

Análisis de sistemas no lineales

Dr. Ing. Rodrigo Gonzalez

`rodrazalez@fing.uncu.edu.ar`

Control y Sistemas

Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de Cuyo



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

1 Sistemas lineales

- Representación matemática de sistemas lineales
- Propiedades de los sistemas lineales

2 Sistemas no lineales

- Definición
- Representación matemática de sistemas no lineales
- Clasificación de los modelos
- Punto de equilibrio
- Ejemplos de sistemas no lineales
- Linealización de modelos no lineales

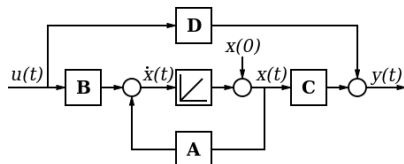
Un sistema lineal LIT se puede representar en espacio de estados como,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t), \quad (2)$$

donde:

- $\mathbf{x}(\cdot)$ es el vector de estados $\in \mathbb{R}^n$.
- $\mathbf{u}(\cdot)$ es el vector de entrada $\in \mathbb{R}^p$.
- $\mathbf{y}(\cdot)$ es el vector de salida $\in \mathbb{R}^q$.



- A es la matriz de estados, $\dim[A] = n \times n$.
- B es la matriz de entrada, $\dim[B] = n \times p$.
- C es la matriz de salida, $\dim[C] = q \times n$.
- D es la matriz de transmisión directa, $\dim[C] = q \times p$.

- La solución general del sistema se puede resolver en forma analítica.
- En presencia de una entrada externa $\mathbf{u}(t)$,
 - 1 Se satisface el principio de superposición.
 - 2 El sistema es asintóticamente estable, si $\mathbf{u}(t)$ está limitada, la salida estará limitada.
 - 3 Si $\mathbf{u}(t)$ es sinusoidal, la salida será sinusoidal con misma frecuencia.

Un sistema no lineal es aquél que no verifica el principio de superposición.

El principio de superposición establece las siguientes propiedades:

- Aditividad:

Si $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces $f(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$

- Proporcionalidad:

Si $f(x) = y$, entonces $f(\alpha x) = \alpha y$

¿Cuáles de las siguientes expresiones matemáticas es lineal?

$$y = a + x \cdot b \quad (3)$$

$$y = e^x \quad (4)$$

$$y = e^{-x} \quad (5)$$

$$y = \sin x \quad (6)$$

$$y = x^2 \quad (7)$$

- Virtualmente todos los sistemas físicos son de naturaleza no lineal.
- En muchos casos es posible describir la operación de un sistema físico por un modelo lineal:
 - 1 porque las no linealidades se consideran despreciables.
 - 2 porque el rango de operación del sistema es deliberadamente acotado (linealización).
- Cuando el modelo linealizado no es adecuado para un desempeño requerido, se deben usar herramientas del control no lineal (por ej. Estabilidad de Lyapunov).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \quad \forall t \geq 0 \quad (8)$$

$$t \in \mathbb{R}^+$$

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$$

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

$\dot{\mathbf{x}}(t)$ es una ecuación diferencial vectorial de primer orden.

No se pierde generalidad si se supone que el sistema puede ser descrito por una ecuación diferencial escalar de orden n , tal que,

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = h[t, y(t), \dot{y}(t), \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, u(t)] \quad \forall t \geq 0. \quad (9)$$

Se redefine $\frac{d^n y(t)}{dt^n}$ para obtener $\mathbf{x}(t)$ (Ec. 8),

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\x_2(t) &= \dot{y}(t) \\&\vdots \\x_n(t) &= \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}.\end{aligned}\tag{10}$$

Que es equivalente a,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= h[t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \mathbf{u}(t)]\end{aligned}\tag{11}$$

(equivalente a Ec. 9).

La Ec. 11 toma la forma de la Ec. 8 con,

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \quad (12)$$

$$f[t, \mathbf{x}, \mathbf{u}] = [x_2, \dots, x_{n-1}, h(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \mathbf{u})]^T, \quad (13)$$

donde finalmente,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f[t, \mathbf{x}, \mathbf{u}] \quad \forall t \geq 0 \quad (14)$$

Oscilador de van der Pol se define como,

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (15)$$

$$\implies \ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - x. \quad (16)$$

Se definen dos nuevas variables,

$$x_1 = x \quad (17)$$

$$x_2 = \dot{x}. \quad (18)$$

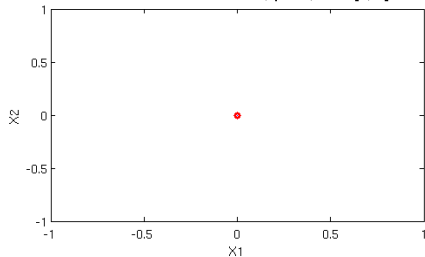
Operando,

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (19)$$

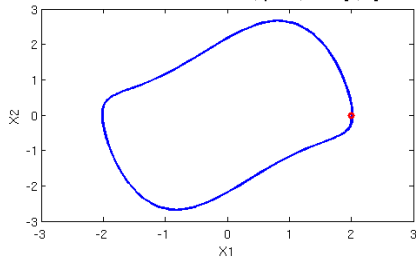
$$\dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1. \quad (20)$$

Oscilador de van der Pol

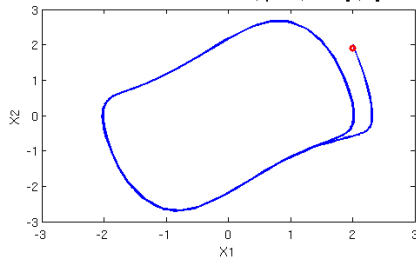
Oscilador de Van der Pol, $\mu = 1$, $x_0 = [0; 0]$



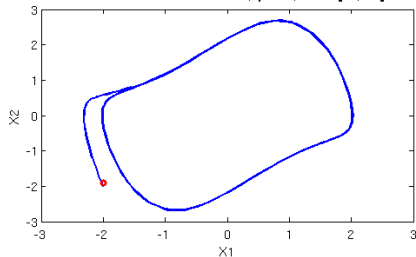
Oscilador de Van der Pol, $\mu = 1$, $x_0 = [2; 0]$



Oscilador de Van der Pol, $\mu = 1$, $x_0 = [2; 2]$



Oscilador de Van der Pol, $\mu = 1$, $x_0 = [-2; -2]$



Los sistemas no lineales se pueden clasificar en:

- Forzado: $\dot{\mathbf{x}}(t) = f[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \quad \forall t \geq 0$
- No forzado: $\dot{\mathbf{x}}(t) = f[t, \mathbf{x}(t)] \quad \forall t \geq 0$
- Sistema autónomo o invariante en el tiempo: f no depende de t (por ej., saturación).
- Sistema no autónomo o variante en el tiempo.

La siguiente ecuación representa un modelo simplificado del movimiento de un vehículo bajo el agua, donde $u(t)$ es el impulso del vehículo y v es la velocidad.

$$\dot{v} - |v| v = u. \quad (21)$$

Resuelva el sistema en MATLAB para $u = 10$ y $u = 1$ para 5 segundos de excitación. Observe ambas salidas y compare.

- $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de equilibrio* de un sistema forzado si,

$$f(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (22)$$

- Si $\bar{\mathbf{x}}$ es equilibrio del sistema, entonces la ecuación diferencial para la condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}$ tiene la única solución $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} \quad \forall t \geq 0$.
- $\bar{\mathbf{u}}$ es una entrada al sistema determinada que fija el punto de equilibrio.
- Entonces, si el sistema comienza en el equilibrio, permanece en él.
- El punto de equilibrio de un sistema no forzado se define en forma similar como,

$$f(t, \bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (23)$$

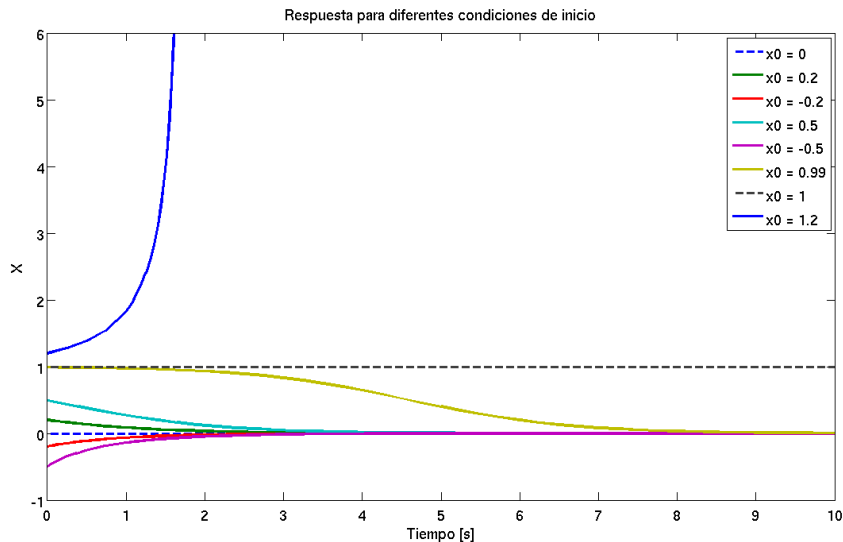
- Un sistema puede tener más de un punto de equilibrio.
- Un sistema lineal tiene un único punto de equilibrio si A es no singular ($\det(A) \neq 0$)
- El punto de equilibrio es estable si los autovalores de A tienen parte real negativa, sin importar la condición inicial.

Ejercicio 4

Resuelva en MATLAB el siguiente sistema:

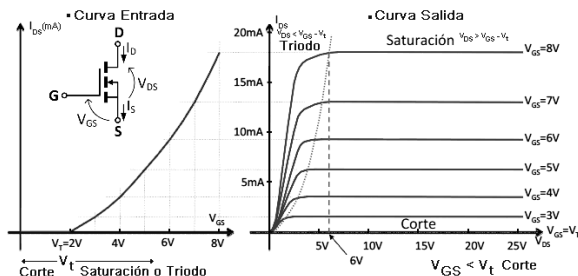
$$\dot{x} = x^2 - x.$$

(24)



Linealización de modelos no lineales, motivación

- Todos los sistemas físicos son no lineales.
- Por otro lado, una buena parte de la teoría del control se centra en sistemas lineales LIT.
- Por tanto, se desea encontrar dentro de qué límites un sistema no lineal puede ser considerado lineal.
- El sistema puede ser considerado lineal en la vecindad de un punto de equilibrio.



Curva de salida y característica de transferencia de un MOSFET de canal n.

- Se define un sistema no lineal de dos variables como,

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \quad (25)$$

$$\dot{x}_2 = g(x_1, x_2). \quad (26)$$

- El sistema tiene un punto de equilibrio en (\bar{x}_1, \bar{x}_2) .
- Se desea encontrar dentro de qué límites f y g pueden ser considerados lineales.
- Por series de Taylor f y g se representan como,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \\ & + f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2!} \dots \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) = & g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \\ & + g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!} + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2!} \dots \end{aligned} \quad (28)$$

- Se descartan los términos de segundo orden y sucesivos.
- Debido a que $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ y $g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$,

$$\dot{x}_1 \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) \quad (29)$$

$$\dot{x}_2 \approx \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2). \quad (30)$$

- Este es un sistema lineal cuya matriz de coeficientes es,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

- La matriz (31) se conoce como Jacobiano.
- Analizando los autovalores del Jacobiano se puede determinar la naturaleza del punto de equilibrio (sumidero, fuente; estable, inestable).

Ejercicio 5

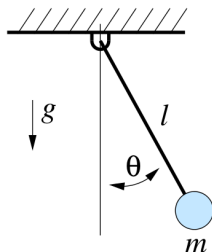
Encuentre el Jacobiano y los puntos de equilibrio del sistema en función de θ .

- La ecuación de un péndulo con fricción:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m l^2} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0, \quad (32)$$

donde:

- θ es el ángulo (rad).
- m la masa del péndulo (kg).
- l el largo de la soga (m).
- b el coeficiente de fricción viscosa (Nms/rad)
- g la constante de gravedad (m^2/s).



La siguiente ecuación representa un sistema caótico,

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = 6 \sin(t) . \quad (33)$$

Resuelva el sistema en MATLAB. Obtenga el Jacobiano del sistema y analice los puntos de equilibrio del sistema.

Chaotic phenomena can be observed in many physical systems. The most commonly seen physical problem is turbulence in fluid mechanics (such as the swirls of our incense stick). Atmospheric dynamics also display clear chaotic behavior, thus making long-term weather prediction impossible. Some mechanical and electrical systems known to exhibit chaotic vibrations include buckled elastic structures, mechanical systems with play or backlash, systems with aeroelastic dynamics, wheel-rail dynamics in railway systems, and, of course, feedback control devices.