Representación de sistemas no lineales

Dr. Ing. Rodrigo Gonzalez

rodralez@fing.uncu.edu.ar

Control y Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

Abril de 2016

Resumen

1. Sistemas lineales
   - Representación matemática de sistemas lineales
   - Propiedades de los sistemas lineales

2. Sistemas no lineales
   - Definición
   - Representación matemática de sistemas no lineales
   - Clasificación de los modelos
   - Punto de equilibrio
   - Ejemplos de sistemas no lineales
   - Linealización de modelos no lineales

Representación matemática de sistemas lineales

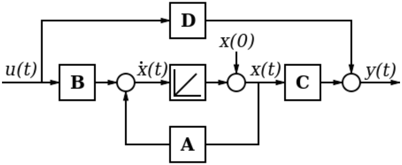
Un sistema lineal LIT se puede representar en espacio de estados como,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\,\boldsymbol{x}(t) + B\,\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C\,\boldsymbol{x}(t) + D\,\boldsymbol{u}(t)\,, \tag{2}$$

donde:

- $\boldsymbol{x}(\cdot)$ es el vector de estados $\in \mathbb{R}^n$.
- $\boldsymbol{u}(\cdot)$ es el vector de entrada $\in \mathbb{R}^p$.
- $\boldsymbol{y}(\cdot)$ es el vector de salida $\in \mathbb{R}^q$.



- A es la matriz de estados, $\dim[A] = n \times n$.
- B es la matriz de entrada, $\dim[B] = n \times p$.
- C es la matriz de salida, $\dim[C] = q \times n$.
- D es la matriz de transmisión directa, $\dim[C] = q \times p$.

Propiedades de los sistemas lineales

- La solución general del sistema se puede resolver en forma analítica.
- En presencia de una entrada externa $\boldsymbol{u}(t)$,
  1. Se satisface el principio de superposición.
  2. El sistema es asintóticamente estable, si $\boldsymbol{u}(t)$ está limita, la salida estará limitada.
  3. Si $\boldsymbol{u}(t)$ es sinusoidal, la salida será sinusoidal con misma frecuencia.

Ejercicio 1

¿Cuáles de las siguientes expresiones matemáticas es lineal?

$$y = a + x \cdot b \tag{3}$$

$$y = e^x \tag{4}$$

$$y = e^{-x} \tag{5}$$

$$y = sinx \tag{6}$$

$$y = x^2 \tag{7}$$

Definición

Un sistema no lineal es aquél que no verifica el principio de superposición.

El principio de superposición establece las siguientes propiedades:

- Aditividad:

  Si $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces $f(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$

- Proporcionalidad:

  Si $f(x) = y$, entonces $f(\alpha\, x) = \alpha\, y$

Sistemas físicos

- Virtualmente todos los sistemas físicos son de naturaleza no lineal.
- En muchos casos es posible describir la operación de un sistema físico por un modelo lineal:
  1. porque las no linealidades se consideran despreciables.
  2. porque el rango de operación del sistema es deliberadamente acotado (linealización).
- Cuando aun el modelo linealizado no es adecuado para un desempeño requerido, se deben usar herramientas del control no lineal (por ej. Estabilidad de Lyapunov).

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= f[t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)] \quad \forall t \geq 0 \\ t &\in \mathbb{R}^+ \\ \boldsymbol{x}(t) &\in \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{u}(t) &\in \mathbb{R}^p \\ f &: \ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \,. \end{aligned} \tag{8}$$

$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ es una ecuación diferencial vectorial de primer orden.

No se pierde generalidad si se supone que el sistema puede ser descripto por una ecuación diferencial escalar de orden n, tal que,

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = h[\ t,\ y(t),\ \dot{y}(t), \ldots,\ \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, u(t)] \quad \forall t \geq 0\,. \tag{9}$$

Se redefine $\dfrac{d^n y(t)}{dt^n}$ para obtener $\boldsymbol{x}(t)$ (Ec. 8),

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Que es equivalente a,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= h[\,t,\; x_1(t),\; x_2(t), \ldots,\; x_n(t), \boldsymbol{u}(t)] \qquad \text{(equivalente a Ec. 9)}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

La Ec. 11 toma la forma de la Ec. 8 con,

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T \tag{12}$$

$$f[t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}] = [x_2, \ldots, x_{n-1}, h(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \boldsymbol{u})]^T \,, \tag{13}$$

donde finalmente,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f[t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}] \quad \forall t \geq 0 \tag{14}$$

Los sistemas no lineales se pueden clasificar en:

- Forzado: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f[\ t,\ \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)] \quad \forall t \geq 0$
- No forzado: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f[\ t,\ \boldsymbol{x}(t)] \quad \forall t \geq 0$

- Sistema autónomo o invariante en el tiempo: f no depende de t (por ej., saturación).
- Sistema no autónomo o variante en el tiempo.

Punto de equilibrio

- $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de equilibrio* de un sistema forzado si,

$$f(t, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}}) = 0 \quad \forall t \geq 0\,. \tag{15}$$

- Si $\bar{\boldsymbol{x}}$ es equilibrio del sistema, entonces la ecuación diferencial para la condición inicial $\boldsymbol{x}(t_0) = \bar{\boldsymbol{x}}$ tiene la única solución $\boldsymbol{x}(t) = \bar{\boldsymbol{x}} \quad \forall t \geq 0$.
- $\bar{\boldsymbol{u}}$ es una entrada al sistema determinada que fija el punto de equilibrio.
- Entonces, si el sistema comienza en el equilibrio, permanece en él.
- El punto de equilibrio de un sistema no forzado se define en forma similar como,

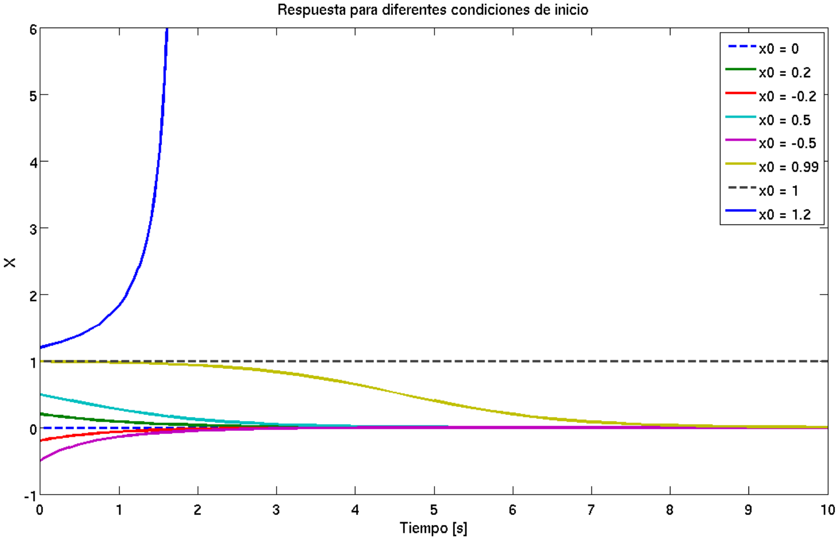
$$f(t, \bar{\boldsymbol{x}}) = 0 \quad \forall t \geq 0\,. \tag{16}$$

- Un sistema puede tener más de un punto de equilibrio.
- Un sistema lineal tiene un único punto de equilibrio si A es no singular ($det(A) \neq 0$)
- El punto de equilibrio es estable si los autovalores de A tienen parte real negativa, sin importar la condición inicial.

Ejercicio 2

Resuelva en MATLAB el siguiente sistema:

$$\dot{x} = x^2 - x \,. \tag{17}$$



Ejercicio 3

La siguiente ecuación representa un modelo simplificado del movimiento de un vehículo bajo el agua, donde $u(t)$ es el impulso del vehículo y v es la velocidad.

$$\dot{v} - |v| \, v = u \, . \tag{18}$$

Resuelva el sistema en MATLAB para $u = 10$ y $u = 1$ para 5 segundos de exitación. Observe ambas salidas y compare.

Ejercicio 4

Oscilador de van der Pol se define como,

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \tag{19}$$

$$\implies \ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - x\,. \tag{20}$$

Se definen dos nuevas variables,

$$x_1 = x \tag{21}$$

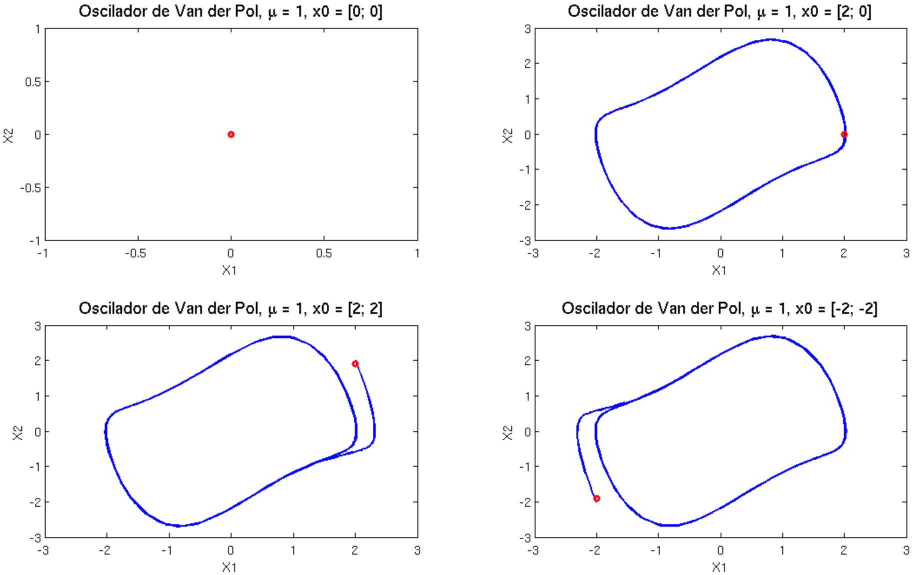
$$x_2 = \dot{x}\,. \tag{22}$$

Operando,

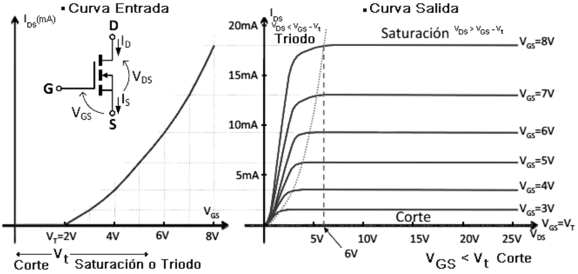
$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{23}$$

$$\dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1\,. \tag{24}$$

Oscilador de van der Pol



- Todos los sistemas físicos son no lineales.
- Por otro lado, una buena parte de la teoría del control se centra en sistemas lineales LIT.
- Por tanto, se desea encontrar dentro de qué límites un sistema no lineal puede ser considerado lineal.
- El sistema puede ser considerado lineal en la vecindad de un punto de equilibrio.



Curva de salida y característica de transferencia de un MOSFET de canal n.

- Se define un sistema no lineal de dos variables como,

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \tag{25}$$
$$\dot{x}_2 = g(x_1, x_2)\,. \tag{26}$$

- El sistema tiene un punto de equilibrio en $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.
- Se desea encontrar dentro de qué límites f y g pueden ser considerados lineales.
- Por series de Taylor f y g se representan como,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = {} & f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \\ & + f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2!} \cdots \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) = {} & g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \\ & + g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!} + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2!} \cdots \end{aligned} \tag{28}$$

- Se descartan los términos de segundo orden y sucesivos.
- Debido a que $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ y $g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$,

$$\dot{x}_1 \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) \tag{29}$$

$$\dot{x}_2 \approx \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2)\,. \tag{30}$$

- Este es un sistema lineal cuya matriz de coeficientes es,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix}. \tag{31}$$

- La matriz (31) se conoce como Jacobiano.
- Analizando los autovalores del Jacobiano se puede determinar la naturaleza del punto de equilibrio (sumidero, fuente; estable, inestable).

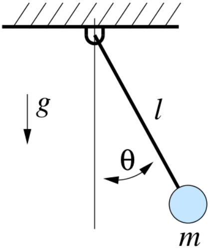
Ejercicio 5

- Las dinámicas de un simple péndulo son bastante ricas para describir la mayoría de los conceptos vistos en sistemas no lineales.
- La ecuación de un péndulo con fricción:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m\,l^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0\,, \tag{32}$$

donde:

- θ es el ángulo (rad).
- m la masa del péndulo (kg).
- l el largo de la soga (m).
- b el coeficiente de fricción viscosa (Nms/rad)
- g la constante de gravedad (m^2/s).



$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m\,l^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0\,.$$

- El sistema de descompone en derivadas de primer orden,

$$\dot{\theta} = \upsilon \tag{33}$$

$$\dot{\upsilon} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{b}{m\,l^2}\upsilon\,. \tag{34}$$

- Los puntos de equilibrio del sistema se encuentran en $(\theta, \upsilon) = (n\,\pi, 0)$ donde $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- En n pares, $n = 0, 2, 4, \ldots$, el péndulo está en un posición más baja.
- En n impares, $n = 1, 3, 5, \ldots$, el péndulo está en un posición más alta.

Péndulo, resolución II

$$\dot{\theta} = \upsilon$$
$$\dot{\upsilon} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{b}{m\,l^2}\upsilon\,.$$

- El Jacobiano está dado por,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\theta) & -\frac{b}{m\,l^2} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

- Para el punto de equilibrio $(0, 0)$, el Jacobiano es,

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{m\,l^2} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Péndulo, resolución III

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{b}{m\,l^2} \end{bmatrix}.$$

- Si $b = 0$. Autovalores $\lambda = \pm i\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

  Sistema críticamente amortiguado. El sistema oscila alrededor de $\theta = 0$ en forma periódica.

- Si $b > 0$, $m = 1$, $l = 1$. Autovalores $\lambda = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{4g-1}}{2}$.

  Sistema subamortiguado. El sistema oscila alrededor de $\theta = 0$ en forma decreciente.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\theta) & -\frac{b}{m\,l^2} \end{bmatrix}.$$

- Para el punto de equilibrio $(\pi, 0)$, el Jacobiano es,

$$J_{(\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{m\,l^2} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

- Autovalores dados por $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{m\,l^2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m\,l^2}\right)^2 + 4\,\frac{g}{l}}\right)$.

  El sistema es inestable en este punto de equilibrio.

Ejercicio 6

La siguiente ecuación representa un sistema caótico,

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 - = 6\,\sin(t)\,. \tag{38}$$

Resuelva el sistema en MATLAB. Obtenga el Jacobiano del sistema y analice los puntos de equilibrio del sistema.