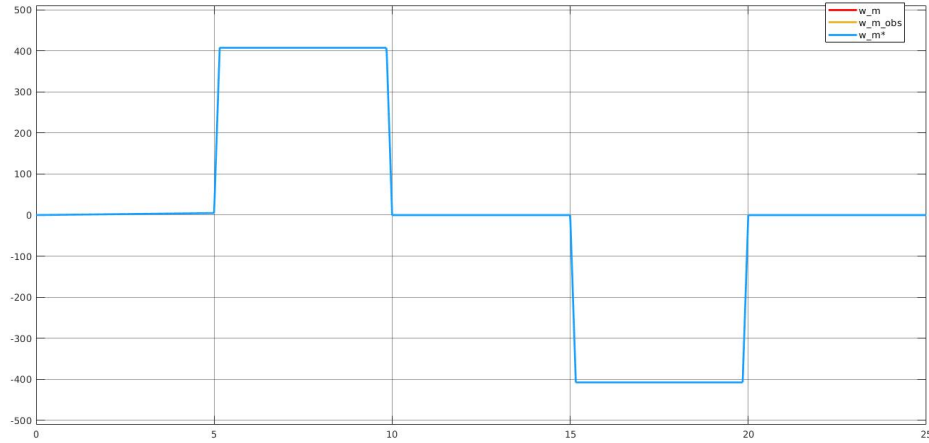


Figura 33: Perfil de velocidad mejorado

En las Figuras 35 y 36 se muestran los nuevos valores de corrientes y voltajes. Nótese que ahora los valores obtenidos no superan los límites impuestos. En la Figura 37 se ve que tampoco se superan los valores límites de torque.

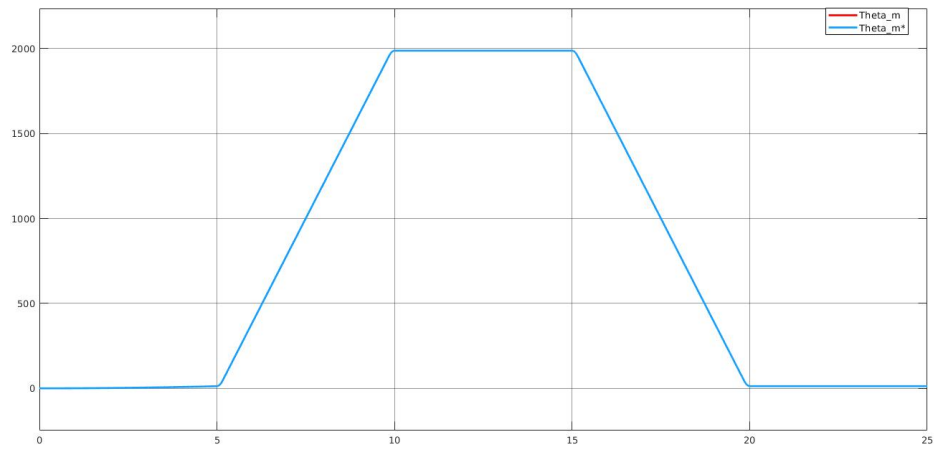


Figura 34: Perfil de posición mejorado

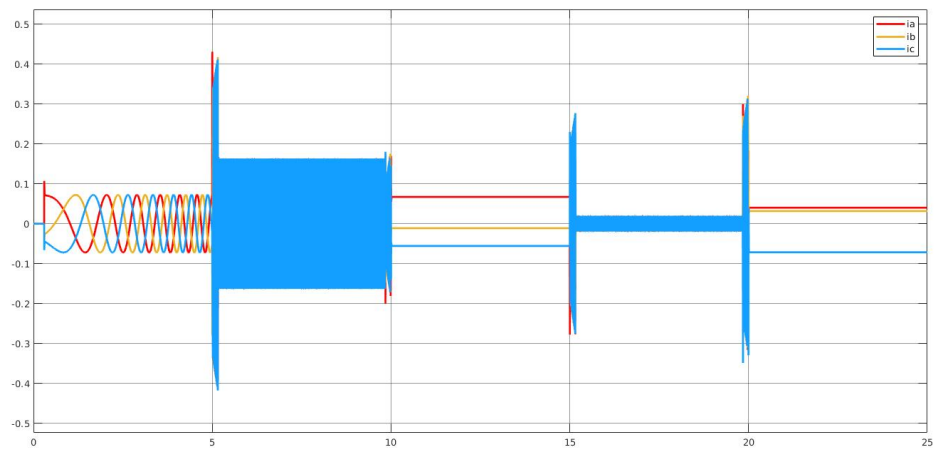


Figura 35: Corrientes abc con el nuevo perfil

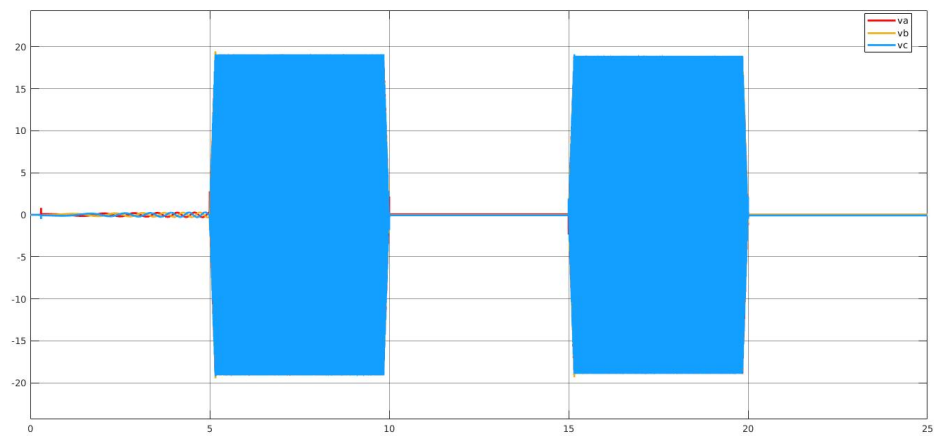


Figura 36: Tensiones abc con el nuevo perfil

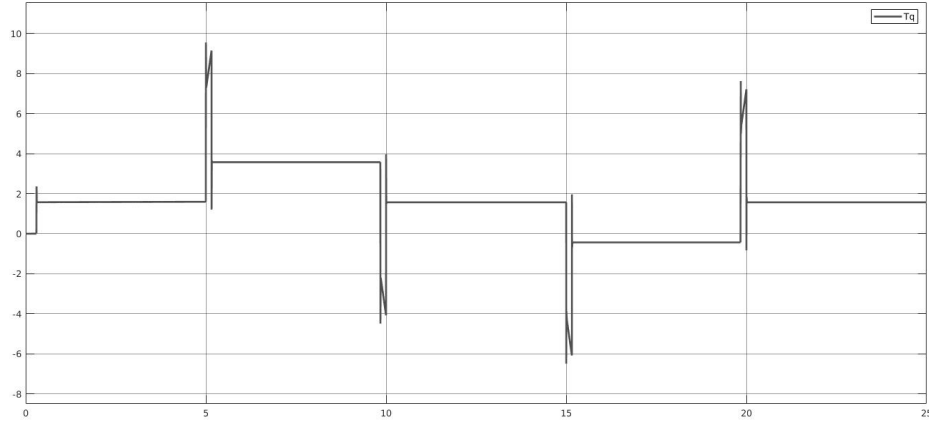


Figura 37: Torque con el perfil nuevo

3.5.2. Verificación de la existencia de error de estimación en régimen permanente del observador

En las Figuras 30 y 31 se observa que existe un error de estado estacionario en la posición de salida del sistema. Esto se puede solucionar incorporando un observador con control integral como se aprecia en la Figura 38.

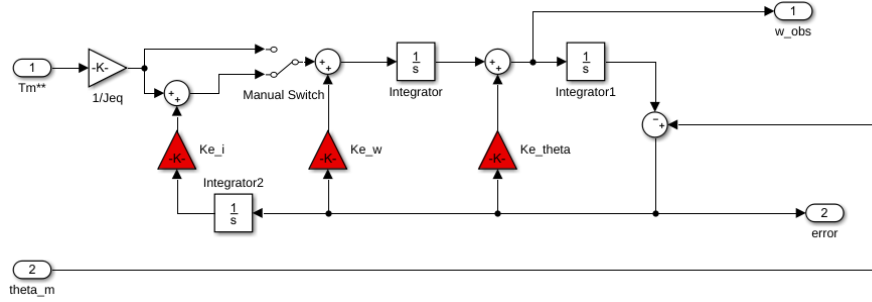


Figura 38: Observador con el agregado de la acción integral

El modelo del nuevo observador es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}}(t) &= k_{e\theta}(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) + \tilde{\omega}(t) \\ \dot{\tilde{\omega}}(t) &= k_{ew}(\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) + T_m^*(t)/J_{eq} + z(t) \\ \dot{z}(t) &= k_{ei}(\theta(t) - \tilde{\theta}(t))\end{aligned}\tag{79}$$

De la misma forma como hicimos para el observador PD, pero en este caso agregando un polo mas idéntico a los otros dos, calculamos y obtenemos:

$$\det |sI - (A - K_e C)| = \begin{vmatrix} s + k_{e\theta} & -1 & 0 \\ k_{ew} & s & -1 \\ k_{ei} & 0 & s \end{vmatrix} = s^3 + k_{e\theta}s^2 + k_{ew}s + k_{ei}\tag{80}$$

$$k_{e\theta} = 9600 \text{ 1/s}$$

$$k_{ew} = 30720000 \text{ 1/s}^2\tag{81}$$

$$k_{ei} = 3,2768 * 10^{10} \text{ 1/s}^3$$

En la Figura 39 se puede observar que hemos eliminado el error de estado estacionario gracias a la acción integral.

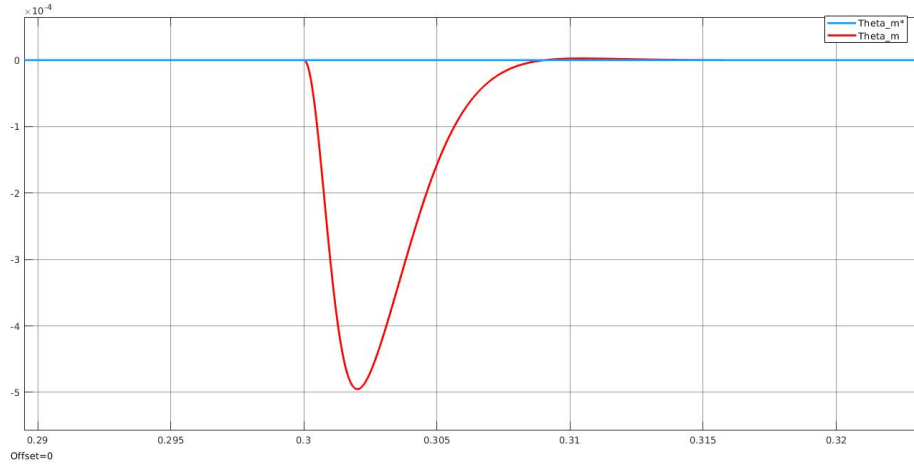


Figura 39: Corrección del error de estado estacionario

3.5.3. Comportamiento térmico del motor

En esta sección se verifica el comportamiento térmico del motor considerando como temperatura inicial la temperatura más desfavorable, es decir, la temperatura ambiental máxima (40°C). Se somete al motor a una operación repetitiva con el ciclo de operación especificado. Se grafican los resultados obtenidos luego de 500 s de operación en la Figura 40.

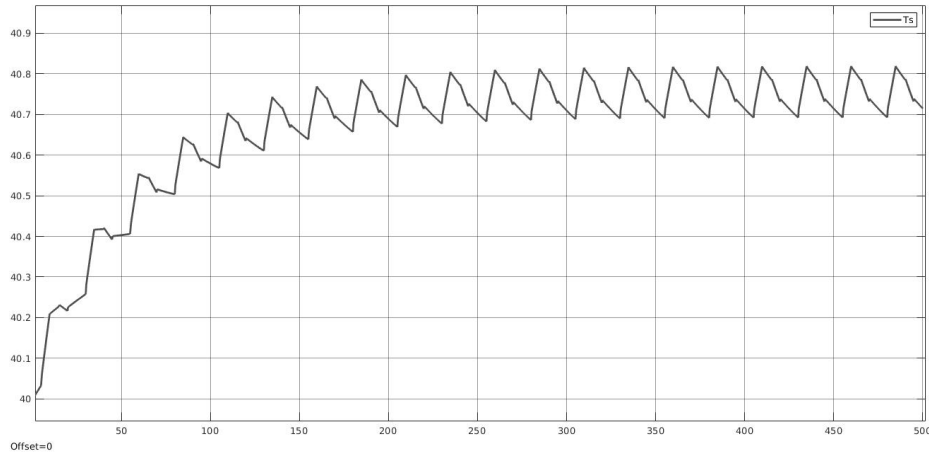


Figura 40: Temperatura del estator

Se puede apreciar que la temperatura se estabiliza en el orden de los 41°C siendo menor a los 115°C que corresponden a la temperatura máxima admisible. Por lo que el motor satisface las especificaciones de temperatura.

4. Conclusiones

En el presente proyecto se diseñó, analizó y modeló exitosamente el control de la primera articulación de un robot SCARA, sirviendo de buena forma como método de aprendizaje englobando varios contenidos de la cátedra.

A partir de las simulaciones obtenidas se puede apreciar que el sistema sigue correctamente las consignas de posición definidas. Se pudieron satisfacer las especificaciones de operación a partir de consignas con perfiles más suaves evitando de esta forma picos de corriente y tensión. La acción integral en el observador de estados permitió reducir el error de estimación en régimen permanente a valores cercanos a cero.

Se obtiene, por tanto, un sistema de control robusto y con buen seguimiento de las consignas de movimiento, aunque se dejan a futuro algunas mejoras al mismo, como por ejemplo se podría agregar la dinámica generada por las articulaciones restantes del robot SCARA y así poder simular el sistema completamente. Por otro lado, se podría

realizar un estudio más profundo de los comportamientos especiales del motor de debilitamiento y reforzamiento de campo. A su vez, sería interesante realizar un análisis más profundo para encontrar la curva de velocidad más óptima para el sistema y así aprovechar al máximo el torque disponible sin salir de las especificaciones de seguridad.

Referencias

- [1] Ing. Gabriel Julian. *Guía de Proyecto Global Integrador de la materia Automática y Máquinas Eléctricas*, 2018.
- [2] Ing. Gabriel Julian. *Apuntes de la cátedra de Automática y Máquinas Eléctricas*, 2018.
- [3] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de Control Moderna-5ta edición*. 2005.
- [4] Novotny-Lipo. *Vector Control and Dynamics of AC Drives*. 1996.
- [5] Microsemi. *Field Oriented Control of Permanent Magnet Synchronous Motors*.
- [6] P.Ramesh and RachaPrathyusha. Field oriented control of permanent magnet synchronous motor. *International Journal of Computer Science and Mobile Computing*, 2014.
- [7] Master Thesis Group PED4-1038C. Torque control in field weakening mode. *Institute of Energy Technology Aalborg University*, 2009.
- [8] R. Krishnan. *Electric Motor Drives - Modeling Analysis and Control*.