

## Trabajo Integrador 2019

### Introducción

Se presenta a continuación un Trabajo Integrador que tiene por objetivo que el estudiante realice una serie de actividades vinculando contenidos de Matemáticas Avanzadas en torno de una situación problema de interés, como es la atenuación de vibraciones de un sistema flexible.

A partir de un problema de diseño, se busca la solución e interacción de distintos modelos matemáticos, para asistir a la toma de decisiones en dicho diseño.

Se aplica el método de diferencias finitas en el modelo matemático formulado en términos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, para obtener así un modelo matemático discreto de  $N$  grados de libertad. Seguidamente se obtiene un modelo discreto reducido de un grado de libertad, que se resuelve analíticamente mediante Transformada de Laplace para elegir parámetros de diseño. La correcta elección de dichos parámetros de diseño se corrobora realizando la solución numérica del modelo reducido y finalmente se los emplea en el modelo de  $N$  grados de libertad.

En forma complementaria y opcional es posible validar los modelos discretos utilizados con la solución analítica del modelo matemático formulado en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante el método de separación de variables para algún conjunto de datos particulares.

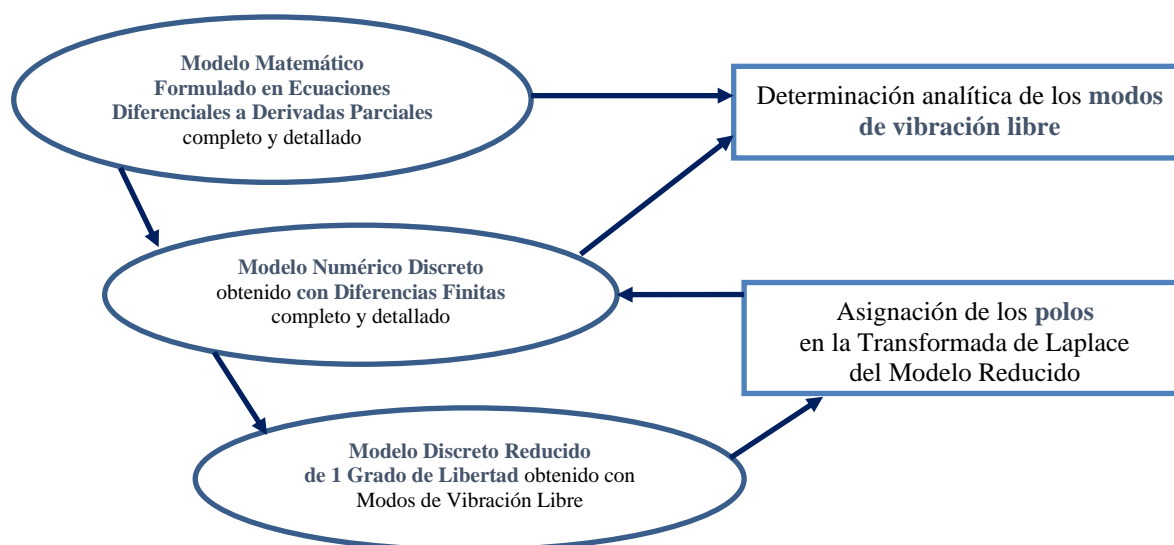
La metodología de trabajo es una alternativa a lo desarrollado en las siguientes publicaciones:

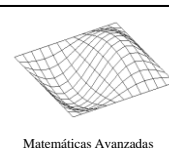
Gonzalo Alvarez, Anibal Mirasso. Definición de sistemas de control en espacio de estado modal y su vinculación con modelos de elementos finitos de múltiples grados de libertad. Mecánica Computacional Vol. XXXII, pags. 1929-1953, ISSN 1666-6070, AMCA, Noviembre 2013.

Gonzalo Alvarez, Anibal Mirasso. Análisis de reducción de vibraciones en torres mediante un sistema de control activo. Mecánica Computacional Vol. XXXII, pags. 1955-1978, ISSN 1666-6070, AMCA, Noviembre 2013.

disponibles en <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/issue/view/743>

La actividad a desarrollar se puede sintetizar en el siguiente mapa conceptual.





## Metodología de trabajo

Resolución por grupos: Se elaborará el Trabajo Integrador en grupos de hasta 4 estudiantes.

Todos los Grupos reproducirán las partes 1 y 2 del Proyecto Integrador y opcionalmente la Parte 3 y 4. En todos los casos contemplarán los datos y resultados presentados.

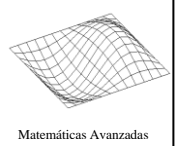
Por otra parte cada Grupo realizará las siguientes actividades:

- Proponer un nuevo conjunto de parámetros para el mismo  $g_c(t)$  propuesto en el presente proyecto.
- Proponer una estrategia distinta para  $g_c(t)$  y seleccionar sus parámetros mediante asignación de polos.
- Medir la “eficiencia” del  $g_c(t)$  haciendo correlación entre norma infinito de  $g_c(t)$ , el tiempo objetivo de la respuesta y la posición de los polos propuesta.
- En todos los casos deberán justificar la respuesta.

Informe escrito: Se confeccionará por grupo de estudiantes un informe escrito en el cual quede reflejado el trabajo desarrollado. El informe escrito deberá contar con las siguientes secciones:

1. Título del trabajo.
2. Nombre de los integrantes del grupo de trabajo.
3. Resumen del contenido.
4. Introducción.
5. Desarrollo y fundamentación
6. Resultados obtenidos.
7. Conclusiones generales del trabajo.
8. Referencias bibliográficas

Presentación Grupal: Al finalizar el ciclo lectivo y en forma adicional a la presentación del informe final escrito, cada uno de los grupos de trabajo presentará al resto de los estudiantes el resultado de sus trabajos en una Jornada de Exposiciones. Las presentaciones serán orales y tendrán una duración máxima de 15 minutos por grupo. Se evaluará en dichas presentaciones la claridad de exposición del grupo y la metodología de visualización de resultados obtenidos (gráficos, esquemas, animaciones computacionales, etc.).



## Modelo Matemático en ecuaciones diferenciales

Se busca  $u(x,t)$  solución de la siguiente ecuación diferencial

$$m(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = p \cdot g(t) \quad \text{en } \Omega = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq L\} \quad (1)$$

con sus condiciones de borde

$$\forall t \text{ en } x=0 \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{0,t} = 0 \end{cases} \quad \forall t \text{ en } x=L \begin{cases} EJ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = M_L \cdot g_C(t) \\ EJ \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

y condiciones iniciales nulas.

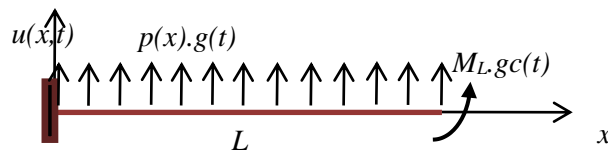


Figura 1. Esquema representativo del modelo matemático en ecuaciones diferenciales

Los valores de  $L$ ,  $EJ$ ,  $m(x)$ ,  $p$ ,  $M_L$  son datos. El término independiente de la ecuación diferencial (1) representa las acciones externas al sistema con una distribución espacial dada por  $p(x)$  y una variación temporal  $g(t)$  que es también dato. Según lo indicado por la condición de borde (2), la acción aplicada en el borde  $x=L$  tiene una magnitud  $M_L$ , y una variación temporal  $g_C(t)$ , que se debe seleccionar adecuadamente para lograr el objetivo de obtener una posición de referencia pretendida en  $u_R(L,t)$ , para diversas acciones  $g(t)$ .

### Parte 1. Modelo Matemático Discreto de N Grados de Libertad

En base al método de diferencias finitas aplicado al problema diferencial (1) se puede obtener un modelo discreto dado por:

$$M \cdot \ddot{\vec{z}}(t) + K \cdot \vec{z}(t) = g(t) \cdot \vec{f}_P + g_C(t) \cdot \vec{f}_M \quad (3)$$

Siendo

$$\vec{z}(t) = \{u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_L(t)\}^T \quad \text{con } u_j(t) = u(x_j, t) \quad (4)$$

$$M = m \cdot I \quad (5)$$

$$K = \frac{EJ}{Dx^4} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$



$$\vec{f}_p = \begin{Bmatrix} p \\ p \\ \vdots \\ p \\ p \end{Bmatrix}; \quad \vec{f}_M = \frac{M_L}{Dx^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

En el modelo discreto las acciones externas representadas por el término independiente de la ecuación diferencial (1), están representadas por el término independiente  $g(t) \cdot \vec{f}_p$  de la ecuación (3). Por otra parte, la acción  $M_L \cdot g_c(t)$  aplicada en el borde  $x=L$  (ecuación (2)), está representada en el sistema discreto por el término independiente  $g_c(t) \cdot \vec{f}_M$  de la ecuación (3).

Para obtener las matrices y vectores dados en las ecuaciones (3) a (6) se han usado las siguientes reglas de derivación numérica con orden de error 2, para evaluar las derivadas en  $x=x_s$ .

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{1}{2Dx} [-1f_{s-1} + 1f_{s+1}] & \frac{df}{dx} &= \frac{1}{2Dx} [-3f_s + 4f_{s+1} - 1f_{s+2}] \\ \frac{d^2f}{dx^2} &= \frac{1}{Dx^2} [f_{s-1} - 2f_s + f_{s+1}] & \frac{d^2f}{dx^2} &= \frac{1}{Dx^2} [2f_s - 5f_{s+1} + 4f_{s+2} - 1f_{s+3}] \\ \frac{d^3f}{dx^3} &= \frac{1}{2Dx^3} [-f_{s-2} + 2f_{s-1} - 2f_{s+1} + f_{s+2}] & & \\ \frac{d^3f}{dx^3} &= \frac{6}{Dx^3} \left[ \frac{-1}{4}f_s + \frac{3}{2}f_{s+1} - 2f_{s+2} + \frac{7}{6}f_{s+3} - \frac{1}{4}f_{s+4} \right] & & \\ \frac{d^4f}{dx^4} &= \frac{1}{Dx^4} [1f_{s-2} - 4f_{s-1} + 6f_s - 4f_{s+1} + 1f_{s+2}] & & \end{aligned} \quad (7)$$

### Acción dada por un Impulso Unitario

Se analiza a continuación el modelo discreto obtenido con  $N=20$ ; es decir 20 intervalos que dividen la longitud  $L$ . Se adoptan los siguientes datos:  $L=420$ ;  $EJ=9,45E11$ ;  $m=64,8$ ;  $p=100$ ,  $M_L=50000$ .

En la Figura 2 se puede observar la respuesta  $u(L,t)$  ante  $g(t)$  dado por un impulso unitario, obtenida con el modelo discreto de 20 grados de libertad, cuando se considera  $g_c(t)$  igual a cero.

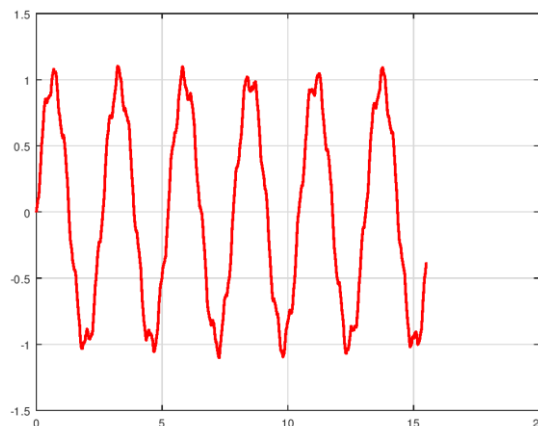


Figura 2.  $u(L,t)$  para N GL y una  $g(t)=\delta(t)$  con  $g_c(t)$  igual a cero.  $Dt=1e-3$



Del análisis de la Figura 2 se puede decir que además de una frecuencia fundamental se tiene frecuencias mucho más altas que la fundamental superpuestas en la respuesta. Esto puede quedar explícitamente en evidencia con una transformada de Fourier.

## Parte 2. Modelo Matemático de 1 Grado de Libertad

En muchas situaciones prácticas una aceptable aproximación suele ser la respuesta obtenida con un modelo matemático de un solo grado de libertad. Esta aproximación debe corroborarse en cada situación de interés comparando sus resultados con datos experimentales o con otros resultados de modelos más precisos y/o detallados, como el modelo discreto de 20 grados de libertad planteado anteriormente.

### Definición de los parámetros de 1 Grado de Libertad

Es posible obtener un modelo de un grado de libertad representativo del modelo matemático dado por las ecuaciones (3) haciendo uso de un cambio de base al espacio generado por los modos naturales de vibración del modelo matemático discreto de N grados de libertad.

Para ello se deben obtener los autovalores y autovectores de

$$(K - \omega^2 M) \vec{\varphi} = \vec{0} \quad (8)$$

### Comprobar que

para los datos  $L=420$ ;  $EJ=9,45E11$ ;  $m=64,8$ ; la menor frecuencia natural del modelo discreto de 20 grados de libertad, solución de la ecuación (8) es  $\omega_1^2=5,76=(2,4)^2$ .

Al plantear el siguiente cambio de base usando el modo  $\vec{\varphi}$  asociado a la menor frecuencia natural

$$\vec{z}(t) = \vec{\varphi} q(t) \quad (9)$$

en la ecuación (3) e imponer las condiciones de normalidad, se tiene que

$$\vec{\varphi}_n^T \left[ M \cdot \vec{\varphi} \cdot \ddot{q}(t) + K \cdot \vec{\varphi} \cdot q(t) = g(t) \cdot \vec{f}_P + g_C(t) \cdot \vec{f}_M \right] = 0 \quad (10)$$

Siendo  $\vec{\varphi}_n^T$  el autovector por izquierda de (8) asociado a la menor frecuencia natural. Dicho autovector por izquierda se calcula como el autovector por derecha de la matriz  $(K^T - \omega^2 M^T)$ .

Así es posible obtener la siguiente ecuación dinámica de un grado de libertad

$$\ddot{q}(t) + \omega_n^2 \cdot q(t) = g(t) \cdot b_P + g_C(t) \cdot b_M \quad (11)$$

Siendo

$$\begin{aligned} m_n &= \vec{\varphi}_n^T M \cdot \vec{\varphi} \\ k_n &= \vec{\varphi}_n^T K \cdot \vec{\varphi} \\ \omega_n^2 &= k_n / m_n \end{aligned} \quad \begin{aligned} b_P &= (\vec{\varphi}_n^T \cdot \vec{f}_P) / m_n \\ b_M &= (\vec{\varphi}_n^T \cdot \vec{f}_M) / m_n \end{aligned} \quad (12)$$



### Comprobar que

para los datos  $L=420$ ;  $EJ=9,45E11$ ;  $m=64,8$ ;  $p=100$ , la ecuación de equilibrio (11) resulta

$$\ddot{q}(t) + \omega_n^2 \cdot q(t) = b_p \cdot g(t) + b_M \cdot g_c(t) \quad (13)$$

con

$$k_n = 2013 \quad m_n = 348,94 \quad b_p = 2,4128 = 841,92/348,94 \quad b_M = 0,024 = 8,37/348,94 \quad (14)$$

$$\omega_n^2 = 5,76 \quad \omega_n = 2,401 \quad T = 2\pi / \omega_n = 2,6159$$

### Comprobar que

Usando un método numérico (Diferencia central, o Runge Kutta) la respuesta  $q(t)$  de la ecuación (13) resulta la siguiente Figura 3, para cuando  $M_L=0$ , y  $g(t)$  es la función impulso unitario o delta de Dirac,

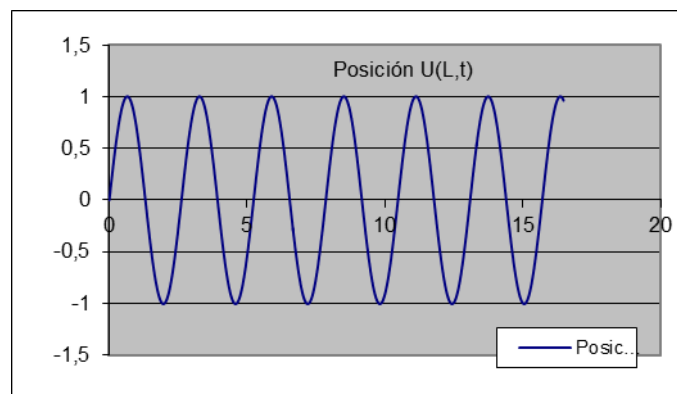


Figura 3.  $q(t)$  para  $M_L=0$ ,  $g(t)=\delta(t)$ , obtenido con Diferencia Central y  $Dt=1E-2$

Se puede observar que el sistema de un grado de libertad ante un impulso unitario responde con una oscilación que conserva la amplitud y con una frecuencia aproximada de 6 ciclos en 15,66 seg. Esto es una frecuencia 2,407 rad/seg que aproxima muy bien a  $\omega_1^2=5,76=(2,4)^2$ , la menor frecuencia natural solución de la ecuación (8) con 20 grados de libertad.

Es oportuno destacar que la respuesta representada en la Figura (3) se puede comparar con la del sistema de 20 grados de libertad de Figura 2, considerando que  $u(L,t) = \varphi_1(L) \cdot q(t)$  a partir de la ecuación (9) cuando se adopta un solo modo. En particular el modo ha sido normalizado de modo que en  $x=L$  vale 1. Así es posible comparara las gráficas sin ningún factor de corrección.

De comparar esta respuesta con la del modelo de Diferencias Finitas se puede concluir que el modelo de 1 grado de libertad representa muy bien el comportamiento del modelo de 20 grados de libertad, salvo las frecuencias altas, que por otra parte no tienen gran incidencia en la respuesta.

### Selección de $g_c(t)$ en 1 Grado de Libertad

En términos generales es posible expresar un modelo de un grado de libertad en la forma:

$$\ddot{q}(t) + \omega_n^2 \cdot q(t) = b_p \cdot g(t) + b_M \cdot g_c(t) \quad (15)$$

asumiendo condiciones iniciales nulas, y que



$$g_C(t) = K_P \cdot e(t) + K_D \cdot \dot{e}(t) + K_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (16)$$

$$e(t) = C \cdot (q_R - q(t)) = (\vec{z}_R(t) - \vec{z}(N, t)) = u_R(L, t) - u(L, t) \quad (17)$$

Es importante destacar que la función  $e(t)$  mide en cada instante de tiempo  $t$  la diferencia entre una posición de referencia pretendida  $u_R(L, t)$  y la posición actual de sistema  $u(L, t)$ .

La función  $g_C(t)$  queda definida en cada instante de tiempo según son las variaciones de la función  $e(t)$  en forma proporcional a las constantes  $K_P$ ,  $K_D$  y  $K_I$ , que deben elegirse adecuadamente. Para ello es conveniente analizar el sistema de un grado de libertad en el dominio complejo  $s$ . Así al aplicar Transformada de Laplace a las ecuaciones (15-17),

**Comprobar que** resulta

$$(s^2 + \omega_n^2) \cdot Q(s) = b_P \cdot G(s) + b_M \cdot G_C(s) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} G_C(s) &= (K_P + s \cdot K_D + \frac{K_I}{s}) \cdot e(s) \\ &= K_D \cdot \frac{s^2 + s \cdot (K_P / K_D) + (K_I / K_D)}{s} \cdot e(s) = H_C(s) \cdot e(s) \end{aligned} \quad (19)$$

$$e(s) = C \cdot (q_R(s) - Q(s)) \quad (20)$$

**Comprobar que** al considerar las ecuaciones (18-20) se puede despejar  $Q(s)$  en la forma

$$Q(s) = \frac{b_P \cdot H(s)}{1 + C \cdot b_M \cdot H_C(s) \cdot H(s)} \cdot G(s) + \frac{C \cdot b_M \cdot H_C(s) \cdot H(s)}{1 + C \cdot b_M \cdot H_C(s) \cdot H(s)} \cdot q_R(s) \quad (21)$$

con

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s^2 + \omega_n^2)} \\ H_C(s) &= K_D \frac{(s^2 + s \cdot (K_P / K_D) + (K_I / K_D))}{s} \end{aligned} \quad (22)$$

O bien

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{b_P / (s^2 + \omega_n^2)}{1 + C \cdot b_M \cdot K_D \frac{(s^2 + s \cdot (K_P / K_D) + (K_I / K_D))}{s \cdot (s^2 + \omega_n^2)}} \cdot G(s) + \\ &+ \frac{C \cdot b_M \cdot K_D \frac{(s^2 + s \cdot (K_P / K_D) + (K_I / K_D))}{s \cdot (s^2 + \omega_n^2)}}{1 + C \cdot b_M \cdot K_D \frac{(s^2 + s \cdot (K_P / K_D) + (K_I / K_D))}{s \cdot (s^2 + \omega_n^2)}} q_R(s) \end{aligned} \quad (23)$$

Las ecuaciones (21-23) se pueden representar por el diagrama de bloques de la Figura 4.

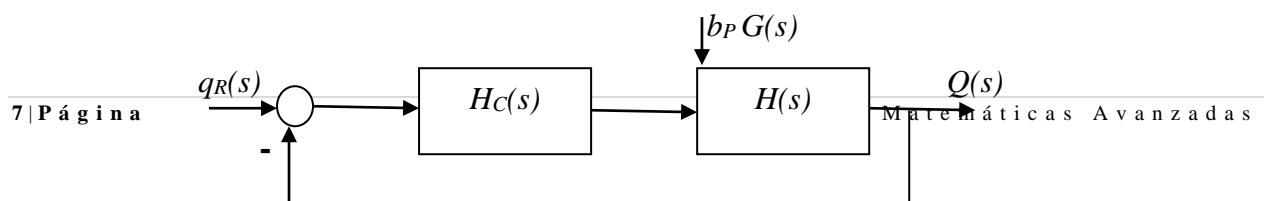




Figura 4. Diagrama de Bloques del modelo de 1 GL

**Interpretar** en términos de funciones de transferencia y transformadas los significados de:

$H(s)$ ;  $H_C(s)$ ;  $G(s)$  y  $q_R(s)$

**Dibujar** en el plano  $s$  los ceros y polos de cada una de esas funciones racionales.

### Selección de los parámetros de $G_C(s)$

La respuesta del sistema depende de los polos de la función  $Q(s)$  dada por ecuación (23) y están definidos por las raíces de la ecuación

$$0 = 1 + C \cdot b_M \cdot H(s) \cdot H_C(s)$$

$$0 = 1 + C \cdot b_M \cdot K_D \frac{(s^2 + s \cdot (K_P / K_D) + (K_I / K_D))}{s \cdot (s^2 + \omega_n^2)} \quad (24)$$

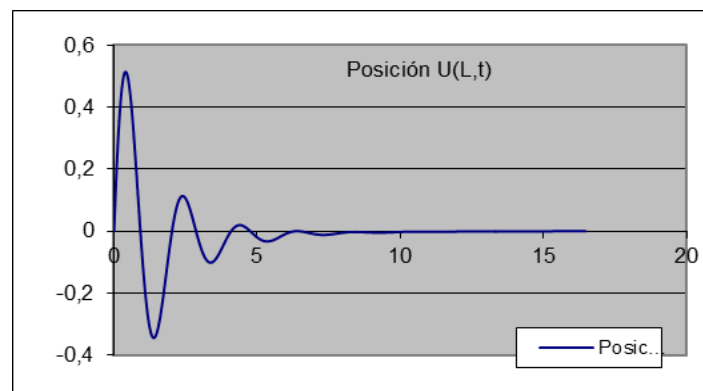
Se debe destacar que si la acción externa es  $g(t)$  igual a Delta de Dirac (impulso unitario) y la  $q_R(t)$  es nula, dichos polos son los únicos a considerar. Por el contrario, si  $g(t)$  y/o  $q_R(t)$  cambian, a los polos definidos por la ecuación (23) se le agregarán nuevos polos que definirán la respuesta.

**Para**  $C=1$ ;  $\omega_n = 5,76$ ;  $b_p = 841,92/(348,94)$ ;  $M_L=50000$   $b_M = 8,37/348,94$ ;  $K_D=70$ ;  $K_P/K_D=3$ ;  $K_I/K_D=2$

**Encontrar** los polos de dados por ecuación (24)

**Graficar** en el plano  $s$  los polos originales ( $s = \pm j\omega_n$ ); los ceros y polos de  $H_C(s)$  y los nuevos polos de  $Q(s)$ .

**Comprobar que** la respuesta  $q(t)$  y la acción  $g_C(t)$  para lograr que  $q_R=0$  ante  $g(t)=\delta(t)$ , están dadas por las curvas que se observan en la siguiente Figura 5.

Figura 5. Respuesta de 1 grado de libertad del Modelo Reducido con  $Dt=1e-2$ 

**Comprobar que** con la acción  $g_C(t)$  definida en el modelo de 1 grado de libertad, puesta en el modelo de 20 grados de libertad, la respuesta que se obtiene para  $u(L,t)$  es la representada en la siguiente Figura 6 para lograr que  $q_R=0$  ante  $g(t)=\delta(t)$ .



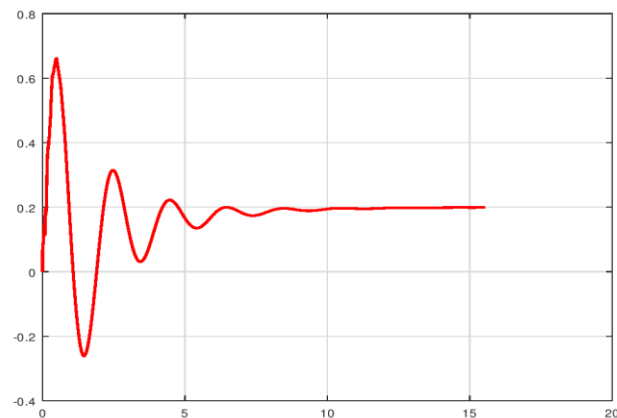


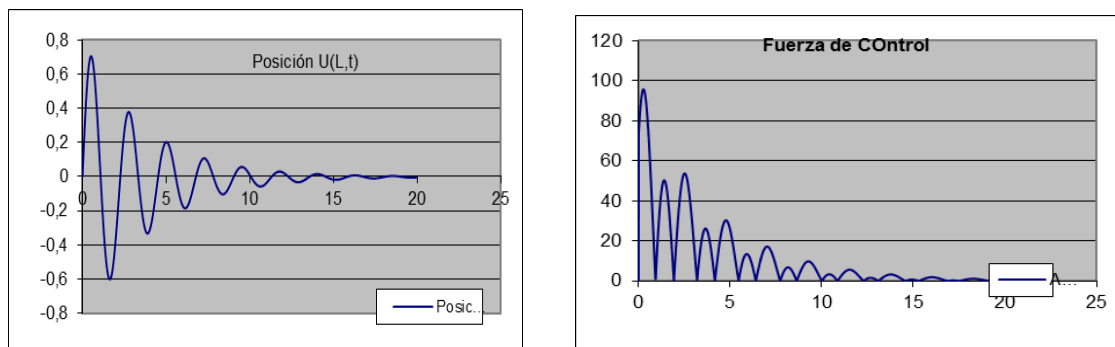
Figura 6.  $u(L,t)$  del Modelo discreto de 20 grados de libertad con  $g(t) = \delta(t)$   $K_D = 70$ ;  $K_P/K_D = 3$ ;  $K_I/K_D = 2$  y  $Dt = 1e-3$

De comparar las Figuras 5 y 6 se puede concluir que al introducir la acción  $b_M g_C(t)$  definido anteriormente, se logra un sistema oscilatorio amortiguado, que en pocos segundos se detiene, modificando el sistema original que no presentaba ningún amortiguamiento.

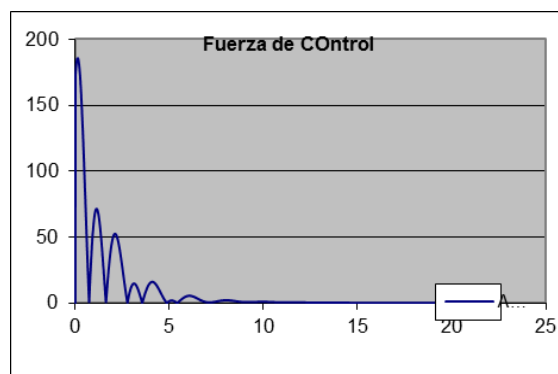
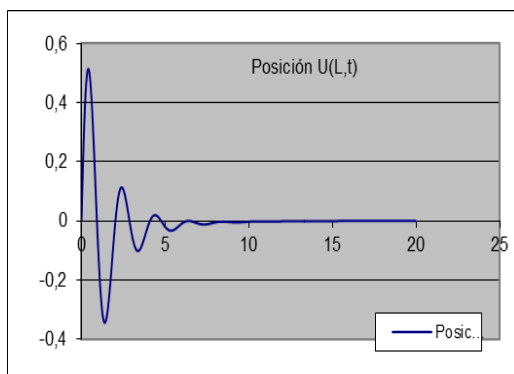
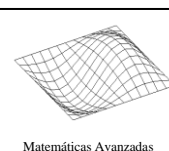
Resulta necesario conocer qué ocurre con el nuevo sistema ante cambios de la magnitud  $K_D$ , ante otros objetivos buscados para  $q_R$  y ante otras variaciones temporales de las acciones externas  $g(t)$ .

### Variación de los parámetros de $G_C(s)$

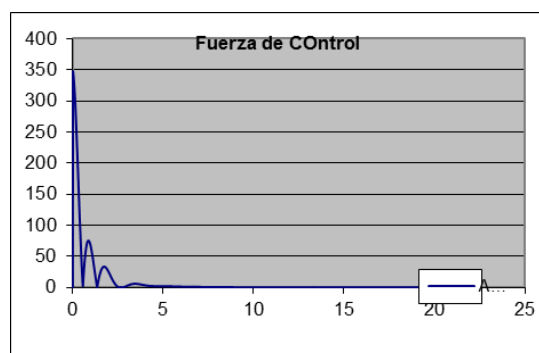
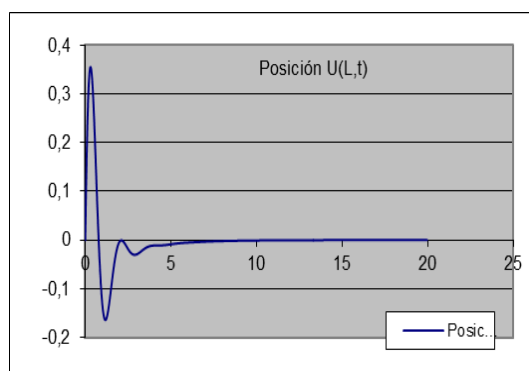
Para la misma excitación  $g(t)$  igual a Delta de Dirac (impulso unitario), y la acción  $g_C(t)$  definida en el punto anterior, se busca variar el parámetro  $K_D$  y observar la respuesta  $q(t)$ , la acción  $g_C(t)$  que resultan de dicha variación.



$K_d=30$



Kd=70



Kd=140

Figura 7. Sensibilidad de  $q(t)$  y  $g_c(t)$ , para  $g(t) = \delta(t)$  y  $K_P/K_D=3; K_I/K_D=2$  con  $Dt=1e-2$

De comparar las distintas respuesta presentadas en la Figura 7, se puede observar en general que ante aumentos en el valor de  $K_d$ , el valor nulo de  $u(L,t)$  se alcanza en menos tiempo, y los valores de  $g_c(t)$  son mayores. Para describir la eficiencia del sistema obtenido es posible adoptar entre otras muchas posibilidades, las siguientes dos características: norma infinito de  $g_c(t)$  y el tiempo objetivo para un impulso unitario.

La norma infinito de  $g_c(t)$ , es un indicador de la máxima acción que debe ser capaz de entregar el sistema adicionado. Por otra parte, se define como “*tiempo objetivo*” para la acción Impulso unitario a una aproximación del menor tiempo para el cual la respuesta  $dq/dt$  posterior a dicho tiempo objetivo es siempre menor a  $1,4e-2$ . De esta manera el tiempo objetivo es un indicador de cuánto tarda en lograrse el objetivo del sistema incorporado.

**Comprobar** los valores de la siguiente Tabla y **completar** los valores faltantes

| $K_D$ | Nor_Inf $g_c(t)$ | Tiempo Objetivo | Polo Real | Polos Complejos |
|-------|------------------|-----------------|-----------|-----------------|
| 30    | 96               | 19              |           |                 |
| 70    | 185              | 6,52            |           |                 |
| 100   |                  |                 |           |                 |
| 140   | 347              | 3,65            |           |                 |
| 300   |                  |                 |           |                 |
| 600   |                  |                 |           |                 |

Tabla 1. Sensibilidad de la respuesta ante  $g(t) = \delta(t)$  y  $K_P/K_D=3; K_I/K_D=2$



Para los tres valores incluidos en la Tabla 1 se representan en la siguiente Figura 8 la relación entre  $K_D$  con la Norma infinito de  $g_C(t)$  y el tiempo objetivo. Se puede observar que la relación entre  $K_D$  y la Norma infinito de  $g_C(t)$  es cercana a ser lineal. Por otra parte el tiempo objetivo tiene un comportamiento que mientras aumenta el cambio en la variación del tiempo objetivo es cada vez menor.

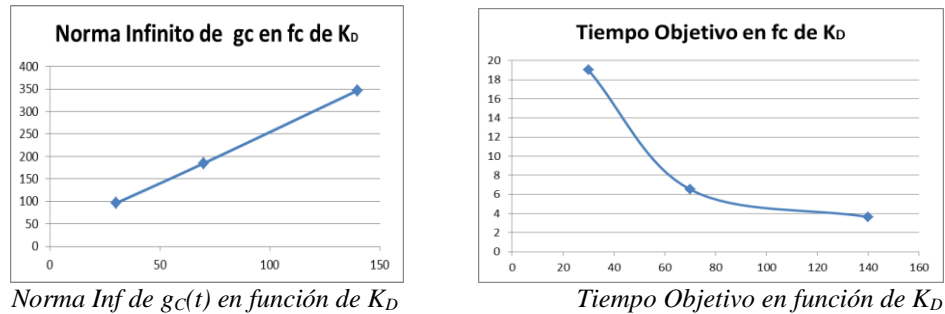


Figura 8. Sensibilidad para  $g(t) = \delta(t)$  y  $K_P/K_D=3; K_I/K_D=2$

**Ajustar** con mínimos cuadrados de la relación entre Tiempo Objetivo en función de  $K_D$  usando las funciones base 1;  $(1/K_D)$  y  $(1/K_D)^2$ , y obtener los coeficientes de la siguiente función

$$t_{obj}(K_D) = 1 \cdot \alpha + \beta \cdot \frac{1}{K_D} + \gamma \cdot \left( \frac{1}{K_D} \right)^2 \quad (25)$$

**Considerar si es posible justificar la siguiente conclusión**

“Se puede destacar que cuando  $K_D$  aumenta hasta infinito, y la Norma Infinito de  $g_C(t)$  tiende por lo tanto a infinito, el tiempo objetivo tiende a  $\alpha$  segundos. Es decir, para las relaciones elegidas  $K_P/K_D=3; K_I/K_D=2$ , por más que se tenga capacidad infinita de la acción  $g_C(t)$  el tiempo objetivo no será inferior a  $\alpha$  segundos.”

### Objetivo $q_R$ no nulo

**Comprobar que** la respuesta  $q(t)$  y la acción  $g_C(t)$  para lograr que  $q_R=0,5$  ante  $g(t) = \delta(t)$ , están dadas por las curvas que se observan en la siguiente Figura 9.

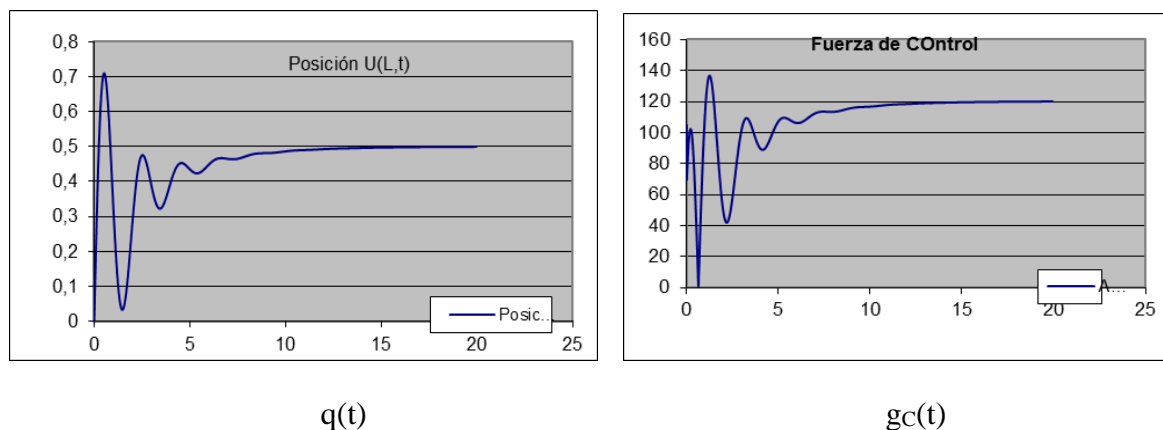


Figura 9. 1 GL para una  $g(t) = \delta(t)$  y  $K_D = 70; K_P/K_D=3; K_I/K_D=2$  con  $Dt=1e-2$



Se puede destacar que si bien se logra el objetivo de llevar al sistema a  $q_R=0,5$  el tiempo objetivo es cercano a 10 segundos y la Norma infinito de  $g_C(t)$  es superior a 140. Estos valores son similares a los requeridos cuando  $q_R=0$ .

**Comprobar que** la respuesta  $q(t)$  y la acción  $g_C(t)$  para lograr que  $q_R=0,5$  ante  $g(t)$  dada por una función escalón también es posible con las relaciones elegidas  $K_P/K_D=3$ ;  $K_I/K_D=2$ .

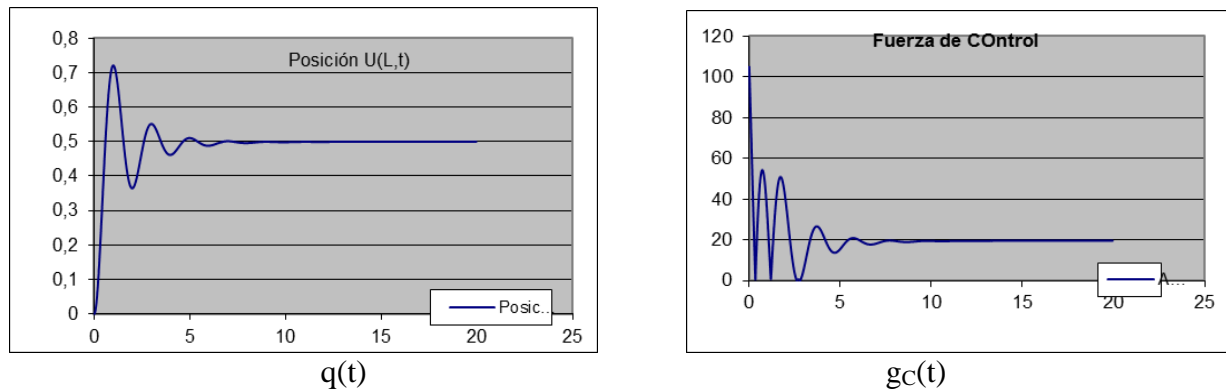


Figura 10. 1 GL para una  $g(t)$  Escalón, y  $K_D=70$ ;  $K_P/K_D=3$ ;  $K_I/K_D=2$  con  $Dt=1e-2$

### Parte 3. Modelo Matemático Discreto de N Grados de Libertad

En esta parte se presentan las respuestas ante distintas acciones externas, del modelo discreto de ecuaciones (3) a (6), con 20 grados de libertad a partir de los datos  $L=420$ ;  $EJ=9,45E11$ ;  $m=64,8$ ;  $p=100$ ,  $M_L=50000$ , y la acción  $g_C(t)$  definida en el sistema de un grado de libertad, es decir con las relaciones elegidas  $K_P/K_D=3$ ;  $K_I/K_D=2$ .

#### Acción dada por un Impulso Unitario

En la Figura 11 se puede observar la respuesta  $u(L,t)$  ante un impulso unitario en el modelo de 20 grados de libertad, cuando se considera  $g_C(t)$  igual a cero. Es oportuno destacar que esta respuesta se analizó anteriormente a los efectos de definir el modelo de un grado de libertad.

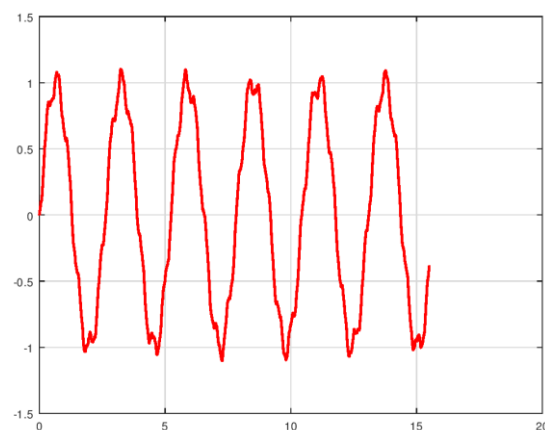
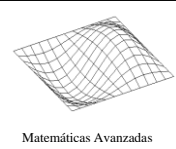


Figura 11.  $u(L,t)$  para 20 GL y una  $g(t)=\delta(t)$  con  $g_C(t)$  con  $Dt=1e-3$



En la Figura 12 se puede observar la respuesta  $u(L,t)$  ante un impulso unitario en el modelo de 20 grados de libertad, cuando se considera  $g_C(t)$  con  $K_D=70$ , y  $K_P/K_D=3$ ;  $K_I/K_D=2$ . Se puede observar que el nivel de amortiguamiento obtenido es importante y similar al obtenido en el sistema de un grado de libertad que se muestra en la Figura 3. Tanto el tiempo objetivo como la norma infinito de  $g_C(t)$  son similares entre ambos modelos.

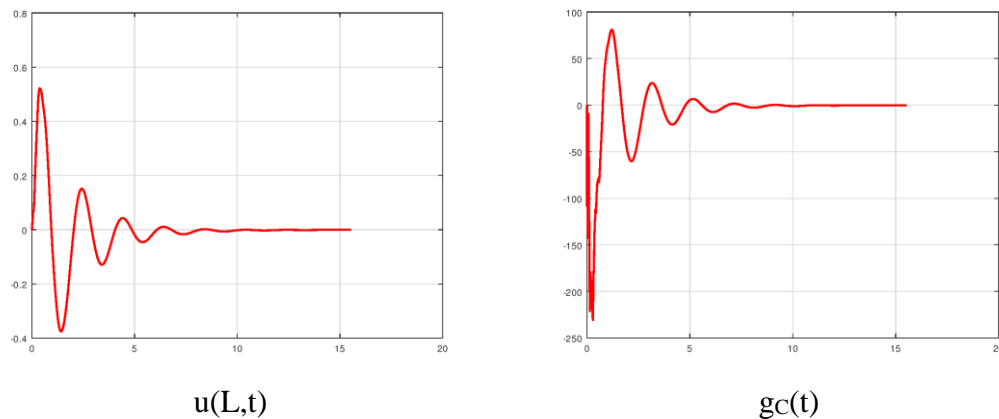


Figura 12. N GL para una  $g(t)=\delta(t)$  y  $K_D=70$ ;  $K_P/K_D=3$ ;  $K_I/K_D=2$  con  $Dt=1e-3$

### Acción dada por una Función Escalón

En la Figura 13 se puede observar la respuesta  $u(L,t)$  ante una  $g(t)$  igual a una función escalón. Cuando  $g_C(t)$  es nula el sistema es oscilatorio alrededor de un valor no nulo de  $u(L,t)$ . Cuando se considera  $g_C(t)$  no nula con  $K_D=70$ , y  $K_P/K_D=3$ ;  $K_I/K_D=2$ , el sistema se amortigua en aproximadamente 14 segundos. Este tiempo es superior al tiempo objetivo cuando la función es impulso unitario.

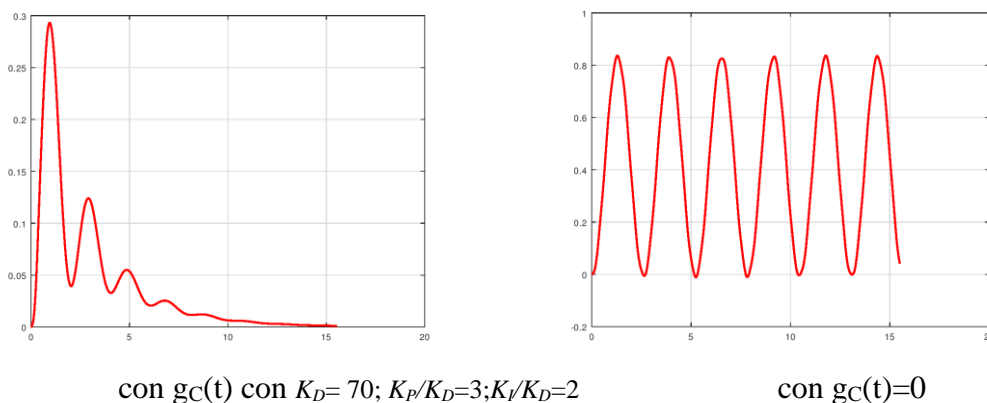


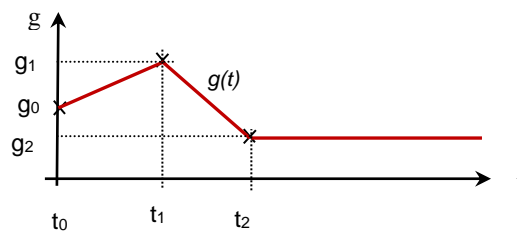
Figura 13.  $u(L,t)$  en 20 GL para una  $g(t)$  Escalón con  $Dt=1E-3$



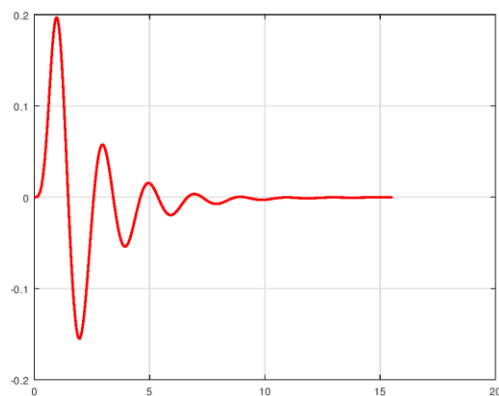
## Acción dada por una Función Impulso Triangular

Sea la  $g(t)$  la siguiente función impulso triangular, donde la duración total de la carga está dada por 1 segundo; que es menor al período fundamental del sistema donde se aplica que es aproximadamente 2,62 segundos. Dicho período fundamental se puede obtener de la menor frecuencia  $\omega_1$  de la solución de autovalores de la ecuación (8) mediante  $T=2\pi/\omega_1=2\pi/2,4$ .

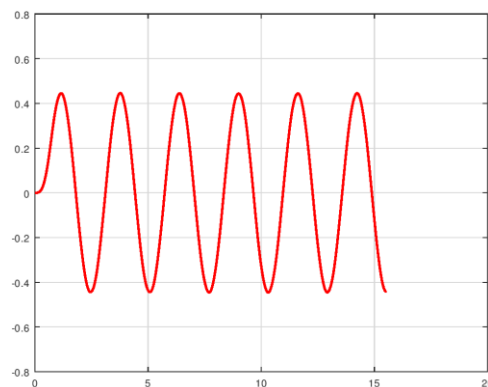
| t   | g(t) |
|-----|------|
| 0   | 0    |
| 0,5 | 1    |
| 1   | 0    |
| 20  | 0    |



En la Figura 14 se puede observar la respuesta  $u(L,t)$  ante una  $g(t)$  igual a la función impulso triangular definida. Cuando  $g_C(t)$  es nula el sistema es oscilatorio alrededor de un valor no nulo de  $u(L,t)$ . Cuando  $g_C(t)$  es no nula con  $K_D=70$ , y  $K_P/K_D=3$ ;  $K_I/K_D=2$ , el sistema se amortigua en aproximadamente 10 segundos. Este tiempo es similar al tiempo objetivo cuando la función es impulso unitario.



$g_C(t)$  con  $K_D=70$ ;  $K_P/K_D=3$ ;  $K_I/K_D=2$



$g_C(t)=0$

Figura 14.  $u(L,t)$  en 20 GL para una  $g(t)$  Escalón

En la Figura 15 se puede observar la respuesta del sistema ante una  $g(t)$  igual a la función impulso triangular definida, pero buscando que  $u(L,t)$  sea 0,5 cuando  $t$  crece. Para lograrlo se aplica al sistema de 20 grados de libertad el mismo  $g_C(t)$  no nula definido anteriormente con  $K_D=70$ ;  $K_P/K_D=3$ ;  $K_I/K_D=2$ .

Se puede observar en la respuesta  $u(L,t)$  en la Figura 15 que el objetivo se logra a partir de los 11 segundos aproximadamente. La configuración obtenida es de una flexión permanente tal como se puede observar en la  $u(x,15 \text{ seg})$  de la Figura 15.

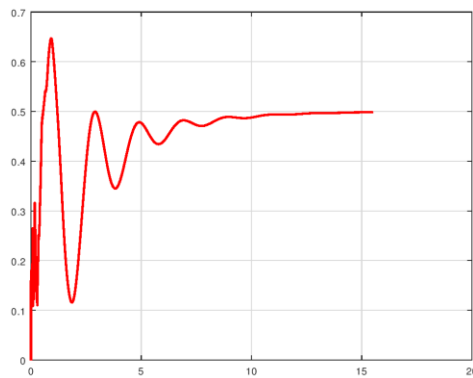
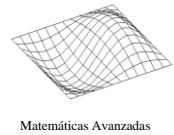
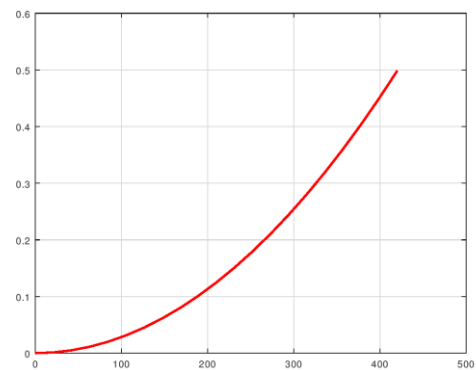
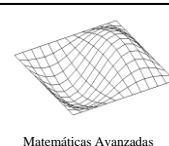
 $u(L,t)$  $u(x,15\text{seg})$ 

Figura 15. 20 GL para una  $g(t)$  Triangular y  $g_C(t)$  con  $K_D=70$ ;  $K_P/K_D=3$ ;  $K_I/K_D=2$

## Conclusiones

En un modelo matemático discreto cuya respuesta está dominada por el autovector asociado a la frecuencia natural más baja, es posible seleccionar parámetros de control de vibraciones con Transformada de Laplace, asignando polos en un modelo de un grado de libertad obtenido con dicho autovector y aplicarlo en el sistema completo bajo ciertas restricciones que resultan de medir la eficiencia del sistema con fundamentos tecnológicos.



### Parte 4 Opcional. Solución analítica del Modelo Matemático Homogéneo

**Comprobar** que la solución del problema homogéneo que corresponde a vibraciones libres dado por

$$m(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad \text{en } \Omega = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq L\} \quad (3)$$

con sus condiciones de borde

$$\forall t \text{ en } x=0 \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{0,t} = 0 \end{cases} \quad \forall t \text{ en } x=L \begin{cases} EJ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ EJ \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

está dado por los valores propios

$$\omega_i^2 = \frac{EJ}{L^4} (\beta_i L)^4 \quad (5)$$

y sus siguientes funciones propias  $\phi_i(x)$ :

$$\phi_i(x) = \cosh(\beta_i L \cdot \frac{x}{L}) - \cos(\beta_i L \cdot \frac{x}{L}) - \sigma_i (\sinh(\beta_i L \cdot \frac{x}{L}) - \sin(\beta_i L \cdot \frac{x}{L}))$$

$$\sigma_i = \frac{\sinh(\beta_i L) - \sin(\beta_i L)}{\cosh(\beta_i L) + \cos(\beta_i L)} \quad (6)$$

Siendo los coeficientes  $\beta_i L$  las raíces de la siguiente ecuación no lineal:

$$\cosh(\beta_i L) \cdot \cos(\beta_i L) + 1 = 0 \quad (7)$$

Para los primeros modos las raíces son las siguientes:

| i           | 1      | 2      | 3      | 4      |
|-------------|--------|--------|--------|--------|
| $\beta_i L$ | 1,875  | 4,694  | 7,8547 | 10,995 |
| $\sigma_i$  | 0,7341 | 1,0185 | 0,9992 | 1,0000 |

Las funciones  $\phi_i(x)$  se pueden observar en la Figura 1.

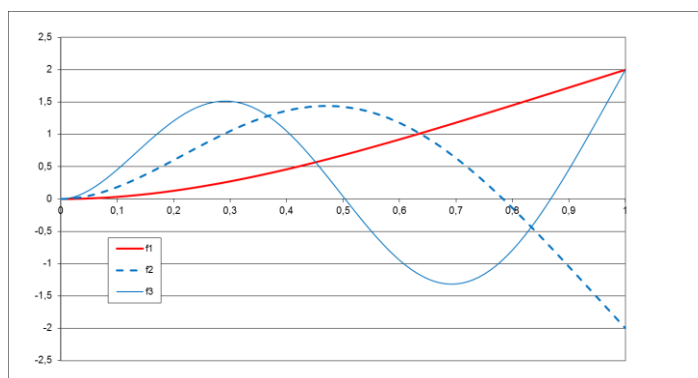


Figura . Modos de vibración libre  $\phi_1(x/L)$ ,  $\phi_2(x/L)$ ,  $\phi_3(x/L)$