TP 1.2: ESTUDIO ECONÓMICO DE LA RULETA

Leilen Avila
Legajo: 41610
Mail: leilenavila@gmail.com
UTN - FRRO
Zeballos 1341, S2000

Natalia Fernandez
Legajo: 44758
Mail: nata.fernandez77@gmail.com
UTN - FRRO
Zeballos 1341, S2000

21 de Mayo, 2020

ABSTRACT

En este trabajo tenemos como objetivo analizar el juego de ruleta Europea en base al comportamiento del casino y a la utilización de diferentes estrategias. Para evaluar este comportamiento realizaremos una simulación de la propia ruleta y efectuaremos un análisis probabilístico sobre las variaciones en las ganancias de cada jugador y como varía el flujo de caja de los mismos. Estos resultados seran utilizados para evaluar la simulación con diferentes parámetros: el número de corridas, el numero de rondas, el tipo de capital (finito o infinito) y las restricciones impuestas por el casino. Con el correr del trabajo iremos concluyendo diferentes características comunes a ambas estrategias y daremos nuestra opinión personal en base a los resultados que vayamos obteniendo.

1. Introducción

La ruleta es un juego de azar típico de los casinos, su uso como elemento de juego de azar, aún en configuraciones distintas de la actual, no está documentado hasta bien entrada la Edad Media. Es de suponer que su referencia más antigua es la llamada Rueda de la Fortuna, de la que hay noticias a lo largo de toda la historia, prácticamente en todos los campos del saber humano. Las ruletas más populares y comunes son la americana, la europea y la francesa. En general, encontrar un modelo u otro depende de la localización geográfica. Cada tipo presenta sus propias características, por lo tanto, elegir entre una y otra no es una decisión arbitraria, ya que influye en las posibilidades de victoria.

En nuestro estudio optaremos por analizar el comportamiento de la Ruleta Europea, por ser esta la más común. Contiene 37 casillas que van del 0 al número 36. La casilla del cero aparece en color verde, mientras que las demás se reparten entre 18 negras y 18 rojas. La ventaja de la casa en la ruleta europea es del 2,7 %, esto representa el porcentaje de ganancia de las apuestas que el casino se queda para sí. Existen diferentes formas de realizar apuestas. Este juego de ruleta ofrece una gran variedad de tipos de apuestas cada una con su correspondiente probabilidad y ganancia, estas son proporcionales a la cantidad de números que se cubren. A continuación se detalla una tabla donde se presentan diferentes tipos de apuestas:

APUESTAS	NÚMEROS QUE JUEGA	BENEFICIOS
Suertes sencillas	18 números	1 a 1
Columnas y docenas	12 números	2 a 1
Seisena	6 números	5 a 1
Cuadro	4 números	8 a 1
Transversal	3 números	11 a 1
Caballo o semipleno	2 números	17 a 1
Pleno	1 número	35 a 1

En este documento nos centraremos primordialmente en los tipos de apuesta de "Suertes sencillas", es decir, aquellos tipos de apuestas que presentan una probabilidad de éxito cercana al 50 % y que cubren 18 números (rojo, negro, par e impar).

2. Utilización de Estrategias

Las estrategias de apuesta pueden ayudar a los jugadores a minimizar los efectos negativos de la ventaja de la casa. Miles de jugadores de casino en todo el mundo dependen de diferentes estrategias de apuestas, porque ellos piensan que un método de apuesta bien diseñado puede, al menos, intentar sacar partido de la llamada falacia del apostador y ganarle a la ventaja de la casa. A pesar de que la ruleta es un juego de azar y por lo tanto no puedes modificar ni conocer sus resultados, hay determinadas prácticas que se pueden llevar a cabo para "aumentar las posibilidades de ganar". Han aparecido decenas de estrategias que afirman saber cómo ganar la ruleta. En realidad, este tipo de estrategias de ruleta europea son válidas solo como una forma de jugar, pero no te garantizan un éxito asegurado. En nuestro trabajo utilizaremos el tipo de apuesta "Suertes sencillas"para estudiar dos estrategias progresivas, es decir, las que modifican la cantidad apostada ronda tras ronda. Estas estrategias son llamadas Martingala y Fibonacci.

3. Análisis estrategia Martingala.

El sistema de la Martingala está diseñado para aumentar las probabilidades de obtener pequeñas ganancias, aumentando al mismo tiempo las posibilidades de perder cantidades más grandes de dinero. Este sistema es considerado de progresión ya que, cada vez que se apuesta y se pierde, se debe doblar el valor de la última apuesta, logrando que en el momento en que se gana en la ruleta, se puede recuperar todo el dinero apostado previamente. Este tipo de estrategia surgió para los juegos de doble o nada, y en la ruleta se suele utilizar en las apuestas por color (rojo o negro) o por paridad (par o impar). Para dichas apuestas la probabilidad de ganar es de 18 en 37, lo que en porcentaje significa un 48,6 %, y el pago en caso de ganar es dos veces la apuesta original. Si se apuesta pleno a un número las probabilidades disminuyen, ya que pasan a ser del 2,7 % pero se paga más (36 veces lo apostado).

3.1. Supuestos iniciales

La estrategia Martingala tiene una alta probabilidad de ganar a corto plazo, pero la probabilidad de una pérdida total aumenta fuertemente a largo plazo. Las restricciones de apuesta máxima por ronda de una mesa reducen las probabilidades de tener una pérdida total, pero también disminuyen las de ganar.

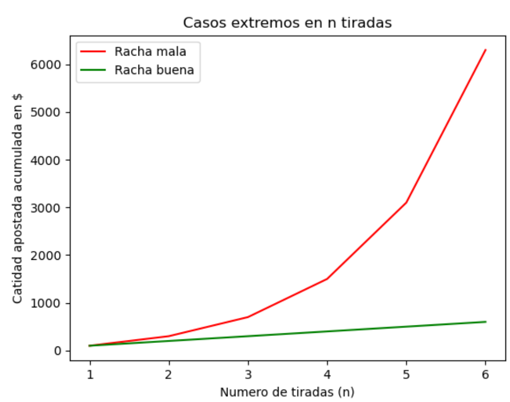

Figura 1: Casos extremos en n tiradas de la martingala

La curva verde muestra el beneficio de haber ganado todas las veces que se apostó y la curva roja muestra el beneficio de haber perdido todas las veces que se apostó. Se puede ver que la curva de fracaso crece exponencialmente mientras que la curva de éxitos lo hace de manera lineal. Esto se puede comprender debido a que cada vez que se pierde se aumenta la apuesta al doble, y por lo tanto, a medida que se vayan acumulando un conjunto de pérdidas seguidas, la apuesta crecerá de manera exponencial y consigo la cantidad de perdidas netas. Este comportamiento puede describirse por la siguiente fórmula:

$$apuestaInicial * (2^n - 1) \tag{1}$$

Siendo n: número de tiradas de ruleta. Rápidamente podemos ver que si, por ejemplo, perdemos 10 tiradas sucesivas con una apuesta inicial de \$ 10 significa que habremos perdido \$ 5.110 y tendremos que doblar la apuesta a un valor de \$ 10.240 para recuperar la apuesta inicial.

En resumen, con esa apuesta inicial, cada vez que se pierda hay que doblar la cantidad siguiendo el siguiente patrón para recuperar las pérdidas: 10 – 20 – 40 – 80 – 160 – 320 – 640 – 1280 – 2560 – 5120 – 10240.
Se puede deducir que si pierde seguido en una ronda, todo nuestro dinero se ira muy rápidamente, y en el caso contrario de que ganemos seguido en una ronda, nuestro dinero crecerá lentamente y de manera lineal.

3.2. Desventaja de la estrategia

El capital medio de un jugador (esto es, el dinero que el jugador tiene a su disposición para jugar) se mantiene constante. El problema reside en que, al incurrir en sucesivas pérdidas, el jugador que siga la estrategia de la martingala se ve obligado a apostar de nuevo cantidades cada vez mayores (las pérdidas acumuladas), que tienden a crecer exponencialmente.
Al cabo de unos pocos ciclos de apuestas, el jugador, cuyos recursos son habitualmente muy inferiores a los de la banca, se ve arruinado al ser incapaz de apostar de nuevo por el total de sus pérdidas. Evitar jugadores que intenten seguir la estrategia de la martingala es de todos modos una de las razones por las que los casinos actuales establecen límites máximos de apuesta.

3.3. Capital finito

Analizaremos las diferentes probabilidades bajo el supuesto de que cada resultado de la ruleta es igualmente probable, que si el resultado de la misma es 0 entonces todas las apuestas simples (impar/par – rojo/negro) se pierden y además supondremos que el capital del jugador es finito.

3.3.1. Dependencia de las restricciones del casino

Hay principalmente dos restricciones que hay que tener en cuenta si se quiere aplicar la estrategia Martingala ya que podrían interferir gravemente en nuestra estrategia. La primera es la cantidad de rondas seguidas que podes jugar y la segunda es el límite de apuestas máximo y mínimo de una mesa. El mínimo de mesa determina cuán bajo puede ser nuestra apuesta inicial y el máximo de mesa determina que cuanto dinero se puede apostar en una sola ronda. Se puede deducir según lo visto en el apartado anterior que el problema de esto es que el sistema crece de manera exponencial y por lo tanto no habrá demasiadas apuestas posibles, a menos que el máximo de la tabla sea muy alto. Si tras una mala racha llegamos a uno de los niveles superiores y no podemos apostar toda la cantidad que necesitamos según nuestro sistema de martingala, obtendremos pérdidas sistemáticas. Trabajaremos con el supuesto de que el casino está restringido a un mínimo de mesa de $10 y un máximo de mesa de $1.280 (Esto nos da una posibilidad de duplicar 8 veces seguidas la apuesta o lo que es lo mismo, de permitirnos una mala racha de 8 pasos).

3.3.2. Análisis probabilístico

Una tirada El análisis está dividido en un conjunto de N rondas de martingala independientes compuestas por n tiradas de la ruleta. A continuación veremos lo que ocurre en una única tirada de ruleta, distinguiendo en principio entre una "Ruleta ideal" en la cual las probabilidades de ganar y de perder son las mismas y entre la Ruleta Europea que presenta un margen de ganancia (1/37) de la casa cuando sale el valor 0 de color verde.

Para este análisis consideraremos una apuesta base de 1 peso. Sea:

- **p**: probabilidad de **perder** la apuesta.
- **q**: probabilidad de **ganar** la apuesta.
- **g**: ganancia de una **apuesta** de 1$.

El suceso g tiene una distribución de Bernoulli, pudiendo tomar 2 posibles valores: ganar la apuesta ($1) ó perder la apuesta ($-1). El valor esperado de la ganancia de una apuesta es:

$$E(g) = p * (\$ - 1) + q * (\$1) = q - p \tag{2}$$

$$V(g) = E(g^2) - E(g)^2 = p + q + (1 - 2 * p)^2 = 1 - (1 - 2 * p)^2 = 4p - 4p^2 = 4pq \tag{3}$$

En la ruleta ideal es:

$$p = q = 0{,}5 \tag{4}$$

$$E(g) = 0,5 * (\$ - 1) + 0,5 * (\$1) = \$0 \tag{5}$$

$$V(g) = 4 * p * q = 1 \tag{6}$$

En la ruleta europea es:

$$p = 19/37 = 0,5135 \tag{7}$$
$$q = 1 - p = 0,4864 \tag{8}$$
$$E(g) = 0,5135 * (\$ - 1) + 0,4864 * (\$1) = -0,0271 \tag{9}$$
$$V(g) = 4 * p * q = 0,9992 \tag{10}$$
$$\sigma(g) = \sqrt{V(g)} = 0,9995 \tag{11}$$

Eso quiere decir que en promedio por cada $1 apostado perderemos 0.027$. En el caso ideal la esperanza matemática es 0, o sea que en promedio, apostando una unidad, no vamos a obtener ganancias.

Una ronda: muchas tiradas
Lo visto anteriormente es para apuestas que ocurren en una sola tirada de ruleta pero cuando aumenta el número de tiradas a n podemos ver que:

- La probabilidad de que el jugador pierda en n tiradas es p^n. Cuando se pierden en todas las apuestas la pérdida total es de $2^n - 1$ y se deberían apostar un valor de 2^n para recuperar la apuesta.
- La probabilidad de que el jugador gane en n tiradas de ruleta es de

$$1 - p^n$$

(uno menos la probabilidad de perder en todas las tiradas). Cuando se gana la ganancia es de 1$ por tirada.

Ahora tomaremos como ejemplo que la restricción de mesa es de $512. En este caso podríamos permitirnos una racha de hasta 10 fracasos consecutivos antes de perder todo nuestro dinero. Llamando X al suceso “cantidad de tiradas hasta que se gana por primera vez” diremos que tiene una distribución geométrica con parámetro 1-p.

X = Cantidad de tiradas hasta que se gana por primera vez.

$$X \sim G(p = 0{,}4864) \tag{12}$$

Las probabilidades se obtendrán mediante la fórmula de la distribución geométrica

- P(X = 1) = 0.48649
  - Apuesta = $1
  - Pérdida acumulada = $0
- P(X = 2) = 0.24982
  - Apuesta = $2
  - Pérdida acumulada = $1
- P(X = 3) = 0.12828
  - Apuesta = $4
  - Pérdida acumulada = $3

.
.
.

- P(X = 10) =0.00121 (Probabilidad de perderlo todo)
  - Apuesta = $512
  - Pérdida acumulada =$511

Podemos observar que cuanto más rondas jugamos, menos probable es que perdamos. Por lo tanto vemos que la probabilidad de tener una sucesión de 10 fracasos consecutivos es muy baja e igual a **0.0121 %** , siendo esta la probabilidad de quedarnos sin dinero. Esto nos puede parecer muy bajo pero si un jugador utiliza este sistema durante 1.000 apuestas, puede llegar a este resultado una vez. Si ocurre este caso, podríamos tener grandes pérdidas y además, en este caso esta seria nuestra última apuesta debido a que el casino no nos permitirá, por la restricción de mesa, apostar los $1.240 restantes para intentar recuperar nuestra apuesta. Por lo tanto no hay que olvidar que si bien la probabilidad de una mala racha es baja, estas existen y nos harán perder todo nuestro dinero.

3.3.3. Análisis de las ganancias totales

Para comenzar este análisis supondremos que una ronda de martingala dura hasta que se gana por primera vez, es decir esta compuesta por un conjunto de fracasos sucesivos hasta que se consigue un éxito. Sea G un suceso con distribución de Bernoulli con sus dos posibles valores de éxito (ganar \$1) y fracaso (perder \$ $2^n - 1$) se tiene que: E(G) = Ganancia esperada en una ronda de martingala de longitud N, con N = 1,2,3,. . . ,n. Siendo n el número máximo de tiradas de una ronda. Sea:

$$E(G) = -(2^n - 1) \times p^n + 1 \times (1 - p^n) = 1 - (2p)^n \tag{13}$$

$$V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = (4p)^n - (2p)^{2n} \tag{14}$$

La probabilidad de no perderlo todo es $1 - p^n$ y la ganancia es de 1\$. Si no se gana ninguna vez se habrá acumulado una apuesta de $2^n - 1$. Para el caso que estábamos viendo en el apartado anterior, donde la cantidad de fracasos consecutivos era de n=10 tendremos una ganancia de:

$$E(G) = 1 - (2 * 0{,}5135)^{10} = -0{,}305 \tag{15}$$

$$\sigma(G) = 36,54 \tag{16}$$

Luego de un numero NT de rondas de martingala el beneficio total va a estar dado por la sumatoria de las ganancias de cada ronda. Es decir:

$$GT = \sum_{1}^{i} Gi \tag{17}$$

con i de 1 a NT. Siendo GT: Ganancia total en NT rondas de martingala. Esta variable aleatoria tiene una distribución normal con parámetros:

$$\mu = NT * (1 - (2p)^n) = NT * E(G) \tag{18}$$

$$\sigma = NT * \sqrt{(4p)^n - (2p)^{2n}} = NT * \sqrt{V(G))} \tag{19}$$

A continuación se grafica esta distribución normal a partir de los parámetros vistos anteriormente E(G)=-0.305 y σ(G)=36.54.
A partir de esto, entonces, para un numero de n = 10 corridas y 100 rondas se tiene que μ = -30.56 y σ=365,41. Fuimos variando el numero de rondas y obtuvimos los siguientes resultados:

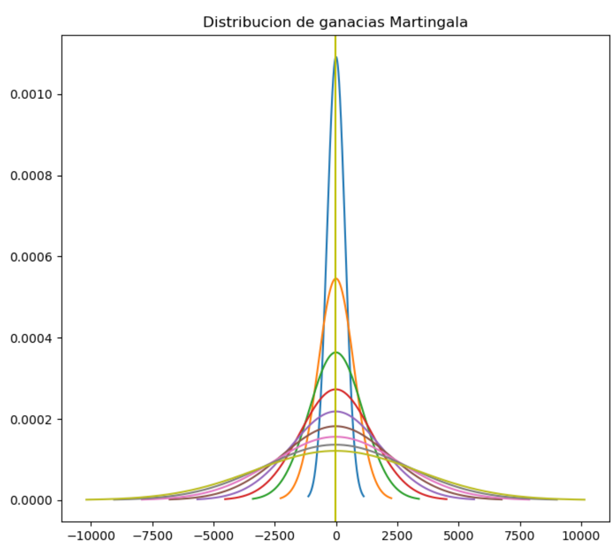

Figura 2: Distribucion de ganancias en NT rondas.

Recordemos que en este caso la apuesta inicial es de 1 unidadad entonces las perdidas no seran tan extremas y ademas el numero de corridas es muy pequeño. Sin embargo se ve como nuestro beneficio promedio siempre estará del lado negativo de la función.

Observemos que la recta amarilla muestra el valor de la esperanza matematica, y que cada vez que incrementemos más el numero de tiradas, mas se alejará hacia el lado de los valores negativos. Esto representa como el casino se vera beneficiado de todas nuestras apuestas. Ademas las curvas a medida que el numero de rondas aumenta se concentran en torno al color de la ganancia calculado anteriormente. Es decir, que jugando mas tiempo, mas seguro perderemos nuestra apuesta.

3.3.4. Simulación del juego: dependencia de la cantidad de rondas y tiradas

En este apartado procederemos a realizar una simulación del comportamiento del sistema aplicando la estrategia martingala. Como dijimos este experimento esta dividido en un conjunto de N rondas de n tiradas. Sacaremos diferentes conclusiones a partir de la variación de diferentes parámetros para poder evaluar la viabilidad de la estrategia.

Hasta ahora dijimos que tener una restricción de mesa no era beneficioso para poder aplicar esta estrategia, para demostrar esto presentaremos algunos gráficos con la versión ilimitada del monto de apuestas.

El siguiente gráfico muestra 100 rondas de 50 tiradas con un monto base de 10$ y un capital inicial de $1280 (La apuesta inicial podrá duplicarse hasta 7 veces). Suponemos que en 1 hora se pueden jugar 50 veces y es por esto que elegimos este valor. Por lo tanto se muestran 100 rondas de diferentes jugadores en las cuales para cada uno jugó 1 hora.

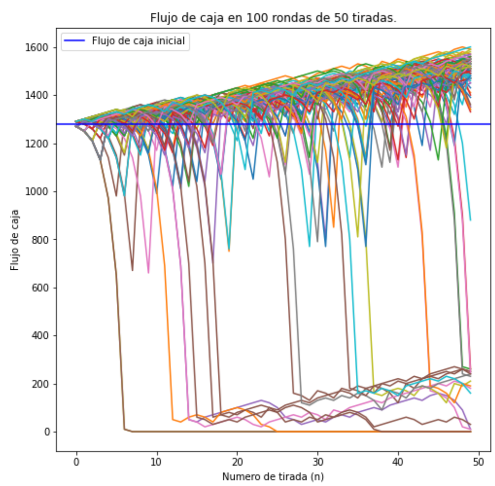

Figura 3: 100 rondas de diferentes jugadores.

Cada curva representa una ronda diferente y en cada ronda se muestra como varía el capital del jugador con el correr del tiempo. Todos los jugadores comienzan con el mismo capital inicial y se observa que en la primer ronda hubo una variación de $10 según si el jugador ganó o perdió. Luego de esta ronda se ve como los jugadores que pierden duplican la apuesta y los que ganan aumentan su capital en $10.

Gráficamente podemos determinar que aproximadamente 15 jugadores de 100 perdieron una suma muy importante de dinero y que de estos, 5 perdieron todo su capital inicial. Analíticamente, según las fórmulas del apartado anterior, obtuvimos que la ganancia promedio de esta muestra en particular es de $-65.5 por ronda. Por lo tanto capital promedio por ronda es el capital inicial más la ganancia, o sea $1.214,5. El casino en esta muestra de 100 rondas ganó $6.550.

Algo interesante es que vemos como si ocurre una sucesión corta de pérdidas, el jugador continúa duplicando hasta que la curva se aproxima a donde estaba anteriormente y que las curvas parecen permanecer alrededor del capital inicial. Además las curvas que se encuentran en la parte inferior y que todavía no perdieron hacen referencia a cuando el jugador no tuvo suficiente capital para doblar la apuesta pero siguió apostando una cantidad menor de dinero.

Ahora vamos a mantener constante el capital inicial con el que cuentan los jugadores y el monto de la apuesta base, pero cambiaremos el número de rondas y de tiradas de cada jugador. En la figura que se muestra a continuación aumentamos la cantidad de tiradas a 200 y mantuvimos constante la cantidad de rondas en 100.

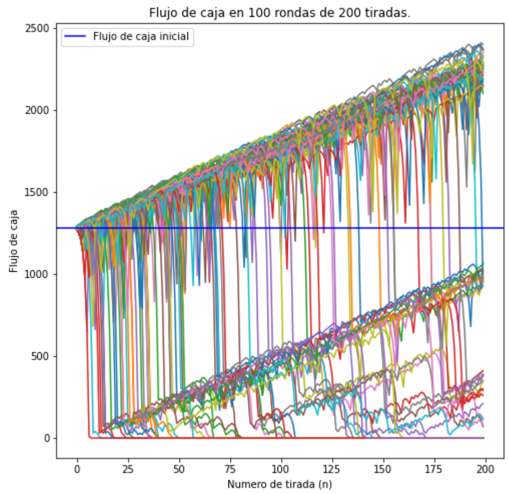

Figura 4: 200 tiradas con capital constante.

Según las fórmulas del apartado anterior obtuvimos que la ganancia promedio total es de \$ -241 para esta muestra. Obtuvimos el capital promedio de todas las rondas (sumando el capital de cada ronda dividido el número de rondas) y resultó ser de \$1.038. El casino obtuvo en total una ganancia de \$24.140 entre todas las rondas de todos los jugadores. Esto nos indica que en promedio 19 jugadores de 100 han perdido todo su dinero.

Las curvas que se encuentran entre la parte superior e inferior representan a todos los jugadores que se quedaron sin dinero para doblar la apuesta y comenzaron de nuevo a jugar con la estrategia pero desde la apuesta base, con la suma de dinero que les quedaba. Vemos que de estos jugadores ninguno logró conseguir el capital con el que empezó. Además podemos ver como se encuentra representada en la parte superior del conjunto denso de curvas, la linealidad de la que se habló cuando introducimos la estrategia.

Vemos que muchos jugadores sobrevivieron al cabo de 200 tiradas, pero nos preguntamos hasta cuantas rondas van a poder sobrevivir los jugadores en promedio. Para esto corrimos el programa con un número muy grande de tiradas y el resultado fue el siguiente:

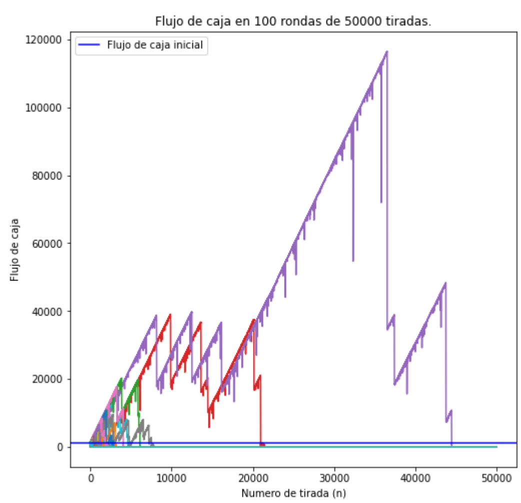

Figura 5: Simulacion para un numero de 50.000 tiradas.

Podemos ver cómo los 100 jugadores no han logrado sobrevivir y todos perdieron a lo largo de una serie muy grande de tiradas. La curva violeta muestra como este jugador incremento su capital hasta $120.000 antes de entrar en una mala racha y perder todo su capital. El promedio de la ganancia total es de $-1.280 (Perdida del total del capital de cada jugador) y el capital promedio de los jugadores es de $0. El casino obtuvo una suma total de $128.000.

Se ve como varios jugadores obtuvieron una suma de 100.000 antes de perderlo todo y se va concluyendo que por más que haya jugadores que tengan suerte en un gran conjunto de tiradas y ganen una gran cantidad de dinero, el casino nunca pierde y a lo largo del tiempo todos los jugadores pierden.

Según las graficas anteriores podemos ver como un porcentaje muy pequeño de jugadores puede alcanzar ganancias muy altas. Sin embargo cuando el numero de tiradas es suficientemente grande, todos los jugadores pierden y el casino se queda con todo su dinero apostado.

Ahora pasemos a presentar el caso real en el que existen restricciones de mesa impuestas por el casino. Asumiremos que existe una restricción máxima de $1.280 por apuesta. Esto significa que los jugadores no podrán aumentar su apuesta solo porque tienen un mayor capital. A continuación simularemos el caso de la grafica anterior pero con esta nueva restricción.

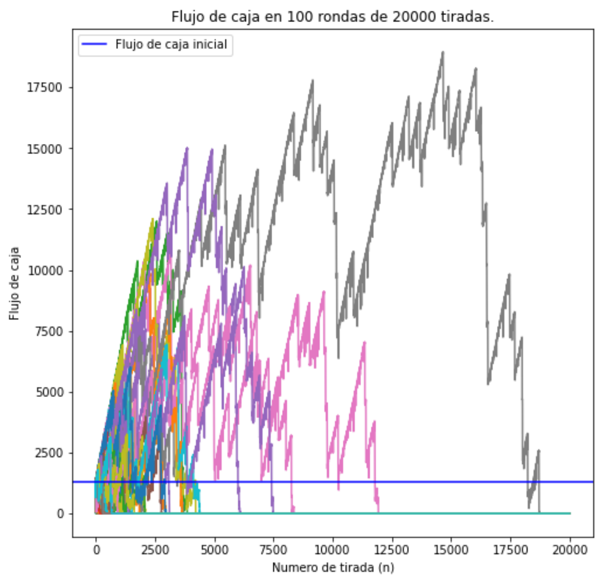

Figura 6: Con restriccion de casino para 20.000 tiradas.

Este es un resultado muy interesante porque se puede ver como todos los jugadores perdieron antes de las 20.000 tiradas cuando antes algunos habían sobrevivido mas del doble de tiradas. Además es son pocos los jugadores que acumulan una suma mayor a 10.000 cuando antes esto era bastante normal y se ha perdido la linealidad de las apuestas que se tenia anteriormente. Además, la mayor densidad de jugadores termina perdiendo antes de las 2.500 tiradas.

Como conclusión de la simulación de este conjunto de graficas podemos entender varias cosas. En principio, que la probabilidad de ganar disminuye cuando el máximo de mesa es menor. Por lo tanto un máximo de mesa alto conduce a obtener mayores beneficios pero también conduce a una mayor posibilidad de perder todo nuestro capital.

Mientras más pase el tiempo, y por lo tanto ocurra un mayor número de tiradas, mayor será la probabilidad de perder que de ganar (sin importar la suma de dinero). La mayor probabilidad de retirarse con una victoria y una ganancia se encuentra en las primeras tiradas del juego. Después de este punto la probabilidad de ganar disminuye rápidamente.

3.3.5. Contabilizando las pérdidas

Analizaremos un poco más en detalle la cantidad de pérdidas en función de la cantidad de tiradas de juego. Para esto graficamos la frecuencia relativa de diferentes cantidades de tiradas para un **mismo número de rondas** (100). Los resultados que obtuvimos son los siguientes:

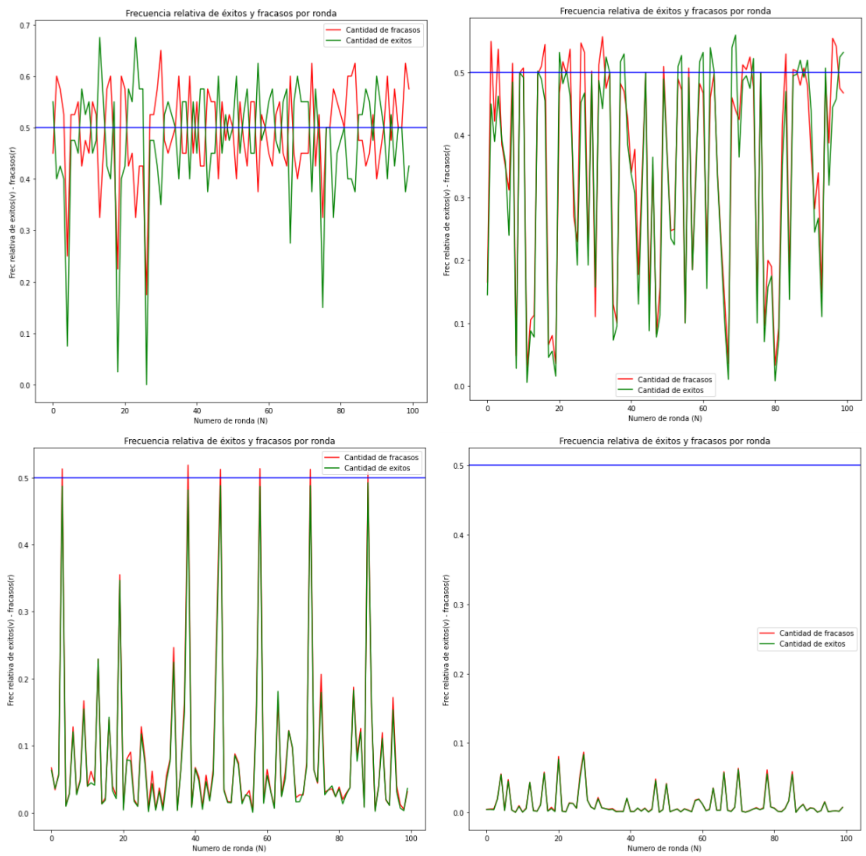

Figura 7: Distribucion de las perdidas en 100 rondas.

La línea recta señala la probabilidad del 50 % del total de las corridas. En el primer gráfico vemos como en cada tirada las posibilidades de perder y de ganar no son tan diferentes. Hay ocasiones en las que el jugador gana y ocasiones en las que pierde. Pero a medida que vamos aumentando el número de tiradas vemos como la curva de la cantidad de fracasos superpone a la curva de éxitos, es decir, siempre se encuentra más arriba de esta. Esto significa que se pierde más veces de las que se gana pero si bien esa diferencia de superposición es pequeña, nos indica que las malas rachas están ocurriendo y que el casino está ganando el capital de la gran mayoría de los jugadores.

Lo importante de esto es que podemos ver en la primer gráfica que, de manera casi simétrica, las curvas se encuentran sobre y debajo de la línea recta azul, esto significa que la gran mayoría de los jugadores alcanza a terminar la ronda con beneficios en su capital.

A medida que aumenta el número de tiradas son muy pocos los que logran sobrevivir (La tercer gráfica nos indica que en esa muestra sobrevivieron 6 jugadores, lo cual es muy poco). Cuando la frecuencia relativa de éxitos y fracasos es baja, significa que el jugador perdió en un número de tiradas pequeño.

Con esto entendemos mejor la última gráfica, donde todos los puntos de las curvas presentan frecuencias relativas bajas. Significa que todos los jugadores perdieron antes de un cierto número de corridas. En el apartado anterior se demostró que este número es aproximadamente 20.000, indicando para 100 rondas la cantidad de corridas promedio para la cual no sobrevive ningún jugador.

Para poder visualizar esto mejor realizamos el mismo procedimiento pero esta vez para un mayor número de corridas y variando el número de tiradas. De izquierda a derecha se fue aumentando el número de tiradas y se puede ver con mayor detalle como cuando el número de tiradas es menor, la densidad de curvas se encuentra en la parte superior.

Esta densidad va bajando hacia la parte inferior conforme el número de corridas aumenta(y la probabilidad de ganar disminuye). Es por esto que en la gráfica de la derecha se observa mayor densidad en la parte inferior, que es cuando una cantidad grande de jugadores han perdido todo su capital.

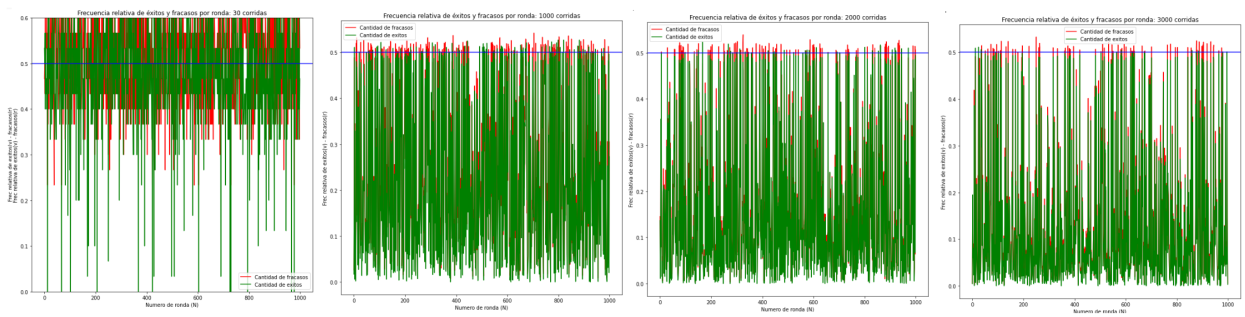

Figura 8: Densidad conforme aumenta el numero de corridas n.

Podemos expresar estos valores en un diagrama de barras para una cantidad de 400 rondas de 400 tiradas. Se puede ver como para cada número de ronda, el valor de la cantidad de fracasos es un poco mayor que la de éxitos.
Esto está relacionado con lo explicado anteriormente y variara de la misma forma cambiando dichos parámetros.

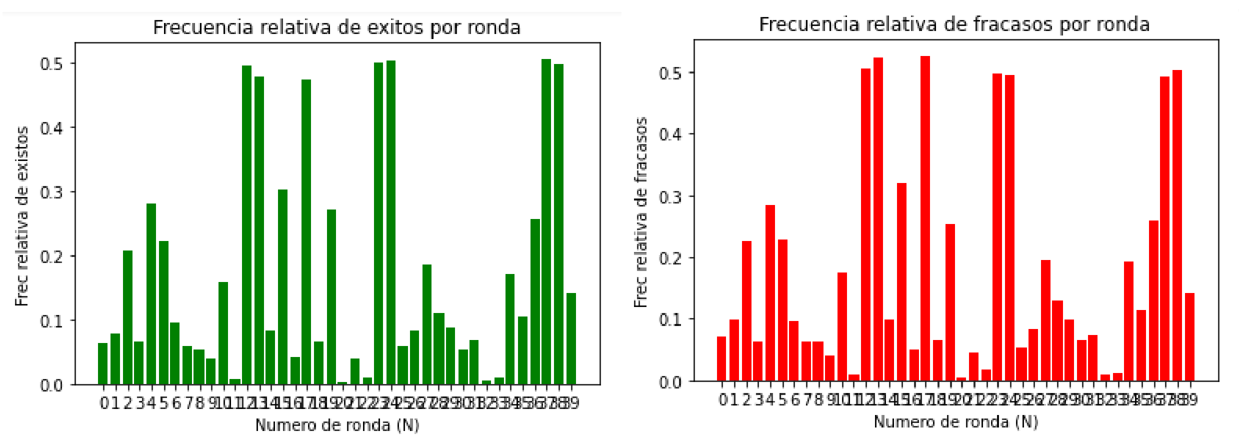

Figura 9: Diagrama de barras de fracasos vs perdidas.

3.3.6. Capital infinito

Con respecto a todo lo analizado anteriormente es fácil entender que cuando existe una restricción de mesa de una cantidad máxima de apuesta, la probabilidad de perder no depende de la cantidad de capital que tengas (siempre y cuando el capital sea mayor o igual a la restricción de mesa). Se puede decir que la probabilidad de perder va a estar sujeta a esta restricción de mesa, cuando esta es mayor mas oportunidades tendremos de duplicar nuestra apuesta y por lo tanto de ganar pero nuestras probabilidades de perderlo todo aumentan también.

Para el caso ideal en el que no existe restricción de mesa y contamos con un capital infinito siempre tendremos la oportunidad de duplicar nuestra apuesta y de recuperarla. Cuando nos ocurre una racha negativa compuesta por un conjunto de fracasos sucesivos, tendremos siempre capital para poder subsanar esto y esperar a que ocurra algún caso favorable donde recuperaremos nuestra apuesta mas el valor de la apuesta base.

Por lo tanto es fácil demostrar que cuando no existe una restricción de mesa, nuestro capital es infinito y teniendo en cuenta lo visto anteriormente de que si la probabilidad de perder n veces en una ronda de martingala está dada por p^n entonces:

$$\lim_{n\to\infty} p^n = 0 \tag{20}$$

Entonces la probabilidad de perder tiende a cero, y siempre podremos obtener ganancias del casino. Pero como dijimos, este no es el caso real porque en los casinos tendremos restricciones que nos prohíben estos privilegios y donde perderemos todo nuestro dinero luego de un conjunto muy grande de tiradas.

Para comprobar graficamente esta suposicion, comenzaremos graficando el caso visto anteriormente donde el jugador cuenta con capital finito y no existe una restriccion de mesa y luego incrementaremos el capital hasta llegar a un capital infinito. Para un mismo numero de tiradas, el resultado fue el siguiente:

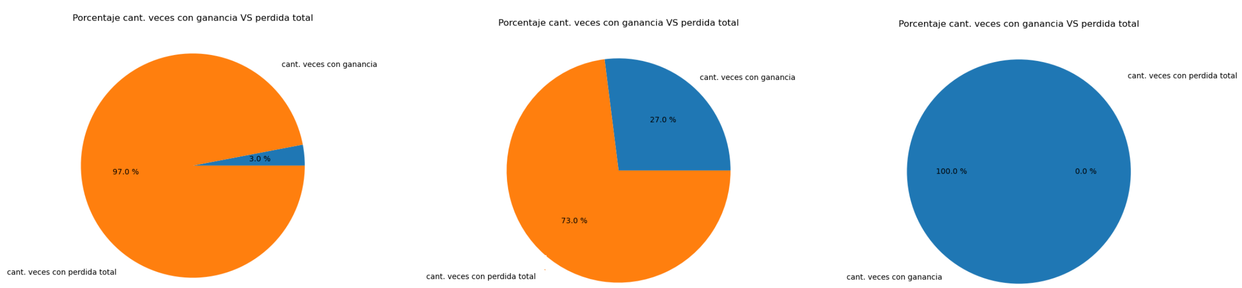

Figura 10: Capital infinito y sin retricciones.

Podemos ver muy claramente que a medida que aumenta el capital del juegor y sin ninguna restriccion de mesa, la cantidad de veces que perdio y se quedo sin capital es nula. Este resultado es independiente de la estrategia que se este utlizando, es decir, siempre que se cuente con una retriccion de mesa no podremos proveernos de los beneficios de aplicar distintas estrategias.

4. Análisis estrategia Fibonacci

El sistema de apuestas de Fibonacci es considerado por muchos jugadores como menos agresivo que otros sistemas (la martingala, por ejemplo), pero esto no quiere decir que no tiene un potencial de ganancias. La secuencia está diseñada comenzando con 1 y mediante la adición de los dos números anteriores juntos. La secuencia es acumulativa en su naturaleza, lo que significa que cada número que sigue es igual a la suma de los dos números anteriores. Por lo tanto, los primeros 15 números en la secuencia serán los siguientes: 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 – 89 – 144 – 233 – 377 – 610. Esta estrategia supone apostar en base a esto numeros dados por la secuencia. Su ventaja es que podemos obtener beneficios incluso aunque perdamos más veces que las que ganemos. Pero una importante desventaja es que cuanto más avanzamos en la secuencia, más dinero perdemos.

4.1. Historia de la estrategia

El sistema se basa en la secuencia matemática prominente, que se remonta al siglo 12 y está vinculada a la obra de Leonardo Bonacci (1170-1250). Leonardo Pisano Bigollo, también conocido como Fibonacci, fue un famoso matemático italiano que descubrió una interesante secuencia de números que fue llamada en su honor. En el 1202 el matemático italiano publicó su Líber Abaci (El Libro del Cálculo), en el que introdujo esta secuencia de números. En los siglos siguientes los jugadores comenzaron a basar sus estrategias ganadoras sobre esta secuencia, mientras que sigue siendo un método de juego preferido incluso hoy en día.

4.2. Explicación de la estrategia

El primer paso es realizar la apuesta inicial y comenzar. Cuando ganas, tienes que retroceder dos pasos en la secuencia. En caso de que la primera apuesta resulta ser ganadora, simplemente comenzarás la secuencia de nuevo. Sin embargo, si estás más adelante en la secuencia, solo retrocedes dos números y apuestas esa cantidad. Esto sigue hasta que alcanzas el inicio de la secuencia y tienes un beneficio. Cuanto más lejos llegues en la secuencia, mayores serán tus pérdidas

Como todos los sistemas de apuestas, el sistema Fibonacci tiene varias desventajas a tener en cuenta. La progresión de las apuestas tiende a ser bastante fuerte y agresiva con respecto al tiempo. Si se experimenta una racha no ganadora prolongada, podría acabarse el dinero total a apostar (bankroll o capital). Por otro lado, una racha no ganadora más larga de la cuenta podría hacer que los jugadores alcanzaran rápidamente el límite de la mesa en la que estén jugando, en cuyo caso no podrán compensar sus resultados.

4.3. Capital finito

En la estrategia Martingala una sola apuesta bastaba para recuperar nuestra apuesta, sin embargo en este caso una apuesta ganadora no será suficiente para recuperar una serie de apuestas perdedoras. Entonces desde el comienzo podemos ver como necesitaremos un mayor numero de tiradas para alcanzar las mismas ganancias que se obtendrían con la estrategia martingala. Esto también puede traducirse en que es una estrategia menos arriesgada.

Los casos extremos en los cuales se gana un conjunto de veces seguidas o se pierde, se ven gráficamente a continuación. (ver imagen Casos extremos en N rondas de Martingala)

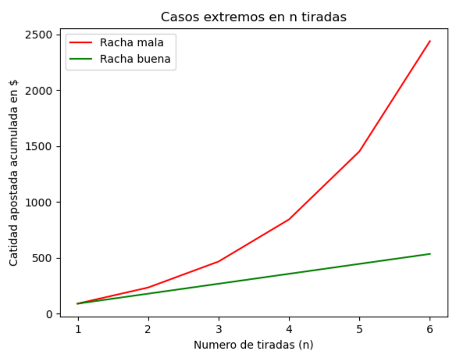

Figura 11: Casos extremos en n tiradas con Fibonacci

Vemos como hay un gran cambio con respecto a la otra estrategia ya que en la ronda número 6 las rachas negativas habían alcanzado, en ultima instancia, una perdida acumulada de $6.400, mientras que en esta estrategia el valor máximo llega a $2.440 (Sumatoria de los números de la secuencia de Fibonacci desde el 10 hasta el 15). Las ganancias para una racha buena de una sucesion de 6 exitos se mantiene constante ya que, por regla, la secuencia de Fibonacci se mantiene en su origen ($ 89) por lo tanto sera este numero multiplicado por la cantidad de rondas que van transcurriendo.

4.3.1. Probabilidades de la estrategia

Utilizaremos el mismo caso que en la estrategia anterior, es decir, una restricción de mesa de $512. Tomando como apuesta base el valor de $1 y según la secuencia de Fibonacci vemos que podemos permitirnos una racha negativa de hasta 14 apuestas consecutivas (1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 – 89 – 144 – 233 – 377 <512).
Este número es mayor que las que teníamos permitidas anteriormente. Las diferentes probabilidades de ganar van a estar dadas por:

Y= Cantidad de tiradas hasta que se gana por primera vez. Y tiene una distribución geométrica con parámetros

$$q = 1 - p = 0{,}48649$$

$$Y \sim G(p = 0{,}4864) \tag{21}$$

- P(Y = 1) = 0.48649
  - Apuesta = $1
  - Perdida acumulada = $0
- P(Y = 2) = 0.2498

    - Apuesta = $1
    - Perdida acumulada = $1
- P(Y = 3) = 0.1282
    - Apuesta = $2
    - Perdida acumulada = $2

.
.
.

- P(Y = 14) = 0.00008394
    - Apuesta = $377
    - Perdida acumulada = $606

Para el caso en el que $P(Y = n) = p^{n-1} * q$ tendremos una pérdida acumulada igual al numero de Fibonacci que le sigue a la apuesta realizada menos uno. Esto nos garantiza que la recompensa de perder un numero yi de veces va a ser igual al número de Fibonacci anterior a la apuesta realizada menos uno. A medida que aumentamos el número de tiradas, las probabilidades de tener una racha negativa larga disminuyen rápidamente. Vemos claramente como la probabilidad de tener una pérdida total es extremadamente pequeña y del **0.0084** %. Si bien una racha de 14 perdidas es poco probable, sucede.
Supongamos que en la corrida número 14 apostamos $377 y acumulamos una perdida de $986 y ganamos. Entonces habremos ganado $377 x 2 = $754, pero esta suma de dinero es menor que lo que tenemos que recuperar, y nos restará recuperar $232 entre las próximas corridas. Esto es una desventaja ya que no por ganar una corrida significa que obtendremos beneficios.

Otra cosa a tener en cuenta es que los sistemas de progresión negativa no funcionan tan bien con las rachas ganadoras iniciales como las rachas perdedoras iniciales. Cuando la sesión comienza con una racha ganadora de 4 seguida de una racha perdedora de 3. Simplemente se las arregla para alcanzar el punto de equilibrio. No es un mal escenario. Ahora, si lo comparamos con una sesión que comienza perdiendo 4 rondas y luego ganando 3, esta sesión se beneficia a pesar de tener más pérdidas que victorias. Esto se debe a que los sistemas de progresión negativa no aprovechan las rachas ganadoras y se centran más en recuperar pérdidas después de perder rachas.

4.3.2. Dependencia de la cantidad de rondas

Podemos deducir también que las restricciones de mesa influirán notablemente en el beneficio que se obtendrán y si mencionamos el caso de un casino ideal sin restricciones, igualmente llegara el momento en el que nos quedemos sin capital, para un numero muy grande de tiradas, donde no dispondremos del capital necesario para continuar. Por lo tanto graficando una cantidad de 100 rondas con 50.000 tiradas sin restricción de mesa vemos como ningún jugador sobrevive y además sobrevive en un periodo mucho menor que para el caso de la estrategia martingala.

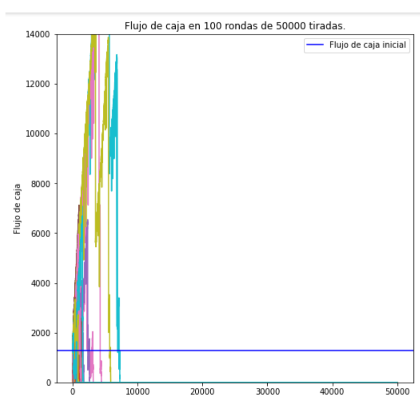

Figura 12: Simulacion sin restricciones de casino.

Demostrado esto, continuaremos con los casos en los que existe una restricción máxima de mesa que será de $1280. Compararemos como varia la estrategia cuando variamos el numero de tiradas por ronda.

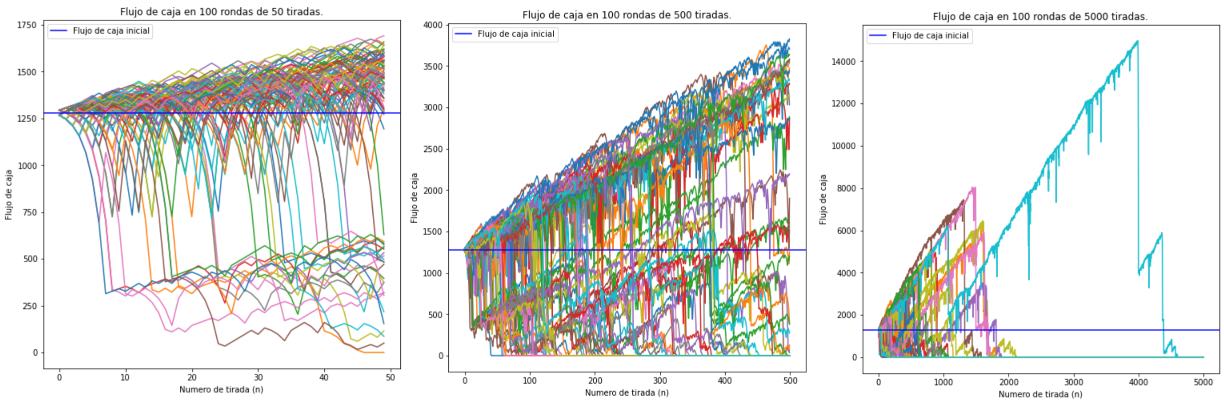

Figura 13: Variando el numero de tiradas por ronda.

Comparando estos gráficos con los obtenidos en la estrategia anterior, podemos ver como son mas variables, es decir, todos los jugadores crecen en ritmos variables. Esto es porque en ocasiones una apuesta ganadora no es suficiente para recuperar todas las apuestas perdidas. Además se visualiza que todos la gran mayoría de los jugadores perdieron antes de las 2000 tiradas, cuando con la otra estrategia se había llegado a un número medio de 5000.

No realizaremos el análisis de la cantidad de éxitos contra la de fracasos ya que este será similar a la estrategia anterior debido a que esto depende de las probabilidades de la ruleta y no de la estrategia que se esté utilizando.
Además cabe aclarar que este análisis se hizo bajo el supuesto de que los jugadores cuentan con un capital finito. Pero si suponemos que sus capitales son infinitos, obtendremos los mismos resultados que hasta ahora. Esto ocurre debido a que según lo demostrado en las gráficas anteriores, la suma de dinero que apostemos no depende de si contamos o no con un capital infinito, sino de **las restricciones máximas de la mesa con las que cuenta el casino**.

5. Comparando ambas estrategias

Como vimos hasta ahora, las estrategias que utilizamos eran progresivas, es decir, que se crean en torno al concepto de aumentar el tamaño de su apuesta después de presenciar el resultado de una ronda. Procederemos a analizar ambas estrategias en conjunto para evaluar las ventajas de una sobre la otra. Para esto simulamos las dos estrategias con el mismo numero de tiradas y de rondas. Tomaremos como apuesta inicial \$13 y cada jugador tendrá un capital de \$1280. Con esto, mediante la estrategia de Martingala sabemos que nos permite una mala racha de 7 fracasos consecutivos y con la otra estrategia nos podemos permitir una de 16 fracasos consecutivos. Debido a esto podríamos esperar que sobrevivan más jugadores con la segunda estrategia, sin embargo, obtuvimos el siguiente resultado:

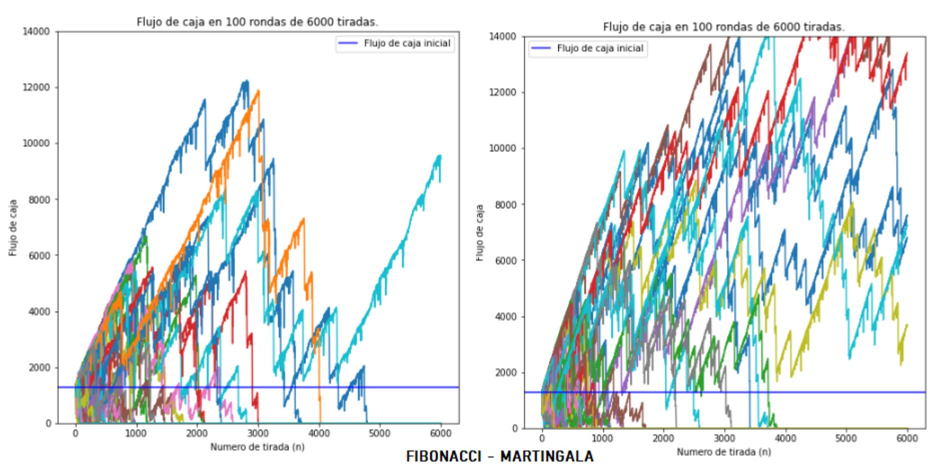

Figura 14: Estrategias para un mismo numero de corridas y rondas.

Podemos mencionar ciertas caracteristicas particulares:

- La pendiente superior que presenta la estrategia de martingala crece mucho más rápido que la pendiente de la estrategia de Fibonacci.
- Existe mayor densidad de jugadores al comienzo de la estrategia Martingala (jugadores que pierden todo su capital). Mientras que en la gráfica de Fibonacci los jugadores pierden de una manera más uniforme con el correr del tiempo y del número de tiradas, esto no significa que se pierda menos, ya que se observa como solo logró sobrevivir un jugador con esta última estrategia.
- En la estrategia Fibonacci ningún jugador sobrepasa los $120.000 de capital. Mientras que en la estrategia Martingala existen varios jugadores que lograron incrementar más de $20.000 de este limite que tuvo la otra estrategia. Al ser una estrategia más arriesgada, la cantidad de capital se verá recompensada por esto. Entonces todas las variaciones de capital se producen de una forma más lenta.
- La cantidad de jugadores que siguen con vida en la estrategia de Martingala es mayor. Pero como se dijo, la cantidad de jugadores que perdieron es también mucho mayor. Entonces existen áreas más densamente pobladas en el gráfico y valores atípicos más extremos.

Para poder notar mucho mejor la diferencia entre estas dos estrategias pasaremos a superponerlas en una misma grafica. La grafica en celeste es la estrategia martingala y la de color magenta es la estrategia de Fibonacci.

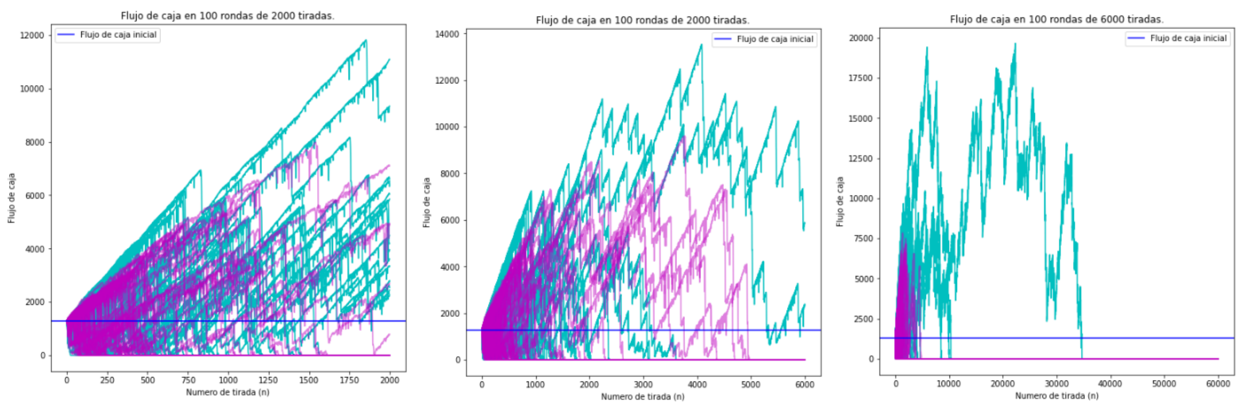

Figura 15: Ambas estrategias superpuestas.

- Vemos como a pesar de que la estrategia Fibonacci tenía permitido una racha mala de mayor longitud, resulto perder con mayor anticipación. Esto se debe a que el capital aumenta de manera mas lenta y por lo tanto no posee la cantidad necesaria al momento, para subsanar lo que el jugador necesite.
- A medida que aumentamos el número de tiradas (de 2.000 a 60.000), las ganancias con Martingala son mayores, debido a que mientras más tiempo tengamos, se incrementa más rápido el capital que ganemos, siendo más lento con la otra estrategia.
- Con la estrategia Martingala existe brusquedad entre las diferentes apuestas, debido a que cuando se pierde se disminuye su capital pero luego cuando se gane se recuperara, volviendo al punto donde estaba antes, produciéndose así los picos que se ven en la gráfica. Estos picos serán parecidos entre los diferentes jugadores. A su vez, como a la otra estrategia le lleva un mayor número de tiradas poder recuperarla, se ve una mayor variación entre las diferentes curvas.

6. Conclusión

Como conclusión, y después de analizar distintas apuestas y estrategias, podemos decir que no existe ninguna estrategia ganadora, ningún método que matemáticamente nos asegure la ganancia. Esto esta directamente relacionado con el hecho de que el casino impone restricciones que impiden el uso de diferentes estrategias. Vimos que cada juego de casino se caracteriza por lo que llamamos "ganancia de jugador"que describe el porcentaje estadístico del dinero recuperado por el jugador en cada apuesta realizada. Dijimos que, al igual que para casi todos los juegos, para la ruleta también se han diseñado estrategias con objeto de ganarle al casino. Haciendo un analisis de esto observamos que cuando comparamos la estrategia de Martingala y Fibonacci, la estrategia de Martingala permite ganar más cantidad de dinero de forma más rápida, pero la estrategia Fibonacci es menos agresiva, y por lo tanto menos arriesgada. Sin embargo, aplicando cualquiera de las dos estrategias la ganancia neta tiende a cero.

Ambas estrategias además se cruzan con varias dificultades, de las cuales, algunas fueron analizadas en este trabajo y otras quedaron excentas. Estas dificultades son:

- Limitaciones de la cantidad de apuestas: Los casinos suelen incorporar unas reglas en las que indican que existe un maximo de cantidad de veces que se apuesta en un mismo período.
- Presupuesto limitado: en la vida real no siempre se tiene el dinero suficiente para hacer la siguiente apuesta y el fondo queda en negativo.
- Limitaciones de la cantidad de dinero apostado: Buscando evitar que se utilicen estrategias, en los casinos se introdujeron las limitaciones y, una vez que se llega al corte máximo, recuperar lo apostado resulta imposible.
- No saber cuando parar: Se debe nombrar que resulta difícil, para algunas personas, saber cuando retirarse. Eso nos lleva a tomar malas decisiones, usar estrategias no tan practicas y terminar perdiendo todo nuestro capital.

Por ultimo, encontramos que la unica forma de ganar al casino es cuando contamos con un capital infinito y ninguna restriccion de mesa pudiendo llamar a esto el casino ideal. Consideramos por esta razón, que la mejor forma de no perder dinero en la ruleta es no apostando, ya que el casino nunca pierde dinero y nuestra probabilidad de ganar dinero a largo plazo tiende a nula.

Referencias

[1] Tipos de estrategias https://es.casino.guru/estrategias-timos-ruleta - Mayo 1, 2020

[2] Martingala https://es.wikipedia.org/wiki/Martingala - Mayo 1, 2020

[3] Martingala https://topbrokers.es/conceptos-basicos-de-Forex/todo-los-secretos-del-Martingala-en-el-mercado-Forex - Mayo 1, 2020

[4] Phyton https://python-para-impacientes.blogspot.com/2014/08/graficos-en-ipython.html - Mayo 1, 2020

[5] Probabilidad y estadistica https://relopezbriega.github.io/blog/2015/06/27/probabilidad-y-estadistica-con-python/ - Mayo 1, 2020

[6] Ruleta y casino http://www.lafacu.com/ruleta/ - Mayo 1, 2020

[7] Ruleta y casino https://es.wikipedia.org/wiki/Ruleta - Mayo 1, 2020

[8] Ruleta y casino https://verne.elpais.com/verne/2019/07/25/articulo/1564050311831995.html - Mayo 1, 2020

[9] Martingala estrategia https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4603939.pdf - Mayo 1, 2020

[10] Martingala estrategia http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/656/martingalas %20y %20el %20juego %20de %2 - Mayo 1, 2020

[11] Fibonacci estrategia https://www.operacionesbinarias.org/estrategias/metodo-fibonacci/

[12] Fibonacci estrategia https://www.tecnicasdetrading.com/2011/08/tecnica-trading-basada-fibonacci.html

[13] Estrategias https://es.casino.guru/estrategias-timos-ruleta